

Décodeur Sphérique associé à une Décomposition QR à Complexité Réduite dans les Systèmes MIMO OFDM

Sébastien Aubert, Fabienne Nouvel, Amor Nafkha

▶ **To cite this version:**

Sébastien Aubert, Fabienne Nouvel, Amor Nafkha. Décodeur Sphérique associé à une Décomposition QR à Complexité Réduite dans les Systèmes MIMO OFDM. GRETSI 2009, Sep 2009, Dijon, France. 4 p. hal-00444366

HAL Id: hal-00444366
https://hal.science/hal-00444366

Submitted on 6 Jan 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Décodeur Sphérique associé à une Décomposition QR à Complexité Réduite dans les Systèmes MIMO OFDM

Sébastien AUBERT[1,3], Fabienne NOUVEL[1], Amor NAFKHA[2]

[1]Laboratoire IETR (INSA); 20, avenue des buttes de Coësmes; CP 35043 Rennes, France

[2]SUPELEC; avenue de la Boulaie; CS 47601, F-35576 Cesson-Sévigné, France

[3]ST-Ericsson; 505, route des lucioles; CP 06560 Sophia-Antipolis, France

sebastien.aubert@stericsson.com

Résumé – S'il a été largement démontré que le Décodeur Sphérique peut être employé pour obtenir la solution du Maximum de Vraisemblance (MV) pour une complexité proche en moyenne de celle des détecteurs linéaires, il est également établi que pour des cas de figure défavorables cette même complexité peut devenir rédhibitoire. Pour répondre à ce problème, entre autre, une technique dérivée appelée Décodeur Sphérique à complexité Fixe (DSF) est une approche intéressante. Cet algorithme repose sur une Décomposition QR (DQR) qui est une étape essentielle, bien que sous-estime, et dont l'impact est étudié dans l'article. Deux techniques distinctes sont ainsi présentées, dont le classique procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Dans le contexte *Long Term Evolution* (LTE), les complexités globales associées aux deux techniques sont quantifiées et sont dépendantes de la taille des constellations utilisées pour transmettre les symboles.

Abstract – It has been widely shown that the Sphere Decoding can be used to find the Maximum Likelihood (ML) solution with an expected complexity that is roughly cubic in the dimensions of the problem. However, the computational complexity becomes prohibitive if the Signal-to-Noise Ratio is too low and/or if the dimension of the problem is too large. That is why another technique denoted as Fixed-complexity Sphere Decoder (FSD) is an interesting approach. This algorithm needs a preprocessing step, and in this paper the QR-Decomposition-based preprocessing technique, which is not inconsequential, will be studied. Two different techniques are exposed, including the classical Gram Schmidt orthonormalization process. Their computational complexities and their impacts on the FSD computational complexity are studied. In the LTE context, the overall computational complexities of the two detection techniques are quantified and are shown to be dependent on the constellation size.

1 Introduction

Dans le contexte des communications mobiles, les systèmes multi-antennes *Multiple Input Multiple Output* (MIMO) permettent d'obtenir des augmentations importantes de la capacité et/ou de la qualité de la transmission. Leur principe est de disposer plusieurs antennes en émission et plusieurs antennes en réception du système. Évolution du standard *Universal Mobile Telecommunications System* (UMTS), la technologie *Long Term Evolution* (LTE) tire parti des possibilités du MIMO en les associant à la modulation *Orthogonal Frequency Division Multiplexing* (OFDM). Cependant, l'association des deux techniques entraîne un accroissement important des complexités du système, en particulier au niveau du récepteur.

1.1 Description du système considéré

En considérant un système MIMO $n_E \times n_R$ à multiplexage spatial, constitué de n_E antennes émettrices et de n_R antennes réceptrices, le flot de données est démultiplexé en $k = \min(n_E, n_R)$ flots secondaires, transmis indépendamment. Le vecteur des symboles transmis à un instant donné est noté $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^k$, et est tel que $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_0 & \dots & x_{k-1} \end{pmatrix}^T$ où $x_i \in \xi$ et ξ est le dictionnaire de symboles de la modulation. On considère un canal à évanouissements plats dans les bandes de fréquences du symbole OFDM utilisées et une synchronisation parfaite. Le vecteur des symboles reçus, noté $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{n_R}$, s'exprime alors sous forme matricielle : $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n}$, avec la matrice de canal $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{n_R \times n_E}$ supposée connue en réception. Ses coefficients sont notés h_{ij} et caractérisent les gains des sous-canaux de l'antenne émettrice j vers l'antenne réceptrice i, tels que $h_{ij} \backsim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(\mathbf{0},\ \sigma_H^2)$ où $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}$ est la loi normale complexe. Le vecteur de bruit additif blanc gaussien $\mathbf{n} \in \mathbb{C}^{n_R}$ est noté $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_0 & \dots & n_{n_R-1} \end{pmatrix}^T$ et est tel que $n_i \backsim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(\mathbf{0},\ \sigma_N^2)$.

L'objet du détecteur dans le récepteur est alors de retrouver le vecteur des symboles transmis le plus correctement possible, au travers de deux grandes familles: classiquement les égaliseurs linéaires et les détecteurs non linéaires.

Les techniques dites d'égalisation linéaire ont pour principe de multiplier le signal reçu par une matrice d'égalisation puis de quantifier les symboles du vecteur égalisé dans le dictionnaire de symboles de la modulation, de façon indépendante. Parmi les techniques d'égalisation linéaire largement proposées dans la littérature, citons le Forçage à Zéro (ZF) et la Minimisation

de l'Erreur Quadratique Moyenne (MMSE). Si leurs performances restent limitées, notamment à cause de leur approche des Interférences Entre Symboles (IES) qui sont considérées comme un bruit à éliminer, elles servent de référence en termes de complexité de calcul.

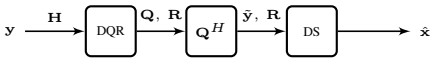
1.2 La détection des symboles

L'approche des détecteurs est différente. Les IES sont considérées comme une information supplémentaire, ce qui permet de s'approcher des performances optimales en termes de Taux d'Erreur Binaire (TEB), au prix d'une complexité de calcul plus importante. La solution de référence, car optimale en terme de TEB, est le Maximum de Vraisemblance (MV), qui effectue une minimisation des distances Euclidiennes des vecteurs de symboles possiblement transmis (Équation 1), au prix d'une recherche exhaustive:

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x}\in\xi^{n_T}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2, \tag{1}$$

où $\hat{\mathbf{x}}$ est l'estimation du vecteur de symboles transmis.
Cette technique, inenvisageable lorsque qu'elle est associée à la technologie MIMO OFDM car trop complexe et dans le cas de modulations d'ordre élevé, sert de référence à des solutions dites quasiment-optimales, qui constituent un compromis prometteur. La technique du Décodeur Sphérique (DS) est ainsi un sujet de recherche fondé sur la théorie des réseaux de points [3] largement exploré ces dernières années. En effet, ses performances peuvent être similaires à celles du MV, pour une complexité qui tend de plus en plus vers celle des égaliseurs linéaires [1]. Ce gain de performance est particulièrement marqué dans le cas de figure d'un canal qui serait de rang quasiment-déficient, pour lequel les performances des égaliseurs linéaires seraient particulièrement médiocres. L'intérêt du DS est d'explorer un voisinage de points, plus ou moins important, qui permet d'améliorer la robustesse du détecteur aux dégradations apportées par les IES, elles-même dûes au mauvais condtionnement de la matrice de canal. Un rang quasiment-déficient correspondant à une forte corrélation entre antennes et donc à de forte IES.
Le principe du DS est cependant de restreindre l'espace de recherche des distances Euclidiennes minimales aux symboles situés au voisinage du symbole reçu (et donc de limiter la complexité de calcul du détecteur), ce qui est particulièrement efficace avec des constellations d'ordre élevé couramment utilisées dans la norme LTE [4]. Cette idée est en l'eccurence caractérisée par une contrainte sphérique à cause de l'utilisation de la distance Euclidienne. Ce détecteur se décompose en deux blocs (Figure 1) : une étape de prétraitement, constituée d'une Décomposition QR (DQR), qui permet de représenter l'étape de traitement à proprement parler sous la forme d'un parcours d'arbre, comme cela est illustré en Sous-section 2.2.
Les différentes optimisations liées à la construction de cet arbre ou à son parcours constituent un sujet de recherche dynamique, qui sera seulement évoqué dans cet article. La DQR a également été très étudiée séparément pour les résolutions de

Figure 1: Impact de la DQR sur le schéma bloc du détecteur



systèmes d'équations. C'est cependant moins le cas de son impact sur le DS en termes de complexité, et notamment du type particulier de DS présenté ici.
Cet article est organisé de la façon suivante : le détecteur, constitué des étapes de prétraitement et de décodage, est introduit dans la Section 2 qui présente ainsi les enjeux de l'étude faite sur la DQR. Les résultats en termes de complexité de calcul et de performances sont ensuite exposés dans la Section 3 qui précède la conclusion.

2 Le détecteur

2.1 Le prétraitement

Une grande partie de ces algorithmes quasiment-optimaux utilisent une étape de prétraitement comme point de départ. Le prétraitement des Décodeurs Sphériques (DS), entre autre, se base sur la DQR, qui exprime la matrice $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ en un (non unique) produit de deux matrices $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R}$, où $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{n\times k}$ est une matrice orthonormale ($\mathbf{Q}^H = \mathbf{Q}^{-1}$) et $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{k\times m}$ une matrice triangulaire supérieure.
L'intérêt de la DQR est de permettre une simplification du problème du calcul des distances Euclidiennes, sans connaissance de la matrice de canal $\mathbf{H}$ à l'émission (boucle ouverte). En effet, la forme triangulaire supérieure de la matrice $\mathbf{R}$ implique que le vecteur reçu équivalent $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{Q}^H\mathbf{y}$ peut être en partie retrouvé sans IES. L'équation du MV (Équation 1) est alors exprimée sous la forme

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x}\in\xi^{n_T}}{\operatorname{argmin}} \|\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{R}\mathbf{x}\|^2. \tag{2}$$

Les deux techniques classiquement évoquées [6] sont le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt (GS) et le procédé de triangularisation de Householder (HH).
Le principe de l'algorithme de GS est de déterminer à partir de $\mathbf{H}$ une nouvelle base orthonormale $\mathbf{Q}$ par projections orthogonales successives des vecteurs de la base déjà sélectionnés puis par normalisation. Le principe de l'algorithme de HH est quant à lui d'annuler toutes les composantes du vecteur sélectionné dans $\mathbf{H}$ à l'aide du réflecteur de HH, sauf la première. Cette même opération est à nouveau effectuée dans la sous-matrice suivante, jusqu'à ce qu'une matrice triangulaire supérieure soit obtenue.
On montre, dans le cas particulier MIMO 2×2 les résultats suivants pour la DQR de $\mathbf{H} = \begin{pmatrix}\mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2\end{pmatrix}$ avec les techniques de GS et HH, respectivement :

$$\mathbf{R}_{\text{GS}} = \begin{pmatrix}\|\mathbf{h_1}\| & k\|\mathbf{h_1}\| \\ 0 & \|\mathbf{h_2'}\|\end{pmatrix}, \tag{3}$$

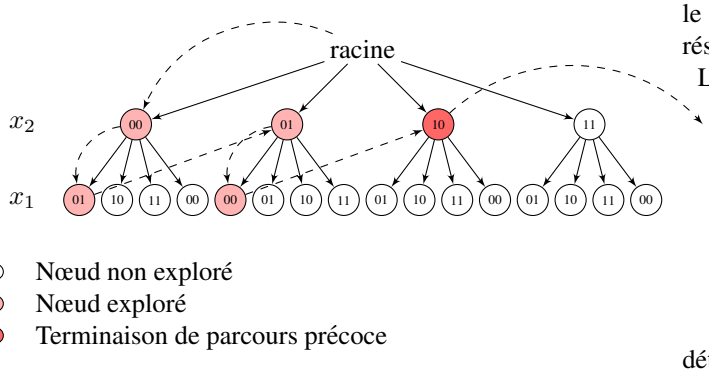
$$\mathbf{R}_{\text{HH}} = \begin{pmatrix}\|\mathbf{h}_1\| & k\|\mathbf{h}_1\| \\ 0 & \|\mathbf{h_2'}\|\end{pmatrix}, \tag{4}$$

où $\mathbf{h_2}^{'} = \mathbf{h_2} - k\mathbf{h_1},\ k = \frac{{\mathbf{h_1}}^H \mathbf{h_2}}{{\mathbf{h_1}}^H \mathbf{h_1}} \in \mathbb{C}$.
On observe que les coefficients sur la diagonale de $\mathbf{R}$ sont réels positifs et complexes dans le cas de GS, et sont tous réels positifs dans le cas de HH.
La DQR de HH permet donc de réduire la complexité du DS, dont le principe est rapidement évoqué dans la Sous-section suivante.

2.2 Le Décodeur Sphérique

Les bilans des complexités de calcul et les performances présentés en Section 3 sont réalisés pour un DS à complexité Fixe (DSF) [7] dont l'idée est d'appliquer une recherche exhaustive de type MV au symbole situé au sommet de l'arbre puis une égalisation linéaire pour tous les symboles situés à des niveaux inférieurs (Figure 2). Cette technique présente un ensemble d'avantages par rapport à des techniques de DS plus classiques [5].
L'arbre de parcours est construit à partir d'une technique plus efficace que celle, classique, Fincke-Pohst [5] : l'énumération de Schnorr-Euchner [2], basée sur la théorie des réseaux de points, qui permet de terminer le parcours de l'arbre précocément (Figure 2). De plus, cette solution lève l'obligation d'initialiser la contrainte sphérique, avec tous les problèmes que cela suscite sur la complexité de calcul et les performances [1].
Ajoutons enfin que le parcours d'arbre utilisé est un parcours en profondeur et notons Exploration d'une Profondeur (EP) l'ensemble du chemin parcouru depuis la racine de l'arbre jusqu'à une feuille (dernier symbole à explorer).
Les complexités de calcul globales sont déterminées dans la Section suivante pour le DS qui vient d'être succintement présenté.

Figure 2: Représentation du parcours d'arbre équivalent au DSF, cas de modulations à 4 états pour chaque symbole



3 Résultats complexité/performances

3.1 Complexité

Le choix de la technique de DQR a un impact sur la complexité de la DQR elle-même, mais également sur la complexité du DS associé. On quantifie les complexités des deux étapes pour en tirer des conclusions sur la complexité globale du système dans le contexte LTE.

Les complexités de calcul des DQR sont fixes et sont données par le Tableau 1 qui fait le bilan des complexités de calcul approchées en terme de multiplications réelles, notées MUL, pour les techniques de GS et de HH dans le cas d'une matrice complexe 2×2. Les additions réelles sont négligées par rapport aux MUL. Grâce à la présence d'un coefficient réel sur la diagonale de la matrice $\mathbf{R}$ avec la technique de HH, alors qu'avec le procédé de GS un coefficient complexe était obtenu, la complexité de calcul du DS va diminuer.

Table 1: Complexités des DQR

GS	HH
94	141

On note que les complexités de calcul des DSF dépendent du nombre d'EP. Le Tableau 2 en fait le bilan en terme de MUL pour différents nombres d'EP pour les DS qui sont précédés d'une DQR de GS et de HH, notés DSF de Référence (DSFR) et DSF Amélioré (DSFA), respectivement. Les résultats sont valables dans le cas d'une matrice complexe 2×2.

Les complexités de calcul globales en terme de MUL des détecteurs complets (QRD et DSF), qui dépendent également du nombre d'EP, sont données dans le Tableau 3 qui en fait le bilan en terme de MUL pour différents nombres d'EP. Les résultats sont valables dans le cas d'une matrice complexe 2×2.

Table 2: Complexités des DSFR et DSFA, pour les seuls détecteurs

PE	DSFR	DSFA
2	68	38
10	292	190
40	1132	760

La Figure 3 donne le rapport des complexités de calcul des détecteurs qui utilisent GS et le DSFR et HH et le DSFA, ce qui permet d'illustrer l'existence d'un seuil de 5 EP à partir duquel le détecteur qui utilise HH et le DSFA est moins complexe dans sa globalité. La technique proposée est alors plus efficace en terme de complexité à partir du seuil minimal de 5 EP. Or, dans le contexte LTE [4], le seuil de 10 est généralement considéré comme le nombre d'EP moyen dont a besoin un DS pour la détection du vecteur de symboles.
On montre dans la Sous-section suivante que les performances du DS basé sur la DQR de HH sont exactement les mêmes dans le cas d'un fort Rapport Signal à Bruit (RSB) que celles du MV optimal, pour une complexité globale inférieure.

Table 3: Complexités des détecteurs complets

PE	GS+DSFR	HH+DSFA
2	162	187
10	386	339
40	1226	909

Figure 3: Rapport des complexités entre GS et le DSFR et HH et le DSFA

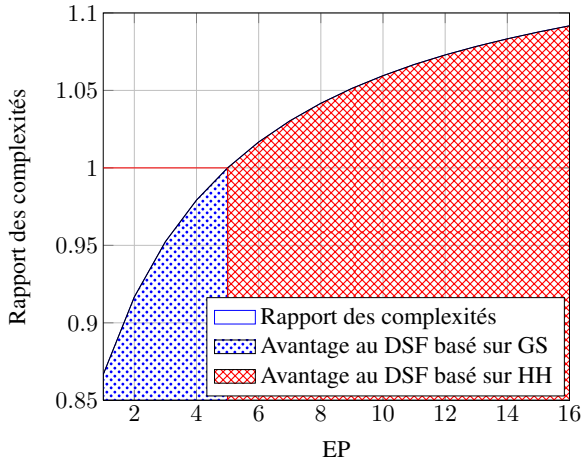
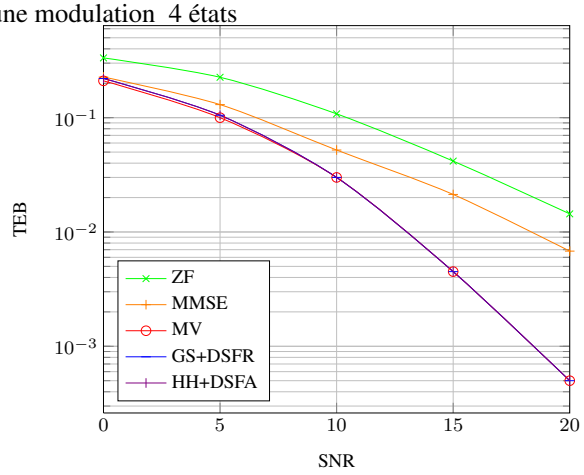


Figure 4: Comparaison des performances du ZF, de la MMSE, de GS et du DSFR, de HH et du DSFA et du MV dans le cas d'une modulation 4 états



3.2 Performances

On condidère le détecteur HH et DSFA, et on compare ses performances à celles du détecteur GS et DSFR et des techniques classiques du ZF, de la MMSE et du MV. Ces techniques sont représentées dans la Figure 3 sans codage canal. On vérifie que les performances du DSFR et du DSFA sont strictement les mêmes pour confirmer l'équivalence des deux techniques. Les conditions de simulation sont énoncées clairement dans le Tableau 4.

La Figure 4 montre que les performances de GS et du DSFR et de HH et du DSFA sont les mêmes et qu'elles sont largement meilleures que celles des techniques d'égalisation linéaire, avec notamment une pente plus forte, qui traduit de la diversité en réception. Les performances de la technique améliorée sont également très similaires ici à celles du MV, en particulier dans le cas d'un RSB fort. La technique du MV reste la meilleure dans le cas d'un RSB faible, ou la prise en compte d'un voisinage très étendu est nécessaire, rappelant que le détecteur DSF est sous-optimal.

Table 4: Paramètres de simulation

Paramètre	Valeur
Nombre de sous-porteuses	1
Gain de codage	1
Codage des symboles	LTE
Canal simulé	MIMO 2×2 Rayleigh
Estimation de canal	Parfaite
Nombre de réalisations de canal	10^5

4 Conclusion

Ce papier a permis de présenter un détecteur dont les performances, proches du MV optimal, sont obtenues pour une complexité de calcul proche de celle des égaliseurs linéaires. La complexité du détecteur peut être encore réduite au travers d'un prétraitement utilisant la DQR de HH, seulement à partir de 5 EP. Cette amélioration permet donc un gain de complexité de calcul dans le contexte LTE.

References

[1] B. Hassibi et H. Vikalo *On the sphere-decoding algorithm I. Expected complexity* Signal Processing, IEEE Transactions on, vol. 53, pp. 2806-2818, 2005.

[2] Z. Guo et P. Nilsson *A VLSI architecture of the Schnorr-Euchner decoder for MIMO systems* Circuits and Systems, IEEE Symposium on, vol. 1, pp. 65-68, 2004

[3] E. Agrell, T. Eriksson, A. Vardy et K. Zeger *Closest point search in lattices* Information Theory, IEEE Transactions on, vol. 48, no.8, pp. 2201-2214, 2002

[4] Technical Specification Group RAN, E-UTRA *36.211 Physical Channels and Modulation, V8.0.0* 3GPP, 2007

[5] U. Fincke et M. Pohst *Improved methods for calculating vectors of short length in a lattice, including a complexity analysis* Mathematics of Computation, vol. 44, no.8, pp. 463-471, 1985

[6] N.J. Higham *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms* Siam, 2002

[7] L.G. Barbero et J.S. Thompson *FPGA Design Considerations in the Implementation of a Fixed-Throughput Sphere Decoder for MIMO Systems* Field Programmable Logic and Applications, International Conference on, pp. 1-6, 2006