

Analyse théorique de stabilité linéaire d'un jet granulaire tombant

Marco Martins Afonso

▶ **To cite this version:**

Marco Martins Afonso. Analyse théorique de stabilité linéaire d'un jet granulaire tombant. 2013. hal-00769571

HAL Id: hal-00769571
https://hal.science/hal-00769571

Preprint submitted on 2 Jan 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Analyse théorique de stabilité linéaire d'un jet granulaire tombant

Marco Martins Afonso

Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier, Université Montpellier 2, CNRS UMR 5149, place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5, France

&

Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, Université de Toulouse (INP/UPS), CNRS UMR 5502, allée du Professeur Camille Soula, 31400 Toulouse, France

Nous avons effectué une analyse théorique de stabilité linéaire pour le problème du jet granulaire tombant, c'est-à-dire un jet de poudres en chute dans l'air (par exemple après la sortie d'un trou au fond d'un réservoir), pour lequel on observe expérimentalement un élargissement de la section radiale moyenne et des instabilités qui s'amplifient (figure 1) [1]. Malgré l'importance de ce sujet pour ses applications industrielles (risques pour la santé en cas de respiration quotidienne, dangers d'explosion et pertes financières liés à l'émission de poussières), la littérature correspondante est assez rare (figure 2) [2] et les simulations numériques n'arrivent pas à bien reproduire la réalité (figure 3) [3], donc il faut se rapporter plutôt aux cas beaucoup plus étudiés des lits fluidisés [4] ou des jets fluides tombants [5].

Nous avons utilisé le modèle à deux fluides [6], dans lequel les phases dispersée (dénotée avec un indice $_P$: particules solides *monodisperses*) et continue (indice $_F$: fluide, notamment air) sont décrites de façon eulérienne. Puisque les deux phases ont masses volumiques constantes ($\rho_P \gg \rho_F$), on peut exprimer leurs évolutions spatio–temporelles au moyen de leurs fractions volumiques $\alpha_P(\boldsymbol{x},t)$ et $\alpha_F(\boldsymbol{x},t)$ (qui satisfont $\alpha_F+\alpha_P=1$, avec une valeur d'intérêt physique $10\% < \alpha_P < 50\%$) et de leurs champs de vitesse $\boldsymbol{u}_P(\boldsymbol{x},t)$ et $\boldsymbol{u}_F(\boldsymbol{x},t)$; à ces quantités il faut aussi rajouter le champ de pression $p(\boldsymbol{x},t)$. Les équations de continuité et de Navier–Stokes pour chaque phase sont :

$$\begin{cases} \partial_t\left(\alpha_F\rho_F\right) + \boldsymbol{\partial}\cdot\left(\alpha_F\rho_F\boldsymbol{u}_F\right) = 0 \\ \partial_t\left(\alpha_P\rho_P\right) + \boldsymbol{\partial}\cdot\left(\alpha_P\rho_P\boldsymbol{u}_P\right) = 0 \\ \alpha_F\rho_F\left(\partial_t\boldsymbol{u}_F + \boldsymbol{u}_F\cdot\boldsymbol{\partial}\boldsymbol{u}_F\right) = -\alpha_F\boldsymbol{\partial}p + \alpha_F\rho_F\boldsymbol{g} - \dfrac{\alpha_P\rho_P}{\tau}(\boldsymbol{u}_F-\boldsymbol{u}_P) \\ \alpha_P\rho_P\left(\partial_t\boldsymbol{u}_P + \boldsymbol{u}_P\cdot\boldsymbol{\partial}\boldsymbol{u}_P\right) = -\alpha_P\boldsymbol{\partial}p + \alpha_P\rho_P\boldsymbol{g} + \dfrac{\alpha_P\rho_P}{\tau}(\boldsymbol{u}_F-\boldsymbol{u}_P)\ . \end{cases} \tag{1}$$

Le dernier terme des deux dernières équations décrit la traînée visqueuse entre les deux phases et apparaît conséquemment avec le signe inversé dans les deux

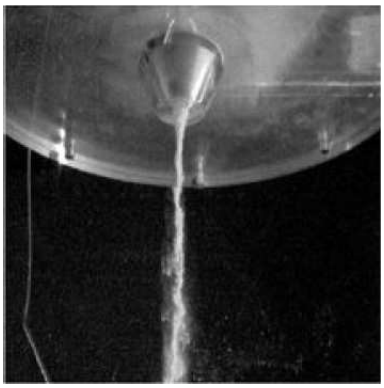


FIGURE 1 – Résultat expérimental de [1].

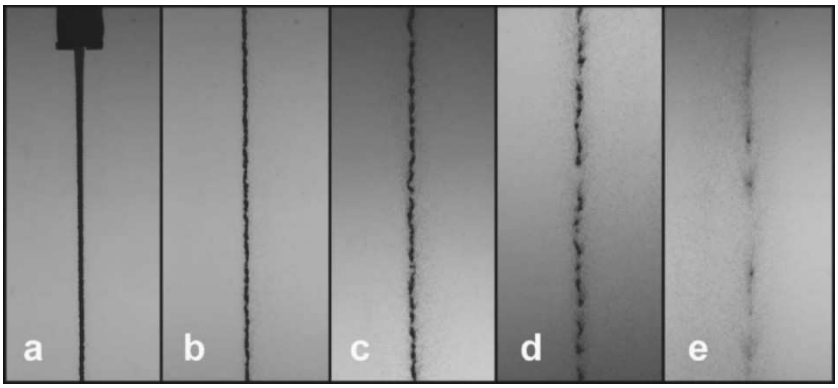


FIGURE 2 – Résultat expérimental de [2].

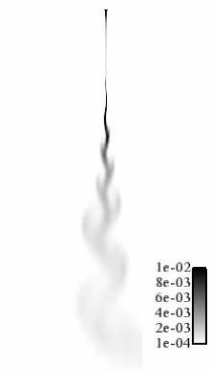


FIGURE 3 – Résultat numérique de [3].

équations. Il est essentiel de noter que nous avons modelisé la traînée de façon *linéaire* dans la vitesse rélative $(\boldsymbol{u}_F - \boldsymbol{u}_P)$, mais *non-linéaire* dans les fractions volumiques. En effet, nous avons

$$\frac{1}{\tau} = \frac{18\rho_F \nu_F}{\alpha_F^{n+1} \rho_P d_P^2} \qquad \text{avec } n = 1{,}7 \text{ et } \mathrm{Re}_P \ll 1 \,, \tag{2}$$

ce qui vient des relations bien connues

$$\frac{1}{\tau} = \frac{3\rho_F C_D}{4\rho_P d_P} \alpha_F^{-1,7} |\boldsymbol{u}_F - \boldsymbol{u}_P| \,, \quad C_D = \frac{24}{\mathrm{Re}_P} \,, \quad \mathrm{Re}_P = \frac{\alpha_F d_P}{\nu_F} |\boldsymbol{u}_F - \boldsymbol{u}_P|$$

en fonction de la viscosité cinématique ν_F et du diamètre des particules d_P. L'hypothèse simplificatrice de force de traînée linéaire en vitesse relative consiste à négliger les termes correctifs (d'ordre plus élévé en Re_P, le nombre de Reynolds particulaire, qui est assumé petit) dans l'expression du coefficient de traînée C_D.

L'objectif de ce travail étant d'analyser la stabilité de perturbations initialement faibles par rapport à un état de référence bien connu, pour ce dernier (dont les quantités sont dénotées avec une barre) nous avons assumé une situation complémentaire à celle d'un lit fluidisé [4]. Notamment, dans cet état de référence, le fluide (et non pas les particules) est au repos, tandis que les particules (et non pas le fluide) sont en mouvement vertical vers le bas (et non pas vers le haut). Si on dénote avec un prime les fluctuations et avec $\boldsymbol{e}_g \equiv \boldsymbol{g}/g$ le vecteur unitaire vers le bas, on peut donc écrire

$$\boldsymbol{u}_F = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{u}'_F \,, \qquad \boldsymbol{u}_P = \bar{u}_P \boldsymbol{e}_g + \boldsymbol{u}'_P \quad (\bar{u}_P > 0) \,,$$

couplé avec

$$\alpha_{F,P} = \bar{\alpha}_{F,P} + \alpha'_{F,P} \,, \qquad p = \bar{p} + p' \,,$$

et avec les relations $\bar{\alpha}_F + \bar{\alpha}_P = 1$, $\alpha'_F + \alpha'_P = 0$. A noter que cette écriture comporte aussi un développement du taux de relaxation (2),

$$\frac{1}{\tau} \simeq \frac{1}{\bar{\tau}} - (n+1)\frac{\alpha'_F}{\bar{\alpha}_F} \,.$$

Les équations pour l'état de référence $(\bar{\alpha}_{F,P}, \bar{u}_P, \bar{p})$ sont donc similaires à (1) mais montrent des simplifications :

$$\begin{cases} \partial_t \bar{\alpha}_F = 0 \\ \partial_g(\bar{\alpha}_P \bar{u}_P) = 0 \\ \boldsymbol{0} = -\bar{\alpha}_F \boldsymbol{\partial}\bar{p} + \bar{\alpha}_F \rho_F \boldsymbol{g} + \dfrac{\bar{\alpha}_P \rho_P}{\bar{\tau}} \bar{u}_P \boldsymbol{e}_g \\ \bar{\alpha}_P \rho_P \left(\partial_t \bar{u}_P + \bar{u}_P \partial_g \bar{u}_P\right) \boldsymbol{e}_g = -\bar{\alpha}_P \boldsymbol{\partial}\bar{p} + \bar{\alpha}_P \rho_P \boldsymbol{g} - \dfrac{\bar{\alpha}_P \rho_P}{\bar{\tau}} \bar{u}_P \boldsymbol{e}_g \end{cases}$$

(∂_g indique la dérivation spatiale verticale, notamment le long de $\boldsymbol{e}_g$). Le système peut être partiellement résolu et implique que la pression satisfasse une balance quasi-hydrostatique,

$$\boldsymbol{\partial}\bar{p} = \left(\rho_F g + \frac{\bar{\alpha}_P \rho_P \bar{u}_P}{\bar{\alpha}_F \bar{\tau}}\right) \boldsymbol{e}_g \,,$$

que les fractions volumiques soient indépendantes du temps, et que cette indépendance temporelle subsiste aussi pour le champ de vitesse si l'émission du jet (dont les quantités correspondantes sont dénotées avec un indice $|_0$) est stationnaire, car on a $\bar{\alpha}_P \bar{u}_P = (\bar{\alpha}_P \bar{u}_P)|_0$. Dans ce cas-là, on obtient

$$\partial_g \bar{u}_P = \left(1 - \frac{\rho_F}{\rho_P}\right) \frac{g}{\bar{u}_P} - \frac{18 \rho_F \nu_F}{\rho_P d_P^2} \left(1 - \frac{(\bar{\alpha}_P \bar{u}_P)|_0}{\bar{u}_P}\right)^{-n-2} . \tag{3}$$

Nous passons maintenant à l'analyse des perturbations. Avec le but de trouver une première solution simple, nous imposons deux hypothèses simplificatrices.
(i) Pour l'état de référence (3), qui est déjà indépendant du temps, nous négligeons aussi toute dépendance spatiale, c'est-à-dire que toutes les dérivées spatiales de $\bar{u}_P$ et de $\bar{\alpha}_{F,P}$ sont assumées petites (les variations spatiales de ces quantités doivent donc avoir lieu sur des échelles beaucoup plus grandes que celles qui interviennent dans le problème). Dans ce cas-là, on peut écrire les fluctuations comme

$$(\alpha'_{F,P}, \boldsymbol{u}'_{F,P}, p')(\boldsymbol{x}, t) = (\alpha^*_{F,P}, \boldsymbol{u}^*_{F,P}, p^*) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)} . \tag{4}$$

Pour $\boldsymbol{k}$ et ω réels, cela représente une onde d'amplitude fixée qui se propage avec la vitesse ω/k dans la direction de $\boldsymbol{k}$. Dans un premier temps, nous allons étudier le cas de $\boldsymbol{k}$ réel mais ω complexe, donc la partie imaginaire de ce dernier (si positive) représente le taux de croissance de la perturbation. Ensuite, on tiendra compte aussi des possibles amplifications spatiales en prenant $\boldsymbol{k}$ complexe.
(ii) Selon [4], la direction la plus instable est la verticale, donc nous assumons :

$$\boldsymbol{u}^*_{F,P} = u^*_{F,P} \boldsymbol{e}_g , \qquad \boldsymbol{k} = k \boldsymbol{e}_g .$$

En combinaison avec l'hypothèse précédente, cela implique que $\mathrm{i}\boldsymbol{k} + \boldsymbol{\partial} = \delta \boldsymbol{e}_g$, avec $\delta \equiv \mathrm{i}k + \partial_g \simeq \mathrm{i}k$.

En remplaçant (4) dans (1) et en négligeant les termes non-linéaires (qui couplent deux fluctuations), on obtient :

$$\begin{cases} 0 = \mathrm{i}\omega \times \alpha^*_P + (\delta \bar{\alpha}_F) \times u^*_F + 0 \times u^*_P + 0 \times p^* \\ 0 = (-\mathrm{i}\omega + \delta \bar{u}_P) \times \alpha^*_P + 0 \times u^*_F + (\delta \bar{\alpha}_P) \times u^*_P + 0 \times p^* \\ 0 = \dfrac{\rho_P \bar{u}_P}{\bar{\tau}} \left[1 + (n+2) \dfrac{\bar{\alpha}_P}{\bar{\alpha}_F}\right] \times \alpha^*_P + \left(\mathrm{i}\omega \rho_F \bar{\alpha}_F - \dfrac{\rho_P \bar{\alpha}_P}{\bar{\tau}}\right) \times u^*_F \\ \qquad + \dfrac{\rho_P \bar{\alpha}_P}{\bar{\tau}} \times u^*_P - \mathrm{i}k \bar{\alpha}_F \times p^* \\ 0 = \left[(\rho_P - \rho_F) g + (n+1) \dfrac{\rho_P \bar{\alpha}_P \bar{u}_P}{\bar{\alpha}_F \bar{\tau}}\right] \times \alpha^*_P - \dfrac{\rho_P \bar{\alpha}_P}{\bar{\tau}} \times u^*_F \\ \qquad + \rho_P \bar{\alpha}_P \left(-\mathrm{i}\omega + \dfrac{1}{\bar{\tau}} + \delta \bar{u}_P\right) \times u^*_P + \mathrm{i}k \bar{\alpha}_P \times p^* . \end{cases} \tag{5}$$

Le système (5) est linéaire en les inconnues $(\alpha^*_P, u^*_{F,P}, p^*)$ et *homogène*. Cela signifie qu'une solution non-triviale peut exister seulement si le déterminant de

la matrice 4×4 des coefficients est nul. En imposant ce déterminant égal à zero, au delà d'une solution $k = 0$ sans intérêt (absence de structure spatiale des fluctuations), on obtient une équation du deuxième degré en ω :

$$0 = \bar{\alpha}_F\bar{\alpha}_P(\rho_F\delta\bar{\alpha}_P + \rho_P\delta\bar{\alpha}_F)\omega^2 + \left[2\rho_P\bar{\alpha}_F\bar{\alpha}_P\delta\bar{u}_P\mathrm{i} - \frac{\rho_P\bar{\alpha}_P}{\bar{\tau}}k\right]\omega + \delta\bar{\alpha}_F \times \qquad (6)$$
$$\times\left\{\delta\bar{\alpha}_P\left[(\rho_P-\rho_F)\bar{\alpha}_F g + (n+2)\frac{\rho_P\bar{\alpha}_P\bar{u}_P}{\bar{\alpha}_F\bar{\tau}}\right] - \rho_P\bar{\alpha}_P\delta\bar{u}_P\left(\frac{1}{\bar{\tau}} + \bar{\alpha}_F\delta\bar{u}_P\right)\right\}.$$

Dans nos hypothèses, (6) implique la *relation de dispersion*

$$\omega = \frac{1}{2\bar{\alpha}_F}\left\{\frac{1}{\bar{\tau}} + 2\bar{\alpha}_F^2\bar{u}_P k\mathrm{i}\right. \qquad (7)$$
$$\left.\pm\sqrt{\left(\frac{1}{\bar{\tau}^2} - 8\bar{\alpha}_F^4\bar{u}_P^2k^2\right) + 4\left[\left[(n+3)\bar{\alpha}_F - (n+1)\right]\frac{\bar{\alpha}_F^2\bar{u}_P}{\bar{\tau}} - \bar{\alpha}_F^4 g\right]k\mathrm{i}}\right\}.$$

A partir de (7), il faut étudier la partie imaginaire $\mathsf{Im}(\omega)$ en fonction de k. Pour $k > 0$, ainsi que pour k négatif et suffisamment grand, elle est toujours positive, ce qui signifie que dans nos approximations les ondes qui voyagent vers le bas sont toujours instables ainsi que celles qui vont vers le haut avec une longueur d'onde suffisamment petite. Selon les valeurs des autres paramètres, on peut aussi rencontrer un intervalle $[k_{\mathrm{crit}}; 0]$ où $\mathsf{Im}(\omega) \le 0$; on obtient

$$k_{\mathrm{crit}} = -\frac{\sqrt{R}}{2\bar{\alpha}_F^2\bar{u}_P^2\bar{\tau}}\ ,$$

$$R = -[g\bar{\alpha}_F^2\bar{\tau} + n\bar{u}_P - (n+3)\bar{\alpha}_F\bar{u}_P][g\bar{\alpha}_F^2\bar{\tau} + (n+2)\bar{u}_P - (n+3)\bar{\alpha}_F\bar{u}_P]\ ,$$

ce qui signifie que (pour les valeurs intéressantes des autres paramètres) cet intervalle existe seulement pour une zone de valeurs du chargement volumique. En figure 4, dans le plan $\bar{\alpha}_F, \bar{u}_P$ (avec les ordonnées en m/s en échelle logarithmique, et $\bar{\tau} = 10^{-3}$ s), on dessine le contour $R = 0$; seulement la zone entre les deux contours correspond à $R > 0$. Donc, si par exemple $\bar{u}_P = 0{,}1$ m/s, la racine existe seulement pour $36\% < \bar{\alpha}_F < 81\%$ ($19\% < \bar{\alpha}_P < 64\%$) : dans ce cas-là il y a des k négatifs suffisamment petits qui donnent lieu à des perturbations stables, au cas contraire la seule solution de $\mathsf{Im}(\omega) = 0$ est $k = 0$.
Sur la figure 5, $\mathsf{Im}(\omega)$ est tracée en fonction de k pour trois valeurs différentes de $\bar{u}_P$: en effectuant une adimensionnalisation correcte des axes, les courbes se confondent presque l'une à l'autre. De la même façon, en figure 6 on montre trois valeurs différentes de $\bar{\tau}$. A noter que, dans les deux figures, l'intervalle de stabilité $[k_{\mathrm{crit}}; 0]$ ($\Leftrightarrow \mathsf{Im}(\omega) \le 0$) se réduirait à un seul point (l'origine) si par exemple $\bar{\alpha}_F = 99\%$ ou $= 35\%$. Par contre, le cas représenté $\bar{u}_P = 0{,}1$ m/s et $\bar{\tau} = 10^{-3}$ s implique une longueur d'onde "critique" $\lambda_{\mathrm{crit}} \equiv 2\pi/k_{\mathrm{crit}} = 517$ μm vers le haut.

Nous revenons maintenant sur nos hypothèses (i),(ii) et essayons de comprendre comment on peut les généraliser. En ce qui concerne (i), tenir compte

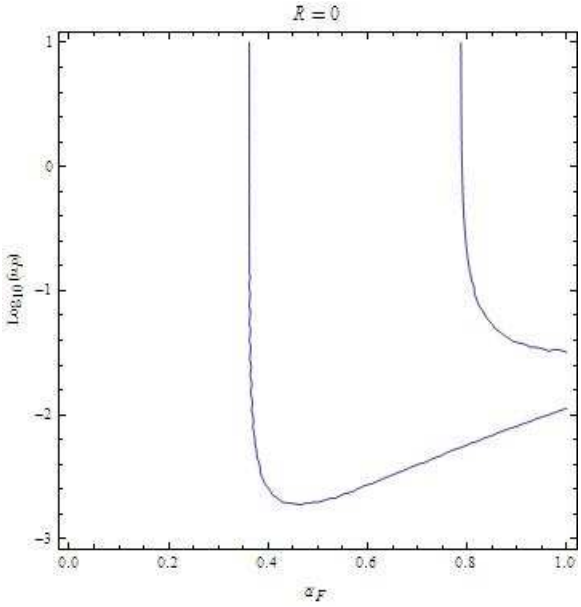


FIGURE 4 – Contour de $R = 0$ dans le plan $\bar{\alpha}_F$–$\bar{u}_P$. A noter que, si on augmente le valeur de $\bar{\tau} = 10^{-3}$ s (en augmentant d_P, avec $\bar{\alpha}_F$ fixé), les deux contours sont décalés vers le haut.

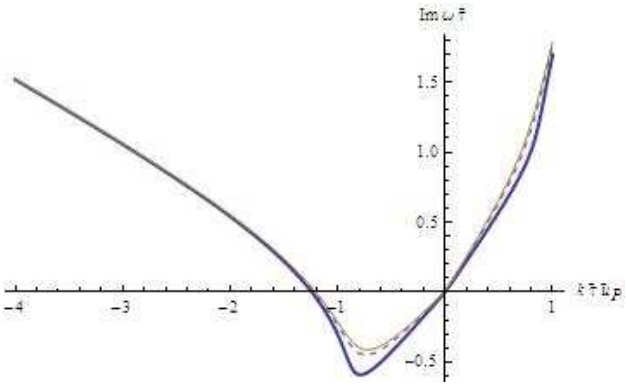


FIGURE 5 – Partie imaginaire de ω en fonction de k pour trois valeurs différentes de $\bar{u}_P$. Les axes sont adimensionnés en multipliant par $\bar{\tau}\bar{u}_P$ les abscisses et par $\bar{\tau}$ les ordonnées. Les trois courbes correspondent à $\bar{u}_P = 0{,}01$ (inférieure épaisse), 0,1 (moyenne pointillée) et 1 m/s (supérieure mince). Ici on a fixé $\bar{\alpha}_F = 63\%$ et $\bar{\tau} = 10^{-3}$ s.

de la dépendance spatiale de l'état de référence semble un objectif très difficile à obtenir : on devrait alors remplacer la forme sinusoïdale (4) par une fonction spatiale générique, ce qui impliquerait un problème différentiel et non plus algébrique.
Par contre, il est intéressant de considérer $k \equiv k_r + \mathrm{i}k_i$ complexe. Cela engendre une modification de la relation de dispersion (7) et notamment de $\mathsf{Im}(\omega)$, ce que nous n'écrivons pas ici pour des raisons de simplicité. On note alors que, ce qui était un intervalle de stabilité $[k_{\mathrm{crit}}; 0]$ dans le cas réél, devient maintenant dans le plan k_r–k_i un demi-cercle avec la base appuyée sur l'axe des ordonnées, plus l'axe même. En figure 7, nous montrons donc le contour $\mathsf{Im}(\omega) = 0$ en fixant les valeurs usuelles des autres paramètres. On peut conclure que les seules ondes stables sont celles qui voyagent vers le haut avec une longueur d'onde et une échelle spatiale d'amplification suffisamment grandes.
En revenant sur l'hypothèse (ii), on peut considérer aussi des fluctuations transversales le long d'un vecteur unitaire horizontal quelconque $\boldsymbol{e}_\perp$:

$$\boldsymbol{u}^*_{F,P} = u^*_{F,P}\boldsymbol{e}_g + u^\perp_{F,P}\boldsymbol{e}_\perp \ , \qquad \boldsymbol{k} = k_\perp \boldsymbol{e}_\perp$$

(et donc il faut introduire $\delta_\perp \equiv \mathrm{i}k_\perp + \partial_\perp \simeq \mathrm{i}k_\perp$ pour écrire $\mathrm{i}\boldsymbol{k} + \boldsymbol{\partial} = \delta \boldsymbol{e}_g + \delta_\perp \boldsymbol{e}_\perp$). Le système (5) change de la façon suivante : la première et la deuxième équation montrent le terme supplémentaire $+(\delta_\perp \bar{\alpha}_F) \times u^\perp_F$ et $+(\delta_\perp \bar{\alpha}_P) \times u^\perp_P$ respectivement, et il faut aussi considérer les deux équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dots \\ 0 = 0 \times \alpha^*_P + 0 \times u^*_F + 0 \times u^*_P - \mathrm{i}k_\perp \bar{\alpha}_F \times p^* \\ \qquad + \left(\mathrm{i}\omega\rho_F\bar{\alpha}_F - \dfrac{\rho_P\bar{\alpha}_P}{\bar{\tau}} \right) \times u^\perp_F + \dfrac{\rho_P\bar{\alpha}_P}{\bar{\tau}} \times u^\perp_P \\ 0 = 0 \times \alpha^*_P + 0 \times u^*_F + 0 \times u^*_P + \mathrm{i}k^\perp \bar{\alpha}_P \times p^* \\ \qquad - \dfrac{\rho_P\bar{\alpha}_P}{\bar{\tau}} \times u^\perp_F + \rho_P\bar{\alpha}_P \left(-\mathrm{i}\omega + \dfrac{1}{\bar{\tau}} + \delta_\perp \bar{u}_P \right) \times u^\perp_P \ . \end{array} \right.$$

On obtient donc une matrice 6×6, dont il est facile d'écrire le déterminant. Toutefois l'équation résultante est du quatrième degré en ω et on n'arrive pas à trouver une relation de dispersion analytique.

Références

[1] R. Ansart, *Emission de poussières lors de la manipulation de poudre : interaction entre les particules en mouvement et l'air ambiant.* Thèse INP Toulouse (2007).

[2] M. Möbius, Clustering instability in a freely falling granular jet. *Phys. Rev.* E **74**, 051304 (2006).

[3] R. Belt & O. Simonin, *Simulation of a freely falling granular jet with* NEPTUNE_CFD v1.07@Tlse. Rapport confidentiel (2009).

[4] R. Jackson, *The dynamics of fluidized particles.* Cambridge Monographs on Mechanics, Cambridge University Press (2000).

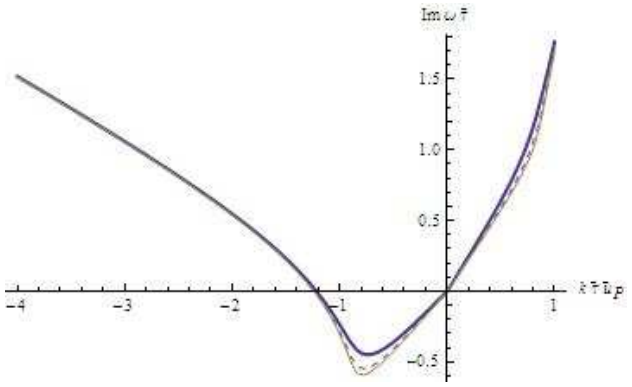


FIGURE 6 – Partie imaginaire de ω en fonction de k pour trois valeurs de $\bar{\tau}$ différentes. Les axes sont adimensionnés en multipliant par $\bar{\tau}\bar{u}_P$ les abscisses et par $\bar{\tau}$ les ordonnées. Les trois courbes correspondent à $\bar{\tau} = 10^{-3}$ (supérieure épaisse), $10^{-2,5}$ (moyenne pointillée) et 10^{-2} s (inférieure mince), ce qui implique $d_P = 25$, 44 et 79 μm respectivement. Ici on a fixé $\bar{\alpha}_F = 63\%$ et $\bar{u}_P = 0{,}1$ m/s.

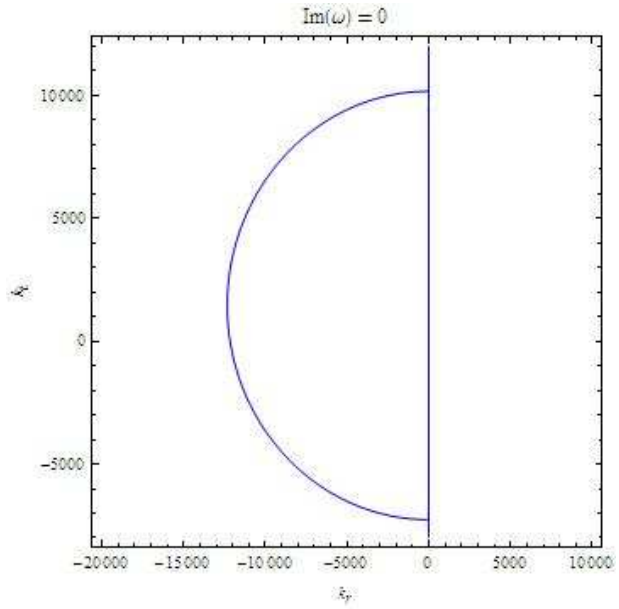


FIGURE 7 – Contour de $\mathsf{Im}(\omega) = 0$ dans le plan k_r–k_i (en m^{-1}). Ici, $\bar{\alpha}_F = 63\%$, $\bar{u}_P = 0{,}1$ m/s et $\bar{\tau} = 10^{-3}$ s.

[5] E. Villermaux & C. Clanet, Life of a flapping liquid sheet. *J. Fluid Mech.* **462**, 341–363 (2002).

[6] O. Simonin, Continuum modelling of dispersed turbulent two-phase flows. *Von Kármán Lecture Notes* (1996).

Remerciements Je suis reconnaissant à Olivier Simonin, qui a inspiré ce travail, et à l'Institut National de Recherche et de Sécurité pour le support financier. Je remercie Roel Belt, Jean-François Parmentier et Zafer Zeren pour leurs commentaires et suggestions. Un remerciement spécial, pour sa patience et gentillesse, à Marion Linkès.