

Théorème des périodes et degrés minimaux d'isogénies

Éric Gaudron, Gaël Rémond

▶ **To cite this version:**

Éric Gaudron, Gaël Rémond. Théorème des périodes et degrés minimaux d'isogénies. Commentarii Mathematici Helvetici, 2014, 89 (2). hal-00590958

HAL Id: hal-00590958
https://hal.science/hal-00590958

Submitted on 5 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÉORÈME DES PÉRIODES ET DEGRÉS MINIMAUX D'ISOGÉNIES

ÉRIC GAUDRON ET GAËL RÉMOND

Résumé. Nous donnons de nouvelles versions effectives du théorème des périodes de Masser et Wüstholz. Nos énoncés sont totalement explicites et permettent de raffiner les applications aux théorèmes d'isogénies elliptiques. Celles-ci entraînent à leur tour la résolution du problème d'uniformité de Serre dans le cas des sous-groupes de Cartan déployés, en conjonction avec les travaux de Bilu, Parent et Rebolledo.

Abstract. We give a new, sharpened version of the period theorem of Masser and Wüstholz, which is moreover totally explicit. We also present a new formulation involving all archimedean places. We then derive new bounds for elliptic isogenies, improving those of Pellarin. The small numerical constants obtained allow an application to Serre's uniformity problem in the split Cartan case, thanks to the work of Bilu, Parent and Rebolledo.

Coordonnées des auteurs :

Éric Gaudron
✉ Université Grenoble I, Institut Fourier.
UMR 5582, BP 74
38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex, France.
Courriel : Eric.Gaudron@ujf-grenoble.fr
✆ (33) 04 76 51 45 72
Page internet : http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~gaudron

Gaël Rémond
✉ Université Grenoble I, Institut Fourier.
UMR 5582, BP 74
38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex, France.
Courriel : Gael.Remond@ujf-grenoble.fr
✆ (33) 04 76 51 49 86

MSC 2010 : 11G10 (11J86, 14G40, 14K02).

Mots-clefs : Lemme matriciel, théorème des périodes, isogénie minimale elliptique, problème d'uniformité de Serre, méthode de la section auxiliaire, pente d'Arakelov, lemme d'interpolation analytique.

Date: 5 mai 2011.

1. Introduction

Dans ce texte, nous revisitons le théorème des périodes de Masser et Wüstholz et ses applications aux degrés minimaux d'isogénies entre courbes elliptiques. Notre présentation du théorème lui-même diffère des versions antérieures et nous expliquons ci-dessous ce qui nous a conduit à cette formulation, notamment en lien avec le lemme matriciel, dont nous utilisons une nouvelle version due à Autissier. Nous donnerons ensuite les énoncés ainsi qu'une application au problème d'uniformité de Serre qui repose sur les travaux de Bilu, Parent et Rebolledo.

Dans tout ce texte A est une variété abélienne de dimension g sur un corps de nombres k. Pour parler de périodes, nous fixons un plongement complexe $\sigma\colon k \hookrightarrow \mathbf{C}$ et considérons la variété abélienne complexe A_σ obtenue par extension des scalaires, son espace tangent à l'origine t_{A_σ} et son réseau des périodes Ω_{A_σ}.

En 1985 [Mas], David Masser a démontré une majoration des coefficients d'une matrice de périodes en fonction de la hauteur d'une variété abélienne principalement polarisée. La paragraphe de son texte consacré à cette estimation portait le nom de *lemme matriciel* et cette terminologie est restée pour désigner ce type d'énoncés. Une nouvelle approche a été introduite par Bost [Bo1, Bo3] en termes de hauteur de Faltings et des versions effectives ont été données par Graftieaux [Gr], David et Philippon [DP] et le premier auteur [Ga2].

Si l'on veut s'affranchir de l'hypothèse de polarisation principale, il est préférable de considérer qu'un lemme matriciel donne une minoration de la plus petite période non nulle d'une variété abélienne (en une place donnée). Il s'agit donc d'un premier prototype d'un théorème des périodes puisqu'il s'agit de relier la norme d'une période (en l'occurrence la plus petite) à divers invariants de la variété abélienne (ici essentiellement la hauteur de Faltings).

Un véritable théorème des périodes, au sens attaché à ce terme depuis les travaux fondateurs de Masser et Wüstholz, doit, lui, faire intervenir de plus de manière essentielle un terme de degré géométrique. Traditionnellement on l'écrit comme une majoration du degré de la plus petite sous-variété abélienne A_ω de A dont l'espace tangent contient une période donnée ω en fonction de la norme de ω et de la hauteur de A.

Nous utilisons dans nos énoncés la hauteur de Faltings stable $h_F(A)$ d'une variété abélienne sur un corps de nombres. Nous fixons une polarisation L sur A. La forme de Riemann de L_σ munit t_{A_σ} d'une norme hermitienne que nous notons $\|\cdot\|_{L,\sigma}$ (les définitions précises de ces objets sont données dans la partie suivante). On tire alors de [MW2] l'énoncé suivant.

Théorème (Masser et Wüstholz, 1993). *Il existe une constante $c > 0$, qui ne dépend que de g, $[k : \mathbf{Q}]$ et $\deg_L A$, et une constante $\kappa > 0$, qui ne dépend que de g, telles que*

$$\deg_L A_\omega \leq c \max\left(1, h_F(A), \|\omega\|_{L,\sigma}^2\right)^\kappa.$$

De plus l'on peut choisir $\kappa = (g-1)4^g g!$ et $c = c_0[k : \mathbf{Q}]^\kappa (\deg_L A)^{1+g\kappa}$ où c_0 est une constante qui ne dépend que de g.

Nous proposons ici de voir un tel théorème plutôt comme une minoration de la norme de ω en fonction du degré de A_ω et de la hauteur. En fait, dans cette approche, la variété abélienne A_ω joue le rôle principal et la variété A initiale est reléguée au second plan. Si nous l'oublions complètement, nous sommes en train de dire qu'un théorème des périodes n'est autre que la minoration de la norme de la plus petite période ω de A telle que $A_\omega = A$. En d'autres termes encore, nous considérons le minimum des normes des périodes de A qui ne sont périodes d'aucune sous-variété abélienne stricte de A.

Vu ainsi, le lemme matriciel devient une minoration d'un minimum absolu ρ du réseau des périodes (minimum sur tous les éléments non nuls) tandis que le théorème des périodes vise à minorer un minimum essentiel δ de ce même réseau (minimum sur les éléments transverses ou non dégénérés au sens des sous-variétés abéliennes). Bien entendu, ici $\rho \leq \delta$ et il ne faut pas perdre de vue que la minoration souhaitée de δ est plus grande que celle de ρ puisque sa caractéristique principale est de croître avec le degré de A. Notons aussi que dans cette approche il est possible que δ soit infini : cela signifie simplement que la variété abélienne A considérée n'est pas de la forme $(A')_{\omega'}$ pour un couple (A', ω').

Ce nouvel éclairage sur le théorème des périodes présente plusieurs avantages. D'une part, on sait depuis Bost que l'on peut exprimer naturellement le lemme matriciel en faisant intervenir toutes les places. De manière précise, on note $\rho(A_\sigma, L_\sigma)$ la valeur minimale de $\|\omega\|_{L,\sigma}$ pour $\omega \in \Omega_{A_\sigma}$ non

nul et nous utilisons dans ce texte la forme suivante du lemme matriciel (qui raffine les versions évoquées plus haut), tirée du travail d'Autissier [Au].

Théorème 1.1. *Si (A, L) est une variété abélienne polarisée de dimension g sur un corps de nombres k nous avons*

$$\frac{1}{[k:\mathbf{Q}]}\sum_{\sigma\colon k\hookrightarrow\mathbf{C}}\rho(A_\sigma,L_\sigma)^{-2}\leq 14\max(1,h_F(A),\log\deg_L A).$$

Ainsi il devient naturel de formuler notre théorème des périodes comme une majoration d'une moyenne de la forme $(1/D)\sum_\sigma 1/\delta_\sigma^2$ (par, répétons-le, une puissance négative du degré de A) et nous constatons effectivement que c'est une telle quantité qui apparaît dans la preuve. Conformément à ce qui précède, notons $\delta_0(A_\sigma, L_\sigma)$ la valeur minimale de $\|\omega\|_{L,\sigma}$ pour $\omega \in \Omega_{A_\sigma} \setminus \bigcup_{\mathsf{B}} \Omega_{\mathsf{B}}$ où l'union porte sur les sous-variétés abéliennes strictes B de A_σ. Si cet ensemble est vide, nous posons $\delta_0(A_\sigma, L_\sigma) = +\infty$. Nous verrons en fait bientôt qu'une quantité $\delta(A_\sigma, L_\sigma)$, toujours finie et plus petite que $\delta_0(A_\sigma, L_\sigma)$, peut intervenir. La formulation suivante, forme simplifiée du résultat principal de cet article, est valable pour les deux variantes.

Théorème 1.2. *Si (A, L) est une variété abélienne polarisée de dimension g sur un corps de nombres k nous avons*

$$\frac{1}{[k:\mathbf{Q}]}\sum_{\sigma\colon k\hookrightarrow\mathbf{C}}\frac{(\deg_L A)^{1/g}}{\delta(A_\sigma,L_\sigma)^2}\leq 50g^{2g+6}\max(1,h_F(A),\log\deg_L A).$$

Un autre avantage, un peu plus technique, de notre présentation, est de mettre en lumière le rôle des sous-variétés abéliennes auxiliaires qui interviennent dans la démonstration. On s'aperçoit en effet que la condition sur ω n'est utilisée que pour une variété en particulier. Ceci nous conduit à affiner la définition en introduisant pour une sous-variété abélienne B de A_σ le *minimum d'évitement* de B noté $\delta(A_\sigma, L_\sigma, \mathsf{B})$: la plus petite distance non nulle d'une période de A_σ à l'espace tangent de B. Nous écrivons alors la preuve avec cette quantité et le théorème ci-dessus découle d'un choix particulier de B en chaque place (techniquement celui qui minimise la quantité $(\deg_{L_\sigma} \mathsf{B}/\deg_L A)^{1/\operatorname{codim}\mathsf{B}}$). Même si nous n'avons pas d'application pour d'autres choix de B, il nous semble tout de même plus intéressant d'écrire la majoration sous cette forme (voir le théorème 4.5) : d'une part cela renforce encore les liens avec le lemme matriciel (dont le minimum absolu correspond maintenant simplement au choix de $\mathsf{B} = 0$), ensuite nous ne manipulons pas de quantité infinie et donc nous obtenons toujours un résultat même si A ne s'écrit pas sous la forme $(A')_{\omega'}$ et enfin cela affine le théorème 1.2 : il est valable avec

$$\delta(A_\sigma, L_\sigma) = \sup_{\mathsf{B}} \delta(A_\sigma, L_\sigma, \mathsf{B})$$

où, comme ci-dessus, B parcourt les sous-variétés abéliennes strictes de A_σ. Accessoirement la quantité $\delta(A_\sigma, L_\sigma)$ (toujours finie) est plus facile à majorer que $\delta_0(A_\sigma, L_\sigma)$ (lorsque celle-ci est finie, voir proposition 4.4).

Disons enfin qu'il est un cas où théorème des périodes et lemme matriciel deviennent identiques : c'est celui des courbes elliptiques. En effet on a toujours $\rho = \delta$ (autrement dit seul $\mathsf{B} = 0$ intervient) et comme toute polarisation est puissance de la polarisation principale le degré n'intervient pas (voir aussi le paragraphe 4.3.1).

Nous pouvons maintenant déduire du théorème 1.2 un énoncé ayant la forme de celui de Masser et Wüstholz. Nous revenons pour cela au cadre où ω est une période, pour un plongement fixé σ_0, de la variété abélienne A et nous appliquons notre théorème à la variété abélienne A_ω. Nous en déduisons alors facilement le théorème suivant, où l'on note k' une extension de k sur laquelle est définie A_ω ; on sait que l'on peut choisir $[k' : k] \leq 3^{16g^4}$.

Théorème 1.3. *Si $\omega \neq 0$, nous avons*

$$(\deg_L A_\omega)^{1/\dim A_\omega} \leq 195g^{2g+9}[k':\mathbf{Q}]\|\omega\|_{L,\sigma_0}^2\max\left(1,h_F(A),\log[k':\mathbf{Q}]\|\omega\|_{L,\sigma_0}^2\right).$$

Il convient de signaler qu'à l'occasion d'un cours donné à une école d'été en 2009 à Rennes [Da2], David a présenté une version de cet énoncé dans le cas d'une polarisation principale et sans expliciter la dépendance en g. En particulier, on lui doit le premier résultat avec une constante κ optimale (en remplaçant L par une puissance dans le théorème 1.3 on voit que $\kappa < \dim A_\omega$ est impossible).

Comme dernier thème abordé dans cet article, nous nous intéressons à l'application du théorème des périodes aux théorèmes d'isogénie. Nous nous limitons ici au cas elliptique. Le problème consiste alors, étant donné deux courbes elliptiques E_1 et E_2 isogènes, toutes deux définies sur un corps de nombres k, à majorer le degré minimal d'une isogénie entre E_1 et E_2. On peut faire remonter cette question aux travaux des frères Chudnovsky [CC] (cas d'un corps réel ; on consultera à ce sujet l'historique présenté par Pellarin dans [Pe1]) mais elle trouve toute son importance depuis l'article de Masser et Wüstholz [MW1] qui ont donné une borne de la forme $c\max(1, h_F(E_1))^4$ pour une constante c non explicitée. David [Da1] puis Pellarin [Pe2] ont obtenu les premiers résultats explicites. Ce dernier démontre l'existence d'une isogénie de degré au plus

$$10^{78}[k:\mathbf{Q}]^4 \max(\log[k:\mathbf{Q}],1)^2 \max(h_F(E_1),1)^2.$$

Nous améliorons ici à la fois l'exposant du degré et la constante numérique. Étant donné un corps k, on note $\overline{k}$ une clôture algébrique de k.

Théorème 1.4. *Soient k un corps de nombres, E_1 et E_2 deux courbes elliptiques définies sur k. Si E_1 et E_2 sont isogènes (sur $\overline{k}$), il existe une isogénie entre elles (sur $\overline{k}$) de degré au plus*

$$10^7[k:\mathbf{Q}]^2 \left(\max(h_F(E_1),985) + 4\log[k:\mathbf{Q}]\right)^2$$

ce que l'on peut majorer par

$$10^{13}[k:\mathbf{Q}]^2 \max(h_F(E_1),\log[k:\mathbf{Q}],1)^2.$$

Lorsque E_1 (et donc E_2) admet des multiplications complexes, la borne ci-dessus peut être remplacée par

$$3,4\times 10^4[k:\mathbf{Q}]^2 \max\left(h_F(E_1)+\frac{1}{2}\log[k:\mathbf{Q}],1\right)^2.$$

Si E_1 et E_2 n'ont pas de multiplications complexes et si k a une place réelle, elle peut être remplacée par

$$3583[k:\mathbf{Q}]^2 \max\left(h_F(E_1),\log[k:\mathbf{Q}],1\right)^2.$$

Dans le cas général, ce théorème s'obtient en appliquant le théorème des périodes 1.2 à la variété abélienne $E_1^2 \times E_2^2$ tandis que, pour les deux dernières bornes, les hypothèses supplémentaires permettent d'utiliser $A = E_1 \times E_2$: dans ce cas, A_ω est une courbe elliptique et le théorème des périodes se réduit à un lemme matriciel (de la forme du théorème 1.1).

Avec [BiPa, BPR] le théorème 1.4 s'applique au problème d'uniformité de Serre [Se2] (ci-dessous $E[p]$ désigne le groupe des points de p-torsion de la courbe E).

Corollaire 1.5. *Pour tout nombre premier $p > p_0 = 3,1\times 10^6$ et toute courbe elliptique E définie sur $\mathbf{Q}$ sans multiplications complexes, l'image de la représentation galoisienne naturelle $\rho_{E,p}\colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \mathrm{GL}(E[p])$ n'est pas contenue dans le normalisateur d'un sous-groupe de Cartan déployé.*

Signalons qu'à partir de ce résultat et avec des calculs informatiques pour les petits premiers ($p < p_0$), Bilu, Parent et Rebolledo [BPR] montrent que l'énoncé précédent vaut en fait pour tout $p \notin \{2,3,5,7,13\}$. Nous renvoyons à leur texte pour les détails.

Remerciements. Nous remercions Yuri Bilu, Pierre Parent et Marusia Rebolledo pour nous avoir signalé l'application des théorèmes d'isogénies au problème de Serre. Leur commande fut notre principale motivation pour obtenir des constantes numériques aussi petites que possible. Nous remercions Pascal Autissier pour ses remarques sur une première version de ce texte et pour nous avoir communiqué son remarquable lemme matriciel. Nous remercions aussi Mathilde Herblot et Guillaume Maurin de nous avoir fourni leurs notes du cours de Sinnou David [Da2].

Table des matières

1. Introduction 2
2. Préliminaires 6
2.1. Polarisation 6
2.2. Variété abélienne orthogonale 6
2.3. Hauteur de Faltings 6

2.4. Forme de Riemann 7
2.5. Fonctions thêta 7
2.6. Changement de base par la conjugaison complexe 8
3. Autour du lemme matriciel 8
3.1. Théorème d'Autissier et conséquences 9
3.2. Pente maximale 10
4. Minimum essentiel 11
4.1. Minimum d'évitement 12
4.2. Théorème-clef 13
4.3. Premières réductions 13
4.4. Stratégie 14
5. Prélude à l'extrapolation analytique 14
6. Démonstration du théorème-clef 16
6.1. Choix des métriques 16
6.2. Choix des paramètres 17
6.3. Fibré adélique des sections auxiliaires 18
6.4. Estimation de rangs 19
6.5. Construction d'une section auxiliaire 20
6.6. Extrapolation analytique 20
6.7. Estimation de la hauteur du premier jet non nul 22
6.8. Conclusion 22
6.9. Cas de la dimension deux 24
6.10. Démonstrations des théorèmes 1.2 et 1.3 de l'introduction 25
7. Degrés minimaux d'isogénies elliptiques 26
7.1. Rappels sur les isogénies de courbes elliptiques 26
7.2. Cas non CM : lien avec les périodes 27
7.3. Cas non CM : estimations 28
7.4. Cas CM 30
7.5. Cas non CM avec une place réelle 31
7.6. Hauteur et invariant modulaire 32
7.7. Cas non CM : application 33
8. Appendice 34
Références 37

Passons à présent en revue rapidement les ingrédients principaux de notre preuve et les travaux dont elle s'inspire. Les méthodes que nous employons remontent pour une grande part au séminaire Bourbaki [Bo1] dans lequel Bost a jeté un nouvel éclairage sur le théorème des périodes en introduisant la *méthode des pentes*. Ce travail, rendu un peu plus explicite par Viada [Via], apporte l'effectivité de la constante c_0 dans le théorème de Masser et Wüstholz. Il a eu également énormément d'impact sur la manière de présenter la démonstration en conservant au maximum l'aspect intrinsèque des données. Il a aussi ouvert un champ d'application naturel à la géométrie d'Arakelov. Par exemple, les méthodes de Bost ont permis au premier auteur d'obtenir des minorations de formes linéaires de logarithmes de variétés abéliennes, totalement explicites, pour des logarithmes qui ne sont pas des périodes (en un sens assez fort) [Ga2]. D'un autre côté, la preuve de David est extraite de la démonstration générale pour les formes linéaires de logarithmes (méthode de Philippon et Waldschmidt [PW]). À cela rien de surprenant puisque nous sommes dans les mêmes conditions : on dispose d'un logarithme ω d'un point algébrique $0_A \in A(k)$ et d'un sous-espace vectoriel t_{A_ω} de t_A. Comme $\omega \in t_{(A_\omega)_{\sigma_0}}$, nous sommes dans le « cas dégénéré » où le logarithme appartient au sous-espace. La démonstration de Philippon et Waldschmidt fonctionne encore dans ce cas mais au lieu de fournir une minoration de la distance du logarithme au sous-espace, elle montre l'existence d'une sous-variété abélienne stricte B de A avec $\omega \in t_{B_{\sigma_0}}$ et $\deg_L B$ majoré essentiellement comme dans le théorème de David (des bornes pour $\deg_L B$ se trouvent par exemple dans [Da1, Ga1, Vil]). Pour assurer $B = A_\omega$, l'idée de David est de travailler avec A_ω dès le départ. La sous-variété B ne peut pas exister (par minimalité de A_ω relativement à l'hypothèse

$\omega \in t_{(A_\omega)_{\sigma_0}}$) mais la démonstration donne malgré tout quelque chose, à savoir une majoration de $\deg_L A_\omega$. Cette observation a permis à David d'obtenir en une seule étape la sous-variété A_ω, sans avoir à faire de récurrence sur g, récurrence très coûteuse pour les constantes c et κ et qui explique leur caractère exponentiel en g chez Masser et Wüstholz.

Si notre borne du degré de A_ω est proche de celle de David, la démonstration n'utilise pas les mêmes outils. Elle s'inscrit encore dans le schéma général de la méthode de Philippon et Waldschmidt (cas périodique) mais elle utilise largement le formalisme des pentes de Bost, comme dans [Ga2]. Toutefois il n'y a pas de méthode des pentes proprement dite. Cette dernière est remplacée par la *méthode de la section auxiliaire* que le premier auteur a introduite dans [Ga4]. Il s'agit d'une variante intrinsèque de la méthode classique des fonctions auxiliaires en transcendance. Ici l'adjectif intrinsèque signifie essentiellement que nous n'aurons recours ni à une base explicite des fonctions thêta de $\mathrm{H}^0(A, L^{\otimes n})$, ni à une base de Shimura de l'espace tangent t_A. Outre la clarté apportée par cette approche géométrique, la démonstration met en évidence l'intégralité des jets de sections qui apparaissent. Cet avantage tactique autorise un paramètre à tendre vers $+\infty$ (ce qui est exceptionnel dans une preuve de transcendance) en éliminant au passage plusieurs quantités parasites. Un autre atout de ce passage à la limite est la diminution des constantes numériques.

En ce qui concerne notre théorème d'isogénie, l'aspect intrinsèque du théorème des périodes sur lequel il s'appuie évite naturellement le recours à des modèles de Weierstrass des courbes elliptiques (et donc à la notion d'isogénie normalisée) qui apparaissaient dans les travaux antérieurs. Dans le même ordre d'idée, Pellarin devait considérer des sous-variétés abéliennes *exceptionnelles* et exclure un *cas dégénéré* [Pe2, hypothèse 3 page 212]. Nous avons simplifié l'analyse en montrant que ces subtilités n'ont plus lieu d'être et que la seule considération de A_ω suffit à extraire l'information sur le degré d'isogénie (voir théorème 7.5).

2. Préliminaires

2.1. **Polarisation.** Lorsque A est une variété abélienne, nous rappelons qu'une *polarisation* sur A est l'image d'un faisceau inversible ample dans le groupe de Néron-Severi $\mathrm{NS}(A) = \mathrm{Pic}(A)/\mathrm{Pic}^0(A)$. C'est cette notion qui intervient la plupart du temps dans cet article : par exemple le degré $\deg_L A$ ou la forme de Riemann d'un faisceau inversible ample L ne dépendent que de la polarisation définie par L. Lorsque nous souhaitons parler d'un faisceau représentant la polarisation nous en choisissons toujours un symétrique. Ceci n'induit qu'une indétermination finie car un élément symétrique de $\mathrm{Pic}^0(A)$ est un élément de 2-torsion. En particulier si L symétrique représente une polarisation alors $L^{\otimes 2}$ est uniquement défini. Rappelons aussi que sur une courbe elliptique il existe une unique polarisation principale et toute polarisation en est une puissance (car $\mathrm{NS}(A) = \mathbf{Z}$).

2.2. **Variété abélienne orthogonale.** Soit A une variété abélienne sur un corps quelconque, munie d'une polarisation L. Soit B une sous-variété abélienne de A. La sous-variété abélienne orthogonale $B^\perp$ de B dans A est définie de la manière suivante : soit $\varphi_L : A \to \widehat{A}$ l'isogénie dans la variété duale $\widehat{A}$ induite par L. Soit ${}^t i : \widehat{A} \to \widehat{B}$ le morphisme dual à l'inclusion $i : B \hookrightarrow A$. Alors $B^\perp$ est la composante neutre du noyau de la composée ${}^t i \circ \varphi_L$. On montre alors que le morphisme d'addition $B \times B^\perp \to A$ est une isogénie de degré b au plus

$$\frac{\mathrm{h}^0(B, L)\mathrm{h}^0(B^\perp, L)}{\mathrm{h}^0(A, L)} \leq \mathrm{h}^0(B, L)^2$$

(voir par exemple [Be, théorème 3]). De plus, si le corps de base est $\mathbf{C}$, pour toute période $\omega \in \Omega_A$, il existe $\omega_1 \in \Omega_B$ et $\omega_2 \in \Omega_{B^\perp}$ tels que $\mathsf{b}\omega = \omega_1 + \omega_2$ (voir lemme 1.4 de [MW2]).

2.3. **Hauteur de Faltings.** Lorsque A est une variété abélienne définie sur un corps de nombres k, nous définissons sa hauteur $h(A)$ de la manière suivante : soit K une extension finie de k sur laquelle A est définie et admet réduction semi-abélienne. Soient $\pi : \mathcal{A} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ un modèle semi-abélien de A et $\epsilon : \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K \to \mathcal{A}$ sa section nulle. Notons $\omega_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_K}$ le faisceau inversible $\epsilon^* \Omega^g_{\mathcal{A}/\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K}$ sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$. Ce fibré devient un fibré en droites hermitien $\overline{\omega}_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_K}$ sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ lorsqu'on le munit pour chaque plongement complexe $\sigma \colon K \hookrightarrow \mathbf{C}$ de la norme

$$\forall s \in \omega_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_K} \otimes_\sigma \mathbf{C} \simeq \mathrm{H}^0(A_\sigma, \Omega^g_{A_\sigma}), \quad \|s\|^2_{\overline{\omega}_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_K}, \sigma} := \frac{1}{(2\pi)^g} \int_{A_\sigma} |s \wedge \overline{s}|.$$

Définition 2.1. La hauteur $h(A)$ de A est le degré d'Arakelov normalisé de $\overline{\omega}_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_K}$.

Cette définition est indépendante des choix de K et de $\mathcal{A}$. Cette quantité $h(A)$ est celle dénommée *hauteur de Faltings* dans [Bo1, Bo3, Ga2, Gr] mais ce n'est pas la convention adoptée par tous les auteurs. En particulier la définition originale $h_F(A)$ de Faltings [Fa] ne fait pas apparaître le π dans la définition de la norme ci-dessus et donc on a

$$h_F(A) = h(A) - \frac{g}{2}\log\pi.$$

La hauteur $h(A)$ est donc plus grande que la hauteur de Faltings originale. Dans la suite, nous employons $h(A)$ mais nous avons préféré utiliser $h_F(A)$ dans l'introduction pour faciliter l'emploi de nos énoncés. Ce choix a l'avantage que les énoncés (majorations) sont vrais pour les deux hauteurs. D'autres auteurs utilisent encore une notion différente. Par exemple Colmez [Co] travaille avec la hauteur $h(A) - (g/2)\log 2\pi$. Quelle que soit la normalisation, rappelons que cette hauteur satisfait au théorème de Faltings [Fa] : si $\varphi : A \to A'$ est une isogénie alors

$$h(A') \leq h(A) + \frac{1}{2}\log\deg\varphi$$

ainsi qu'aux propriétés $h(A_1 \times A_2) = h(A_1) + h(A_2)$ et $h(\widehat{A}) = h(A)$ (corollaire 2.1.3 de [Ra2]). De plus la hauteur d'une sous-variété abélienne B de A est contrôlée par celle de A :

$$h(B) \leq h(A) + g\log(\sqrt{2\pi}\mathrm{h}^0(B, L)^2)$$

(voir [Ga2, proposition 4.9]).

2.4. **Forme de Riemann.** Soit A une variété abélienne complexe. D'après le théorème d'Appell-Humbert (voir [Mu, p. 20] ou [BL, p. 32]), le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(\mathsf{A})$ s'identifie au groupe des couples (H, χ) où H est une forme hermitienne (linéaire à droite) sur t_{A} telle que $\operatorname{Im} H(\Omega_{\mathsf{A}}, \Omega_{\mathsf{A}}) \subset \mathbf{Z}$ et χ une application $\Omega_{\mathsf{A}} \to \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ telle que $\chi(\omega_1 + \omega_2)\chi(\omega_1)^{-1}\chi(\omega_2)^{-1} = \exp(i\pi \operatorname{Im} H(\omega_1, \omega_2))$ pour tous $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_{\mathsf{A}}$. Lorsqu'un tel couple correspond à $\mathsf{L} \in \mathrm{Pic}(\mathsf{A})$, nous dirons que (H, χ) est la donnée d'Appell-Humbert de L et la première composante H s'appelle la *forme de Riemann* de L. Celle-ci ne dépend que de l'image de L dans $\mathrm{NS}(\mathsf{A})$.

La forme de Riemann de L est définie positive si et seulement si L est ample (autrement dit si L définit une polarisation ; certains auteurs réservent l'emploi du terme forme de Riemann à ce cas). Ainsi une polarisation L permet de munir l'espace tangent t_{A} d'une norme hermitienne notée $\|.\|_{\mathsf{L}}$: on pose simplement $\|z\|_{\mathsf{L}}^2 = H(z, z)$ pour $z \in t_{\mathsf{A}}$ lorsque H est la forme de Riemann de L. C'est la norme utilisée dans l'introduction et dans toute la suite de ce texte. Elle permet par exemple de définir le minimum du réseau des périodes déjà rencontré et qui fera l'objet des lemmes matriciels de la partie suivante :

$$\rho(\mathsf{A}, \mathsf{L}) = \min\{\|\omega\|_{\mathsf{L}} \,;\, \omega \in \Omega_{\mathsf{A}} \setminus \{0\}\}.$$

Ce nombre réel se rencontre aussi dans la littérature sous l'appellation *diamètre d'injectivité* car c'est le diamètre de la plus grande boule sur laquelle l'exponentielle $\exp_{\mathsf{A}} : t_{\mathsf{A}} \to \mathsf{A}$ est injective.

Lorsque (A, L) est une variété abélienne polarisée sur un corps de nombres k et $\sigma : k \hookrightarrow \mathbf{C}$ un plongement, nous noterons $\|\cdot\|_{L,\sigma}$ la norme induite par L_σ (au lieu de $\|\cdot\|_{L_\sigma}$).

2.5. **Fonctions thêta.** Soit L un faisceau inversible sur une variété abélienne complexe A. On définit son facteur d'automorphie canonique $a_{\mathsf{L}} : \Omega_{\mathsf{A}} \times t_{\mathsf{A}} \to \mathbf{C}$ à l'aide de sa donnée d'Appell-Humbert (H, χ) : si $\omega \in \Omega_{\mathsf{A}}$ et $z \in t_{\mathsf{A}}$ on pose

$$a_{\mathsf{L}}(\omega, z) = \chi(\omega)\exp\Big(\pi H(\omega, z) + \frac{\pi}{2}H(\omega, \omega)\Big).$$

Ce facteur permet de définir les *fonctions thêta* associées à L : ce sont les fonctions holomorphes $\vartheta : t_{\mathsf{A}} \to \mathbf{C}$ qui vérifient $\vartheta(z + \omega) = a_{\mathsf{L}}(\omega, z)\vartheta(z)$ pour tous $\omega \in \Omega_{\mathsf{A}}$ et $z \in t_{\mathsf{A}}$. Elles trouvent leur raison d'être dans l'isomorphisme naturel entre $\mathrm{H}^0(\mathsf{A}, \mathsf{L})$ et l'espace vectoriel des fonctions thêta associées à L (voir [Mu, p. 25]).

En particulier, lorsque L est très ample, elles fournissent une écriture explicite d'un plongement projectif associé à L : si $\vartheta_0, \ldots, \vartheta_m$ est une base des fonctions thêta alors l'application $z \mapsto (\vartheta_0(z) : \cdots : \vartheta_m(z))$ définit un morphisme $t_{\mathsf{A}} \to \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^m$ qui se factorise à travers $\exp_{\mathsf{A}}$ pour donner une immersion $\mathsf{A} \hookrightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^{\mathsf{m}}$.

2.6. **Changement de base par la conjugaison complexe.** Soit à nouveau une variété abélienne complexe A. Notons τ la conjugaison complexe. On définit $\overline{\mathsf{A}}$ par le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathsf{A}} & \xrightarrow{\mathsf{f}} & \mathsf{A} \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \operatorname{Spec}\mathbf{C} & \xrightarrow{\operatorname{Spec}\tau} & \operatorname{Spec}\mathbf{C}\,. \end{array}$$

Nous obtenons une variété abélienne complexe mais il faut prendre garde au fait que le morphisme de schémas f n'est pas un morphisme de $\mathbf{C}$-schémas. C'est en revanche un morphisme de $\mathbf{R}$-schémas (entre $\mathbf{R}$-schémas de dimension $2\dim\mathsf{A}$) que l'on peut également voir comme un morphisme de variétés analytiques réelles entre les tores $t_{\overline{\mathsf{A}}}/\Omega_{\overline{\mathsf{A}}}$ et $t_{\mathsf{A}}/\Omega_{\mathsf{A}}$.

Proposition 2.2. *L'isomorphisme* f *se relève en un isomorphisme antilinéaire* $\mathrm{df}\colon t_{\overline{\mathsf{A}}} \to t_{\mathsf{A}}$ *tel que* $\mathrm{df}(\Omega_{\overline{\mathsf{A}}}) = \Omega_{\mathsf{A}}$. *De plus si l'on métrise les espaces tangents par les formes des Riemann de* L *et* $\mathsf{f}^*\mathsf{L}$ *alors* df *est une isométrie.*

Démonstration. Il n'y a pas de restriction à supposer que L est très ample. Notons alors comme plus haut $\vartheta_0, \dots, \vartheta_m$ une base des fonctions thêta associées. Nous désignons par V l'espace vectoriel complexe conjugué de t_{A} : le groupe abélien sous-jacent est $V = t_{\mathsf{A}}$ mais la loi $\bullet$ de V de multiplication par un scalaire est donnée par $z \bullet v = \overline{z}v$ pour $z \in \mathbf{C}$ et $v \in V$ (où, à droite, on utilise la loi usuelle de t_{A}). Pour clarifier nous notons aussi U le réseau Ω_{A} lorsque nous le voyons comme réseau de V. Ainsi V/U est un tore complexe. En outre les fonctions $\overline{\vartheta_j}$ pour $0 \leq j \leq m$ sont *holomorphes* sur V. La forme $\overline{H}$ est quant à elle une forme hermitienne définie positive sur $V \times V$ et elle vérifie $\operatorname{Im}\overline{H}(U,U) \subset \mathbf{Z}$. De même l'application $\overline{\chi}\colon U \to \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ satisfait $\overline{\chi}(u_1+u_2)\overline{\chi}(u_1)^{-1}\overline{\chi}(u_2)^{-1} = \exp(i\pi \operatorname{Im}\overline{H}(u_1,u_2))$ pour tous $u_1, u_2 \in U$. Tout ceci nous montre que V/U est une variété abélienne, que $(\overline{H}, \overline{\chi})$ est une donnée d'Appell-Humbert sur celle-ci et que $\overline{\vartheta}_0, \dots, \overline{\vartheta}_m$ forment une base des fonctions thêta associées à cette donnée. En particulier elles définissent un plongement projectif $p\colon V/U \hookrightarrow \mathbf{P}^m_{\mathbf{C}}$. Enfin appelons q l'application $V/U \to \mathsf{A}$ induite par l'identité $V \to t_{\mathsf{A}}$ (qui est antilinéaire). En suivant les constructions, nous avons alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} V/U & \xrightarrow{p} & \mathbf{P}^m_{\mathbf{C}} & \longrightarrow & \operatorname{Spec}\mathbf{C} \\ \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow & \square & \downarrow{\scriptstyle \tau} \\ \mathsf{A} & \longrightarrow & \mathbf{P}^m_{\mathbf{C}} & \longrightarrow & \operatorname{Spec}\mathbf{C}\,. \end{array}$$

Comme les flèches verticales sont des isomorphismes, le carré de gauche est automatiquement cartésien et nous pouvons donc identifier V/U à $\overline{\mathsf{A}}$ et q à f. Dans cette identification $V = t_{\overline{\mathsf{A}}}$ et df correspond à l'identité $V \to t_{\mathsf{A}}$. Le diagramme montre encore que $\mathsf{f}^*\mathsf{L}$ coïncide avec $p^*\mathcal{O}(1)$ et a donc pour forme de Riemann $\overline{H}$. Toutes les assertions de l'énoncé découlent immédiatement de ces faits. □

À titre d'exemple nous avons donc $\rho(\overline{\mathsf{A}}, \mathsf{f}^*\mathsf{L}) = \rho(\mathsf{A}, \mathsf{L})$.

Dans le cas où (A, L) est une variété abélienne polarisée sur un corps de nombres k et $\sigma\colon k \hookrightarrow \mathbf{C}$ un plongement, nous notons $\overline{\sigma} = \tau \circ \sigma$. Alors on a $\overline{A_\sigma} = A_{\overline{\sigma}}$ et $L_{\overline{\sigma}} = \mathsf{f}^*L_\sigma$. Avec la proposition ceci nous permet de vérifier que les minima associés aux couples (A_σ, L_σ) et $(A_{\overline{\sigma}}, L_{\overline{\sigma}})$ coïncident.

Bien entendu, tous les faits de ce paragraphe sont *faux* pour un automorphisme $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ autre que τ ou $\mathrm{id}_{\mathbf{C}}$ (et donc non continu) et il n'y a aucune relation en général entre les minima de (A_σ, L_σ) et $(A_{\sigma'}, L_{\sigma'})$ pour deux plongements σ et σ' distincts et non conjugués.

3. Autour du lemme matriciel

Dans cette partie nous donnons plusieurs versions du lemme matriciel au sens donné plus haut. Elles découlent toutes d'un nouvel énoncé dû à Autissier [Au]. Notre motivation est multiple : d'une part elles améliorent les constantes données dans [DP, Ga2, Gr] ; d'autre part nous écrivons le résultat sans hypothèse de polarisation principale contrairement à ces textes. Ensuite nous nous intéressons plus particulièrement au cas de la dimension $g = 1$: il s'agit ici véritablement d'un théorème des périodes donc c'est une partie de la démonstration de notre théorème principal. Par ailleurs, l'obtention de bonnes constantes dans ce cas nous permettra aussi d'être plus efficace dans l'application aux théorèmes d'isogénies de courbes elliptiques. Dans un second temps, nous

énonçons des majorations de pentes maximales dues à Graftieaux, qui reposent elles-mêmes sur des lemmes matriciels.

3.1. **Théorème d'Autissier et conséquences.** Commençons par énoncer le lemme matriciel d'Autissier [Au] (voir le § 2.4 pour la définition de $\rho(A_\sigma, L_\sigma)$).

Théorème 3.1. *Soit (A, L) une variété abélienne principalement polarisée, définie sur un corps de nombres k. Pour tout plongement complexe $\sigma\colon k \hookrightarrow \mathbf{C}$, notons $\rho_\sigma := \min(\rho(A_\sigma, L_\sigma), \sqrt{\pi/3g})$. Alors on a*

$$\frac{1}{[k:\mathbf{Q}]} \sum_{\sigma\colon k\hookrightarrow\mathbf{C}} \left(\frac{\pi}{6\rho_\sigma^2} + g\log\rho_\sigma\right) \leq h(A) + \frac{g}{2}\log\frac{2\pi^2 e}{3g}.$$

3.1.1. Donnons une première conséquence de ce théorème pour les courbes elliptiques, qui nous servira plus loin dans les estimations de degrés d'isogénies.

Proposition 3.2. *Soit A une courbe elliptique, munie de sa polarisation principale L. Soit*

$$T = \frac{1}{[k:\mathbf{Q}]} \sum_{\sigma\colon k\hookrightarrow\mathbf{C}} \rho(A_\sigma, L_\sigma)^{-2}.$$

Alors pour tout nombre réel δ dans l'intervalle $[3/\pi, \max(T, 3/\pi)]$, on a

$$\pi\delta \leq 3\log\delta + 6h(A) + 8,66.$$

En particulier on a $T \leq 6,45\max(h(A), 1)$ et $T \leq 1,92\max(h(A), 1000)$.

Démonstration. Appliquons le théorème 3.1 à (A, L). En écrivant $\log\rho_\sigma = -(1/2)\log(1/\rho_\sigma^2)$ et en utilisant la concavité du logarithme, on a

$$\frac{\pi}{6}T' - \frac{1}{2}\log T' \leq h(A) + \frac{1}{2}\log\frac{2\pi^2 e}{3} \quad \text{avec} \quad T' := \frac{1}{[k:\mathbf{Q}]} \sum_{\sigma\colon k\hookrightarrow\mathbf{C}} \rho_\sigma^{-2}.$$

La première inégalité de la proposition 3.2 découle alors de la croissance de la fonction $x \mapsto (\pi/6)x - (1/2)\log x$ pour $x \geq 3/\pi$, de l'encadrement $T' \geq \max(T, 3/\pi) \geq \delta \geq 3/\pi$ et du calcul $3\log(2\pi^2 e/3) \leq 8,66$. En ce qui concerne la première majoration de T, on procède de la manière suivante. Posons $Y = 6,45$ et $Z = 1$. Si $T \leq Y$, l'inégalité est démontrée. Sinon, comme $Y \geq e$, on a $\log T \leq T(\log Y)/Y$ et donc, par la première partie de la proposition avec $\delta = T$,

$$T \leq \frac{Y}{Z}\frac{6Z + 8,66}{\pi Y - 3\log Y}\max(h(A), Z).$$

On vérifie numériquement que $6Z + 8,66 \leq \pi Y - 3\log Y$ et ceci donne le résultat. Pour la dernière majoration, on utilise le couple $(Y, Z) = (1920, 1000)$. □

Remarque 3.3. Soit τ_σ l'élément du domaine fondamental de Siegel pour lequel la courbe elliptique A_σ est isomorphe à $\mathbf{C}/(\mathbf{Z} + \tau_\sigma\mathbf{Z})$. La métrique sur t_{A_σ} définie par la polarisation L_σ correspond à la norme $\|z\|^2 = |z|^2/\operatorname{Im}\tau_\sigma$ pour $z \in \mathbf{C}$. Pour $(a, b) \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ on a $\|a + b\tau\|^2 = |a + b\tau|^2/\operatorname{Im}\tau_\sigma \geq 1/\operatorname{Im}\tau_\sigma$ avec égalité si $(a, b) = (1, 0)$. On trouve ainsi $\rho(A_\sigma, L_\sigma)^{-2} = \operatorname{Im}\tau_\sigma$. Par suite la proposition 3.2 peut être utilisée pour donner des estimations de $T = [k:\mathbf{Q}]^{-1}\sum_\sigma \operatorname{Im}\tau_\sigma$.

3.1.2. Nous allons maintenant nous affranchir de l'hypothèse de polarisation principale du théorème 3.1 et en donner une forme plus maniable. Nous étudions dans un premier temps la variation de ρ par isogénie.

Lemme 3.4. *Soient $f\colon \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ une isogénie entre variétés abéliennes complexes et L une polarisation sur B. Alors $\rho(\mathsf{B}, \mathsf{L}) \leq \rho(\mathsf{A}, f^*\mathsf{L}) \leq (\deg f)\rho(\mathsf{B}, \mathsf{L})$.*

Démonstration. L'application f se relève en un isomorphisme $\mathrm{d}f\colon t_\mathsf{A} \to t_\mathsf{B}$ tel que $\mathrm{d}f(\Omega_\mathsf{A}) \subset \Omega_\mathsf{B}$. Comme le conoyau de cette inclusion est de cardinal $\deg f$ on a aussi $\Omega_\mathsf{B} \subset (\deg f)\mathrm{d}f(\Omega_\mathsf{A})$. Par ailleurs la forme de Riemann de $f^*\mathsf{L}$ s'obtient en composant la forme de Riemann de L avec $\mathrm{d}f$ donc pour tout $x \in t_\mathsf{A}$ nous avons $\|x\|_{f^*\mathsf{L}} = \|\mathrm{d}f(x)\|_\mathsf{L}$. Nous en déduisons $\rho(\mathsf{A}, f^*\mathsf{L}) = \min\{\|x\|_\mathsf{L}\,;\, x \in \mathrm{d}f(\Omega_\mathsf{A}) \setminus \{0\}\}$. L'énoncé découle alors immédiatement des deux inclusions de réseaux ci-dessus. □

Rappelons un lemme classique.

Lemme 3.5. *Soit (A, L) une variété abélienne polarisée sur un corps algébriquement clos. Il existe une isogénie $f\colon A \to B$ et une polarisation principale M sur B telles que $L = f^*M$ et $\deg f = \mathrm{h}^0(A, L)$.*

Démonstration. On fait le quotient par un sous-groupe lagrangien de $K(L)$, voir [Mu] pages 233–234. □

Ces lemmes permettent de donner la forme suivante du théorème d'Autissier.

Proposition 3.6. *Soit (A, L) une variété abélienne polarisée de dimension g sur un corps de nombres k. On a*

$$\frac{1}{[k : \mathbf{Q}]} \sum_{\sigma\colon k \hookrightarrow \mathbf{C}} \rho(A_\sigma, L_\sigma)^{-2} \leq 11 \max(1, h(A), \log \deg_L A).$$

Démonstration. Notons T le membre de gauche. Vu l'assertion à démontrer, nous pouvons supposer $T \geq 11 \max(1, \log g!)$. Si (A, L) est principalement polarisée, nous raisonnons comme dans le cas elliptique avec $T' \geq T \geq 3g/\pi$ pour obtenir

$$\frac{\pi T}{6} - \frac{g}{2} \log T \leq h(A) + \frac{g}{2} \log\left(\frac{2\pi^2 e}{3g}\right).$$

Posons

$$c_1(g) := \frac{\pi}{6} - \frac{g}{2} \frac{\log(11 \max(1, \log g!))}{11 \max(1, \log g!)}.$$

Par décroissance de la fonction $x \mapsto (\log x)/x$ pour $x \geq e$, on en déduit

$$c_1(g) T \leq h(A) + \frac{g}{2} \log\left(\frac{2\pi^2 e}{3g}\right).$$

Le passage à une polarisation quelconque s'effectue *via* les deux lemmes précédents. En effet, la moyenne qui définit T est invariante par extension finie du corps de base k. Ceci nous permet de supposer que l'isogénie donnée par le lemme 3.5 est définie sur k. On a alors $h(B) \leq h(A) + (1/2) \log \mathrm{h}^0(A, L)$ et $\rho(A_\sigma, L_\sigma)^{-2} \leq \rho(B_\sigma, M_\sigma)^{-2}$ par le lemme 3.4, pour tout plongement σ de k dans $\mathbf{C}$. Ainsi de la majoration ci-dessus appliquée à (B, M) découlent les estimations

$$\begin{aligned} c_1(g) T &\leq h(A) + \frac{1}{2} \log \mathrm{h}^0(A, L) + \frac{g}{2} \log\left(\frac{2\pi^2 e}{3g}\right) \\ &\leq h(A) + \frac{1}{2} \log \deg_L A - \frac{1}{2} \log g! + \frac{g}{2} \log\left(\frac{2\pi^2 e}{3g}\right) \\ &\leq c_2(g) \max(1, h(A), \log \deg_L A) \end{aligned}$$

où

$$c_2(g) := \frac{3}{2} + \frac{\max\left(0, (g/2) \log(2\pi^2 e/(3g)) - (1/2) \log g!\right)}{\max(1, \log g!)}.$$

Pour conclure, on vérifie que $c_2(g) \leq 11 c_1(g)$ pour tout $g \geq 1$. Pour cela, on peut procéder de la manière suivante : on montre l'inégalité par calcul direct si $g \leq 5$. Pour $g \geq 6$, on a $c_2(g) = 3/2$ (car $3g g!^{1/g} \geq 18 \times 6!^{1/6} \geq 2\pi^2 e$) et $c_1(g) = \pi/6 - g \log(11 \log g!)/(22 \log g!) \geq \pi/6 - (\log 11 + 2 \log g)/(22 \log g - 22)$ (en utilisant $\log \log g! \leq 2 \log g$ et $\log g! \geq g \log(g/e)$). Cette dernière fonction est croissante pour $g \geq 6$ et supérieure à $3/22$ si $g = 6$ d'où le résultat. □

Le théorème 1.1 se démontre exactement comme ci-dessus en utilisant $h(A) = h_F(A) + g \log \sqrt{\pi}$ (le 11 dans $c_1(g)$ est remplacé par 14, le π^2 dans $c_2(g)$ devient π^3 et $c_2(g) = 3/2$ pour $g \geq 12$).

3.2. **Pente maximale.** Nous introduisons ici la pente maximale qui jouera un rôle essentiel dans la preuve du théorème-clef ci-dessous (théorème 4.5) et dont l'estimation repose sur une version du lemme matriciel.

Lorsque (A, L) est une variété abélienne polarisée sur un corps de nombres k, on munit l'espace tangent t_A d'une structure de k-fibré vectoriel hermitien notée $\overline{t_{(A,L)}}$ ou, la plupart du temps, $\overline{t_A}$, lorsque la polarisation sous-entendue est claire d'après le contexte. Pour ce faire, nous utilisons la structure entière donnée par l'espace tangent du modèle de Néron de A (qui donne donc, dans le langage des fibrés adéliques de [Ga3], des normes en toutes les places finies de k). En une place infinie v, nous utilisons la métrique induite par la forme de Riemann, décrite au paragraphe 2.4. Il

n'y a pas d'ambiguïté car si σ et $\overline{\sigma}$ sont deux plongements complexes correspondant tous deux à v alors les normes $\|\cdot\|_{L,\sigma}$ et $\|\cdot\|_{L,\overline{\sigma}}$ coïncident comme nous l'avons rappelé au § 2.6.

Lorsque l'on dispose d'un fibré adélique $\overline{E}$ sur k nous pouvons lui associer à la suite de Bost deux *pentes* : d'une part sa pente (toujours normalisée) $\widehat{\mu}(\overline{E})$ définie page 62 de [Ga3] et d'autre part sa pente maximale $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})$ qui est le maximum des pentes des sous-fibrés non nuls de $\overline{E}$.

Nous souhaitons donc évaluer la pente et la pente maximale de $\overline{t_A}$ mais il faut faire attention que ces quantités ne sont pas préservées *a priori* par extension des scalaires. Au contraire, nous souhaitons ne manipuler que des quantités invariantes par une telle extension. Nous résolvons ce problème comme dans le paragraphe 5.1.1 de [Bo1] : pour calculer ces quantités, nous ferons toujours d'abord une extension de corps de sorte que A ait réduction semi-stable. Sous cette condition, nos pentes ne dépendent plus du corps choisi (c'est la même convention que pour la hauteur de Faltings *stable*).

Chaque fois que nous parlerons de la pente ou de la pente maximale de $\overline{t_A}$ (ou de son dual, de leurs puissances symétriques,...) nous ferons donc référence aux pentes de $\overline{t_{A_K}}$ pour une extension finie K de k telle que A_K admette un modèle semi-stable. En pratique, ce léger abus d'écriture n'engendrera pas de confusions car, lorsque nous ferons appel explicitement à la structure hermitienne sur t_A, nous aurons toujours au préalable fait une extension des scalaires assurant la condition de semi-stabilité. Surtout, cette convention nous permettra de donner des énoncés invariants sans modifier notre corps de base (et donc nous n'aurons pas à estimer le degré d'une extension sur laquelle A acquière réduction semi-stable).

Rappelons le fait suivant.

Lemme 3.7. *Soit (A, L) une variété abélienne polarisée sur un corps de nombres. On a*

$$g\widehat{\mu}(\overline{t_{(A,L)}}) = -h(A) - \frac{1}{2}\log \mathrm{h}^0(A, L) + \frac{g}{2}\log \pi.$$

Démonstration. Ceci suit facilement des définitions : voir l'énoncé (D.1) de [Bo1] et une preuve page 715 de [Ga2]. □

On peut tirer d'un lemme matriciel une estimation de la pente maximale du dual de $\overline{t_A}$. Un énoncé explicite est donné par Graftieaux comme suit :

Lemme 3.8. *Si L est une polarisation principale on a*

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{t_A^\vee}) \leq (g+1)h(A) + 2g^5 \log 2.$$

Démonstration. Voir la proposition 2.14 de [Gr]. □

Nous passons au cas général par isogénie comme ci-dessus.

Lemme 3.9. *Soient $f\colon A \to B$ une isogénie entre variétés abéliennes sur k et L une polarisation sur B. Alors*

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{t_{(A,f^*L)}}) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\overline{t_{(B,L)}}).$$

Démonstration. Après nous être placés sur une extension de corps convenable où A et B ont des modèles semi-stables, nous considérons l'isomorphisme d'espaces vectoriels $\mathrm{d}f\colon t_A \to t_B$. Pour chaque plongement σ, l'application $(\mathrm{d}f)_\sigma$ est une isométrie avec les normes relatives à $(f^*L)_\sigma$ et L_σ (voir la démonstration du lemme 3.4). D'autre part, $\mathrm{d}f$ préserve les structures entières puisque f s'étend en un morphisme entre les modèles de Néron de A et B. Par suite la norme de $\mathrm{d}f$ en une place ultramétrique quelconque est inférieure à 1. Le résultat suit alors par inégalité de pentes (voir par exemple le lemme 6.4 de [Ga3]). □

Nous en déduisons l'énoncé suivant.

Proposition 3.10. *Si (A, L) est une variété abélienne polarisée on a*

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{t^\vee_{(A,L)}}) \leq (g+1)(h(A) + \frac{1}{2}\log \mathrm{h}^0(A, L)) + 2g^5 \log 2.$$

Démonstration. Il suffit de combiner les deux lemmes précédents avec le lemme 3.5. □

4. Minimum essentiel

Nous énonçons le théorème principal qui entraîne les théorèmes cités dans l'introduction.

4.1. **Minimum d'évitement.** Soient A une variété abélienne complexe et L une polarisation sur A. Soient $\|.\|_{\mathsf{L}}$ la norme sur l'espace tangent t_{A} induite par L (voir § 2.4) et d_{L} la distance associée.

Définition 4.1. Soit B une sous-variété abélienne de A. Le *minimum d'évitement* de B, relatif à (A,L), est le nombre réel

$$\delta(\mathsf{A},\mathsf{L},\mathsf{B}) := \min\{\mathrm{d}_{\mathsf{L}}(\omega, t_{\mathsf{B}})\,;\ \omega \in \Omega_{\mathsf{A}} \setminus \Omega_{\mathsf{B}}\}.$$

Le *minimum essentiel* de (A,L) est $\delta(\mathsf{A},\mathsf{L}) := \sup_{\mathsf{B}} \delta(\mathsf{A},\mathsf{L},\mathsf{B})$ (la borne supérieure est prise sur toutes les sous-variétés abéliennes B de A, différentes de A).

Si $\mathsf{B} = \{0\}$, on retrouve le minimum absolu $\delta(\mathsf{A},\mathsf{L},\{0\}) = \rho(\mathsf{A},\mathsf{L})$. Voici quelques relations élémentaires auxquelles satisfont ces minima.

Propriétés 4.2. Soient B,C des sous-variétés abéliennes de A.

(1) Si $\mathsf{C} \neq \{0\}$ et si $\mathsf{B}\cap\mathsf{C}$ est fini alors on a $\delta(\mathsf{A},\mathsf{L},\mathsf{B}) \leq \rho(\mathsf{C},\mathsf{L})$.
(2) On a $\delta(\mathsf{A},\mathsf{L}_1\otimes\mathsf{L}_2,\mathsf{B})^2 \geq \delta(\mathsf{A},\mathsf{L}_1,\mathsf{B})^2 + \delta(\mathsf{A},\mathsf{L}_2,\mathsf{B})^2$ et, pour tout entier $N\geq 1$, on a
$$\delta(\mathsf{A},\mathsf{L}^{\otimes N},\mathsf{B}) = \sqrt{N}\delta(\mathsf{A},\mathsf{L},\mathsf{B}).$$
(3) Pour $i\in\{1,2\}$, soit $(\mathsf{A}_i,\mathsf{L}_i,\mathsf{B}_i)$ comme ci-dessus. On a
$$\delta(\mathsf{A}_1\times\mathsf{A}_2,\mathsf{L}_1\boxtimes\mathsf{L}_2,\mathsf{B}_1\times\mathsf{B}_2) = \min_{i\in\{1,2\}}\delta(\mathsf{A}_i,\mathsf{L}_i,\mathsf{B}_i).$$

Nous avons toujours $\rho(\mathsf{A},\mathsf{L}) \leq \delta(\mathsf{A},\mathsf{L})$ mais il n'est pas vrai en général que $\rho(\mathsf{A},\mathsf{L}) \leq \delta(\mathsf{A},\mathsf{L},\mathsf{B})$ (prendre $\mathsf{A}=\mathsf{E}\times\mathsf{E}$ pour une courbe elliptique E avec une polarisation produit $\mathsf{L}=\mathsf{L}_0\boxtimes\mathsf{L}_0$ puis B la diagonale ; on a alors $\delta(\mathsf{A},\mathsf{L},\mathsf{B}) = \rho(\mathsf{A},\mathsf{L})/\sqrt{2}$).

Proposition 4.3. *Soit B une sous-variété abélienne stricte de A. Soit b le degré de l'isogénie d'addition $\mathsf{B}\times\mathsf{B}^\perp\to\mathsf{A}$. Alors on a $\rho(\mathsf{B}^\perp,\mathsf{L})/\mathsf{b} \leq \delta(\mathsf{A},\mathsf{L},\mathsf{B})$. En particulier on a*

$$\frac{\rho(\mathsf{A},\mathsf{L})}{(\deg_{\mathsf{L}}\mathsf{B})^2} \leq \delta(\mathsf{A},\mathsf{L},\mathsf{B}).$$

Démonstration. Soit ω une période de A qui n'appartient pas à t_{B}. Considérons ω_1,ω_2 comme au § 2.2 attachés à ω et à B. On a $\delta(\mathsf{A},\mathsf{L},\mathsf{B}) = \mathrm{d}_{\mathsf{L}}(\omega,t_{\mathsf{B}}) = \|\omega_2\|_{\mathsf{L}}/\mathsf{b}$ car les espaces t_{B} et $t_{\mathsf{B}^\perp}$ sont orthogonaux. Par hypothèse, on a $\omega_2\neq 0$ et donc $\|\omega_2\|_{\mathsf{L}} \geq \rho(\mathsf{B}^\perp,\mathsf{L}) \geq \rho(\mathsf{A},\mathsf{L})$. La deuxième inégalité de la proposition découle alors de la majoration $\mathsf{b}\leq(\deg_{\mathsf{L}}\mathsf{B})^2$. □

Étant donné une sous-variété abélienne B de A, de codimension $\mathsf{t}\geq 1$, on pose

$$x(\mathsf{B}) := \left(\frac{\deg_{\mathsf{L}}\mathsf{B}}{\deg_{\mathsf{L}}\mathsf{A}}\right)^{1/\mathsf{t}}.$$

Proposition 4.4. *Pour toute sous-variété abélienne stricte B de A, on a*

$$x(\mathsf{B})\delta(\mathsf{A},\mathsf{L},\mathsf{B})^2 \leq 2/\sqrt{3}$$

(si $\dim\mathsf{A}\geq 2$ on peut remplacer $2/\sqrt{3}$ par 1).

Démonstration. Notons t la codimension de B dans A. La quantité $\delta(\mathsf{A},\mathsf{L},\mathsf{B})$ est la plus petite norme d'un élément non nul du réseau $\Omega_{\mathsf{A}}/\Omega_{\mathsf{B}}$ de $t_{\mathsf{A}}/t_{\mathsf{B}}$ (vu comme $\mathbf{R}$-espace vectoriel), muni de la norme quotient. Par conséquent, le premier théorème de Minkowski donne l'estimation

$$\delta(\mathsf{A},\mathsf{L},\mathsf{B})^2 \leq \gamma_{2\mathsf{t}}\,\mathrm{covol}(\Omega_{\mathsf{A}}/\Omega_{\mathsf{B}})^{1/\mathsf{t}}$$

($\gamma_{2\mathsf{t}}$ est la constante d'Hermite). Le covolume du réseau quotient est le quotient des covolumes et, d'après [BePh], l'on sait que $\mathrm{covol}(\Omega_{\mathsf{A}})$ est égal à $\mathrm{h}^0(\mathsf{A},\mathsf{L})$ (idem pour B). En revenant aux degrés, la borne de Minkowski donne donc

$$x(\mathsf{B})\delta(\mathsf{A},\mathsf{L},\mathsf{B})^2 \leq \gamma_{2\mathsf{t}}\left(\frac{(g-\mathsf{t})!}{g!}\right)^{1/\mathsf{t}}.$$

Si $\mathsf{t}=1$, la valeur $\gamma_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$ donne la majoration voulue. Si $\mathsf{t}\geq 2$, on majore $(g-\mathsf{t})!/g!$ par $1/\mathsf{t}!$. Si $\mathsf{t}\in\{2,3\}$, on connaît la valeur explicite de γ_{2t} :

$$\gamma_4 = \sqrt{2},\quad \gamma_6 = \frac{2}{3^{1/6}},$$

avec laquelle on vérifie aisément que $\gamma_{2\mathsf{t}}\mathsf{t}!^{-1/\mathsf{t}} \leq 1$. En général, on dispose de la borne de Blichfeldt [GL, théorème 2, p. 387] :

$$\gamma_{2\mathsf{t}}\mathsf{t}!^{-1/\mathsf{t}} \leq \frac{2}{\pi}(\mathsf{t}+1)^{1/\mathsf{t}}.$$

L'on peut alors conclure en observant que, si $\mathsf{t} \geq 4$, on a $(1+\mathsf{t})^{1/\mathsf{t}} \leq \pi/2$. □

4.2. **Théorème-clef.** Soit (A, L) une variété abélienne polarisée sur un corps de nombres k. Pour un plongement complexe $\sigma\colon k \hookrightarrow \mathbf{C}$ et une sous-variété abélienne stricte B de A_σ, nous avons défini ci-dessus une quantité $x(\mathsf{B})$. Nous posons à présent

$$x := \min\{x(\mathsf{B})\,;\ \mathsf{B} \subsetneq A_\sigma\}$$

qui ne dépend pas du choix du plongement σ mais seulement du couple (A, L). Notons d'ores et déjà

$$(\deg_L A)^{-1} \leq x \leq (\deg_L A)^{-1/g}$$

comme on le voit avec $\deg_{L_\sigma} \mathsf{B} \geq 1$ et $x \leq x(\{0\})$.

Théorème 4.5. *Considérons pour chaque plongement complexe $\sigma\colon k \hookrightarrow \mathbf{C}$ une sous-variété abélienne $B[\sigma]$ de A_σ, différente de A_σ. On suppose que $B[\sigma]$ et $B[\overline{\sigma}]$ se correspondent via l'isomorphisme $\mathsf{f}\colon A_\sigma \simeq A_{\overline{\sigma}}$ du § 2.6. Soient*

$$\delta_\sigma := \delta(A_\sigma, L_\sigma, B[\sigma]) \quad \textit{et} \quad \xi_\sigma := \left(\frac{x}{x(B[\sigma])}\right)^{\operatorname{codim} B[\sigma]}.$$

Alors on a

$$\frac{1}{[k:\mathbf{Q}]}\sum_{\sigma\colon k\hookrightarrow\mathbf{C}}\left(\frac{\xi_\sigma}{\delta_\sigma}\right)^2 \leq 131 g^{2g+6} x \max\left(1, h(A), \log\deg_L A, \frac{1}{[k:\mathbf{Q}]}\sum_{\sigma\colon k\hookrightarrow\mathbf{C}}\log\deg_{L_\sigma} B[\sigma]\right).$$

De plus, si $g = 1$ ou si $x \leq 1/2141$ alors on peut remplacer la constante numérique 131 *par* 23.

Notons que la condition sur les $B[\sigma]$ entraîne $\delta_\sigma = \delta_{\overline{\sigma}}$ et $\xi_\sigma = \xi_{\overline{\sigma}}$. La constante $1/2141$ qui apparaît provient de la démonstration de la conséquence suivante.

Corollaire 4.6. *Étant donné une variété abélienne polarisée (A, L) sur un corps de nombres k, on a*

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x \leq \frac{1}{[k:\mathbf{Q}]}\sum_{\sigma\colon k\hookrightarrow\mathbf{C}}\delta(A_\sigma, L_\sigma)^{-2} \leq 23 g^{2g+6} x \max(1, h(A), \log\deg_L A).$$

Démonstration. La minoration de la moyenne des $\delta(A_\sigma, L_\sigma)^{-2}$ est une simple application de la proposition 4.4 (en minorant $x(B[\sigma])$ par x). Pour la majoration, observons que l'on a toujours

$$\frac{1}{[k:\mathbf{Q}]}\sum_{\sigma\colon k\hookrightarrow\mathbf{C}}\delta(A_\sigma, L_\sigma)^{-2} \leq \frac{1}{[k:\mathbf{Q}]}\sum_{\sigma\colon k\hookrightarrow\mathbf{C}}\rho(A_\sigma, L_\sigma)^{-2}$$

car $\rho(A_\sigma, L_\sigma) \leq \delta(A_\sigma, L_\sigma)$. Par conséquent, si $x \geq 11/(23g^{2g+6})$, le lemme matriciel de la proposition 3.6 permet de conclure immédiatement. Dans le cas contraire, on a ou bien $g = 1$ ou $x \leq 11/(23g^{2g+6}) \leq 1/2141$. Pour tout plongement σ nous choisissons une sous-variété abélienne $B[\sigma]$ de A_σ telle que $x(B[\sigma]) = x$ (et donc $\xi_\sigma = 1$). Dans ce cas on a $\deg_{L_\sigma} B[\sigma] \leq \deg_L A$ et, par définition, $\delta(A_\sigma, L_\sigma)^{-2} \leq \delta(A_\sigma, L_\sigma, B[\sigma])^{-2}$. Le théorème 4.5 donne alors le résultat voulu. □

4.3. **Premières réductions.** Nous montrons ici que, pour établir le théorème 4.5, nous pouvons supposer $g \geq 2$ et faire une extension finie du corps k.

4.3.1. *Courbes elliptiques.* Lorsque $g = 1$, nous avons automatiquement $B[\sigma] = 0$ et $x = x(0) = (\deg_L A)^{-1}$. Par suite $\xi_\sigma = 1$ tandis que $\delta_\sigma = \rho(A_\sigma, L_\sigma)$. En outre, la polarisation L est une puissance de l'unique polarisation principale de A, disons L_0. Ainsi $L = L_0^{\otimes \deg_L A}$ et donc $\rho(A_\sigma, L_\sigma)^2 = (\deg_L A)\rho(A_\sigma, (L_0)_\sigma)^2$. Finalement la formule à démontrer se simplifie donc en

$$\frac{1}{[k:\mathbf{Q}]}\sum_{\sigma\colon k\hookrightarrow\mathbf{C}}\rho(A_\sigma, (L_0)_\sigma)^{-2} \leq 23\max(1, h(A), \log\deg_L A)$$

et elle découle alors facilement du lemme matriciel pour (A, L_0) (par exemple la proposition 3.6 suffit). Nous supposons désormais $g \geq 2$.

4.3.2. *Variation du corps.* Les données $(A, L, (B[\sigma])_{\sigma\colon k\hookrightarrow\mathbf{C}})$ admettent une notion naturelle d'extension des scalaires : si K est une extension finie de k alors on définit $(A_K, L_K, (B[\sigma'])_{\sigma'\colon K\hookrightarrow\mathbf{C}})$ en posant simplement $B[\sigma'] := B[\sigma'|_k]$. Alors le théorème est invariant par extension des scalaires. Ainsi dans la suite nous pourrons faire librement une extension finie du corps k.

4.4. **Stratégie.** La démonstration du théorème 4.5 repose sur une construction de transcendance, qui s'inspire du *cas périodique* de la théorie des formes linéaires de logarithmes. Plus précisément, nous utilisons la variante de la méthode de Gel'fond-Baker proposée par Philippon et Waldschmidt [PW], variante qui permet d'extrapoler sur les dérivations (dans une direction bien choisie) plutôt que sur les points.

Schématiquement, cette méthode consiste à construire une fonction auxiliaire qui est petite en l'origine de t_{A_σ} dans toutes les directions (jusqu'à un certain ordre gT) *sauf une* (en substance celle donnée par un élément qui réalise le minimum δ_σ) pour laquelle l'ordre est bloqué à $T_\sigma \ll T\xi_\sigma$. Par le biais d'un lemme d'interpolation analytique (en *une* variable), on montre alors que l'on peut s'affranchir de cette dernière restriction, quitte à remplacer gT par T, ce qui fournit des bornes (dites *fines*) de la « première » dérivée non nulle de la fonction auxiliaire en l'origine. Après renormalisation éventuelle, cette dérivée est un nombre algébrique et un lemme de multiplicités assure qu'il est non nul. Ce nombre satisfait alors à la formule du produit. La majoration de ses valeurs absolues en les places p-adiques du corps de nombres ambiant k conduit par comparaison avec les estimations archimédiennes fines à une inégalité brute de laquelle est extraite l'information voulue (ici la majoration de la moyenne des $(\xi_\sigma/\delta_\sigma)^2$). Considérer toutes les places de k au lieu d'une seule avec, en outre, des ξ_σ non nécessairement égaux à 1 est une des caractéristiques originales de notre démonstration.

Nous avons perfectionné ce canevas sous trois angles : (i) nous avons introduit la *méthode de la section auxiliaire*, élaborée dans [Ga4], qui remplace celle des fonctions auxiliaires, avec les avantages déjà évoqués à la fin de l'introduction, (ii) nous apportons un nouveau lemme d'interpolation analytique, d'intérêt indépendant, qui fera l'objet de la partie suivante, (iii) nous évaluons de manière quasi-optimale les rangs asymptotiques des systèmes linéaires avec lesquels est bâtie la section auxiliaire. Ces évolutions permettent de travailler dans un cadre plus agréable qui élimine naturellement certaines difficultés techniques (par exemple, il n'y a plus « d'astuce d'Anderson-Baker-Coates »), tout en conduisant à de bien meilleures constantes numériques qu'auparavant.

5. Prélude à l'extrapolation analytique

Dans cette partie, nous établissons le résultat crucial pour extrapoler sur les dérivées dans la démonstration du théorème 4.5. Il s'agit d'un lemme de Schwarz approché, de facture assez classique. On en trouvera par exemple une formulation plus générale dans l'article de Cijsouw et Waldschmidt [CW]. Nous avons cependant besoin d'une version significativement plus fine en vue des calculs explicites de constantes. Pour cela, nous modifions la trame de la preuve de [CW] de trois façons : en premier lieu, puisque nous ne souhaitons extrapoler qu'en 0, nous ne majorons le module de notre fonction analytique que sur un petit disque (de rayon 1 au lieu de $2S$, dans les notations ci-dessous) ; ensuite, nous remplaçons en fait ce disque par un domaine plus compliqué le contenant (voir figure), pour éviter au mieux les contours d'intégration, légèrement contractés, qui apparaissent dans nos calculs de résidus (formule d'interpolation d'Hermite) ; enfin nous estimons de manière très précise les extrema du polynôme auxiliaire de la dite formule (voir lemme 5.2).

Voici notre résultat, décliné en une forme brute et une forme légèrement plus faible que nous utiliserons plus bas. Si R est un nombre réel positif et si $D(0,R)$ désigne le disque fermé $\{z \in \mathbf{C};\ |z| \leq R\}$, on note $|f|_R$ la borne supérieure des $|f(z)|$ pour $z \in D(0,R)$.

Proposition 5.1. *Soient S et T deux entiers naturels non nuls, ε un nombre réel tel que $0 < \varepsilon < 1/2$ et $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Alors on a :*

$$|f|_1 \leq 4\left(\frac{(S-1)!^2 \operatorname{sh}\pi}{\pi(2S-1)!}\right)^T |f|_S + \frac{ST}{\varepsilon}\left(\frac{\operatorname{sh}\pi}{\cos\pi\varepsilon}\right)^T \max_{\substack{j\in\mathbf{Z},\ |j|<S\\ \ell\in\mathbf{N},\ \ell<T}} \left|\frac{1}{2^\ell \ell!} f^{(\ell)}(j)\right|.$$

En particulier, on a aussi

$$|f|_1 \leq 4\left(\frac{10}{4^S}\right)^T |f|_S + 12ST(12)^T \max_{\substack{j\in\mathbf{Z},\ |j|<S\\ \ell\in\mathbf{N},\ \ell<T}} \left|\frac{1}{2^\ell \ell!} f^{(\ell)}(j)\right|.$$

On comparera avec [CW, p. 179–180] en prenant $\delta = 1$, $k = 2S-1$, $E = \{1-S, \dots, S-1\}$, $r = S$, $R = 8S$ qui donne la même puissance 2^{-2ST} dans le premier terme mais au prix de remplacer $|f|_S$ par $|f|_{8S}$; dans le second terme la puissance de l'ordre de 81^{ST} devient 12^T ; bien sûr, rappelons que nous majorons seulement $|f|_1$ et non $|f|_{2S}$ mais cela ne fait que peu de différence lorsqu'il s'agit d'estimer les dérivées en 0.

Commençons par un lemme préliminaire.

Lemme 5.2. *Soient S un entier naturel non nul et $P = \prod_{j=1-S}^{S-1}(X-j) \in \mathbf{Z}[X]$.*

(1) $P(S) = (2S-1)! = -P(-S)$.
(2) *Si $t \in \mathbf{R}$ et $|t| \leq S$ alors $|P(t)| \geq (S-1)!^2\pi^{-1}|\sin(\pi t)|$.*
(3) *Si $z \in \mathbf{C}$ et $\min(|z|, 2|z-1|, 2|z+1|) \leq 1$ alors $|P(z)| \leq (S-1)!^2\pi^{-1}\operatorname{sh}(\pi)$.*
(4) *Si $k \in \mathbf{Z}$ et $\rho \in \mathbf{R}^+$ alors*

$$\min\{|P(z)|\,;\ z \in \mathbf{C} \text{ et } |z-k| = \rho\} = \min(|P(k+\rho)|, |P(k-\rho)|).$$

Démonstration. L'assertion (1) se passe de commentaires. Pour (2) et (3) écrivons $P(X) = X\prod_{j=1}^{S-1}(X^2-j^2) = (S-1)!^2X\prod_{j=1}^{S-1}(X^2/j^2-1)$. On rappelle aussi que

$$\sin \pi t = \pi t \prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{t^2}{j^2}\right) \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}\pi = \pi\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{j^2}\right).$$

La relation (2) se réduit donc à $\prod_{j=S}^{\infty}|1-t^2/j^2| \leq 1$ qui découle bien de $|t| \leq S$. Pour (3) nous devons montrer $|z|\prod_{j=1}^{S-1}|1-z^2/j^2| \leq \prod_{j=1}^{\infty}(1+1/j^2)$. Cette formule étant claire pour $|z| \leq 1$ et invariante sous $z \mapsto -z$, nous pouvons supposer $|z-1| \leq 1/2$. Nous avons alors $|z||1-z^2| \leq (3/4)|1+z| \leq 15/8 \leq 2 = 1+1/1^2$ et il suffit donc de vérifier $|1-z^2/j^2| \leq 1+1/j^2$ pour $j \geq 2$. En élevant au carré et en simplifiant, ceci équivaut à $|z|^4 - 1 \leq 2j^2(1+\operatorname{Re}(z^2))$. Enfin nous avons $|z|^4 \leq (3/2)^4 \leq 8 \leq 2j^2$ et $\operatorname{Re}(z^2) \geq 0$ car, par exemple, $|\operatorname{Arg}(z)| \leq \pi/4$. Passons à (4). Si $|z-k| = \rho$ et $x = \operatorname{Re}(z-k)$ alors

$$|P(z)|^2 = \prod_{j=k-S+1}^{k+S-1}(j^2+\rho^2+2jx).$$

Scindons $E = \{k-S+1, \dots, k+S-1\}$ en $F = \{j \in E\,;\ -j \in E\}$ et $G = E \setminus F$ (chacun pouvant être vide). On remarque que tous les éléments de G ont le même signe donc la fonction $x \mapsto \prod_{j\in G}(j^2+\rho^2+2jx)$ est monotone (tous les facteurs sont positifs car $-\rho \leq x \leq \rho$) et elle atteint son minimum en ρ ou $-\rho$. D'autre part, si $F \neq \emptyset$, on a $0 \in F$ et

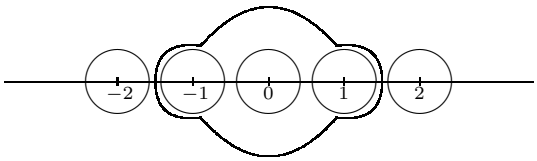
$$\prod_{j\in F}(j^2+\rho^2+2jx) = \rho^2 \prod_{j\in F,\ j\geq 1}((j^2+\rho^2)^2 - 4j^2x^2).$$

Nous obtenons donc une fonction paire minimale en $x = \rho$ et en $x = -\rho$. En faisant le produit, nous voyons que $|P(z)|$ est minimal en l'un des deux points donnés par $|x| = \rho$. C'est le résultat. □

Démonstration de la proposition 5.1. Si $S = 1$, l'énoncé est tautologique donc nous supposons $S \geq 2$. Notons $\Gamma = \{\zeta \in \mathbf{C}\,;\ |\zeta| = S\}$ et $\Gamma_j = \{\zeta \in \mathbf{C}\,;\ |\zeta - j| = (1/2) - \varepsilon\}$ pour $|j| < S$ ainsi que $Q = P^T$ avec la notation P du lemme 5.2. Comme dans [CW], nous partons de la formule d'interpolation d'Hermite

$$\frac{f(z)}{Q(z)} = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{Q(\zeta)}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2i\pi}\sum_{j=1-S}^{S-1}\sum_{\ell=0}^{T-1}\frac{f^{(\ell)}(j)}{\ell!}\int_{\Gamma_j}\frac{(\zeta-j)^\ell}{Q(\zeta)}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}$$

valable pour $z \in \mathbf{C}$ vérifiant $|z| < S$ et $|z-j| > (1/2)-\varepsilon$ pour $1-S \leq j \leq S-1$. Nous l'appliquons pour z tel que $\min(|z|, 2|1-z|, 2|1+z|) = 1$:



Tracé approximatif de la courbe $\min(|z|, 2|1-z|, 2|1+z|) = 1$.
Elle est toujours distante d'au moins ε des petits cercles.

Dans l'intégrale le long de Γ, nous avons $|\zeta - z| \geq S - (3/2) \geq S/4$. De plus, les assertions (1) et (4) du lemme 5.2 avec $k = 0$ et $\rho = S$ donnent $|Q(\zeta)| \geq (2S-1)!^T$; comme Γ est de longueur $2\pi S$, il vient

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{Q(\zeta)} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} \right| \leq \frac{4}{(2S-1)!^T} |f|_S.$$

Dans l'intégrale le long de Γ_j, nous estimons $|\zeta - j| = (1/2) - \varepsilon \leq 1/2$ et $|\zeta - z| \geq \varepsilon$ tandis que $|Q(\zeta)| \geq \min(|Q(j - (1/2) + \varepsilon)|, |Q(j + (1/2) - \varepsilon)|) \geq (S-1)!^{2T} \pi^{-T} (\cos \pi\varepsilon)^T$ par le lemme 5.2, (2) et (4). Comme Γ_j est de longueur $\pi - 2\pi\varepsilon \leq \pi$, nous trouvons

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{2i\pi} \sum_{j=1-S}^{S-1} \sum_{\ell=0}^{T-1} \frac{f^{(\ell)}(j)}{\ell!} \int_{\Gamma_j} \frac{(\zeta - j)^\ell}{Q(\zeta)} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} \right| \\ &\quad \leq \frac{ST}{\varepsilon} \left(\frac{\pi}{(S-1)!^2 \cos \pi\varepsilon} \right)^T \max_{j \in \mathbf{Z},\ |j| < S,\ \ell \in \mathbf{N},\ \ell < T} \left| \frac{1}{2^\ell \ell!} f^{(\ell)}(j) \right|. \end{aligned}$$

Pour obtenir la première majoration de l'énoncé il reste à utiliser $|Q(z)| \leq (S-1)!^{2T} \pi^{-T} \operatorname{sh}(\pi)^T$ d'après le lemme 5.2, (3), et à rappeler que le principe du maximum donne

$$|f|_1 \leq \sup\{|f(z)| \,;\ z \in \mathbf{C} \text{ et } \min(|z|, 2|1-z|, 2|1+z|) = 1\}.$$

Afin de passer à la seconde formulation, nous écrivons $u_S = 4^S (S-1)!^2 (2S-1)!^{-1}$. Un calcul immédiat fournit $u_S / u_{S+1} = 1 + 1/(2S)$ donc u_S décroît puis $u_S \leq u_2 = 8/3$. Nous avons donc

$$\frac{(S-1)!^2 \operatorname{sh} \pi}{\pi (2S-1)!} \leq \frac{8 \operatorname{sh} \pi}{3\pi} 4^{-S}.$$

Parallèlement nous utilisons $\varepsilon = 1/12$ et nous terminons par les estimations numériques

$$\frac{8 \operatorname{sh} \pi}{3\pi} \leq 10 \qquad \text{et} \qquad \frac{\operatorname{sh} \pi}{\cos(\pi/12)} \leq 12.$$

□

Remarques 5.3. Nous pourrions, comme dans [CW], supprimer à la fois le T de ST/ε et le 2^ℓ en utilisant $\sum_{\ell=0}^{T-1} 2^{-\ell} < 2$. Ceci n'a aucune influence pour notre application car T tendra vers l'infini et seule importera la limite de $(1/T) \log |f|_1$. Pour cette même raison, nous pourrions garder ε dans la formule et le faire tendre vers 0 *in fine*.

En supposant $S \geq 175$ le premier terme pourrait être remplacé par $4^{-ST} |f|_S$. Alternativement nous pourrions écrire $4(15 S^{-1/2} 4^{-S})^T |f|_S$ en majorant u_S plus finement.

6. Démonstration du théorème-clef

6.1. **Choix des métriques.** Soit (A, L) la variété abélienne polarisée du théorème-clef 4.5. Pour chaque plongement complexe $\sigma \colon k \hookrightarrow \mathbf{C}$, il existe une unique métrique sur L_σ, dite *métrique cubiste*, de forme de courbure invariante par translation et rigidifiée à l'origine : $0_{A_\sigma}^* L_\sigma \simeq \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \mathbf{C}}$ est une isométrie (avec la métrique triviale sur $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \mathbf{C}}$). Quitte à faire une extension finie (voir 4.3.2), l'on peut supposer que le couple (A, L) possède un modèle de Moret-Bailly $(\mathcal{A}, \overline{\mathcal{L}})$ sur k, au sens suivant :

- il existe un schéma en groupes $\mathcal{A} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_k$ semi-stable (donc lisse), de fibré générique isomorphe à A (ce schéma en groupes est le modèle de Néron de A),

- il existe un fibré hermitien cubiste $\overline{\mathcal{L}} := (\mathcal{L}, (\|.\|_{\mathrm{cub},\sigma})_{\sigma\colon k\hookrightarrow\mathbf{C}})$ sur $\mathcal{A}$, de fibre générique L (le terme cubiste signifie que la métrique $\|.\|_{\mathrm{cub},\sigma}$ sur $\mathcal{L}\otimes_\sigma \mathbf{C}$ est cubiste pour tout $\sigma\colon k\hookrightarrow\mathbf{C}$).

L'existence d'un tel modèle est démontrée au § 4.3 de [Bo2]. Soulignons que la définition de fibré cubiste implique que $\overline{\mathcal{L}}$ est rigidifié à l'origine. Pour tout entier $n \geq 1$, le k-espace vectoriel $H_n := \mathrm{H}^0(A, L^{\otimes n})$ des sections globales possède une structure de fibré adélique hermitien $\overline{H_n} = (H_n, (\|.\|_{\overline{H_n},v})_v)$ sur k ; la structure entière est donnée par $\mathrm{H}^0(\mathcal{A}, \mathcal{L}^{\otimes n})$: pour toute place ultramétrique v de k, pour tout $s \in \mathrm{H}^0(A, L^{\otimes n}) \otimes_k k_v$, on a

$$\|s\|_{\overline{H_n},v} := \min\left\{|\lambda|_v\,;\ \lambda \in k_v \setminus \{0\} \text{ et } s/\lambda \in \mathrm{H}^0(\mathcal{A}, \mathcal{L}^{\otimes n}) \otimes_{\mathcal{O}_k} \mathcal{O}_v\right\} \tag{1}$$

(k_v est le complété de k en la place v et $\mathcal{O}_v$ son anneau de valuation). La structure archimédienne de $\overline{H_n}$ est donnée par intégration des normes cubistes : pour tout $\sigma\colon k \hookrightarrow \mathbf{C}$, pour tout $s \in \mathrm{H}^0(A, L^{\otimes n}) \otimes_\sigma \mathbf{C}$,

$$\|s\|_{\overline{H_n},\sigma} := \left(\int_{A_\sigma} \|s(x)\|^2_{\mathrm{cub},\sigma}\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

où dx est la mesure de Haar normalisée sur A_σ. Muni de ces normes, $\overline{H_n}$ a une structure de fibré adélique hermitien et sa pente d'Arakelov normalisée a été calculée par Bost (voir le théorème 4.10, (v), de [Bo2]) :

$$\widehat{\mu}(\overline{H_n}) = -\frac{1}{2}h(A) + \frac{1}{4}\log\left(\frac{n^g \mathrm{h}^0(A,L)}{(2\pi)^g}\right). \tag{2}$$

Par ailleurs, comme nous l'avons vu au § 3.2, l'espace tangent t_A de A possède lui-même une structure de fibré adélique hermitien $\overline{t_A} = (t_A, (\|.\|_{L,\sigma})_{\sigma\colon k\hookrightarrow\mathbf{C}})$ (dont nous pourrons utiliser la pente sans risque en vertu de l'hypothèse de semi-stabilité faite ci-dessus). Il existe un lien entre la métrique cubiste et la métrique $\|.\|_{L,\sigma}$. Si ϑ est la fonction thêta (voir § 2.5) associée à $s \in \mathrm{H}^0(A, L^{\otimes n}) \otimes_\sigma \mathbf{C}$ alors, pour tout $x = \exp_{A_\sigma}(z) \in A_\sigma$, on a

$$\|s(x)\|_{\mathrm{cub},\sigma} = |\vartheta(z)| \exp\left(-\frac{\pi}{2}n\|z\|^2_{L,\sigma}\right). \tag{3}$$

6.2. **Choix des paramètres.** Soit n un nombre réel ≥ 1 tel que $n := x\mathsf{n}$ soit un entier. On pose $T := [\mathsf{n}] + 1$. Nous introduisons aussi le nombre réel $\theta = (\log 2)/\pi$ et, pour chaque plongement complexe $\sigma\colon k \hookrightarrow \mathbf{C}$, le réel $\varepsilon_\sigma = (6\sqrt{2} - 8)g^{-g}\xi_\sigma$. Nous signalons toutefois que ces valeurs exactes ne seront utilisées qu'au paragraphe 6.8. D'ici là, nous n'aurons besoin que de $\theta > 0$ et $0 < \varepsilon_\sigma < 1$ pour tout σ.

Notre dernière famille de paramètres (entiers) est définie par $T_\sigma := [\varepsilon_\sigma \mathsf{n}]$ pour tout plongement σ. Notons $T_\sigma \leq T$. Le paramètre n va tendre vers $+\infty$ en fin de démonstration. En particulier l'on peut supposer que T, n et les T_σ ne sont pas nuls. Le choix de x assure le résultat suivant.

Proposition 6.1. *Il n'existe aucune section non nulle de* $\mathrm{H}^0(A, L^{\otimes n})$ *qui s'annule à l'ordre* gT *le long de* t_A *en* 0_A.

Démonstration. Dans le cas contraire, le lemme de multiplicités de Nakamaye [Na] assure l'existence d'une sous-variété abélienne A' de A, avec $A' \neq A$ et A' définie sur $\overline{k}$, telle que $T^{g-\dim A'} \deg_L A' \leq (\deg_L A) n^{g-\dim A'}$. En écrivant cette inégalité au moyen de $x(A')$ on trouve

$$\frac{[\mathsf{n}]+1}{\mathsf{n}} \cdot \frac{x(A')}{x} \leq 1$$

qui est impossible puisque $x(A') \geq x$. □

Soient $\sigma\colon k \hookrightarrow \mathbf{C}$ un plongement complexe de k et $\omega_\sigma \in (\Omega_{A_\sigma} + t_{B[\sigma]}) \setminus t_{B[\sigma]}$ de norme égale à δ_σ. Cette condition implique que ω_σ appartient à l'orthogonal de $t_{B[\sigma]}$ dans $(t_{A_\sigma}, \|.\|_{L,\sigma})$. Il est donc possible de fixer une base orthonormée $f_\sigma := (f_{1,\sigma}, \ldots, f_{g,\sigma})$ de t_{A_σ} ayant les propriétés suivantes :

(i) $(f_{1,\sigma}, \ldots, f_{\dim B[\sigma],\sigma})$ est une base de $t_{B[\sigma]}$,
(ii) $f_{g,\sigma} := \omega_\sigma/\|\omega_\sigma\|_{L,\sigma}$.

6.3. **Fibré adélique des sections auxiliaires.** Au § 6.1, nous avons muni le k-espace vectoriel $H_n = \mathrm{H}^0(A, L^{\otimes n})$ d'une structure adélique hermitienne $\overline{H}_n = (H_n, (\|.\|_{\overline{H}_n,v})_v)$. L'objectif de ce paragraphe est de munir H_n d'une structure hermitienne différente en certaines places archimédiennes de k, structure obtenue par déformation de $\|.\|_{\overline{H}_n,v}$. Une fois ce fibré adélique tordu défini, nous estimerons sa pente d'Arakelov.

On pose $\nu := \dim_k H_n = n^g \mathrm{h}^0(A, L)$. Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des plongements complexes σ de k tels que $\delta_\sigma^2/\varepsilon_\sigma \leq \theta/x$. On notera que $\mathcal{V}$ est stable par conjugaison complexe. À chaque plongement complexe $\sigma\colon k \hookrightarrow \mathbf{C}$ qui appartient à $\mathcal{V}$, l'on associe l'entier $S_\sigma \geq 1$, qui ne dépend pas de n, défini par

$$S_\sigma := \left[\frac{\theta\varepsilon_\sigma}{x\delta_\sigma^2}\right]$$

et le nombre réel $\alpha_\sigma := 4^{T_\sigma S_\sigma}$. Ce nombre α_σ ne dépend que de la place v de k sous-jacente à σ. Soit $(s_1, \dots, s_\nu)$ une base orthonormée de $(H_n \otimes_\sigma \mathbf{C}, \|.\|_{\overline{H}_n,\sigma})$. Pour tout $i \in \{1, \dots, \nu\}$, soit $\vartheta_i : t_{A_\sigma} \to \mathbf{C}$ la fonction thêta associée à s_i (voir § 2.5). Étant donné une base $\mathsf{e} = (e_1, \dots, e_g)$ de t_{A_σ}, un multiplet $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_g) \in \mathbf{N}^g$ et un vecteur $z = z_1e_1 + \cdots + z_ge_g \in t_{A_\sigma}$, on note $\frac{1}{\tau!}\mathrm{D}_\mathsf{e}^\tau\vartheta(z)$ la dérivée divisée $\frac{1}{\tau_1!\cdots\tau_g!}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{\tau_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial z_g}\right)^{\tau_g}\vartheta(z_1e_1 + \cdots + z_ge_g)$.

Soit Υ_σ l'ensemble des couples $(m, \tau) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^g$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $m \in \{1 - S_\sigma, \dots, S_\sigma - 1\}$,
(ii) si τ s'écrit $(\tau_1, \dots, \tau_g)$ alors $|\tau| := \tau_1 + \cdots + \tau_g \leq gT + T_\sigma - 1$,
(iii) $\tau_g \leq T_\sigma - 1$.

Soit υ_σ le cardinal de Υ_σ. On a l'estimation triviale $\upsilon_\sigma \leq (4gS_\sigma T)^g$. Rappelons que $f_\sigma = (f_{1,\sigma}, \dots, f_{g,\sigma})$ désigne la base orthonormée de t_{A_σ} introduite au § 6.2 et considérons la matrice complexe a_σ de taille $\upsilon_\sigma \times \nu$, de coefficients :

$$\mathsf{a}_\sigma[(m, \tau), i] := \left(\frac{1}{\tau!}\mathrm{D}_{f_\sigma}^\tau\vartheta_i(m\omega_\sigma)\right)\exp\left\{-\frac{\pi}{2}n\|m\omega_\sigma\|_{L,\sigma}^2\right\}$$

pour tous $(m, \tau) \in \Upsilon_\sigma$ et $i \in \{1, \dots, \nu\}$. Dans la suite, on notera ϱ_σ le rang de la matrice a_σ.

Définition 6.2. Posons $\alpha := (\alpha_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{V}}$. Le fibré adélique hermitien $\overline{H}_{n,\alpha}$ sur k est le fibré vectoriel adélique d'espace vectoriel sous-jacent H_n et dont les normes sont les suivantes : en une place v de k qui n'induit aucun plongement $k \hookrightarrow \mathbf{C}$ appartenant à $\mathcal{V}$, on pose $\|.\|_{\overline{H}_{n,\alpha},v} := \|.\|_{\overline{H}_n,v}$; si v est une place archimédienne de k tel qu'un plongement complexe $\sigma\colon k \hookrightarrow \mathbf{C}$ associé appartienne à $\mathcal{V}$, la norme $\|.\|_{\overline{H}_{n,\alpha},v}$ est définie par

$$\|\mathtt{x}_1s_1 + \cdots + \mathtt{x}_\nu s_\nu\|_{\overline{H}_{n,\alpha},v} := \left(|\mathtt{x}|_2^2 + |\alpha_\sigma\mathsf{a}_\sigma(\mathtt{x})|_2^2\right)^{1/2}$$

pour tout $\mathtt{x} = {}^{\mathrm{t}}(\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_\nu) \in \mathbf{C}^\nu$ (la norme $|.|_2$ est la norme hermitienne usuelle sur $\mathbf{C}^\nu$ ou $\mathbf{C}^{\upsilon_\sigma}$).

Aux places archimédiennes, la norme ainsi définie ne dépend pas du choix de σ associé à v. L'estimation de la pente de $\overline{H}_{n,\alpha}$ requiert le lemme suivant, variante de l'inégalité de Cauchy pour les fonctions holomorphes.

Lemme 6.3. *Soit $\sigma\colon k \hookrightarrow \mathbf{C}$ un plongement complexe de k. Soient $s \in \mathrm{H}^0(A, L^{\otimes n}) \otimes_\sigma \mathbf{C}$ et ϑ la fonction thêta associée. Soit $\mathsf{e} = (e_1, \dots, e_g)$ une base orthonormée de $(t_{A_\sigma}, \|.\|_{L,\sigma})$. Alors, pour tout $z \in t_{A_\sigma}$, pour tout $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_g) \in \mathbf{N}^g$, on a*

$$\left|\frac{1}{\tau!}\mathrm{D}_\mathsf{e}^\tau\vartheta(z)\right|\exp\left\{-\frac{\pi}{2}n\|z\|_{L,\sigma}^2\right\} \leq \|s\|_{\infty,\sigma}\exp\left\{\frac{\pi}{2}n(1 + 2\|z\|_{L,\sigma})\right\}$$

où $\|s\|_{\infty,\sigma} := \sup\{\|s(x)\|_{\mathrm{cub},\sigma};\ x \in A_\sigma\}$.

Démonstration. L'inégalité de Cauchy pour la fonction holomorphe ϑ se traduit par la majoration

$$\left|\frac{1}{\tau!}\mathrm{D}_\mathsf{e}^\tau\vartheta(z)\right| \leq \frac{1}{r^{|\tau|}}\sup\{|\vartheta(z + y)|\,;\ y \in t_{A_\sigma} \text{ et } \|y\|_{L,\sigma} \leq r\}$$

valide pour tout nombre réel $r > 0$. La relation (3) entre s et ϑ fournit l'estimation

$$|\vartheta(z + y)|\exp\left\{-\frac{\pi}{2}n\|z\|_{L,\sigma}^2\right\} \leq \|s\|_{\infty,\sigma}\exp\left\{\frac{\pi}{2}n(r^2 + 2r\|z\|_{L,\sigma})\right\},$$

ce qui démontre le lemme, en choisissant $r = 1$. □

Un *lemme de Gromov* assure l'existence d'une constante $c > 0$, qui ne dépend que de (A, L), telle que, pour tout $s \in H_n \otimes_\sigma \mathbf{C}$, on a $\|s\|_{\infty,\sigma} \leq n^c \|s\|_{\overline{H}_n,\sigma}$ (voir [GS, lemme 30]). De ces résultats découle la proposition suivante (rappelons que ϱ_σ désigne le rang de la matrice a_σ).

Proposition 6.4. *Il existe une constante $c > 0$, qui ne dépend pas de n, telle que la pente d'Arakelov normalisée $\widehat{\mu}(\overline{H}_{n,\alpha})$ de $\overline{H}_{n,\alpha}$ est minorée par*

$$-\sum_{\sigma\in\mathcal{V}} \frac{\varrho_\sigma}{[k:\mathbf{Q}]\nu} \Big(\log \alpha_\sigma + \frac{\pi}{2} n(1 + 2S_\sigma\delta_\sigma)\Big) - c \log \mathsf{n}.$$

Démonstration. En vertu de la proposition 4.0.7 de [Ga4], la différence des pentes $\widehat{\mu}(\overline{H}_{n,\alpha}) - \widehat{\mu}(\overline{H}_n)$ est minorée par

$$-\sum_{\sigma\in\mathcal{V}} \frac{\varrho_\sigma}{[k:\mathbf{Q}]\nu} \Big(\log(1 + \alpha_\sigma^2)^{1/2} + \log \max\{1, \|\mathsf{a}_\sigma\|_{\mathrm{op}}\}\Big)$$

où $\|\mathsf{a}_\sigma\|_{\mathrm{op}}$ désigne la norme d'opérateur de $\mathsf{a}_\sigma : (\mathbf{C}^\nu, |.|_2) \to (\mathbf{C}^{\upsilon_\sigma}, |.|_2)$. La comparaison de cette norme avec celle de Hilbert-Schmidt conduit à la majoration

$$\|\mathsf{a}_\sigma\|_{\mathrm{op}} \leq (\nu\upsilon_\sigma)^{1/2} \max\{|\mathsf{a}_\sigma[(m,\tau), i]|\,;\ (m,\tau) \in \Upsilon_\sigma,\ 1 \leq i \leq \nu\}\ .$$

D'après le lemme 6.3 et *via* la majoration de Gromov, le maximum qui apparaît ci-dessus est plus petit que $\exp\big\{\frac{\pi}{2} n(1 + 2S_\sigma\delta_\sigma)\big\} n^{c'}$ (c' constante qui ne dépend pas de n). La partie $(\nu\upsilon_\sigma)^{1/2} n^{c'}$ entre dans le $c \log \mathsf{n}$ de la proposition, ainsi que la différence entre $\log(1 + \alpha_\sigma^2)^{1/2}$ et $\log \alpha_\sigma$. Quant à la pente $\widehat{\mu}(\overline{H}_n)$, la formule (2) montre qu'elle fait partie elle aussi de $c \log \mathsf{n}$. □

6.4. **Estimation de rangs.** Dans la proposition 6.4 du paragraphe précédent est apparu le rang ϱ_σ de la matrice a_σ. Pour que cette proposition soit utilisable dans la suite, il est important d'avoir une estimation soigneuse de ϱ_σ, plus précise que $\varrho_\sigma \leq \min\{\nu, \upsilon_\sigma\}$. Comme l'ont montré Philippon et Waldschmidt [PW], le choix de x et son incorporation dans le paramètre $n = x\mathsf{n}$ vont permettre de faire en sorte que $\varrho_\sigma/\nu < 1$. Étant donné un nombre réel ε, on note

$$r(g, \varepsilon) := (g + \varepsilon)^g - g^g.$$

Si $\varepsilon \leq 1$, nous avons facilement $r(g, \varepsilon) \leq g^g \varepsilon (1 - \varepsilon)^{-1}$.

Proposition 6.5. *Pour tout plongement $\sigma\colon k \hookrightarrow \mathbf{C}$ appartenant à $\mathcal{V}$, le quotient ϱ_σ/ν du rang ϱ_σ de la matrice a_σ par la dimension ν de $\mathrm{H}^0(A, L^{\otimes n})$ est plus petit que $r(g, \varepsilon_\sigma)/\xi_\sigma + \mathrm{o}(1)$ où $\mathrm{o}(1)$ désigne une fonction qui tend vers 0 lorsque n tend vers ∞.*

Démonstration. Soit $g_\sigma := \dim B[\sigma]$. L'idée de Philippon et Waldschmidt est de majorer ϱ_σ par $\dim E - \dim F$ où E est l'espace des fonctions thêta associées à $L_\sigma^{\otimes n}$ et F le sous-espace formé des fonctions dont toutes les dérivées $D_{f_\sigma}^\tau \vartheta$ sont identiquement nulles sur $t_{B[\sigma]}$ pour $\tau = (0, \ldots, 0, \tau_{g_\sigma+1}, \ldots, \tau_g)$ de longueur $\leq gT + T_\sigma - 1$ avec, de plus, $\tau_g \leq T_\sigma - 1$. Pour $-1 \leq \ell \leq gT + T_\sigma - 1$ on note aussi F_ℓ le sous-espace de E défini de même en limitant la condition aux indices de longueur au plus ℓ. Nous avons donc $F = F_{gT+T_\sigma-1} \subset F_{gT+T_\sigma-2} \subset \cdots \subset F_0 \subset F_{-1} = E$. D'un autre côté, $\varrho_\sigma = \dim E - \dim G$ où G est le sous-espace formé des fonctions telles que $D_{f_\sigma}^\tau \vartheta(m\omega_\sigma) = 0$ pour tous $(m, \tau) \in \Upsilon_\sigma$. L'inégalité $\varrho_\sigma \leq \dim E - \dim F$ découle donc de $F \subset G$: si $\vartheta \in F$ et $(m, \tau) \in \Upsilon_\sigma$, on écrit $m\omega_\sigma \in \omega + t_{B[\sigma]}$ pour $\omega \in \Omega_{A_\sigma}$ et l'on applique la dérivation $D_{f_\sigma}^\tau$ à la formule $\vartheta(z + \omega) = a_{L_\sigma}(z, \omega)^n \vartheta(z)$. Maintenant si τ est un indice intervenant dans la définition de F_ℓ et si $\vartheta \in F_{\ell-1}$ alors la dérivée $D_{f_\sigma}^\tau \vartheta$ définit une fonction thêta sur $t_{B[\sigma]}$: en effet, comme précédemment, lorsque l'on dérive par la formule de Leibniz l'égalité $\vartheta(z + \omega) = a_{L_\sigma}(z, \omega)^n \vartheta(z)$ pour $\omega \in \Omega_{B[\sigma]}$ et $z \in t_{B[\sigma]}$ alors toutes les autres dérivées apparaissant sont nulles par définition de $F_{\ell-1}$. Par suite on définit une injection de $F_{\ell-1}/F_\ell$ dans une somme de copies de $\mathrm{H}^0(B[\sigma], L_\sigma^{\otimes n})$. En sommant sur ℓ et en calculant le nombre total $\mathtt{X}$ de copies, nous trouvons $\varrho_\sigma \leq \dim E - \dim F \leq \mathtt{X} \mathrm{h}^0(B[\sigma], L_\sigma^{\otimes n}) = \mathtt{X}(\deg_{L_\sigma} B[\sigma]) n^{g_\sigma}/g_\sigma!$ où

$$\begin{aligned}\mathtt{X} &:= \mathrm{card}\big\{\tau' = (\tau_{g_\sigma+1}, \ldots, \tau_g) \in \mathbf{N}^{g-g_\sigma}\ ;\ |\tau'| \leq gT + T_\sigma - 1 \text{ et } \tau_g \leq T_\sigma - 1\big\} \\ &= \binom{gT + T_\sigma - 1 + g - g_\sigma}{g - g_\sigma} - \binom{gT + g - g_\sigma}{g - g_\sigma}.\end{aligned}$$

Si $\mathsf{y} \in \mathbf{N}$ alors le coefficient binomial $\binom{\mathsf{x}+\mathsf{y}}{\mathsf{y}}$ est équivalent à $\mathsf{x}^{\mathsf{y}}/\mathsf{y}!$ lorsque x tend vers ∞. En divisant ϱ_σ par $\nu = n^g(\deg_L A)/g!$ et grâce au choix des paramètres $T = [\mathsf{n}]+1$, $T_\sigma = [\varepsilon_\sigma \mathsf{n}]$ et $n = x\mathsf{n}$, nous obtenons alors

$$\frac{\varrho_\sigma}{\nu} \leq \binom{g}{g_\sigma} \times \big((g+\varepsilon_\sigma)^{g-g_\sigma} - g^{g-g_\sigma}\big) \times \frac{\deg_{L_\sigma} B[\sigma]}{x^{g-g_\sigma} \deg_L A} + \mathrm{o}(1)$$

lorsque $\mathsf{n} \to +\infty$. Dans ce majorant, le dernier quotient vaut exactement ξ_σ^{-1} tandis que le facteur qui le précède est majoré par $r(g,\varepsilon_\sigma)$ (en utilisant $\binom{g}{g_\sigma} \leq g^{g_\sigma}$). □

6.5. **Construction d'une section auxiliaire.** Si $\overline{E} = (E, (\|.\|_{\overline{E},v})_{v \text{ place de } k})$ est un fibré vectoriel adélique sur k, la hauteur $h_{\overline{E}}(x)$ d'un élément $x \in E \setminus \{0\}$ est le nombre réel :

$$h_{\overline{E}}(x) := \frac{1}{[k:\mathbf{Q}]} \sum_v [k_v : \mathbf{Q}_v] \log \|x\|_{\overline{E},v}.$$

En notant $\Delta_{k/\mathbf{Q}}$ le discriminant absolu de k, le lemme de Siegel de Bombieri-Vaaler [BV] affirme qu'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que

$$h_{\overline{E}}(x) \leq -\widehat{\mu}(\overline{E}) + \frac{1}{2} \log \dim E + \frac{1}{2[k:\mathbf{Q}]} \log |\Delta_{k/\mathbf{Q}}|.$$

En appliquant ce lemme à $\overline{E} = \overline{H}_{n,\alpha}$ et en utilisant les propositions 6.4 et 6.5, on a le résultat suivant.

Proposition 6.6. *Il existe une section $s \in \mathrm{H}^0(A, L^{\otimes n})$ non nulle telle que*

$$h_{\overline{H}_{n,\alpha}}(s) \leq \frac{1}{[k:\mathbf{Q}]} \sum_{\sigma \in \mathcal{V}} \frac{r(g,\varepsilon_\sigma)}{\xi_\sigma} \Big(\log \alpha_\sigma + \frac{\pi}{2} n(1 + 2S_\sigma \delta_\sigma) \Big) + \mathrm{o}(\mathsf{n}).$$

6.6. **Extrapolation analytique.** À partir de maintenant, la section s qui apparaît est celle construite dans la proposition 6.6 du paragraphe précédent. Soit ℓ l'ordre d'annulation de s en 0 (le long de t_A). La proposition 6.1 fournit l'estimation $\ell \leq gT$.

Soit v une place archimédienne de k telle qu'un plongement $\sigma\colon k \hookrightarrow \mathbf{C}$ induit par cette place appartienne à $\mathcal{V}$. Soit $\vartheta : t_{A_\sigma} \to \mathbf{C}$ la fonction thêta associée à s dans $H_n \otimes_\sigma \mathbf{C}$. Dans ce paragraphe, nous établissons une majoration fine de la v-norme du jet de s d'ordre ℓ en 0. Ceci est rendu possible par la construction de s et de la norme tordue sur $\overline{H}_{n,\alpha}$ qui implique que les dérivées $\frac{1}{\tau!}\mathrm{D}_{f_\sigma}^\tau \vartheta(m\omega_\sigma)$ sont « petites » pour $(m,\tau) \in \Upsilon_\sigma$. À cette fin, nous allons utiliser le lemme d'interpolation analytique du § 5.

Soit $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_g) \in \mathbf{N}^g$ de longueur $|\tau| = \ell$ et posons $\tau' := (\tau_1, \dots, \tau_{g-1}, 0)$. Pour $z \in \mathbf{C}$, considérons la fonction entière

$$\mathtt{f}(z) := \frac{1}{\tau'!}\mathrm{D}_{f_\sigma}^{\tau'} \vartheta(z\omega_\sigma)$$

où f_σ est la base orthonormée de t_{A_σ} introduite au § 6.2 (avec laquelle a été construite la matrice $\mathtt{a}_\sigma$). Notons $\mathrm{D}_{\omega_\sigma} = \delta_\sigma \mathrm{D}_{f_{g,\sigma}}$ la dérivée dans la direction de ω_σ. Pour $h \in \mathbf{N}$, la dérivée divisée $h^{\text{ème}}$ de $\mathtt{f}$ s'écrit

$$\frac{1}{h!}\mathtt{f}^{(h)}(z) = \frac{1}{\tau'!h!}\mathrm{D}_{f_\sigma}^{\tau'}\mathrm{D}_{\omega_\sigma}^h \vartheta(z\omega_\sigma) = \delta_\sigma^h \cdot \frac{1}{\tau^{(h)}!}\mathrm{D}_{f_\sigma}^{\tau^{(h)}} \vartheta(z\omega_\sigma)$$

où $\tau^{(h)} := \tau' + (0, \dots, 0, h)$. Lorsque $h < T_\sigma$, la longueur de $\tau^{(h)}$ est plus petite que $|\tau| + T_\sigma - 1 \leq gT + T_\sigma - 1$ et la dernière coordonnée de ce multiplet est plus petite que $T_\sigma - 1$. Par conséquent, si $h < T_\sigma$, les nombres

$$\frac{1}{\tau^{(h)}!}\mathrm{D}_{f_\sigma}^{\tau^{(h)}} \vartheta(m\omega_\sigma) \exp\Big\{-\frac{\pi}{2} n \|m\omega_\sigma\|_{L,\sigma}^2\Big\} \tag{4}$$

avec $m \in \{1 - S_\sigma, \dots, S_\sigma - 1\}$ sont des coordonnées du vecteur $\mathtt{a}_\sigma(\mathtt{x})$ où $\mathtt{x}$ est le vecteur des coordonnées de s (voir définition 6.2). La norme hermitienne du vecteur formé par les nombres (4) est donc plus petite que $\alpha_\sigma^{-1}\|s\|_{\overline{H}_{n,\alpha},v}$. En utilisant la définition de $\alpha_\sigma = 4^{T_\sigma S_\sigma}$, on trouve ainsi

$$\left|\frac{1}{\delta_\sigma^h h!}\mathtt{f}^{(h)}(m)\right| = \left|\frac{1}{\tau^{(h)}!}\mathrm{D}_{f_\sigma}^{\tau^{(h)}} \vartheta(m\omega_\sigma)\right| \leq 4^{-T_\sigma S_\sigma}\|s\|_{\overline{H}_{n,\alpha},v} \exp\Big\{\frac{\pi}{2} n (S_\sigma \delta_\sigma)^2\Big\} \tag{5}$$

valide pour tous $m \in \{1-S_\sigma, \dots, S_\sigma - 1\}$ et $h \in \{0, \dots, T_\sigma - 1\}$. Par ailleurs, le lemme 6.3 donne la majoration

$$|\mathtt{f}|_{S_\sigma} \leq \|s\|_{\infty,\sigma} \exp\Big\{\frac{\pi}{2} n (S_\sigma \delta_\sigma + 1)^2\Big\}.$$

Comme nous l'avons vu avant la proposition 6.4, la norme $\|s\|_{\infty,\sigma}$ peut être remplacée par $n^c \|s\|_{\overline{H}_n,v} \leq n^c \|s\|_{\overline{H}_{n,\alpha},v}$ où $c > 0$ est une constante qui ne dépend que de (A, L).

La proposition 5.1 appliquée à $\mathtt{f}$ et aux paramètres S_σ et T_σ et l'inégalité de Cauchy

$$\left|\frac{1}{\tau_g!} \mathtt{f}^{(\tau_g)}(0)\right| \leq |\mathtt{f}|_1$$

donnent alors

$$\delta_\sigma^{\tau_g} \left|\frac{1}{\tau!} \mathrm{D}_{f_\sigma}^\tau \vartheta(0)\right| \leq \left(\frac{12}{4^{S_\sigma}}\right)^{T_\sigma} \mathtt{n}^{2c} \|s\|_{\overline{H}_{n,\alpha},v} \max\{1, \delta_\sigma\}^{T_\sigma} \exp\Big\{\frac{\pi}{2} n (S_\sigma \delta_\sigma + 1)^2\Big\}.$$

Cette estimation est valide pour tout $\tau = (\tau', \tau_g) \in \mathbf{N}^{g-1} \times \mathbf{N}$ de longueur ℓ. En l'utilisant si $\tau_g \geq T_\sigma$, mais en prenant plutôt (5) (avec $m = 0$) si $\tau_g = h < T_\sigma$, on obtient dans tous les cas la borne

$$\left|\frac{1}{\tau!} \mathrm{D}_{f_\sigma}^\tau \vartheta(0)\right| \leq \left(\frac{12}{4^{S_\sigma}}\right)^{T_\sigma} \mathtt{n}^{2c} \|s\|_{\overline{H}_{n,\alpha},v} \max\left(1, \frac{1}{\delta_\sigma}\right)^{\ell} \exp\Big\{\frac{\pi}{2} n (S_\sigma \delta_\sigma + 1)^2\Big\}. \tag{6}$$

Nous allons la traduire en termes d'une majoration de la norme du jet de s d'ordre ℓ en 0. Commençons par rappeler la définition algébrique d'un jet de section dans un cadre général. Soient m un entier naturel, $\mathcal{A}$ un schéma sur $\mathcal{S}$ et $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur $\mathcal{A}$. On suppose qu'il existe une immersion fermée $\epsilon : \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{A}$. Notons $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux sur $\mathcal{A}$ défini par ϵ et $\Omega_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}$ le $\mathcal{O}_\mathcal{A}$-module des différentielles relatives. Lorsque $\mathcal{A} \to \mathcal{S}$ est lisse le long de ϵ ($\mathcal{I}$ régulier), le quotient $\epsilon^*(\mathcal{I}^m/\mathcal{I}^{m+1})$ est isomorphe à la puissance symétrique $S^m(\epsilon^*\Omega_{\mathcal{A}/\mathcal{S}})$. Une section $s \in \mathrm{H}^0(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ s'annule à l'ordre m le long de ϵ si $s \in \mathrm{H}^0(X, \mathcal{I}^m \otimes \mathcal{L})$. Dans ce cas, le *jet d'ordre m de s en ϵ*, noté $\mathrm{jet}^m s(\epsilon)$, est l'image de s par l'application composée

$$\mathrm{H}^0\left(\mathcal{A}, \mathcal{I}^m \otimes \mathcal{L}\right) \to \mathrm{H}^0\left(\mathcal{S}, \epsilon^*(\mathcal{I}^m/\mathcal{I}^{m+1}) \otimes \epsilon^*\mathcal{L}\right) \longrightarrow \mathrm{H}^0\left(\mathcal{S}, S^m\left(\epsilon^*\Omega_{\mathcal{A}/\mathcal{S}}\right) \otimes \epsilon^*\mathcal{L}\right).$$

Notons $\exp_\sigma : t_{A_\sigma} \to A_\sigma$ l'application exponentielle de A_σ. L'élément ϑ de $\mathrm{H}^0(t_{A_\sigma}, \exp_\sigma^* L_\sigma^{\otimes n})$ a un jet d'ordre ℓ en 0. En considérant la base duale (orthonormée) $(f_{1,\sigma}^\vee, \dots, f_{g,\sigma}^\vee)$ de $(f_{1,\sigma}, \dots, f_{g,\sigma})$, on a

$$\mathrm{jet}^\ell \vartheta(0) = \sum_{|\tau|=\ell} \left(\frac{1}{\tau!} \mathrm{D}_{f_\sigma}^\tau \vartheta(0)\right) (f_{1,\sigma}^\vee)^{\tau_1} \cdots (f_{g,\sigma}^\vee)^{\tau_g} \in S^\ell(t_A^\vee) \otimes_\sigma \mathbf{C}$$

(dans cette somme, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_g)$). La norme de ce jet est égale à celle du jet de s car L_σ est rigidifié isométriquement en l'origine. Les normes sur la puissance symétrique $S^\ell(t_A^\vee)$ sont les normes quotient de $\overline{t_A^\vee}^{\otimes \ell}$ (voir [Ga3, p. 45]). En notant $S^\ell(\overline{t_A^\vee})$ le fibré adélique hermitien obtenu, on a alors

$$\|\mathrm{jet}^\ell s(0)\|_{S^\ell(\overline{t_A^\vee}),v} \leq \binom{g-1+\ell}{g-1} \max_{|\tau|=\ell} \left|\frac{1}{\tau!} \mathrm{D}_{f_\sigma}^\tau \vartheta(0)\right|. \tag{7}$$

De plus, grâce à la proposition 4.3, on a

$$\max\left(1, \frac{1}{\delta_\sigma}\right) \leq (\deg_{L_\sigma} B[\sigma])^2 \max\left(1, \frac{1}{\rho(A_\sigma, L_\sigma)}\right).$$

De cette observation et des majorations (6) et (7) découle l'énoncé suivant.

Proposition 6.7. *Il existe une constante $c > 0$, qui ne dépend pas de $\mathtt{n}$, ayant la propriété suivante. Soit v une place archimédienne de k telle qu'un plongement $\sigma\colon k \hookrightarrow \mathbf{C}$ induit par v soit dans $\mathcal{V}$. Le premier jet non nul $\mathrm{jet}^\ell s(0)$ de s en 0 est de v-norme inférieure à*

$$12^{T_\sigma} \mathtt{n}^c \left((\deg_{L_\sigma} B[\sigma])^2 \max\left\{1, \frac{1}{\rho(A_\sigma, L_\sigma)}\right\}\right)^{\ell} \|s\|_{\overline{H}_{n,\alpha},v} \exp\Big\{\frac{\pi}{2} n (S_\sigma \delta_\sigma + 1)^2 - T_\sigma S_\sigma \log 4\Big\}. \tag{8}$$

6.7. **Estimation de la hauteur du premier jet non nul.** Le paragraphe précédent a été consacré à majorer la norme du premier jet non nul $\mathrm{jet}^\ell s(0)$ de s en 0 en certaines places archimédiennes de k. Ces normes ne sont qu'une partie de la hauteur du jet :

$$h_{S^\ell(\overline{t_A^\vee})}(\mathrm{jet}^\ell s(0)) = \frac{1}{[k:\mathbf{Q}]}\sum_v [k_v:\mathbf{Q}_v]\log\|\mathrm{jet}^\ell s(0)\|_{S^\ell(\overline{t_A^\vee}),v}.$$

Ici nous estimons les normes restantes en distinguant selon leur caractère archimédien ou ultramétrique.

6.7.1. *Majoration de la norme en une place ultramétrique.* Soit v une place ultramétrique de k. D'après la formule (1) donnant $\|s\|_{\overline{H_n},v}$, la section $s\in \mathrm{H}^0(A,L^{\otimes n})\hookrightarrow \mathrm{H}^0(A,L^{\otimes n})\otimes_k k_v$ s'écrit $\lambda s'$ avec $s'\in \mathrm{H}^0(\mathcal{A},\mathcal{L}^{\otimes n})\otimes_{\mathcal{O}_k}\mathcal{O}_v$ de norme 1 ($\mathcal{O}_v$ est l'anneau de valuation de k_v). Notons $\mathcal{A}_v=\mathcal{A}\times\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v$, ϵ_v sa section nulle et $\mathcal{L}_v$ le faisceau inversible sur $\mathcal{A}_v$ induit par $\mathcal{L}$. Vu la définition du jet de s' appliquée au quadruplet $(\mathcal{A},\mathcal{S},\epsilon,\mathcal{L})=(\mathcal{A}_v,\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v,\epsilon_v,\mathcal{L}_v)$, l'élément $\mathrm{jet}^\ell s(0)$ vu dans $S^\ell(t_A^\vee)$ est égal à $\lambda.\,\mathrm{jet}^\ell s'(\epsilon_v)$ avec $\mathrm{jet}^\ell s'(\epsilon_v)\in S^\ell(t_{\mathcal{A}_v}^\vee)$ (par lissité de $\mathcal{A}_v\to\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v$; nous avons omis $\epsilon_v^*\mathcal{L}_v$ car $\mathcal{L}$ est rigidifié en l'origine). La norme v-adique de $\mathrm{jet}^\ell s(0)$ est calculée relativement au modèle entier $S^\ell(t_{\mathcal{A}}^\vee)$ de $S^\ell(t_A^\vee)$ et on a l'estimation

$$\|\mathrm{jet}^\ell s(0)\|_{S^\ell(\overline{t_A^\vee}),v}\le |\lambda|_v=\|s\|_{\overline{H_n},v}=\|s\|_{\overline{H}_{n,\alpha},v}. \tag{9}$$

On peut reformuler cette majoration en disant que la taille du sous-schéma formel induit par $\mathcal{A}_v$ vaut 1 (car $\mathcal{A}_v$ est lisse le long de l'origine), ce qui entraîne l'intégralité des jets (voir [Bo4, lemme 3.3]).

6.7.2. *Majoration de la norme en une place archimédienne.* Soient v une place archimédienne de k et $\sigma\colon k\hookrightarrow\mathbf{C}$ un plongement complexe associé. Au moyen de l'estimation (7) du jet de s en 0 à l'ordre ℓ et *via* le lemme 6.3, on a

$$\|\mathrm{jet}^\ell s(0)\|_{S^\ell(\overline{t_A^\vee}),v}\le\binom{g-1+gT}{g-1}e^{\pi n/2}\|s\|_{\infty,\sigma}.$$

Le lemme de Gromov fournit alors l'existence d'une constante $c>0$, ne dépendant que de (A,L), telle que

$$\|\mathrm{jet}^\ell s(0)\|_{S^\ell(\overline{t_A^\vee}),v}\le e^{\pi n/2}\mathsf{n}^c\|s\|_{\overline{H}_{n,\alpha},v}\ . \tag{10}$$

6.7.3. *Hauteur du jet.* En regroupant les estimations (8), (9) et (10), la hauteur du premier jet non nul vérifie

$$\begin{aligned} h_{S^\ell(\overline{t_A^\vee})}(\mathrm{jet}^\ell s(0)) \le{}& h_{\overline{H}_{n,\alpha}}(s)+c\log\mathsf{n}+\frac{2gT}{[k:\mathbf{Q}]}\sum_{\sigma\in\mathcal{V}}\log\deg_{L_\sigma}B[\sigma]\\ &+\frac{gT}{[k:\mathbf{Q}]}\sum_{\sigma\in\mathcal{V}}\log\max\left\{1,\frac{1}{\rho(A_\sigma,L_\sigma)}\right\}-\frac{\log 4}{[k:\mathbf{Q}]}\sum_{\sigma\in\mathcal{V}}T_\sigma S_\sigma\\ &+\frac{\pi n}{2}\left(1+\frac{1}{[k:\mathbf{Q}]}\sum_{\sigma\in\mathcal{V}}S_\sigma\delta_\sigma(S_\sigma\delta_\sigma+2)\right)+\frac{\log 12}{[k:\mathbf{Q}]}\sum_{\sigma\in\mathcal{V}}T_\sigma \end{aligned} \tag{11}$$

pour une certaine constante $c>0$ qui ne dépend pas de n.

6.8. **Conclusion.** Rappelons que la pente maximale $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})$ d'un k-fibré adélique $\overline{E}$ est le maximum des pentes des sous-fibrés non nuls de $\overline{E}$. En considérant, pour $\mathsf{e}\in E\setminus\{0\}$, la droite $k.\mathsf{e}$ munie des métriques de $\overline{E}$, on a $-h_{\overline{E}}(\mathsf{e})=\widehat{\mu}(k.\mathsf{e},(\|.\|_{\overline{E},v})_v)\le\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})$. En appliquant ce principe à $\overline{E}=S^\ell(\overline{t_A^\vee})$ et $\mathsf{e}=\mathrm{jet}^\ell s(0)$ on trouve

$$h_{S^\ell(\overline{t_A^\vee})}(\mathrm{jet}^\ell s(0))\ge-\widehat{\mu}_{\max}\left(S^\ell(\overline{t_A^\vee})\right). \tag{12}$$

En outre, un théorème de Bost évalue la pente maximale de la puissance symétrique $\ell^{\text{ème}}$ d'un fibré adélique hermitien, qui ici s'écrit

$$\widehat{\mu}_{\max}\left(S^\ell(\overline{t_A^\vee})\right)\le\ell\left(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{t_A^\vee})+(g+1/2)\log g\right)$$

(une démonstration est donnée au § 7 de [Ga3]). Dans la suite on utilisera le majorant $gT(\max\{0,\widehat{\mu}_{\max}(\overline{t_A^\vee})\}+(g+1/2)\log g)$. On compare cette majoration à l'estimation (11) de la

hauteur de $\mathrm{jet}^\ell s(0)$. On fait intervenir la majoration de $h_{\overline{H}_{n,\alpha}}(s)$ de la proposition 6.6 dans laquelle est intégrée la valeur de $\alpha_\sigma = 4^{T_\sigma S_\sigma}$. On obtient ainsi la version « dépliée » de l'inégalité (12), que l'on divise par n. Puis on fait tendre n vers $+\infty$. De plus nous utilisons à présent la valeur de $r(g,\varepsilon)$ définie avant la proposition 6.5. Le choix explicite de ε_σ (§ 6.2) est fait pour donner la borne $r(g,\varepsilon_\sigma)\xi_\sigma^{-1} \leq 1/2$: on vérifie en effet $(g+(6\sqrt{2}-8)g^{-g}\xi_\sigma)^g \leq g^g + \xi_\sigma/2$ par calcul direct si $g=2$ et en utilisant $r(g,\varepsilon) \leq g^g\varepsilon(1-\varepsilon)^{-1}$ si $g \geq 3$.

Nous pouvons alors écrire le résultat brut de la manière suivante. Posons

$$\begin{aligned}\aleph_1 :=& g\max\{0, \widehat{\mu}_{\max}(\overline{t_A^\vee})\} + g(g+1/2)\log g + \frac{g}{[k:\mathbf{Q}]}\sum_{\sigma\in\mathcal{V}} \log\max\left\{1, \frac{1}{\rho(A_\sigma, L_\sigma)}\right\} \\ &+ \frac{2g}{[k:\mathbf{Q}]}\sum_{\sigma\in\mathcal{V}} \log\deg_{L_\sigma} B[\sigma] + \frac{\log 12}{[k:\mathbf{Q}]}\sum_{\sigma\in\mathcal{V}}\varepsilon_\sigma\end{aligned} \tag{13}$$

et

$$\aleph_2 := 1 + \frac{1}{[k:\mathbf{Q}]}\sum_{\sigma\in\mathcal{V}} S_\sigma\delta_\sigma(S_\sigma\delta_\sigma+2) + \frac{1}{[k:\mathbf{Q}]}\sum_{\sigma\in\mathcal{V}}\frac{1}{2}(1+2S_\sigma\delta_\sigma).$$

Alors on a

$$\frac{\log 2}{[k:\mathbf{Q}]}\sum_{\sigma\in\mathcal{V}}\varepsilon_\sigma S_\sigma \leq \aleph_1 + \frac{\pi}{2}x\aleph_2. \tag{14}$$

Posons

$$M := \frac{1}{[k:\mathbf{Q}]}\sum_{\sigma\in\mathcal{V}}\left(\frac{\varepsilon_\sigma}{\delta_\sigma}\right)^2.$$

En utilisant $[a] > a-1$ pour $a \in \mathbf{R}$ et au moyen de la définition de $S_\sigma = [\theta\varepsilon_\sigma/(x\delta_\sigma^2)]$ et de la borne $2\varepsilon_\sigma \leq g^{-g}$, on a

$$\frac{\log 2}{[k:\mathbf{Q}]}\sum_{\sigma\in\mathcal{V}}\varepsilon_\sigma S_\sigma > (\log 2)\left(\frac{\theta M}{x} - \frac{1}{2g^g}\right). \tag{15}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient une majoration simple de $\aleph_2$

$$\aleph_2 \leq \frac{3}{2} + \frac{3\theta\sqrt{M}}{x} + \left(\frac{\theta}{x}\right)^2 M.$$

En reportant ces estimations dans (14), on trouve

$$\frac{\theta M}{x}\left(\log 2 - \frac{\pi\theta}{2}\right) \leq \left(\aleph_1 + \frac{3\pi}{4}x + \frac{\log 2}{2g^g}\right) + \frac{3\pi\theta}{2}\sqrt{M},$$

puis, avec le choix de $\theta = (\log 2)/\pi$, on a

$$M - \left(\frac{3\pi x}{\log 2}\right)\sqrt{M} \leq \frac{2\pi x}{(\log 2)^2}\left(\aleph_1 + \frac{3\pi}{4}x + \frac{\log 2}{2g^g}\right). \tag{16}$$

Fait : *Soient α, β des nombres réels positifs. Si $M - \alpha\sqrt{M} \leq \beta$ alors on a*

$$M \leq \beta\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\beta}} + \sqrt{1+\frac{\alpha^2}{4\beta}}\right)^2.$$

Le majorant de M est le carré de la racine positive du trinôme $X^2 - \alpha X - \beta$, ce qui justifie le fait. Ici, ce résultat fournit la majoration

$$M \leq \frac{2\pi x}{(\log 2)^2}\left(\max\left\{105, \aleph_1 + \frac{3\pi}{4}x + \frac{\log 2}{2g^g}\right\}\right)\left(\sqrt{\frac{3\pi x}{280}} + \sqrt{1+\frac{3\pi x}{280}}\right)^2.$$

Nous nous plaçons d'abord dans le cas où $x \leq 1/2141$ (le cas restant sera étudié à la fin de ce paragraphe). La borne ci-dessus devient $M \leq 13,2x\max\left\{105, \aleph_1 + \frac{3\pi}{4}x + \frac{\log 2}{2g^g}\right\}$. Par ailleurs, en revenant à la définition de $\mathcal{V}$ (§ 6.3), si $\sigma \notin \mathcal{V}$, on a

$$\left(\frac{\varepsilon_\sigma}{\delta_\sigma}\right)^2 \leq \frac{x\varepsilon_\sigma}{\theta} \leq \frac{x\pi}{2(\log 2)g^g}.$$

Cette majoration couplée avec la borne obtenue précédemment pour M donne

$$\begin{aligned}\frac{1}{[k:\mathbf{Q}]}\sum_{\sigma\colon k\hookrightarrow\mathbf{C}}\left(\frac{\varepsilon_\sigma}{\delta_\sigma}\right)^2 &\leq 13,2x\left(\max\left\{105,\aleph_1+\frac{3\pi x}{4}+\frac{\log 2}{2g^g}\right\}+\frac{\pi}{26(\log 2)g^g}\right)\\ &\leq 13,2x\max\left(106,\aleph_1+1/7\right),\end{aligned}$$

avec à nouveau $x\leq 1/2141$. On en déduit

$$\frac{1}{[k:\mathbf{Q}]}\sum_{\sigma\colon k\hookrightarrow\mathbf{C}}\left(\frac{\xi_\sigma}{\delta_\sigma}\right)^2 \leq 56,06g^{2g}x\max\{106,\aleph_1+1/7\}. \tag{17}$$

Il ne reste plus qu'à estimer $\aleph_1$ pour conclure.

Proposition 6.8. *On a*

$$\aleph_1\leq 0,342g^6\max\left\{1,h(A),\log\deg_L A\right\}+\frac{2g}{[k:\mathbf{Q}]}\sum_{\sigma\colon k\hookrightarrow\mathbf{C}}\log\deg_{L_\sigma}B[\sigma].$$

Démonstration. La majoration de $\aleph_1$ repose sur la définition (13). Le premier terme avec la pente maximale du cotangent est estimé par la proposition 3.10 et l'on utilise la majoration $\mathrm{h}^0(A,L)\leq \deg_L A$. En posant $h=\max(1,h(A),\log\deg_L A)$, on a

$$\frac{1}{[k:\mathbf{Q}]}\sum_{\sigma\colon k\hookrightarrow\mathbf{C}}\log\max(1,\rho(A_\sigma,L_\sigma)^{-2})\leq\max\left(1,\log\frac{1}{[k:\mathbf{Q}]}\sum_{\sigma\colon k\hookrightarrow\mathbf{C}}\rho(A_\sigma,L_\sigma)^{-2}\right)\leq\log(11h)$$

grâce à la proposition 3.6. On aboutit alors à la majoration

$$\begin{aligned}\aleph_1\leq&\frac{3g(g+1)h+g\log h}{2}+\frac{2g}{[k:\mathbf{Q}]}\sum_{\sigma\colon k\hookrightarrow\mathbf{C}}\log\deg_{L_\sigma}B[\sigma]\\ &+2g^6\log 2+g(g+1/2)\log g+\frac{g}{2}\log 11+\frac{\log 12}{2g^g}.\end{aligned}$$

La dernière constante est majorée par $1,49g^6$. De plus $(3g(g+1)h+g\log h)/2$ est plus petit que $0,147g^6h$ (les coefficients numériques sont obtenus avec $g=2$ et $\log h\leq h/e$). Lorsque $x\leq 1/2141$, on note que $h\geq\log\deg_L A\geq-\log x\geq\log 2141$ puis $0,147+1,49/\log 2141\leq 0,342$ qui donne la proposition. □

Le majorant dans cette proposition est toujours supérieur à $0,342\times 2^6\log 2141>106-1/7$. *Via* l'inégalité (17) et la borne $0,342g^6+2g+1/7\leq 0,41g^6$ pour $g\geq 2$, on en déduit le théorème 4.5 (sous l'hypothèse $x\leq 1/2141$) en observant que $0,41\times 56,06<23$.

Dans le cas où $x>1/2141$, nous utilisons $x\leq(\deg_L A)^{-1/g}\leq 1/\sqrt{2}$. Nous menons les calculs exactement de la même manière, seules les constantes numériques évoluent selon le tableau suivant :

$x\leq 1/2141$	$13,2$	$1/7$	$56,06$	$0,342$	$0,41$	23
$x\leq 1/\sqrt{2}$	$17,8$	$1,8$	$75,59$	$1,637$	$1,73$	131

6.9. **Cas de la dimension deux.** Dans ce paragraphe, nous établissons une variante du théorème 4.5, dans le cas particulier utile pour l'application aux théorèmes d'isogénies elliptiques.

Proposition 6.9. *Supposons que $g=2$ et que $\deg_L A\geq 10^{10}$. Pour chaque plongement $\sigma\colon k\hookrightarrow\mathbf{C}$, soit $B[\sigma]$ une sous-variété abélienne de A_σ telle que $x(B[\sigma])=x$ et rappelons que δ_σ désigne* $\min\left\{\mathrm{d}_\sigma(\omega,t_{B[\sigma]})\,;\ \omega\in\Omega_{A_\sigma}\setminus t_{B[\sigma]}\right\}$. *Alors on a*

$$\begin{aligned}\frac{1}{[k:\mathbf{Q}]}\sum_{\sigma\colon k\hookrightarrow\mathbf{C}}\frac{1}{\delta_\sigma^2}\leq 1778x\Big(&\max\left\{1000,\widehat{\mu}_{\max}(\overline{t_A^\vee})\right\}+1,95+\log\deg_L A\\ &+\frac{1}{[k:\mathbf{Q}]}\sum_{\sigma\colon k\hookrightarrow\mathbf{C}}\log\max\left(1,\frac{1}{\rho(A_\sigma,L_\sigma)}\right)\Big).\end{aligned}$$

Démonstration. Nous reprenons la démonstration du théorème 4.5. Nous n'apportons aucun changement aux paragraphes 6.1 à 6.7. L'invariance de l'énoncé par extension de corps utilisée au paragraphe 6.1 reste valable pour la présente proposition en raison de notre convention sur la pente maximale.

Nous pouvons alors modifier les estimations du paragraphe 6.8 à partir de l'inégalité principale (14). Comme $x(B[\sigma]) = x$, tous les ξ_σ valent 1 et en particulier ε_σ est indépendant de σ. Nous notons ici simplement ε cette valeur commune : $\varepsilon = (3\sqrt{2}-4)/2$. L'égalité $x(B[\sigma]) = x$ fournit aussi $\deg_{L_\sigma} B[\sigma] \leq \sqrt{\deg_L A}$. Ces considérations permettent de voir que

$$\aleph_1 \leq \widetilde{\aleph}_1 := 2\max\{1000, \widehat{\mu}_{\max}(\overline{t_A^\vee})\} + \frac{2}{[k:\mathbf{Q}]} \sum_{\sigma\colon k\hookrightarrow\mathbf{C}} \log\max\left\{1, \frac{1}{\rho(A_\sigma, L_\sigma)}\right\} + 2\log\deg_L A + 3,77$$

(où nous employons $5\log 2 + \varepsilon\log 12 \leq 3,77$). Notons en outre $m := \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{V}} \delta_\sigma^{-2}\right)/[k:\mathbf{Q}]$. Nous avons alors la majoration

$$\aleph_2 \leq \frac{3}{2} + \frac{3\theta\varepsilon\sqrt{m}}{x} + \left(\frac{\theta\varepsilon}{x}\right)^2 m.$$

Le pendant de (15) est $(\sum_{\sigma\in\mathcal{V}} S_\sigma)/[k:\mathbf{Q}] \geq (\theta\varepsilon m)/x - 1$ et l'inégalité (16) devient

$$m - \frac{3x}{\theta\varepsilon}\sqrt{m} \leq \frac{2x}{\pi(\theta\varepsilon)^2}\left(\widetilde{\aleph}_1 + \theta\varepsilon\pi + \frac{3\pi x}{4}\right).$$

Le fait qui suit l'inégalité (16) et la minoration $\widetilde{\aleph}_1 \geq 2000$ conduisent à la borne

$$m \leq \frac{2x}{\pi(\theta\varepsilon)^2}\left(\widetilde{\aleph}_1 + \theta\varepsilon\pi + \frac{3\pi x}{4}\right) \times \left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\pi x}{4000}} + \sqrt{1 + \frac{9x\pi}{16000}}\right)^2.$$

Pour passer de m à la somme sur tous les plongements $\sigma\colon k \hookrightarrow \mathbf{C}$, nous devons ajouter les termes δ_σ^{-2}, $\sigma \notin \mathcal{V}$, qui sont plus petits que $x/(\theta\varepsilon)$. On obtient donc finalement

$$\frac{1}{[k:\mathbf{Q}]} \sum_{\sigma\colon k\hookrightarrow\mathbf{C}} \frac{1}{\delta_\sigma^2} \leq \frac{2x}{\pi(\theta\varepsilon)^2}\left(\widetilde{\aleph}_1 + \frac{3\theta\varepsilon\pi}{2} + \frac{3\pi x}{4}\right) \times \left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\pi x}{4000}} + \sqrt{1 + \frac{9x\pi}{16000}}\right)^2.$$

Pour conclure, il reste alors à observer que x est plus petit que $(\deg_L A)^{-1/2} \leq 10^{-5}$ et à remplacer les paramètres θ et ε par leurs valeurs. Après estimations numériques, nous aboutissons à la formule de l'énoncé. □

6.10. **Démonstrations des théorèmes 1.2 et 1.3 de l'introduction.**

6.10.1. Le théorème 1.2 découle du corollaire 4.6 et de l'estimation $g \leq 2\max(1, \log g!)$ qui montre que $h(A) = h_F(A) + g\log\sqrt{\pi} \leq \log(\pi e)\max(1, h_F(A), \log\deg_L A)$. Nous pouvons ainsi remplacer la constante numérique 23 par 50 et $h(A)$ par $h_F(A)$ et il ne reste plus qu'à majorer x par $(\deg_L A)^{-1/g}$ pour conclure.

6.10.2. Déduisons maintenant le théorème 1.3 du théorème 1.2 que nous venons d'établir.

Dans le cas où $g = 1$, le lemme matriciel donne (comme au § 4.3.1) bien mieux. Par exemple avec le théorème 1.1 nous avons $\deg_L A_\omega = \deg_L A \leq 14[k:\mathbf{Q}]\|\omega\|_{L,\sigma_0}^2 \max(1, h_F(A))$. Pour la suite, supposons $g \geq 2$, notons $\mathsf{d} = \deg_L A_\omega$ et montrons dans un premier temps :

$$\mathsf{d}^{1/\dim A_\omega} \leq 50 g^{2g+6}[k':\mathbf{Q}]\|\omega\|_{L,\sigma_0}^2 \max(1, h_F(A), \log\mathsf{d}).$$

Il s'agit d'appliquer le théorème 1.2 à $(A_\omega, L_{|A_\omega})$ en remarquant $\delta((A_\omega)_{\sigma_0'}, L_{\sigma_0'}) \leq \|\omega\|_{L,\sigma_0}$. Lorsque $A = A_\omega$ cela nous donne exactement la formule ci-dessus. Sinon nous utilisons la dernière inégalité du § 2.3 pour écrire $h_F(A_\omega) \leq h_F(A) + g\log(\sqrt{2\pi}\mathrm{h}^0(A_\omega, L)^2) \leq (3g+1)\max(1, h_F(A), \log\mathsf{d})$ et l'on conclut avec $(\dim A_\omega)^{2\dim A_\omega + 6}(3g+1) \leq g^{2g+6}$.

Pour passer à l'énoncé de notre théorème, écrivons pour alléger $C = 50g^{2g+6}[k':\mathbf{Q}]\|\omega\|_{L,\sigma_0}^2$. Si $\mathsf{d}^{1/\dim A_\omega} \leq 3,9g^3C$ alors le théorème est acquis par $3,9 \times 50 = 195$. Sinon

$$\log\mathsf{d} = (\dim A_\omega)\log\frac{\mathsf{d}^{1/\dim A_\omega}}{C} + (\dim A_\omega)\log C \leq 0,221\frac{\mathsf{d}^{1/\dim A_\omega}}{C} + g\log C$$

(où l'on utilise $\log(3,9g^3) \leq 0,221 \times 3,9g^2$). Nous en déduisons donc

$$0,779\mathsf{d}^{1/\dim A_\omega} \leq C\max(1, h_F(A), g\log C) \leq 3g^3C\max(1, h_F(A), \log([k':\mathbf{Q}]\|\omega\|_{L,\sigma_0}^2))$$

et l'on conclut par $(3/0,779) \times 50 \leq 195$.

7. Degrés minimaux d'isogénies elliptiques

Dans cette partie, nous établissons le théorème 1.4 et son corollaire.

7.1. **Rappels sur les isogénies de courbes elliptiques.** Soient E_1 et E_2 deux courbes elliptiques sur un même corps de nombres k. On note $\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$ l'ensemble des morphismes de groupes algébriques $\varphi\colon E_1 \to E_2$ sur une clôture algébrique $\overline{k}$ de k. Un élément non nul de ce groupe est une *isogénie*. Le *degré* d'une isogénie est le cardinal de son noyau. On pose aussi $\deg(0) = 0$. Pour $n \in \mathbf{Z}$ on note $[n] \in \mathrm{Hom}(E_i, E_i)$ $(1 \leq i \leq 2)$ le morphisme de multiplication par n. On a $\deg[n] = n^2$.

Lemme 7.1. *Il existe une unique bijection* $\mathrm{Hom}(E_1, E_2) \to \mathrm{Hom}(E_2, E_1), \varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ *telle que*

(1) $\widehat{\varphi} \circ \varphi = [\deg \varphi]$
(2) $\deg \widehat{\varphi} = \deg \varphi$
(3) φ *et* $\widehat{\varphi}$ *sont définis sur les mêmes extensions de* k.

Démonstration. On pose $\widehat{0} = 0$. Si φ est une isogénie, le groupe fini $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est de cardinal $\deg \varphi$ donc son exposant divise $\deg \varphi$ donc $\mathrm{Ker}\,\varphi \subset \mathrm{Ker}[\deg \varphi]$. Par suite il existe une unique factorisation de $[\deg \varphi]$ à travers φ que l'on écrit $\widehat{\varphi} \circ \varphi = [\deg \varphi]$. Si φ est défini sur une extension k' de k alors il en va de même de $\widehat{\varphi}$ puisque ses conjugués au-dessus de k' réalisent la même factorisation. De plus on a $(\deg \varphi)^2 = \deg[\deg \varphi] = \deg \widehat{\varphi} \circ \varphi = (\deg \widehat{\varphi})(\deg \varphi)$ qui donne (2). Par ailleurs, $\varphi \circ \widehat{\varphi} \circ \varphi = \varphi \circ [\deg \varphi] = [\deg \varphi] \circ \varphi$ donc, par surjectivité de φ, l'on trouve $\varphi \circ \widehat{\varphi} = [\deg \varphi]$ (dans $\mathrm{Hom}(E_2, E_1)$). Ceci montre $\widehat{\widehat{\varphi}} = \varphi$ et donc que l'on a une bijection. De plus φ est également défini sur toute extension où $\widehat{\varphi}$ est défini, ce qui donne (3). L'unicité est assurée par (1) si $\varphi \neq 0$ et par (2) sinon. □

Dans la suite, nous supposerons toujours que E_1 et E_2 sont isogènes c'est-à-dire que $\mathrm{Hom}(E_1, E_2) \neq \{0\}$. Dans ce cas, l'ensemble $\{\deg \varphi\,;\ \varphi \in \mathrm{Hom}(E_1, E_2) \setminus \{0\}\} \subset \mathbf{N} \setminus \{0\}$ admet un élément minimal Δ (qui est aussi $\min\{\deg \psi\,;\ \psi \in \mathrm{Hom}(E_2, E_1) \setminus \{0\}\}$). Une isogénie $\varphi \in \mathrm{Hom}(E_1, E_2)$ de degré Δ sera dite *minimale*. Une isogénie est dite *cyclique* si son noyau est un groupe cyclique.

Lemme 7.2. *Une isogénie minimale est cyclique.*

Démonstration. Soit φ une isogénie minimale. Le groupe $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est un sous-groupe de $\mathrm{Ker}[\deg \varphi] \simeq (\mathbf{Z}/\deg \varphi \mathbf{Z})^2$ donc isomorphe à $\mathbf{Z}/a\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/b\mathbf{Z}$ avec $a \mid b \mid \deg \varphi$. Il contient donc un sous-groupe isomorphe à $(\mathbf{Z}/a\mathbf{Z})^2$ qui est nécessairement $\mathrm{Ker}[a]$. Ainsi $\mathrm{Ker}[a] \subset \mathrm{Ker}\,\varphi$ donc il existe une factorisation $\varphi = \varphi' \circ [a]$ avec $\varphi' \in \mathrm{Hom}(E_1, E_2)$. On a $\deg \varphi = a^2 \deg \varphi'$ donc, par minimalité, $a = 1$. Ceci montre bien que $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est cyclique d'ordre b. □

Pour la suite, nous distinguons deux cas :

(1) E_1 et E_2 sont sans multiplications complexes. Ici $\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$ est un $\mathbf{Z}$-module libre de rang 1.
(2) E_1 et E_2 sont à multiplications complexes. Ici $\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$ est un $\mathbf{Z}$-module libre de rang 2.

Proposition 7.3. *Dans le cas (1), toute isogénie cyclique est minimale. Il n'y a que deux isogénies minimales* φ *et* $-\varphi$. *Il existe une extension* k' *de* k *de degré 1 ou 2 telle que : toute isogénie* $\varphi\colon E_1 \to E_2$ *est définie sur* k' *; si* $k' \neq k$ *aucune isogénie n'est définie sur* k. *Dans le cas (2) il existe une extension* k' *de* k *de degré dans* $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ *telle que toute isogénie* $\varphi\colon E_1 \to E_2$ *est définie sur* k'.

Démonstration. Dans le cas (1) soit φ minimale. On a $\mathrm{Hom}(E_1, E_2) = \mathbf{Z}\varphi$ et $\deg n\varphi = n^2 \deg \varphi$ pour $n \in \mathbf{Z}$ donc φ et $-\varphi$ sont les seules isogénies minimales. Si $|n| > 1$, $\mathrm{Ker}(n\varphi)$ contient $\mathrm{Ker}[n] \simeq (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^2$ qui n'est pas cyclique donc $n\varphi$ n'est pas cyclique. En général, le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ agit sur $\mathrm{Hom}(E_1, E_2) \simeq \mathbf{Z}^m$ dans le cas (m), $m \in \{1, 2\}$. Ceci donne un morphisme $\alpha\colon \mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \to \mathrm{GL}_m(\mathbf{Z})$ dont le noyau est de la forme $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k')$ avec k' extension galoisienne finie de k. Le groupe $\mathrm{Gal}(k'/k)$ est isomorphe à l'image de α. On sait qu'un sous-groupe de $\mathrm{GL}_1(\mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}^\times$ est de cardinal 1 ou 2 tandis qu'un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$ est de cardinal dans $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$

(voir [Se1]*). Ceci donne l'assertion sur le degré de k'. Dans le cas (1), si $k' \neq k$, alors l'élément $\sigma \in \mathrm{Gal}(k'/k) \setminus \{\mathrm{id}\}$ agit par $\sigma(\varphi) = -\varphi$ sur $\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$. Par suite, si $\varphi \neq 0$, on a $\sigma(\varphi) \neq \varphi$ donc φ n'est pas défini sur k. □

Remarque 7.4. Pellarin (voir [Pe2, Remarque fondamentale, p. 211]) affirme que dans le cas (1) l'on a toujours $k' = k$. C'est faux car en fait sur tout corps de nombres k il existe deux courbes elliptiques sans multiplications complexes qui ne sont pas isogènes sur k mais le sont sur $\overline{k}$. Pour le voir, choisir E_1 sans multiplications complexes donnée par une équation de Weierstrass $y^2 = x^3 + ax + b$; choisir $c \in k \setminus k^2$ et définir E_2 par $cy^2 = x^3 + ax + b$. L'application $(x, y) \mapsto (x, c^{-1/2}y)$ décrit un isomorphisme $E_1 \to E_2$ défini sur $k' = k(c^{1/2})$ mais pas sur k (il diffère de son conjugué $(x, y) \mapsto (x, -c^{-1/2}y)$) donc d'après la proposition aucune isogénie $E_1 \to E_2$ n'est définie sur k. Si l'on veut des exemples où le degré minimal d'isogénie Δ soit arbitraire, on étend k pour que E_1 ait un point de torsion P d'ordre Δ rationnel (et l'on choisit c ensuite). Alors $E_1' = E_1/\mathbf{Z}P$ et E_2 sont définies sur k, isogènes sur $\overline{k}$. Le degré minimal est Δ car $E_2 \to E_1 \to E_1'$ est cyclique de degré Δ mais elles ne sont pas isogènes sur k car sinon E_1 et E_2 le seraient aussi (car E_1 et E_1' sont isogènes sur k).

7.2. **Cas non CM : lien avec les périodes.** Dans la situation précédente, on choisit un plongement $\sigma_0 \colon k \hookrightarrow \mathbf{C}$. On abrège $\Omega_i = \Omega_{(E_i)_{\sigma_0}}$ pour $i \in \{1, 2\}$. Nous posons $A = E_1^2 \times E_2^2$. L'espace tangent de A_{σ_0} s'écrit $t_{A_{\sigma_0}} = t_{(E_1)_{\sigma_0}} \oplus t_{(E_1)_{\sigma_0}} \oplus t_{(E_2)_{\sigma_0}} \oplus t_{(E_2)_{\sigma_0}}$ et contient le réseau des périodes $\Omega_{A_{\sigma_0}} = \Omega_1^{\oplus 2} \oplus \Omega_2^{\oplus 2}$. Si $\omega = (\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{21}, \omega_{22}) \in \Omega_{A_{\sigma_0}}$ on note A_ω la plus petite sous-variété abélienne de A_{σ_0} dont l'espace tangent contient ω. Cette variété abélienne complexe est définie sur un corps de nombres : si nous notons k' le plus petit sous-corps de $\mathbf{C}$ contenant $\sigma_0(k)$ sur lequel A_ω est définie alors nous voyons A_ω comme une variété abélienne sur k' et la variété abélienne complexe de départ (sous-variété de A_{σ_0}) s'écrit $(A_\omega)_{\sigma_0'}$ si σ_0' désigne le plongement de k' dans $\mathbf{C}$ donné par la définition (il étend σ_0 lorsque l'on voit k' comme une extension de k).

Rappelons que Δ désigne le degré minimal d'isogénie entre E_1 et E_2. Si nous supposons que E_1 et E_2 sont sans multiplications complexes (cas (1) du paragraphe précédent), alors le lien entre Δ et A_ω est donné par l'énoncé suivant.

Théorème 7.5. *On suppose que $(\omega_{11}, \omega_{12})$ est une base de Ω_1 et $(\omega_{21}, \omega_{22})$ une base de Ω_2. Alors il existe une extension k' de k de degré 1 ou 2 telle que :*

(1) *A_ω est définie sur k'.*
(2) *A_ω est isomorphe sur k' à $E_1 \times E_2$.*
(3) *$A_\omega \cap (\{0\}^2 \times E_2^2)$ est fini de cardinal Δ.*

Démonstration. On choisit pour k' l'extension sur laquelle sont définies toutes les isogénies $E_1 \to E_2$ et $E_2 \to E_1$. La sous-variété abélienne A_ω est l'image d'un endomorphisme de A. Celui-ci est donné par 16 morphismes $E_i \to E_j$ avec $1 \leq i, j \leq 2$ donc est défini sur k' et, par suite, il en va de même de A_ω. Ceci assure (1). En ce qui concerne (2) et (3) voyons d'abord qu'il suffit de les établir pour une seule période ω. En effet, si ω et ω' satisfont les hypothèses du théorème, il existe deux isomorphismes $f_i \colon E_i^2 \to E_i^2$ $(1 \leq i \leq 2)$ tels que l'application tangente $\mathrm{d}f$ à $f = f_1 \times f_2$ envoie ω sur $\omega' : \mathrm{d}f(\omega) = \omega'$ (l'isomorphisme f_i réalise simplement le changement de base de $(\omega_{i1}, \omega_{i2})$ à $(\omega_{i1}', \omega_{i2}')$). Ainsi l'espace tangent à une sous-variété abélienne B de A contient ω si et seulement si l'espace tangent de $f(B)$ contient ω'. Ceci montre $f(A_\omega) = A_{\omega'}$ et, en particulier, A_ω et $A_{\omega'}$ sont isomorphes sur leur corps de définition commun k' ($f \in \mathrm{End}(A)$ est lui défini sur k). D'autre part on a évidemment $f(\{0\}^2 \times E_2^2) = \{0\}^2 \times E_2^2$ donc les ensembles $A_\omega \cap \{0\}^2 \times E_2^2$ et $A_{\omega'} \cap \{0\}^2 \times E_2^2$ sont en bijection. Tout ceci montre bien que (2) et (3) sont vraies pour ω si et seulement si elles le sont pour ω'. Nous allons donc les établir pour un ω particulier de façon à ce que A_ω admette

*Si $G \subset \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$ est fini alors $H = G \cap \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ est d'indice 1 ou 2 dans G ; il suffit donc de voir que H est cyclique d'ordre 1,2,3,4 ou 6 et même, en considérant les valeurs propres (racines de l'unité de degré 1 ou 2 sur $\mathbf{Q}$) qu'il est cyclique ; on pose $A = \sum_{B \in H} {}^tBB$; si $B \in H$ alors ${}^tBAB = A$; on écrit $A = {}^tCC$ avec $C \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ donc $CBC^{-1} \in \mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$ pour $B \in H$; ceci montre que H est isomorphe à un sous-groupe fini de $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R}) \simeq \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ donc il est cyclique. On vérifie que les valeurs de $\mathrm{card}\, G$ sont toutes atteintes à l'aide de sous-groupes des groupes suivants : G_1 de cardinal 8 est engendré par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et G_2 de cardinal 12 est engendré par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

une description très simple. Soient pour cela $\varphi\colon E_1 \to E_2$ une isogénie minimale (sur k') donc avec $\Delta = \deg\varphi$ et $\widehat{\varphi}\colon E_2 \to E_1$ telle que $\widehat{\varphi}\circ\varphi = [\Delta]$. Soit ψ le morphisme $E_1 \times E_2 \to A$ décrit par $\psi(x,y) = (\widehat{\varphi}(y), x, y, \varphi(x))$. Il est patent que l'image $\operatorname{Im}\psi$ est une sous-variété abélienne de A isomorphe à $E_1 \times E_2$ et que l'intersection $\operatorname{Im}\psi \cap (\{0\}^2 \times E_2^2)$ est en bijection avec le groupe $\operatorname{Ker}\widehat{\varphi}$ de cardinal Δ. Il nous suffit donc seulement pour conclure de trouver ω tel que $A_\omega = \operatorname{Im}\psi$. En fait, il suffit même de trouver ω comme dans l'énoncé dans l'espace tangent de $\operatorname{Im}\psi$ (ce qui assure $A_\omega \subset \operatorname{Im}\psi$ par minimalité) car nous avons toujours $\dim A_\omega \geq 2$: dans le cas contraire, la projection B de A_ω sur E_1^2 serait une sous-variété abélienne de dimension 0 ou 1 dont l'espace tangent contiendrait $(\omega_{11}, \omega_{12})$. Or, en l'absence de multiplications complexes, un tel B est contenu dans un sous-groupe de la forme $\{(x,y) \in E_1^2\,;\ nx = my\}$ pour $(n,m) \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$. En passant à l'espace tangent, on aurait $n\omega_{11} = m\omega_{12}$ qui contredirait la liberté de $(\omega_{11}, \omega_{12})$. Finalement il reste à trouver ω dans l'espace tangent de $\operatorname{Im}\psi$ c'est-à-dire tel que $\omega_{11} = \mathrm{d}\widehat{\varphi}(\omega_{21})$ et $\omega_{22} = \mathrm{d}\varphi(\omega_{12})$. Puisque $\mathrm{d}\varphi \circ \mathrm{d}\widehat{\varphi} = \Delta\mathrm{id}$, la première condition s'écrit $\omega_{21} = \Delta\mathrm{d}\varphi(\omega_{11})$. L'existence des deux bases adaptées $(\omega_{11}, \omega_{12})$ et $(\omega_{21}, \omega_{22})$ découle donc du fait que $\Omega_2/\mathrm{d}\varphi(\Omega_1)$ est un groupe cyclique de cardinal Δ car φ est cyclique. □

Cet énoncé est plus ou moins classique (voir [MW1, Pe2]) à part peut-être l'assertion (2) qui ne semble pas avoir été notée explicitement.

7.3. **Cas non CM : estimations.** Nous démontrons la première assertion du théorème 1.4. Comme nous traitons plus loin différemment le cas où k possède une place réelle, nous pouvons supposer ici que toutes les places de k sont complexes. Il en va alors bien sûr de même des places de l'extension k'.

Avec les notations ci-dessus, nous imposons maintenant que $(\omega_{11}, \omega_{12})$ forme une base minimale de Ω_1. Ceci signifie que $\|\omega_{11}\|_{L_1,\sigma_0} = \rho((E_1)_{\sigma_0}, (L_1)_{\sigma_0})$ où L_1 est l'unique polarisation principale sur E_1 et que $\omega_{12} = \tau\omega_{11}$ où τ appartient au domaine fondamental de Siegel : $|\tau| \geq 1$ et $|\operatorname{Re}\tau| \leq 1/2$. On écrit $y = \operatorname{Im}\tau$. On sait alors que $y = \rho((E_1)_{\sigma_0}, (L_1)_{\sigma_0})^{-2}$ (voir remarque 3.3).

Nous fixons à présent le choix de σ_0 jusqu'ici arbitraire, en demandant que y soit minimal pour ce choix. En vertu de la proposition 3.2, cela nous fournit $y \leq 1,92H$ où nous notons, ici et dans toute la suite, $H = \max(h(E_1), 1000)$. Ce petit raffinement allège quelque peu les calculs qui suivent mais ne modifie que le terme logarithmique de l'estimation finale.

Soient p_1 et p_2 les deux projections $E_1^2 \to E_1$. Posons $n = [|\tau|^2] \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ et considérons la polarisation $L' = p_1^* L_1^{\otimes n} \otimes p_2^* L_1$ sur E_1^2 et p la composée $A_\omega \to A \to E_1^2$. D'après l'assertion (3) du théorème 7.5, p est une isogénie (de degré Δ) donc $L = p^*L'$ est ample sur A_ω et

$$\deg_L A_\omega = (\deg p)\deg_{L'} E_1^2 = 2n\Delta.$$

Ceci nous permet d'appliquer la proposition 6.9 au couple (A_ω, L) sur le corps de nombres k'. En effet, si $\deg_L A_\omega < 10^{10}$ alors $\Delta < 10^{10}$ et la majoration (18) que nous allons démontrer plus bas est très largement vraie. Nous majorons $x \leq (\deg_L A_\omega)^{-1/2} = (2n\Delta)^{-1/2}$ tandis que nous avons $\delta_{\sigma_0'} \leq \|\omega\|_{L,\sigma_0'}$ puisque $\omega \in t_{(A_\omega)_{\sigma_0'}}$ mais $\omega \notin t_{B[\sigma_0']}$ par minimalité. Comme $\delta_{\sigma_0'} = \delta_{\overline{\sigma_0'}}$ et $\sigma_0' \neq \overline{\sigma_0'}$, la proposition 6.9 donne donc

$$\frac{2\sqrt{2n\Delta}}{D\|\omega\|_{L,\sigma_0'}^2} \leq 1778\Big(\max(1000, \widehat{\mu}_{\max}(\overline{t^{\mathrm{v}}_{A_\omega}})) + \log(2n\Delta) + 1,95 + \frac{1}{D}\sum_{\sigma'\colon k'\hookrightarrow\mathbf{C}} \log\max(1, \rho((A_\omega)_{\sigma'}, L_{\sigma'})^{-1})\Big)$$

où $D = [k' : \mathbf{Q}]$. Nous allons maintenant estimer les termes qui apparaissent dans cette majoration. En premier lieu, on a

$$\begin{aligned}\|\omega\|_{L,\sigma_0'}^2 &= \|(\omega_{11},\omega_{12})\|_{L',\sigma_0}^2 = n\|\omega_{11}\|_{L_1,\sigma_0}^2 + \|\omega_{12}\|_{L_1,\sigma_0}^2\\ &= (n+|\tau|^2)\|\omega_{11}\|_{L_1,\sigma_0}^2 = (n+|\tau|^2)\rho((E_1)_{\sigma_0},(L_1)_{\sigma_0})^2\\ &= \frac{n+|\tau|^2}{y} \leq \frac{n+|\tau|^2}{\sqrt{|\tau|^2-\frac14}} \leq \frac{2n}{\sqrt{n-\frac14}}\end{aligned}$$

(la dernière inégalité vient de ce que la fonction $t \mapsto (n+t)/\sqrt{t-1/4}$ décroît sur $[n, n+1/2]$, croît sur $[n+1/2, n+1]$ et d'une comparaison entre les valeurs en n et $n+1$). Par un calcul analogue,

si $\omega' = (\omega'_{11}, \omega'_{12}, \omega'_{21}, \omega'_{22})$ est une période de $(A_\omega)_{\sigma'}$ pour $\sigma' \colon k' \hookrightarrow \mathbf{C}$ quelconque, nous avons

$$\|\omega'\|^2_{L,\sigma'} = n\|\omega'_{11}\|^2_{L_1,\sigma'} + \|\omega'_{12}\|^2_{L_1,\sigma'} \geq \max(\|\omega'_{11}\|_{L_1,\sigma'}, \|\omega'_{12}\|_{L_1,\sigma'})^2.$$

Si $\omega' \neq 0$ on a $\omega'_{11} \neq 0$ ou $\omega'_{12} \neq 0$ (toujours car p est une isogénie) donc

$$\rho((A_\omega)_{\sigma'}, L_{\sigma'}) \geq \rho((E_1)_{\sigma'}, (L_1)_{\sigma'}).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\frac{1}{D}\sum_{\sigma' \colon k' \hookrightarrow \mathbf{C}} \log\max(1, \rho((A_\omega)_{\sigma'}, L_{\sigma'})^{-1}) &\leq \frac{1}{2D}\sum_{\sigma' \colon k' \hookrightarrow \mathbf{C}} \log\max(1, \rho((E_1)_{\sigma'}, (L_1)_{\sigma'})^{-2}) \\ &\leq \frac{1}{2}\max\left(1, \log\frac{1}{D}\sum_{\sigma' \colon k' \hookrightarrow \mathbf{C}} \rho((E_1)_{\sigma'}, (L_1)_{\sigma'})^{-2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\max(1, \log(1, 92H)) = \frac{1}{2}\log(1, 92H)\end{aligned}$$

à nouveau avec la proposition 3.2 (appliquée à $(E_1)_{k'}$). Nous avons à ce stade

$$\sqrt{\Delta} \leq 1778D\left(2 - \frac{1}{2n}\right)^{-1/2}\left(\max(1000, \widehat{\mu}_{\max}(\overline{t^\vee_{A_\omega}})) + \log(2n\Delta) + 1, 95 + \frac{1}{2}\log(1, 92H)\right)$$

et il nous reste à estimer la pente maximale.

Lemme 7.6. *Nous avons*

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{t^\vee_{A_\omega}}) \leq h(E_1) + \log\Delta + \frac{1}{2}\log\frac{n}{\pi}.$$

Démonstration. Comme on a $L = p^*L'$ pour l'isogénie p, le lemme 3.9 donne $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{t_{(A_\omega, L)}}) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\overline{t_{(E_1^2, L')}})$ et, par propriété des pentes maximales, ce majorant vaut $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{t_{(E_1, L_1^{\otimes n})}} \oplus \overline{t_{(E_1, L_1)}}) = \max(\widehat{\mu}(\overline{t_{(E_1, L_1^{\otimes n})}}), \widehat{\mu}(\overline{t_{(E_1, L_1)}}))$. Par ailleurs, comme $\dim A_\omega = 2$, nous avons aussi $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{t^\vee_{A_\omega}}) = \widehat{\mu}_{\max}(\overline{t_{A_\omega}}) - 2\widehat{\mu}(\overline{t_{A_\omega}})$. Nous évaluons les différentes pentes par le lemme 3.7. En particulier $\max(\widehat{\mu}(\overline{t_{(E_1, L_1^{\otimes n})}}), \widehat{\mu}(\overline{t_{(E_1, L_1)}})) = \widehat{\mu}(\overline{t_{(E_1, L_1)}}) = -h(E_1) + (1/2)\log\pi$ et $2\widehat{\mu}(\overline{t_{A_\omega}}) = -h(A_\omega) - (1/2)\log \mathrm{h}^0(A_\omega, L) + \log\pi$. Nous obtenons donc

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{t^\vee_{A_\omega}}) \leq h(A_\omega) - h(E_1) + \frac{1}{2}\log\frac{\deg_L A_\omega}{2\pi}.$$

On conclut alors avec $\deg_L A_\omega = 2n\Delta$, $h(A_\omega) = h(E_1) + h(E_2)$ (d'après l'assertion (2) du théorème 7.5) et $h(E_2) \leq h(E_1) + (1/2)\log\Delta$. □

Avec $\max(1000, \widehat{\mu}_{\max}(\overline{t^\vee_{A_\omega}})) \leq H + \log\Delta + \frac{1}{2}\log\frac{n}{\pi}$ et quelques calculs numériques nous aboutissons à

$$\sqrt{\Delta} \leq 1778D\left(2 - \frac{1}{2n}\right)^{-1/2}(H + \frac{1}{2}\log H + \frac{3}{2}\log n + 2\log\Delta + 2, 4).$$

Si $n = 1$ ceci s'écrit

$$\sqrt{\Delta} \leq 1778D\sqrt{\frac{2}{3}}(H + \frac{1}{2}\log H + 2\log\Delta + 2, 4). \tag{18}$$

Voyons que cette formule vaut aussi si $n \geq 2$. Dans ce cas, on majore $n \leq |\tau|^2 \leq y^2 + 1/4 \leq (1, 92H)^2 + 1/4 \leq 4H^2$ donc

$$\sqrt{\Delta} \leq 1778D\sqrt{\frac{4}{7}}(H + 3, 5\log H + 2\log\Delta + 4, 5).$$

Avec $H \geq 1000$ on a $3, 5\log H + 4, 5 \leq 0, 03H$ et l'estimation $1, 03\sqrt{4/7} \leq \sqrt{2/3}$ montre que (18) est encore valable (largement).

Nous utiliserons (18) plus bas. Ici nous pouvons encore simplifier cette forme brute. Toujours avec $H \geq 1000$ nous écrivons $0, 5\log H + 2, 4 \leq 0, 006H$ et donc, en employant $1, 006 \times 1778\sqrt{2/3} \leq 1461$, nous trouvons

$$\sqrt{\Delta} \leq 1461D(H + 2\log\Delta).$$

Ceci entraîne à son tour

$$\sqrt{\Delta} \leq 1545D(H + 4\log D).$$

En effet, c'est clair si $\sqrt{\Delta} \leq 1,545.10^6 D$. Sinon

$$\log \Delta = 2\log D + 2\log\frac{\sqrt{\Delta}}{D} \leq 2\log D + \frac{2\log(1,545.10^6)}{1,545.10^6}\frac{\sqrt{\Delta}}{D} \leq 2\log D + 1,85.10^{-5}\frac{\sqrt{\Delta}}{D}$$

et l'on conclut par $1461/(1 - 1461 \times 3,7.10^{-5}) \leq 1545$. Maintenant nous pouvons encore utiliser $H + 4\log D \leq 1,02(H + 4\log D - 19)$ et éventuellement $H + 4\log D - 19 \leq 1000\max(h(E_1) - 1, \log(D/2), 1)$ et, comme $1545 \times 1,02 \leq (2,5 \times 10^6)^{1/2}$, nous aboutissons à

$$\Delta \leq 2,5 \times 10^6 D^2 (H + 4\log D - 19)^2$$

ou

$$\Delta \leq 2,5 \times 10^{12} D^2 \max\left(h(E_1) - 1, \log\frac{D}{2}, 1\right)^2.$$

Ceci donne (dans le cas sans multiplications complexes et sans place réelle) les deux premières assertions du théorème 1.4 avec $h(E_1) - 1 \leq h_F(E_1)$ et $D \leq 2[k : \mathbf{Q}]$ (théorème 7.5).

7.4. **Cas CM.** Soient E_1 et E_2 deux courbes elliptiques à multiplications complexes isogènes. On les suppose définies sur un corps de nombres k, on choisit un plongement σ_0 de k dans $\mathbf{C}$. On considère les extensions à $\mathbf{C}$ *via* σ_0 de E_1 et E_2 et ω_1, ω_2 des périodes minimales. On forme $A = E_1 \times E_2$ et $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ et l'on s'intéresse à A_ω. Comme plus haut A_ω est définie sur une extension k' de k munie d'un plongement σ_0' étendant σ_0. Ici on a $[k' : k] \leq 12$ par la proposition 7.3. Soient $\Delta_1 = \operatorname{card} A_\omega \cap \{0\} \times E_2$ et $\Delta_2 = \operatorname{card} A_\omega \cap E_1 \times \{0\}$.

Lemme 7.7. *La variété abélienne A_ω est de dimension 1 et Δ_1 et Δ_2 sont finis.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que A_ω n'est ni $\{0\}$, ni $E_1 \times \{0\}$, ni $\{0\} \times E_2$, ni $E_1 \times E_2$. Les trois premières ne contiennent pas ω dans leur espace tangent. Si $\varphi\colon E_1 \to E_2$ est une isogénie alors $\mathrm{d}\varphi(\Omega_1) \subset \Omega_2$ et donc $\operatorname{End}(E_2) \cdot \mathrm{d}\varphi(\omega_1) \subset \Omega_2$ est de conoyau fini donc il existe $N \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ avec $N\Omega_2 \subset \operatorname{End}(E_2) \cdot \mathrm{d}\varphi(\omega_1)$ donc il existe $\psi \in \operatorname{End}(E_2)$ tel que $N\omega_2 = \mathrm{d}\psi \circ \mathrm{d}\varphi(\omega_1)$ ce qui montre $A_\omega \subset \{(P_1, P_2) \in E_1 \times E_2 \mid \psi \circ \varphi(P_1) = [N]P_2\} \neq E_1 \times E_2$. □

Lemme 7.8. *Il existe des isogénies $A_\omega \rightleftharpoons E_1$, $A_\omega \rightleftharpoons E_2$ et $E_1 \rightleftharpoons E_2$ de degrés respectifs Δ_1, Δ_2 et $\Delta_1\Delta_2$.*

Démonstration. La projection $p_{1|A_\omega}\colon A_\omega \to E_1$ est de degré Δ_1 et $\widehat{p_{1|A_\omega}}$ aussi (voir lemme 7.1). Il en va de même pour $A_\omega \rightleftharpoons E_2$ puis l'on compose. □

Nous nous intéressons à $\rho((A_\omega)_{\sigma_0'}, (L_\omega)_{\sigma_0'})$ où L_ω est la polarisation principale sur la courbe elliptique A_ω. Par définition $\omega \in \Omega_{(A_\omega)_{\sigma_0'}}$. Évaluons $\|\omega\|_{L_\omega, \sigma_0'}$. Comme $L_\omega^{\otimes\Delta_1} = p_1^* L_1$ (où L_1 est la polarisation principale sur E_1) on a

$$\|\omega\|^2_{L_\omega,\sigma_0'} = \frac{1}{\Delta_1}\|\omega\|^2_{p_1^*L_1,\sigma_0'} = \frac{1}{\Delta_1}\|\mathrm{d}p_1(\omega)\|^2_{L_1,\sigma_0'} = \frac{1}{\Delta_1}\|\omega_1\|^2_{L_1,\sigma_0}.$$

De la même façon, on a aussi $\|\omega\|^2_{L_\omega,\sigma_0'} = \frac{1}{\Delta_2}\|\omega_2\|^2_{L_2,\sigma_0}$. Par suite, on a

$$\rho((A_\omega)_{\sigma_0'}, (L_\omega)_{\sigma_0'})^2 \leq \frac{1}{\Delta_1}\rho((E_1)_{\sigma_0}, (L_1)_{\sigma_0})^2 = \frac{1}{\Delta_2}\rho((E_2)_{\sigma_0}, (L_2)_{\sigma_0})^2.$$

Comme $1/\rho^2 \geq \sqrt{3}/2$ sur une courbe elliptique (remarque 3.3), nous trouvons

$$\rho((A_\omega)_{\sigma_0'}, (L_\omega)_{\sigma_0'})^2 \leq \frac{2}{\sqrt{3}\max(\Delta_1, \Delta_2)}$$

et donc, en posant $D = [k' : \mathbf{Q}]$ et $\delta = \max(\Delta_1, \Delta_2)/D$,

$$T_\omega := \frac{1}{[k' : \mathbf{Q}]} \sum_{\sigma' :\, k' \hookrightarrow \mathbf{C}} \rho((A_\omega)_{\sigma'}, (L_\omega)_{\sigma'})^{-2} \geq \frac{\sqrt{3}\delta}{2}.$$

Notons $H = \max(1, h(E_1) + (1/2)\log(D/12\pi))$ et montrons que $\delta \leq \sqrt{233}H$. Pour cela, on peut supposer $\delta \geq \sqrt{233}$ et l'on sait alors par la proposition 3.2 appliquée avec $\sqrt{3}\delta/2$ que

$$\pi\sqrt{3}\delta/2 \leq 3\log(\sqrt{3}\delta/2) + 6h(A_\omega) + 8,66.$$

Ici on a $h(A_\omega) \leq h(E_1) + (1/2)\log\Delta_1$ en utilisant l'isogénie entre A_ω et E_1 (voir lemme 7.8). Par suite il vient

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\delta \leq 3\log\frac{\sqrt{3}}{2}\delta^2 + 6H + 19,55 \leq 6\log\delta + 25,12H.$$

L'inégalité $\delta \leq \sqrt{233}H$ s'obtient alors en remarquant que $\log\delta \leq ((\log\sqrt{233})/\sqrt{233})\delta$ et

$$\frac{25,12}{\frac{\pi\sqrt{3}}{2} - \frac{6\log\sqrt{233}}{\sqrt{233}}} < \sqrt{233}.$$

On en déduit $\Delta_1\Delta_2 \leq D^2\delta^2 \leq 233D^2H^2$ et nous avons donc bien prouvé qu'il existe une isogénie entre E_1 et E_2 de degré au plus

$$233[k' : \mathbf{Q}]^2 \max\left(1, h_F(E_1) + \frac{1}{2}\log\frac{[k' : \mathbf{Q}]}{12}\right)^2.$$

Avec $[k' : \mathbf{Q}] \leq 12[k : \mathbf{Q}]$ et $233 \times 144 \leq 3,4 \times 10^4$, ceci montre l'assertion du théorème 1.4 dans le cas avec multiplications complexes.

7.5. **Cas non CM avec une place réelle.** Soit k un corps de nombres qui possède au moins une place réelle. On note $\sigma_0 : k \hookrightarrow \mathbf{C}$ un plongement complexe induit par cette place. Soient E_1 et E_2 deux courbes elliptiques sans multiplications complexes, définies sur k et isogènes. Pour chaque $j \in \{1, 2\}$ le réseau des périodes de $(E_j)_{\sigma_0}$ est de la forme $\Omega_j := \mathbf{Z}\omega_j \oplus \mathbf{Z}\tau_j\omega_j$ avec τ_j élément du domaine fondamental de Siegel (on notera y_j sa partie imaginaire). Le caractère réel de la place attachée à σ_0 se traduit par l'égalité $\overline{(E_j)_{\sigma_0}} = (E_j)_{\overline{\sigma_0}} = (E_j)_{\sigma_0}$, et en particulier les réseaux des périodes sont identiques. Soit $\mathsf{f}_j : \overline{(E_j)_{\sigma_0}} \to (E_j)_{\sigma_0}$ l'application de conjugaison complexe du § 2.6. D'après la proposition 2.2, la base $(\mathrm{d}\mathsf{f}_j(\omega_j), \mathrm{d}\mathsf{f}_j(\tau_j\omega_j))$ est une base minimale de Ω_j. Par antilinéarité, on a $\mathrm{d}\mathsf{f}_j(\tau_j\omega_j) = \overline{\tau_j}\mathrm{d}\mathsf{f}_j(\omega_j)$. Ainsi $\overline{\tau_j}$ et τ_j sont conjugués par $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. En utilisant que τ_j appartient au domaine fondamental, on trouve $|\mathrm{Re}(\tau_j)| \in \{0, 1/2\}$ et le réseau $\Omega'_j := \mathbf{Z}\omega_j \oplus \mathbf{Z}(2\tau_j\omega_j) = \mathbf{Z}\omega_j \oplus \mathbf{Z}(2iy_j\omega_j)$ est un sous-réseau de Ω_j d'indice 2. Ainsi, en considérant une isogénie $\varphi : E_1 \to E_2$, on a l'inclusion $2\mathrm{d}\varphi(\Omega'_1) \subset 2\mathrm{d}\varphi(\Omega_1) \subset 2\Omega_2 \subset \Omega'_2$ qui entraîne l'existence d'entiers a, b tels que

$$\mathrm{d}\varphi(\omega_1) = a\omega_2/2 + biy_2\omega_2. \tag{19}$$

Le fait que $4iy_1\mathrm{d}\varphi(\omega_1)$ appartienne aussi à Ω'_2 se traduit par les conditions $4by_1y_2 \in \mathbf{Z}$ et $ay_1y_2^{-1} \in \mathbf{Z}$, qui induisent par produit $4aby_1^2 \in \mathbf{Z}$. Or l'on ne peut avoir $y_1^2 \in \mathbf{Q}$ car sinon τ_1 serait quadratique et la courbe E_1 aurait de la multiplication complexe. Ainsi, on a nécessairement $ab = 0$ et la relation (19) montre que, pour au moins une période ω dans l'ensemble $\{(\omega_1, \omega_2), (\omega_1, 2iy_2\omega_2)\}$, la sous-variété abélienne A_ω de $A = E_1 \times E_2$ est de dimension 1. Par un raisonnement similaire en permutant Ω'_1 et Ω'_2, on peut remplacer $(\omega_1, 2iy_2\omega_2)$ dans cette paire par $(2iy_1\omega_1, \omega_2)$. Pour une période ω idoine, la courbe elliptique A_ω est définie sur une extension k' de k de degré $D = [k' : \mathbf{Q}] \leq 2[k : \mathbf{Q}]$ (théorème 7.5) et l'on note σ'_0 un plongement complexe de k' prolongeant σ_0. Posons $\Delta_1 = \mathrm{card}\, A_\omega \cap \{0\} \times E_2$ et $\Delta_2 = \mathrm{card}\, A_\omega \cap E_1 \times \{0\}$. Comme dans le cas CM, nous disposons des lemmes 7.7 (choix de ω) et 7.8 (démonstration inchangée). L'obtention d'une borne pour le degré minimal d'isogénie Δ repose alors sur une majoration du produit $\Delta_1\Delta_2$ à partir de notre lemme matriciel pour les courbes elliptiques, analogue au cas CM. Pour l'analyse, nous allons distinguer deux cas selon la valeur prise par $\dim A_{(\omega_1,\omega_2)}$.

7.5.1. *Premier cas :* $\dim A_{(\omega_1,\omega_2)} = 1$. C'est le cas le plus simple. Il suffit de reprendre la démonstration du cas CM (qui suit le lemme 7.8), avec (ω_1, ω_2), en changeant le 12 au dénominateur dans la définition de H par 2 (car $D = [k' : \mathbf{Q}] \leq 2[k : \mathbf{Q}]$). La constante 19, 55 peut être remplacée par 14, 18, la valeur 25, 12 par 19, 75 et 233 par 167. On trouve alors $\Delta_1\Delta_2 \leq 167D^2H^2$. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}\Delta &\leq 668[k : \mathbf{Q}]^2 \max\left(1, h_F(E_1) + \frac{1}{2}\log[k : \mathbf{Q}]\right)^2 \\ &\leq 1503[k : \mathbf{Q}]^2 \max\left(1, h_F(E_1), \log[k : \mathbf{Q}]\right)^2.\end{aligned}$$

7.5.2. *Deuxième cas :* $\dim A_{(\omega_1,\omega_2)} = 2$. Nous avons vu que si $\omega \in \{(\omega_1, 2iy_2\omega_2), (2iy_1\omega_1, \omega_2)\}$ alors $\dim A_\omega = 1$. Étudions les deux possibilités.

• $\omega = (\omega_1, 2iy_2\omega_2)$. On a

$$\rho((A_\omega)_{\sigma_0'}, (L_\omega)_{\sigma_0'})^2 \leq \|\omega\|^2_{L_\omega,\sigma_0'} = \frac{1}{\Delta_1 y_1} = \frac{4y_2}{\Delta_2}.$$

Soient $\delta = \Delta_1 y_1/D = \Delta_2/(4Dy_2)$ et

$$H' := \max\left(1, h_F(E_1), \log\frac{D}{2}\right).$$

Nous allons montrer que $\delta \leq 12,31H'$, ce qui permettra d'obtenir une première majoration de $\Delta_1\Delta_2$ car $\Delta_1\Delta_2 = (2D\delta)^2 y_2/y_1$. On peut supposer $\delta \geq 12,31$. Considérons T_ω la moyenne des $\rho((A_\omega)_\sigma, (L_\omega)_\sigma)^{-2}$. On dispose de l'inégalité $T_\omega \geq \delta$, qui découle du calcul de la norme de ω en la place σ_0'. Grâce à la proposition 3.2 et à l'isogénie entre A_ω et E_1 de degré Δ_1 (voir lemme 7.8), qui donne $h(A_\omega) \leq h(E_1) + (1/2)\log\Delta_1$, on a

$$\pi\delta \leq 3\log\delta + 6h(E_1) + 3\log\Delta_1 + 8,66. \tag{20}$$

En observant que $\Delta_1 \leq (2/\sqrt{3})D\delta$ (car $y_1 \geq \sqrt{3}/2$) et en se rappelant que $h_F(E_1) = h(E_1) - (\log\pi)/2$, on en déduit $\pi\delta \leq 6\log\delta + 23,61H'$. Comme $\delta \geq 12,31$ on a $\log\delta \leq (\log(12,31)/12,31)\delta$ puis

$$\delta \leq \frac{23,61H'}{\pi - 6\times\frac{\log(12,31)}{12,31}} \leq 12,31H',$$

qui est le résultat voulu. On en déduit

$$\sqrt{\Delta} \leq \sqrt{\Delta_1\Delta_2} \leq 24,62DH'\sqrt{\frac{y_2}{y_1}}. \tag{21}$$

• $\omega = (2iy_1\omega_1, \omega_2)$. On a

$$\rho((A_\omega)_{\sigma_0'}, (L_\omega)_{\sigma_0'})^2 \leq \|\omega\|^2_{L_\omega,\sigma_0'} = \frac{4y_1}{\Delta_1} = \frac{1}{\Delta_2 y_2}.$$

Soient $\delta' = \Delta_1/(4Dy_1) = \Delta_2 y_2/D$, $H' = \max(1, h_F(E_1), \log(D/2))$ et T_ω comme ci-dessus. Nous allons montrer que $\delta' \leq 18,19H'$ en procédant comme dans le cas précédent. On part de l'inégalité (20) qui reste valide ici avec δ' (que l'on peut supposer $\geq 18,19$). On majore $\Delta_1 = 4y_1D\delta'$ par $25,8D^2\max(1, h(E_1))\delta'$ grâce à la proposition 3.2 et à la remarque 3.3. En remplaçant dans (20) et en utilisant $\log a \leq a - 1$ pour $a > 0$, on déduit alors

$$\pi\delta' \leq 6\log\delta' + 6\log D + 6h(E_1) + 3\max(1, h(E_1)) + 15,42.$$

En distinguant les cas $h(E_1) \leq 1$ et $h(E_1) > 1$, cette majoration implique $\pi\delta' \leq 6\log\delta' + 39,74H'$. Comme $\delta' \geq 18,19$ on a $\log\delta' \leq (\log(18,19)/18,19)\delta'$ puis

$$\delta' \leq \frac{39,74H'}{\pi - 6\times\frac{\log(18,19)}{18,19}} \leq 18,19H'.$$

On a alors

$$\sqrt{\Delta} \leq \sqrt{\Delta_1\Delta_2} \leq 36,38DH'\sqrt{\frac{y_1}{y_2}}.$$

Pour conclure, on multiplie cette inégalité par (21) :

$$\Delta \leq 895,7\times[k' : \mathbf{Q}]^2\max\left(1, h_F(E_1), \log\frac{[k' : \mathbf{Q}]}{2}\right)^2$$

et l'on utilise $[k' : \mathbf{Q}] \leq 2[k : \mathbf{Q}]$ et $895,7\times 4 < 3583$. Ceci termine la démonstration du théorème 1.4.

7.6. **Hauteur et invariant modulaire.** Le lemme suivant se trouve dans [Si] sans explicitation de la constante. C'est aussi une version plus fine de l'une des inégalités de l'encadrement (51) de [Pe2].

Lemme 7.9. *Pour toute courbe elliptique E d'invariant j nous avons*

$$h(E) \leq \frac{1}{12}h(j) + 2,95.$$

Démonstration. Les deux membres sont invariants par extension de corps, donc nous pouvons supposer E/k semi-stable. Si nous appliquons la formule (10) donnée par Silverman [Si] dans le cas semi-stable, nous avons :

$$h(j) = \frac{1}{[k:\mathbf{Q}]} \log |N_{k/\mathbf{Q}} \Delta_{E/k}| + \frac{1}{[k:\mathbf{Q}]} \sum_{\sigma:\, k \hookrightarrow \mathbf{C}} \log \max(1, |j(\tau_\sigma)|)$$

où nous notons τ_σ l'élément du domaine fondamental de Siegel correspondant à E_σ (et dans le premier terme apparaît la norme du discriminant minimal de E/k). Par ailleurs, en posant $y_\sigma = \mathrm{Im}\tau_\sigma$, la proposition 1.1 de [Si] fournit

$$h_F(E) = \frac{1}{12[k:\mathbf{Q}]} \log |N_{k/\mathbf{Q}} \Delta_{E/k}| - \frac{1}{12[k:\mathbf{Q}]} \sum_{\sigma:\, k \hookrightarrow \mathbf{C}} \log(|\Delta(\tau_\sigma)| y_\sigma^6).$$

En combinant et en rappelant que $h_F(E) = h(E) - (1/2)\log \pi$, nous avons

$$h(E) - \frac{1}{12} h(j) = \frac{1}{2} \log \pi - \frac{1}{12[k:\mathbf{Q}]} \sum_{\sigma:\, k \hookrightarrow \mathbf{C}} \log \left(\max(1, |j(\tau_\sigma)|) |\Delta(\tau_\sigma)| y_\sigma^6 \right).$$

D'après l'estimation située au bas de la page 256 de [Si], nous pouvons écrire

$$|\Delta(\tau_\sigma)| \geq e^{-1/9 - 2\pi y_\sigma} (2\pi)^{-12}.$$

Par ailleurs Faisant et Philibert donnent la minoration $|j(\tau_\sigma)| \geq e^{2\pi y_\sigma} - 1193$ (lemme 1, (iii) de [FP2, p. 187] ; la preuve est dans le texte [FP1, (3) p. 2.6]). Par suite, nous avons

$$\begin{aligned} U_\sigma = \max(1, |j(\tau_\sigma)|) |\Delta(\tau_\sigma)| y_\sigma^6 &\geq \max(1, e^{2\pi y_\sigma} - 1193) e^{-1/9 - 2\pi y_\sigma} (2\pi)^{-12} y_\sigma^6 \\ &\geq e^{-1/9} (2\pi)^{-12} f(y_\sigma) \end{aligned}$$

où f est la fonction donnée par

$$f(y) = \max(y^6 e^{-2\pi y}, y^6(1 - 1193 e^{-2\pi y})).$$

Une rapide étude de fonction montre que f est croissante sur $[\sqrt{3}/2, 3/\pi]$ et sur $[(\log 1194)/2\pi, +\infty[$ tandis qu'elle est décroissante sur $[3/\pi, (\log 1194)/2\pi]$. Comme de plus le calcul montre que $f((\log 1194)/2\pi) < f(\sqrt{3}/2)$ nous avons pour tout $y \geq \sqrt{3}/2$ la minoration $f(y) \geq f((\log 1194)/2\pi)$ et donc pour tout σ la quantité U_σ est minorée par $1/B$ où B est la constante

$$B = 1194 \left(\frac{2\pi}{\log(1194)} \right)^6 e^{1/9} (2\pi)^{12}.$$

En revenant au calcul de hauteur nous avons

$$h(E) - \frac{1}{12} h(j) \leq \frac{1}{2} \log \pi + \frac{1}{12} \log B \leq 2,95$$

après estimation numérique. □

7.7. **Cas non CM : application.** Nous démontrons le corollaire 1.5. Soient p et E comme dans l'énoncé. Nous raisonnons par l'absurde en supposant que l'image de la représentation galoisienne est contenue dans le normalisateur d'un sous-groupe de Cartan déployé. Ceci entraîne notamment que l'invariant modulaire j de E est entier : $j \in \mathbf{Z}$ (voir [BiPa, appendice]). Alors le théorème 2.1 de [BPR] (version explicite du résultat principal de [BiPa]) montre

$$\log |j| \leq 2\pi\sqrt{p} + 6 \log p + 21 \frac{(\log p)^2}{\sqrt{p}}.$$

De plus, dans la partie 5 de [BiPa] (voir aussi la partie 3 de [BPR]), on construit deux courbes E_1 et E_2 de sorte que d'une part E et E_1 sont reliées par une isogénie de degré p donc $h(E_1) \leq h(E) + (1/2)\log p$ et d'autre part E_1 et E_2 sont reliées par une isogénie cyclique de degré p^2. Ceci fait que dans les notations des paragraphes 7.2 et 7.3, on a $\sqrt{\Delta} = p$ (nos courbes sont toutes sans multiplications complexes comme E). En outre la construction montre que E_1 et E_2 ainsi que l'isogénie cyclique sont définies sur un corps k quadratique. Ceci assure que toutes les isogénies entre E_1 et E_2 sont définies sur k et donc il en va de même de A_ω. Par suite $k' = k$ et $D = 2$. Si k est imaginaire, nous avons d'après la majoration (18) (qui suit le lemme 7.6)

$$p \leq 2\sqrt{\frac{2}{3}} 1778 (H + 4 \log p + 0,5 \log H + 2,4)$$

où $H = \max(h(E_1), 10^3) \leq \max(h(E) + (1/2)\log p, 10^3)$. Dans le cas réel, cette estimation est très largement vraie (le théorème 1.4 montre $p \leq 2\sqrt{3583}H$). En combinant le lemme 7.9 et la majoration de $\log|j| = h(j)$ donnée ci-dessus, nous trouvons

$$H \leq \max\left(1000, \frac{\pi}{6}\sqrt{p} + \log p + \frac{7(\log p)^2}{4\sqrt{p}} + 2,95\right)$$

puis

$$p \leq 2\sqrt{\frac{2}{3}}1778\left(\max\left(1000, \frac{\pi}{6}\sqrt{p} + \log p + \frac{7(\log p)^2}{4\sqrt{p}} + 2,95\right) + 4\log p + 2,4 \right.$$
$$\left. + \, 0,5\log\max\left(1000, \frac{\pi}{6}\sqrt{p} + \log p + \frac{7(\log p)^2}{4\sqrt{p}} + 2,95\right)\right).$$

Si l'on divise par p de chaque côté on obtient une majoration de la forme $1 \leq f(p)$ pour une fonction f décroissante sur $[1, +\infty[$. Le calcul montre que $f(3\,094\,028) < 1 < f(3\,094\,027)$ et nous en déduisons que l'on a $p \leq 3\,094\,027$.

8. Appendice

L'objectif de cet appendice est de démontrer le théorème de Bost utilisé dans le travail d'Autissier [Au]. Il est énoncé dans les notes [Bo3, p. 5] et repris dans [Gr, p. 100] (voir l'inégalité (13) et la dernière égalité de la page où l'on corrige l'exposant $g/4$ en $1/4$) mais aucune démonstration ne semble avoir été publiée à ce jour.

Soit donc une variété abélienne A définie sur un corps de nombres k et munie d'une polarisation principale L. Pour tout plongement $\sigma\colon k \hookrightarrow \mathbf{C}$, la variété abélienne complexe A_σ obtenue par extension des scalaires est principalement polarisée et donc isomorphe à un unique $\mathbf{C}^g/(\mathbf{Z}^g + \tau_\sigma\mathbf{Z}^g)$ avec τ_σ dans le domaine fondamental de Siegel.

Notons $y_\sigma := \operatorname{Im}\tau_\sigma$. Soit $F_\sigma\colon \mathbf{C}^g \to \mathbf{C}$ définie par, si $z = \tau_\sigma p + q \in \mathbf{C}^g$ avec $p, q \in \mathbf{R}^g$,

$$F_\sigma(z) = \det(2y_\sigma)^{1/4} \sum_{n\in\mathbf{Z}^g} \exp\left(i\pi^{\mathrm{t}}(n+p)\tau_\sigma(n+p) + 2i\pi^{\mathrm{t}}nq\right).$$

Le théorème de Bost s'écrit alors sous la forme suivante.

Théorème 8.1. *Soit $a := -(h(A) + (g/2)\log(2\pi))/2$. On a*

$$a \leq \frac{1}{[k:\mathbf{Q}]} \sum_{\sigma\colon k\hookrightarrow\mathbf{C}} \int_{(\mathbf{R}^g/\mathbf{Z}^g)^2} \log|F_\sigma(\tau_\sigma p + q)|\,\mathrm{d}p\mathrm{d}q.$$

Nous commençons par quelques propriétés de la fonction F_σ. Elles font intervenir la donnée d'Appell-Humbert (H_σ, χ_σ) sur $\mathbf{C}^g/\mathbf{Z}^g + \tau_\sigma\mathbf{Z}^g$ définie par

$$H_\sigma(z, z') = {}^{\mathrm{t}}\overline{z}y_\sigma^{-1}z' \qquad \text{et} \qquad \chi(\tau_\sigma m + n) = (-1)^{{}^{\mathrm{t}}mn}$$

où $z, z' \in \mathbf{C}^g$ et $m, n \in \mathbf{Z}^g$.

Lemme 8.2. *Soit σ un plongement complexe de k.*

(1) *Nous avons*

$$\int_{(\mathbf{R}^g/\mathbf{Z}^g)^2} |F_\sigma(\tau_\sigma p + q)|^2\,\mathrm{d}p\mathrm{d}q = 1.$$

(2) *Si nous posons $\vartheta_\sigma(z) = F_\sigma(z)\exp((\pi/2){}^{\mathrm{t}}zy_\sigma^{-1}z - i\pi^{\mathrm{t}}p\tau_\sigma p)$ pour $z = \tau_\sigma p + q$ avec $p, q \in \mathbf{R}^g$ alors $\vartheta_\sigma\colon \mathbf{C}^g \to \mathbf{C}$ est une fonction thêta associée à la donnée d'Appell-Humbert (H_σ, χ_σ).*

(3) *Nous avons $|\vartheta_\sigma(z)| = |F_\sigma(z)|\exp((\pi/2)H_\sigma(z,z))$ pour tout $z \in \mathbf{C}^g$.*

Démonstration. Pour (1), en évaluant $|F_\sigma|^2$, l'intégrale à calculer vaut

$$\begin{aligned}
&\int_{(\mathbf{R}^g/\mathbf{Z}^g)^2} \det(2y_\sigma)^{1/2} \sum_{n,m\in\mathbf{Z}^g} e^{2i\pi^{\mathrm{t}}(n-m)q+i\pi^{\mathrm{t}}(n+p)\tau_\sigma(n+p)-i\pi^{\mathrm{t}}(m+p)\overline{\tau_\sigma}(m+p)}\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q\\
&= \det(2y_\sigma)^{1/2} \sum_{n,m\in\mathbf{Z}^g} \int_{\mathbf{R}^g/\mathbf{Z}^g} e^{i\pi^{\mathrm{t}}(n+p)\tau_\sigma(n+p)-i\pi^{\mathrm{t}}(m+p)\overline{\tau_\sigma}(m+p)} \left(\int_{\mathbf{R}^g/\mathbf{Z}^g} e^{2i\pi^{\mathrm{t}}(n-m)q}\mathrm{d}q\right)\mathrm{d}p\\
&= \det(2y_\sigma)^{1/2} \sum_{n\in\mathbf{Z}^g} \int_{\mathbf{R}^g/\mathbf{Z}^g} e^{-2\pi^{\mathrm{t}}(n+p)y_\sigma(n+p)}\mathrm{d}p\\
&= \det(2y_\sigma)^{1/2} \int_{\mathbf{R}^g} e^{-2\pi^{\mathrm{t}}py_\sigma p}\mathrm{d}p\\
&= 1
\end{aligned}$$

(pour démontrer la dernière égalité, on peut remplacer $2y_\sigma$ par l'identité *via* un changement de variables linéaire ; elle se réduit alors à $\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$). Pour (2), un premier calcul donne pour $z = \tau_\sigma p + q$ et $\omega = \tau_\sigma m + n$ la relation $F_\sigma(z+\omega) = F_\sigma(z)\exp(-2i\pi^{\mathrm{t}}mq)$ où $m, n \in \mathbf{Z}^g$ et $p, q \in \mathbf{R}^g$. Avec les mêmes notations ceci montre que $\vartheta_\sigma(z+\omega)\vartheta_\sigma(z)^{-1}$ est l'exponentielle du nombre complexe

$$\frac{\pi}{2}\left({}^{\mathrm{t}}(z+\omega)y_\sigma^{-1}(z+\omega) - {}^{\mathrm{t}}zy_\sigma^{-1}z\right) - i\pi^{\mathrm{t}}(p+m)\tau_\sigma(p+m) + i\pi^{\mathrm{t}}p\tau_\sigma p - 2i\pi^{\mathrm{t}}mq.$$

Après un calcul élémentaire, cette quantité se transforme en

$$\frac{\pi}{2}{}^{\mathrm{t}}\overline{\omega}y_\sigma^{-1}\omega + \pi^{\mathrm{t}}\overline{\omega}y_\sigma^{-1}z + i\pi^{\mathrm{t}}mn.$$

Ceci nous fournit la relation

$$\vartheta_\sigma(z+\omega) = \vartheta_\sigma(z)\chi_\sigma(\omega)\exp\left(\pi H_\sigma(\omega,z) + \frac{\pi}{2}H_\sigma(\omega,\omega)\right)$$

qui montre bien que ϑ_σ est une fonction thêta pour le facteur d'automorphie introduit au § 2.5 (voir aussi [BL, lemme 3.2.4] pour un résultat semblable). Le caractère holomorphe de ϑ_σ se lit sur la relation

$$e^{-i\pi^{\mathrm{t}}p\tau_\sigma p}\sum_{n\in\mathbf{Z}^g}\exp\left(i\pi^{\mathrm{t}}(n+p)\tau_\sigma(n+p) + 2i\pi^{\mathrm{t}}nq\right) = \sum_{n\in\mathbf{Z}^g}\exp\left(i\pi^{\mathrm{t}}n\tau_\sigma n + 2i\pi^{\mathrm{t}}nz\right).$$

Enfin pour (3) il s'agit de voir que le nombre $(\pi/2)^{\mathrm{t}}zy_\sigma^{-1}z - i\pi^{\mathrm{t}}p\tau_\sigma p - (\pi/2)H_\sigma(z,z)$ est un imaginaire pur. On constate alors simplement qu'il vaut $i\pi^{\mathrm{t}}pq$. □

Nous en venons maintenant au lemme-clef en vue de la démonstration du théorème 8.1 qui relie la hauteur de Néron-Tate aux fonctions F_σ. Pour pouvoir l'exprimer, nous avons besoin de préciser le choix d'isomorphisme entre A_σ et $\mathbf{C}^g/\mathbf{Z}^g + \tau_\sigma\mathbf{Z}^g$. Il est lié à un choix de représentant pour la polarisation L. Tout d'abord nous pouvons faire, dans l'énoncé du théorème 8.1, une extension finie du corps de base de manière transparente. Pour ne pas alourdir les notations, ici et ci-dessous, nous conservons les notations F_σ, τ_σ et y_σ pour un plongement σ d'un sur-corps de k : il est entendu que l'on parle en fait de $F_{\sigma_{|k}}$ et ainsi de suite.

Nous profitons de cette liberté pour supposer que L admet sur k un représentant symétrique et nous le fixons une fois pour toutes. Nous notons aussi E le diviseur effectif de A associé. Nous pouvons alors fixer de manière unique l'isomorphisme entre A_σ et $\mathbf{C}^g/\mathbf{Z}^g + \tau_\sigma\mathbf{Z}^g$ en exigeant que L_σ corresponde au faisceau inversible symétrique de donnée d'Appell-Humbert (H_σ, χ_σ) introduite plus haut. Pour alléger les notations, nous *identifions* les variétés abéliennes A_σ et $\mathbf{C}^g/\mathbf{Z}^g + \tau_\sigma\mathbf{Z}^g$. En particulier t_{A_σ} est identifié à $\mathbf{C}^g$ et la fonction ϑ_σ du lemme précédent est une fonction thêta associée à L_σ.

Lemme 8.3. *Soient K une extension finie de k et $x \in A(K)$. Notons $\widehat{h}_L(x)$ la hauteur de Néron-Tate de x relative à L. Pour tout plongement $\sigma\colon K \hookrightarrow \mathbf{C}$, considérons un logarithme z_σ de x dans t_{A_σ} : $x = \exp_{A_\sigma}(z_\sigma)$. Supposons que x ne soit pas dans le support du diviseur E associé à L. Alors on a*

$$a \leq \widehat{h}_L(x) + \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]}\sum_{\sigma\colon K\hookrightarrow\mathbf{C}} \log|F_\sigma(z_\sigma)|.$$

Démonstration. Considérons un modèle de Moret-Bailly $(\mathcal{A}, \overline{\mathcal{L}}, \epsilon_x)$ de (A, L, x) sur une extension finie K' de K (voir § 6.1 et [Bo2, § 4.3]) :

(i) $\mathcal{A} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{K'}$ est un schéma en groupes lisse, de fibre générique $A_{K'}$,
(ii) $\overline{\mathcal{L}}$ est un faisceau inversible hermitien cubiste sur $\mathcal{A}$, de fibre générique $L_{K'}$,
(iii) $\epsilon_x \colon \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{K'} \to \mathcal{A}$ est une section qui relève $x \in A(K')$.

Comme dans le paragraphe 6.1, ce modèle confère à l'espace $H := \mathrm{H}^0(A_{K'}, L_{K'})$ une structure de fibré hermitien adélique $\overline{H}$ sur K'. Par hypothèse, une section $s \in H \setminus \{0\}$ ne s'annule pas en x et, puisque $\mathrm{h}^0(A, L) = 1$, on dispose de la formule

$$\widehat{\mu}(\overline{H}) = \widehat{\mu}(\overline{\epsilon_x^* \mathcal{L}}) + \frac{1}{[K' : \mathbf{Q}]} \sum_v [(K')_v : \mathbf{Q}_v] \log \frac{\|s(x)\|_{\overline{\epsilon_x^* \mathcal{L}}, v}}{\|s\|_{\overline{H}, v}}$$

(dans la somme, v parcourt les places de K'). La pente $\widehat{\mu}(\overline{\epsilon_x^* \mathcal{L}})$ est égale à $\widehat{h}_L(x)$ [Bo2, théorème 4.10, (ii)] tandis que $\widehat{\mu}(\overline{H}) = a$ (voir (2)). Dans la somme, on sépare les places ultramétriques des places archimédiennes. Si v est ultramétrique, considérons une base s_v du $\mathcal{O}_v$-module libre (de rang 1) $\mathrm{H}^0(\mathcal{A}, \mathcal{L}) \otimes_{\mathcal{O}_{K'}} \mathcal{O}_v$ ($\mathcal{O}_v$ est l'anneau de valuation du complété de K' en la place v). On a alors

$$\frac{\|s(x)\|_{\overline{\epsilon_x^* \mathcal{L}}, v}}{\|s\|_{\overline{H}, v}} = \|s_v(\epsilon_x)\|_{\overline{\epsilon_x^* \mathcal{L}}, v} \leq 1.$$

Si v est archimédienne et si $\sigma \colon K' \hookrightarrow \mathbf{C}$ est un plongement complexe associé, la fonction thêta $\vartheta_\sigma \colon t_{A_\sigma} \to \mathbf{C}$ du lemme 8.2 (2) correspond à un élément $s_\sigma \in H \otimes_\sigma \mathbf{C}$ avec lequel nous pouvons calculer le quotient des normes, en utilisant la relation (3) du § 6.1 puis le lemme 8.2 (3) :

$$\|s_\sigma(x)\|_{\overline{\epsilon_x^* \mathcal{L}}, v} = |\vartheta_\sigma(z_\sigma)| \, e^{-\frac{\pi}{2} \|z_\sigma\|^2_{L, \sigma}} = |F_\sigma(z_\sigma)|.$$

Le calcul de la norme $\|s_\sigma\|_{\overline{H}, v}$ se fait en élevant cette dernière formule au carré et en intégrant. On trouve donc (lemme 8.2 (1)) $\|s_\sigma\|_{\overline{H}, v} = 1$ puis $\|s(x)\|_{\overline{\epsilon_x^* \mathcal{L}}, v} / \|s\|_{\overline{H}, v} = \|s_\sigma(x)\|_{\overline{\epsilon_x^* \mathcal{L}}, v} = |F_\sigma(z_\sigma)|$. En regroupant toutes ces informations, nous avons la formule voulue car $F_\sigma(z_\sigma)$ ne dépend que de la restriction de σ à K. □

Démonstration du théorème 8.1. Soit X un nombre réel. Sur le compact $(\mathbf{R}^g/\mathbf{Z}^g)^2$, la fonction $f_{X,\sigma}$ définie par $f_{X,\sigma}(p, q) = \max\{-X, \log|F_\sigma(\tau_\sigma p + q)|\}$ est continue (à valeurs réelles). Étant donné un entier $N \geq 1$, posons $I_N := \{0, 1, \ldots, N-1\}^g$ et, pour $i \in I_N$, notons p_i l'image de i/N dans $\mathbf{R}^g/\mathbf{Z}^g$. Alors, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe $N_0(X, \varepsilon) \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout entier $N \geq N_0(X, \varepsilon)$, pour tout plongement $\sigma \colon k \hookrightarrow \mathbf{C}$, l'on ait

$$\frac{1}{N^{2g}} \sum_{(i,j) \in I_N^2} f_{X,\sigma}(p_i, p_j) \leq \varepsilon + \int_{(\mathbf{R}^g/\mathbf{Z}^g)^2} f_{X,\sigma}(p, q) \, \mathrm{d}p\mathrm{d}q.$$

Faisons alors la moyenne sur les plongements σ :

$$\frac{1}{N^{2g}} \frac{1}{[k : \mathbf{Q}]} \sum_{\sigma \colon k \hookrightarrow \mathbf{C}} \left(\sum_{(i,j) \in I_N^2} f_{X,\sigma}(p_i, p_j) \right) \leq \varepsilon + \frac{1}{[k : \mathbf{Q}]} \sum_{\sigma \colon k \hookrightarrow \mathbf{C}} \int_{(\mathbf{R}^g/\mathbf{Z}^g)^2} f_{X,\sigma}(p, q) \, \mathrm{d}p\mathrm{d}q.$$

Dans le membre de gauche l'on peut librement remplacer k par une extension finie. Nous considérons ainsi le corps K_N où sont rationnels tous les points de N-torsion de A, notés $A[N]$. Pour $x \in A[N]$ et σ un plongement de K_N nous notons $u_{x,\sigma}$ le couple (p, q) correspondant à un logarithme de x dans A_σ. Lorsque x parcourt $A[N]$, à σ fixé, $u_{x,\sigma}$ parcourt exactement I_N^2. Par suite, nous avons

$$\frac{1}{N^{2g}} \sum_{x \in A[N]} \left(\frac{1}{[k : \mathbf{Q}]} \sum_{\sigma \colon K_N \hookrightarrow \mathbf{C}} f_{X,\sigma}(u_{x,\sigma}) \right) \leq \varepsilon + \frac{1}{[k : \mathbf{Q}]} \sum_{\sigma \colon k \hookrightarrow \mathbf{C}} \int_{(\mathbf{R}^g/\mathbf{Z}^g)^2} f_{X,\sigma}(p, q) \, \mathrm{d}p\mathrm{d}q.$$

Le lemme 8.3 montre que, si $x \in A[N]$ n'appartient pas au diviseur E, la parenthèse du membre de gauche est plus grande que a. Elle est par ailleurs toujours plus grande que $-X$. Notre membre de gauche est donc supérieur à $a(1 - t_N/N^{2g}) - X t_N/N^{2g}$ où $t_N = \operatorname{card}(A[N] \cap E)$. Par le théorème de Raynaud (ex-conjecture de Manin-Mumford, voir [Ra1]) les points de torsion de E sont contenus dans un nombre fini de translatés de sous-variétés abéliennes strictes de A. Comme dans chaque

tel translaté il y a au plus N^{2g-2} points de N-torsion, nous avons $t_N = O(N^{2g-2})$. En faisant alors tendre N vers l'infini puis ε vers 0, on obtient

$$a \leq \frac{1}{[k : \mathbf{Q}]} \sum_{\sigma\,:\, k \hookrightarrow \mathbf{C}} \int_{(\mathbf{R}^g/\mathbf{Z}^g)^2} f_{X,\sigma}(p,q)\,\mathrm{d}p\mathrm{d}q.$$

Pour chaque σ, la suite décroissante $(f_{X,\sigma})_{X\in\mathbf{N}}$ de fonctions mesurables converge vers $(p,q) \mapsto \log|F_\sigma(\tau_\sigma p + q)|$. Par convergence monotone, on a

$$\lim_{X\to\infty} \int_{(\mathbf{R}^g/\mathbf{Z}^g)^2} f_{X,\sigma}(p,q)\,\mathrm{d}p\mathrm{d}q = \int_{(\mathbf{R}^g/\mathbf{Z}^g)^2} \log|F_\sigma(\tau_\sigma p + q)|\,\mathrm{d}p\mathrm{d}q,$$

d'où le résultat. □

Pour conclure, rappelons que ce résultat a permis à Bost de démontrer une minoration uniforme de la hauteur d'une variété abélienne (sans hypothèse de polarisation).

Corollaire 8.4. *Pour toute variété abélienne A définie sur un corps de nombres, on a $h(A) \geq -(1/2)(\dim A)\log(2\pi)$.*

Démonstration. Dans le cas principalement polarisé, il suffit de voir dans les notations ci-dessus $a \leq 0$ ou même, par le théorème,

$$\int_{(\mathbf{R}^g/\mathbf{Z}^g)^2} \log|F_\sigma| \leq 0.$$

Or, par concavité du logarithme, on a

$$\int_{(\mathbf{R}^g/\mathbf{Z}^g)^2} \log|F_\sigma| = \frac{1}{2}\int_{(\mathbf{R}^g/\mathbf{Z}^g)^2} \log|F_\sigma|^2 \leq \frac{1}{2}\log\int_{(\mathbf{R}^g/\mathbf{Z}^g)^2} |F_\sigma|^2 = 0$$

par le lemme 8.2. Dans le cas général on applique la minoration à la variété $A^4 \times (\widehat{A})^4$ qui est principalement polarisée de hauteur $8h(A)$ et de dimension $8\dim A$ (astuce de Zarhin). □

Références

[Au] P. Autissier. Un lemme matriciel effectif. Prépublication `arXiv:1104.5644`, 7 pages, 2011.

[Be] D. Bertrand. Duality on tori and multiplicative dependence relations. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, 62(2):198–216, 1997.

[BePh] D. Bertrand et P. Philippon. Sous-groupes algébriques de groupes algébriques commutatifs. *Illinois J. Math*, 23:263–280, 1988.

[BiPa] Yu. Bilu et P. Parent. Serre's Uniformity Problem in the Split Cartan Case. *Ann. Math. (2)*, 173(1):569–584, 2011.

[BPR] Yu. Bilu, P. Parent et M. Rebolledo. Rational points on $X_0^+(p^r)$. Prépublication `arXiv:1104.4641`, 16 pages, 2011.

[BL] C. Birkenhake et H. Lange. *Complex abelian varieties*, volume 302 de *Grundlehren Der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag Berlin, 1992.

[BV] E. Bombieri et J. Vaaler. On Siegel's lemma. *Invent. math.*, 73(1):11–32, 1983. Avec un addendum : *ibid.* 75(2):377, 1984.

[Bo1] J.-B. Bost. Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d'après D. Masser et G. Wüstholz). *Séminaire Bourbaki*. Volume 237 d'*Astérisque*, 115–161. Société Mathématique de France, 1996.

[Bo2] J.-B. Bost. Intrinsic heights of stable varieties and abelian varieties. *Duke Math. J.*, 82(1):21–70, 1996.

[Bo3] J.-B. Bost. Arakelov geometry of abelian varieties. *Conference on Arithmetical Geometry*, volume 96-51, Max Planck Institut für Mathematik Bonn. Notes manuscrites (6p.). Mars 1996.

[Bo4] J.-B. Bost. Algebraic leaves of algebraic foliations over number fields. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci*, 93:161–221, 2001.

[CC] D. Chudnovsky et G. Chudnovsky. Padé approximations and Diophantine geometry. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 82:2212–2216, 1985.

[CW] P. Cijsouw et M. Waldschmidt. Linear forms and simultaneous approximations. *Compos. Math.*, 34:173–197, 1977.

[Co] P. Colmez. Sur la hauteur de Faltings des variétés abéliennes à multiplication complexe. *Compositio Math.*, 111(3):359–368, 1998.

[Da1] S. David. *Minorations de formes linéaires de logarithmes elliptiques*, volume 62 de *Mémoire de la Société Mathématique de France*. S. M. F., 1995.

[Da2] S. David. Approximation diophantienne sur les variétés abéliennes. *École doctorale de Géométrie diophantienne*. Rennes (France), 15–26 juin 2009.

[DP] S. David et P. Philippon. Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abeliennes. II *Comment. Math. Helv.*, 77(4):639–700, 2002.

[FP1] A. Faisant et G. Philibert. Mesure d'approximation pour la fonction modulaire j. *Publication de l'Université Pierre et Marie Curie*. Exp. 66, n° 2. 54 pages. 1984.

[FP2] A. Faisant et G. Philibert. Quelques résultats de transcendance liés à l'invariant modulaire j. *J. Number Theory*, 25(2):184–200, 1987.

[Fa] G. Faltings. Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern. *Invent. Math.* 73(3):349–366, 1983.— Erratum. *ibid.* 75(2):381, 1984.

[Ga1] É. Gaudron. Mesures d'indépendance linéaire de logarithmes dans un groupe algébrique commutatif. *Invent. Math.*, 162(1):137–188, 2005.

[Ga2] É. Gaudron. Formes linéaires de logarithmes effectives sur les variétés abéliennes. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 39(5):699–773, 2006.

[Ga3] É. Gaudron. Pentes des fibrés vectoriels adéliques sur un corps global. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 119:21-95, 2008.

[Ga4] É. Gaudron. Minorations simultanées de formes linéaires de logarithmes de nombres algébriques. Prépublication `hal-00474913`. 30 pages. Janvier 2011.

[Gr] P. Graftieaux. Formal Groups and Isogeny Theorem. *Duke Math. J.*, 106:81–121, 2001.

[GL] P. Gruber et C. Lekkerkerker. *Geometry of numbers*. North-Holland Mathematical Library 37, Amsterdam, 1987.

[GS] H. Gillet et C. Soulé. An arithmetic Riemann-Roch theorem. *Invent. Math.*, 110(3):473–543, 1992.

[Ig] J. Igusa. *Theta Functions*, volume 194 de *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 1972.

[Mar] J. Martinet. *Perfect lattices in Euclidean spaces*, volume 327 de *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 2003.

[Mas] D. Masser. Small values of heights on families of abelian varieties. *Diophantine approximation and transcendence theory (Bonn,* 1985*)*, Lecture Notes in Math. 1290, 109–148, 1987.

[MW1] D. Masser et G. Wüstholz. Estimating isogenies on elliptic curves. *Invent. Math.*, 100(1):1–24,1990.

[MW2] D. Masser et G. Wüstholz. Periods and minimal abelian subvarieties. *Ann. of Math.*, 137(2):407–458, 1993.

[Mu] D. Mumford. Abelian varieties. Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 5. Bombay, 1970.

[Na] M. Nakamaye. Multiplicity estimates on commutative algebraic groups. *J. Reine Angew. Math.*, 607:217–235, 2007.

[Pe1] F. Pellarin. The isogeny theorem and the irreducibility theorem for elliptic curves : a survey. Number theory, II (Rome, 1995). *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, 53:389–404, 1995.

[Pe2] F. Pellarin. Sur une majoration explicite pour un degré d'isogénie liant deux courbes elliptiques. *Acta Arith.*, 100(3):203–243, 2001.

[PW] P. Philippon et M. Waldschmidt. Formes linéaires de logarithmes sur les groupes algébriques commutatifs. *Illinois J. Math.*, 32(2):281–314, 1988.

[Ra1] M. Raynaud. Sous-variétés d'une variété abélienne et points de torsion. *Arithmetic and geometry,* Vol. I. Progr. Math. 35, p. 327–352. Birkhäuser. Boston, 1983.

[Ra2] M. Raynaud. Hauteurs et isogénies. *Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : La conjecture de Mordell*, Exposé VII, *Astérisque* 127, Société Mathématique de France. Éd. par L. Szpiro, 1985.

[Se1] J.-P. Serre. *Lie algebras and Lie groups*. Cours donnés à l'université de Harvard (1964), W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1965.

[Se2] J.-P. Serre. Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques. *Invent. Math.*, 15(4):259–331, 1972.

[Si] J. Silverman. Heights and elliptic curves. *Arithmetic geometry* (Storrs, Conn., 1984), G. Cornell et J. Silverman (Éds), 253–265. Springer-Verlag N. Y., 1986.

[Via] E. Viada. Slopes and abelian subvariety theorem. *J. Number Theory*, 112(1):67–115, 2005.

[Vil] É. Villani. *Mesures d'indépendance linéaire simultanées sur les périodes d'intégrales abéliennes.* Thèse de doctorat de l'université Paris 6, sous la direction de D. Bertrand. `tel-00011233`. Décembre 2005.