

Cartomagie : principes de Gilbreath (III) - Diverses démonstrations

Aimé Lachal, Pierre Schott

▶ **To cite this version:**

Aimé Lachal, Pierre Schott. Cartomagie : principes de Gilbreath (III) - Diverses démonstrations. Quadrature, 2013, 87, pp. 30-37. hal-00864412

HAL Id: hal-00864412
https://hal.science/hal-00864412

Submitted on 23 Sep 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Quadrature nº 87 (2013) 1-??
© Quadrature, 2013

Cartomagie : principes de Gilbreath (III)

Diverses démonstrations

par Aimé Lachal* et Pierre Schott†

Résumé.

Les principes magiques de Gilbreath permettent, à partir d'un jeu de cartes préalablement classé de garder, après un mélange américain, ses propriétés de classement par bloc de cartes mais de façon éventuellement désordonnée (les cartes d'un même bloc n'étant plus dans l'ordre du classement initial). De telles propriétés permettent de voir se réaliser des prédictions malgré un vrai mélange !
Nous avons proposé dans deux volets parus dans les numéros précédents de *Quadrature* un calcul de dénombrement des mélanges américains possibles ainsi que plusieurs tours de magie reposant sur les principes magiques de Gilbreath. Dans ce dernier volet, nous fournissons les démonstrations détaillées de chacun de ces principes.

I Introduction

Les principes de Gilbreath [1], [2], [3] et leurs généralisations par le principe de Péristance [6] sont des principes passionnants, permettant de faire des tours de cartes extraordinaires. Dans deux articles compagnons parus dans des numéros précédents de *Quadrature* [4], [5], nous avons analysé en détail et dénombré les mélanges américains d'un jeu donné, puis présenté divers tours de magie fondés sur les principes de Gilbreath.

Dans la littérature les deux principes de Gilbreath sont considérés comme démontrés à travers la preuve du principe de Péristance [6] (connu également sous le nom du troisième principe de Gilbreath). Citons en particulier un article de S. Willemin [7] paru dans le numéro 84 de Quadrature. Dans [7], l'auteur propose une démonstration concise et élégante du troisième principe de Gilbreath. Notre travail est complémentaire de ce dernier dans le sens où nous proposons dans cet article une démonstration complète des trois principes en question tout en détaillant leur mécanisme. Nous fournissons également une preuve d'un des deux volets du premier principe de Gilbreath qui n'est pas englobé dans le principe de Péristance.

Nous renvoyons le lecteur au deuxième volet [5] pour la présentation détaillée des trois principes de Gilbreath auxquels nous nous référons tout au long de ce travail.

II Démonstration du premier principe de Gilbreath

Nous disposons d'un jeu contenant un nombre pair de cartes classées en rouges et noires alternées. Nous coupons ce jeu en deux et obtenons deux paquets distincts. Nous procédons ensuite à un mélange américain de ces deux paquets pour obtenir un nouveau jeu qui sera appelé jeu mélangé.

Si les cartes du dessus des deux paquets sont de couleurs identiques, alors N. L. Gilbreath suggère un ajustement consistant à couper le jeu mélangé au milieu

* Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, *Pôle de Mathématiques*,
20 av. A. Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex.
aime.lachal@insa-lyon.fr

† École Supérieure d'Informatique, d'Électronique et d'Automatisme, *Pôle ARNUM*,
9 rue Vésale, 75005 Paris.
pierre.schott@esiea.fr, magie.carte@laposte.net

d'une paire de même couleur (rouge-rouge ou noire-noire) puis à compléter la coupe. Il préconise également – mais ce n'est pas indispensable – cet ajustement lorsque les cartes du dessus des deux paquets sont de couleurs différentes.

Le premier principe stipule que le jeu mélangé ainsi constitué est composé de paires de cartes consécutives de couleurs différentes (rouge-noire ou noire-rouge).

Nous démontrons ce principe lorsque les cartes du dessus des deux paquets obtenus après la coupe préalable au mélange américain sont de couleurs différentes. Dans le cas où les cartes du dessus des deux paquets sont de même couleur, une analyse similaire permet de démontrer le premier principe après la recoupe supplémentaire du jeu mélangé entre deux cartes de même couleur. Nous en indiquerons très sommairement la démonstration dans la section II.6 sans la reproduire intégralement afin de ne pas surcharger l'article.

La preuve adoptée ici est une démonstration par récurrence sur le nombre n, $2n$ étant le nombre de cartes du jeu. Nous proposons une autre démonstration dans l'appendice A.

Dans cette partie nous utiliserons des notations numérotées à la place des couleurs pour les cartes : C_1 et C_2.

II.1 Vérification pour un paquet de 4 cartes

Nous commençons par vérifier le premier principe pour un paquet de 4 cartes. Prenons donc un paquet contenant 4 cartes classées dans l'ordre rouge-noire-rouge-noire que nous notons $C_1C_2C_1C_2$. Afin de différencier les cartes les unes des autres, nous désignons plus précisément par C_1 (resp. C_2) la première carte rouge (resp. noire) et par C_1' (resp. C_2') la seconde. Il y a trois façons de couper :

$$C_1 \text{ et } C_2C_1'C_2' \ ; \ C_1C_2 \text{ et } C_1'C_2' \ ; \ C_1C_2C_1' \text{ et } C_2'. \quad (\ddagger)$$

Pour chacune de ces coupes, il existe plusieurs mélanges possibles. Pour chacun d'eux, nous écrivons le mélange détaillé en distinguant les cartes C et C', puis le mélange « visuel » correspondant sans distinction.

♠ Pour la première coupe, nous obtenons :

$$C_1C_2C_1'C_2' \to C_1C_2C_1C_2;\ C_2C_1C_1'C_2' \to C_2C_1C_1C_2;$$
$$C_2C_1'C_1C_2' \to C_2C_1C_1C_2;\ C_2C_1'C_2'C_1 \to C_2C_1C_2C_1.$$

♥ Pour la troisième coupe, nous obtenons :

$$C_2'C_1C_2C_1' \to C_2C_1C_2C_1;\ C_1C_2'C_2C_1' \to C_1C_2C_2C_1;$$
$$C_1C_2C_2'C_1' \to C_1C_2C_2C_1;\ C_1C_2C_1'C_2' \to C_1C_2C_1C_2.$$

♣ Pour la seconde coupe, nous obtenons :

$$C_1C_2C_1'C_2' \to C_1C_2C_1C_2;\ C_1C_1'C_2C_2' \to C_1C_1C_2C_2;$$
$$C_1C_1'C_2'C_2 \to C_1C_1C_2C_2;\ C_1'C_1C_2C_2' \to C_1C_1C_2C_2;$$
$$C_1'C_1C_2'C_2 \to C_1C_1C_2C_2;\ C_1'C_2'C_1C_2 \to C_1C_2C_1C_2.$$

♦ Au final, la totalité des mélanges possibles se résume selon $C_1C_2C_1C_2$, $C_2C_1C_2C_1$, $C_1C_2C_2C_1$, $C_2C_1C_1C_2$, $C_1C_1C_2C_2$.

Nous observons que dans les quatre premiers cas ci-dessus, le jeu mélangé est classé par paires de cartes de couleurs différentes. En revanche, dans le dernier cas – $C_1C_1C_2C_2$ – le jeu n'est pas classé de la manière souhaitée. Cette situation provenait de la coupe C_1C_2 et $C_1'C_2'$ donnant deux paquets ayant des premières cartes de même couleur.

Pour pallier ce problème, il suffit simplement de couper le jeu mélangé $C_1C_1C_2C_2$ entre deux cartes de mêmes couleurs puis de compléter la coupe : ici, la coupe se fait soit entre les deux cartes rouges consécutives, ce qui fournit le jeu $C_1C_2C_2C_1$, soit entre les deux cartes noires consécutives, ce qui fournit le jeu $C_2C_1C_1C_2$. Dans les deux cas, le jeu mélangé est classé de manière souhaitée.

Une manipulation alternative consiste à retourner l'un des deux paquets après chaque coupe décrite en (‡) puis de les mélanger à l'américaine. Pour les première et troisième coupes, cela ne change rien à l'échéance. En revanche, pour la deuxième coupe, si nous retournons par exemple le deuxième paquet, nous avons à mélanger les paquets C_1C_2 et $C_2'C_1'$. Les mélanges correspondants sont alors

$$C_1C_2C_2'C_1' \to C_1C_2C_2C_1;\ C_1C_2'C_2C_1' \to C_1C_2C_2C_1;$$
$$C_1C_2'C_1'C_2 \to C_1C_2C_1C_2;\ C_2'C_1C_2C_1' \to C_2C_1C_2C_1;$$
$$C_2'C_1C_1'C_2 \to C_2C_1C_1C_2;\ C_2'C_1'C_1C_2 \to C_2C_1C_1C_2.$$

Nous constatons qu'à présent le jeu mélangé est correctement classé.

II.2 Démonstration de la récurrence

Nous supposons à présent que le principe est vérifié pour tous les jeux d'au plus $2(n-1)$ cartes. Considérons alors un jeu de $2n$ cartes classé selon $\underline{C_1C_2}\ \underline{C_1C_2}\ \dots\ \underline{C_1C_2}$ que nous coupons en deux paquets ayant sur leur dessus des cartes de couleurs différentes. Nous disposons donc de deux paquets contenant chacun un nombre impair de cartes, disons p et $(2n-p)$ cartes où p est un nombre impair. En notant les cartes du deuxième paquet avec des primes pour les différencier de celle du premier paquet, ce dernier a une composition de la forme $C_1C_2\cdots C_1C_2C_1$ et le second $C_2'C_1'\cdots C_2'C_1'C_2'$.

Lors d'un mélange américain, les cartes du deuxième paquet sont insérées dans l'ordre à certaines positions dans le premier paquet. Après cette insertion, nous trouvons dans le premier paquet des séries contiguës de cartes du deuxième. Nous avons donc effectué des insertions par blocs, nous pouvons supposer qu'ils sont maximaux, c'est-à-dire que deux blocs successifs du deuxième paquet se retrouvent séparés dans le premier paquet par des cartes de ce dernier.

Au départ, un bloc de r cartes consécutives démarrant de la première carte du deuxième paquet est inséré dans le premier après la q^e carte (figure 1).

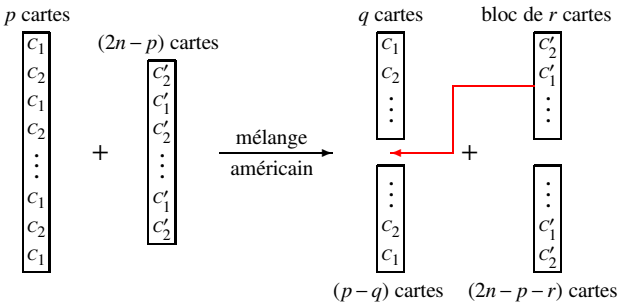


Figure 1. Insertion d'un bloc de r cartes.

Nous allons montrer que le jeu de $2n$ cartes mélangé vérifie le principe. Pour cela, il est important de connaître la dernière carte des divers blocs de cartes mis en jeu. Quatre cas sont à distinguer :

- q et r pairs ;
- q impair et r pair ;
- q et r impairs ;
- q pair et r impair.

Nous allons voir que dans tous les cas, le tas de $(q+r)$ cartes obtenu après placement du bloc de r cartes du second paquet sous le tas de p cartes du premier paquet est constitué d'une suite de paire de cartes de couleurs différentes, plus une carte, dans le cas où $(q+r)$ est un nombre impair.

II.3 Premier cas : q et r pairs

Après insertion du bloc de r cartes dans le premier paquet, les $(q+r)$ premières cartes du premier paquet sont classées selon $\underline{C_1C_2}\ \ldots\ \underline{C_1C_2}\ \underline{C_2'C_1'}\ \ldots\ \underline{C_2'C_1'}$. Puis nous continuons le mélange américain du deuxième tas restant de $(2n-p-r)$ cartes démarrant par C_2' dans le premier tas restant de $(p-q)$ cartes démarrant par C_1. Cela fournit, en vertu de l'hypothèse de récurrence, un sous-paquet de $(2n-q-r)$ cartes classées par paires contenant chacune deux cartes de couleurs différentes (figure 2).

Le jeu final est composé des $(q+r)$ cartes $\underline{C_1C_2}\ \ldots\ \underline{C_1C_2}\ \underline{C_2'C_1'}\ \ldots\ \underline{C_2'C_1'}$ et des $(2n-q-r)$ autres cartes correctement classées, ce jeu est globalement

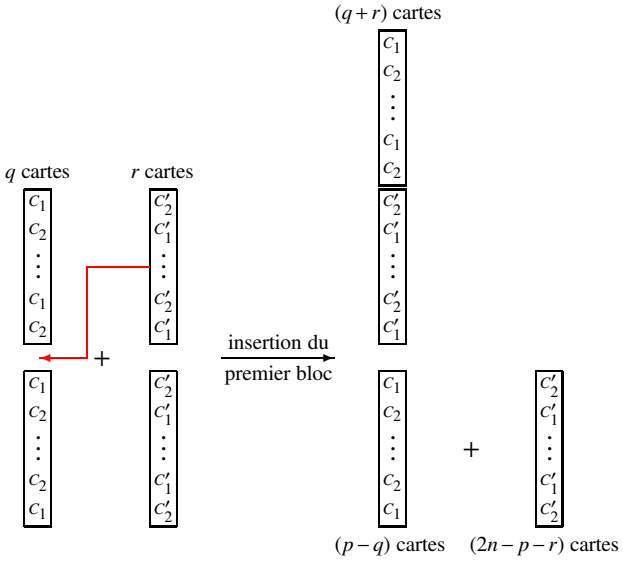


Figure 2. Cas où q et r sont pairs.

classé par paires successives de cartes de couleurs différentes.

II.4 Deuxième cas : q impair et r pair

Dans ce cas, les $(q+r)$ premières cartes du premier paquet sont classées suivant la répartition $\underline{C_1C_2}\ \ldots\ \underline{C_1C_2}\ \underline{C_1C_2'}\ \underline{C_1'C_2'}\ \ldots\ \underline{C_1'C_2'}\ C_1'$ et nous devons insérer le restant du deuxième paquet dans le restant du premier. Nous poursuivons donc le mélange américain des $(2n-p-r)$ cartes du deuxième tas $\underline{C_2'C_1'}\ \ldots\ \underline{C_2'C_1'}\ C_2'$ dans les $(p-q)$ cartes du premier tas restant au-dessous de la première carte – ici C_2 (figure 3).

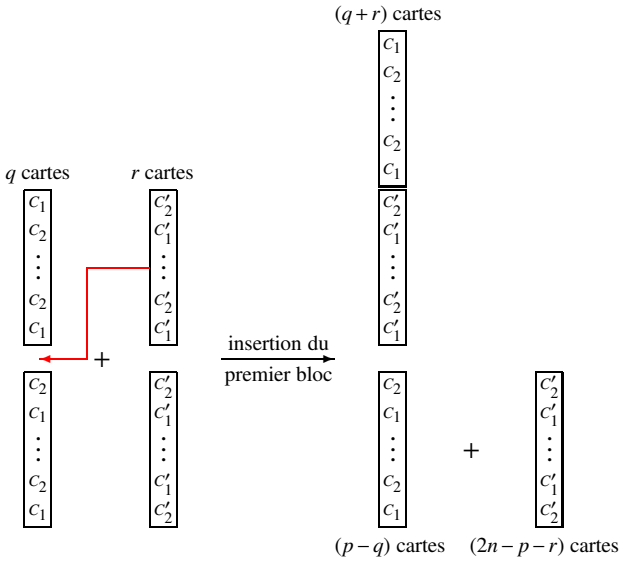


Figure 3. Cas où q est impair et r pair.

De manière plus concise, nous procédons à un mélange américain d'un paquet de $(2n-p-r)$ cartes démarrant par C_2' dans un paquet de $(p-q-1)$ cartes

démarrant par C_1 (figure 4). D'après l'hypothèse de récurrence, le sous-paquet de $(2n-q-r-1)$ cartes ainsi obtenu est correctement classé. Le jeu final est constitué des $(q+r+1)$ cartes $\underline{C_1C_2}$ … $\underline{C_1'C_2}$ et des $(2n-q-r-1)$ cartes correctement classées, ce jeu est globalement classé par paires de cartes de couleurs différentes.

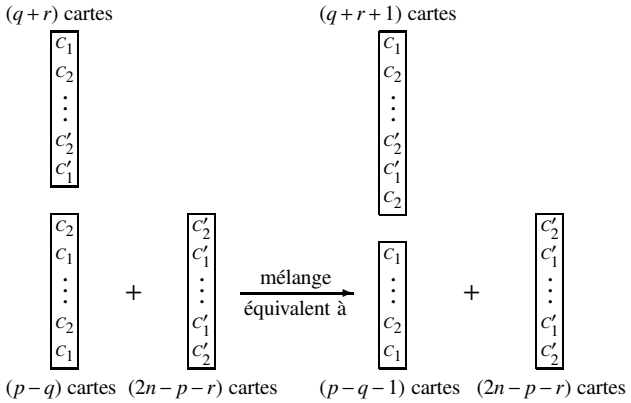


Figure 4. Cas où q est impair et r pair.

II.5 Dernier cas : r impair

Ce cas, qui englobe la situation où q et r sont impairs et celle où q est pair et r impair, se traite de manière semblable aux précédents.

- Lorsque q est impair, nous trouvons un jeu composé de $(q+r)$ cartes classées selon $\underline{C_1C_2}$ … $\underline{C_1C_2}$ $\underline{C_1C_2'}$ $\underline{C_1'C_2'}$ … $\underline{C_1'C_2'}$ auquel nous rajoutons un mélange de $(2n-p-r)$ cartes démarrant par C_1' dans $(p-q)$ cartes démarrant par C_2.
- Lorsque q est pair, nous trouvons un jeu composé de $(q+r+1)$ cartes classées selon $\underline{C_1C_2}$ … $\underline{C_1C_2}$ $\underline{C_2'C_1'}$ … $\underline{C_2'C_1'}$ $\underline{C_2'C_1}$ et d'un mélange de $(2n-p-r)$ cartes démarrant par C_1' dans $(p-q-1)$ cartes démarrant par C_2.

Dans les deux cas, la récurrence fonctionne encore.

II.6 Les cartes du dessus des deux paquets sont de même couleur

Lorsque les cartes du dessus des deux paquets obtenus après la coupe sont de même couleur, une analyse analogue à la précédente permettrait de vérifier le premier principe avec la recoupe complète du jeu mélangé entre deux cartes de même couleur.

De manière plus concise, il est possible d'établir un parallèle simple entre les deux situations. Pour cela, nous reformulons le premier principe de la manière suivante :

« Dans le jeu mélangé, jamais trois cartes de même couleur ne se suivent ; de plus,

1. *lorsque les cartes du dessus des deux paquets obtenus après la coupe sont de couleurs différentes, deux cartes consécutives de même couleur du jeu mélangé chevauchent deux paires ;*
2. *lorsque les cartes du dessus des deux paquets obtenus après la coupe sont de même couleur, deux cartes consécutives de même couleur du jeu mélangé sont placées à l'intérieur d'une même paire. »*

La démonstration du principe relative au premier cas ci-dessus a été faite dans les sous-sections précédentes. Dans le deuxième cas, en mettant de côté la carte du dessus du jeu mélangé, le restant du jeu mélangé se trouve dans la configuration du cas précédent. En effet, la carte mise de côté provient du dessus de l'un des deux paquets obtenus à l'issue de la coupe. Après cette mise à l'écart, les deux paquets restants ont des cartes sur le dessus de couleurs différentes et nous retrouvons la situation précédente. Puis en remettant la carte mise de côté en place sur le dessus du paquet, nous voyons que la propriété des cartes de même couleur consécutives est simplement translatée d'une carte.

Dans les deux cas énumérés ci-dessus, une coupe complète supplémentaire entre deux cartes de même couleur fournit un jeu correctement mélangé :

1. dans le premier cas, la coupe se fait entre deux paires. Compléter ensuite cette coupe revient simplement à permuter les paires du jeu mélangé, et ce dernier reste correctement classé ;
2. dans le deuxième cas, la deuxième coupe se fait à l'intérieur d'une paire. Remarquons qu'avant la première coupe, nous avions deux paquets comportant un nombre pair de cartes. Les cartes du dessus de chacun des deux paquets étaient de même couleur (C_1 et C_1'), tout comme celles du dessous (C_2 et C_2'). Cette observation indique qu'à l'issue de la première coupe les cartes du dessus et du dessous du jeu mélangé étaient de couleurs différentes. Lors de la complétion de la deuxième coupe, un nombre impair de cartes du dessus du jeu mélangé passent au-dessous. La paire reliant les deux paquets inversés est alors constituée de cartes de couleurs différentes. Dans ce cas également, le jeu final est classé par paires de cartes de couleurs différentes (voir les schémas de la section II.1 de [5]).

Enfin, nous proposons une démonstration différente du premier principe dans l'appendice A.

III Démonstration du principe de péristance

Dans ce paragraphe, nous disposons d'un jeu de $n = pr$ cartes constitué de p séries identiques de r cartes :

$$\underbrace{C_1\cdots C_r}_{\text{série 1}}\ \underbrace{C_1\cdots C_r}_{\text{série 2}}\ \underbrace{C_1\cdots C_r}_{\text{série 3}}\ \dots\ \underbrace{C_1\cdots C_r}_{\text{série } p}.$$

Nous le coupons en deux n'importe où, disons entre deux cartes de numéros k et $k+1$ à l'intérieur d'une série j, et retournons le deuxième paquet. Nous avons un premier paquet de m cartes ($1 \leqslant m \leqslant n-1$) dans l'ordre initial et un deuxième paquet de $(n-m)$ cartes dans l'ordre inverse à l'ordre initial :

$$\underbrace{C_1\cdots C_r}_{\text{série 1}}\ \dots\ \underbrace{C_1\cdots C_k}_{\text{série } j \text{ tronquée}}\ \Big|\ \underbrace{C_r\cdots C_1}_{\text{série } p \text{ inversée}}\ \dots\ \underbrace{C_r\cdots C_{k+1}}_{\substack{\text{complémentaire}\\ \text{de la série } j\\ \text{tronquée inversée}}}.$$

coupe

Puis nous procédons à un mélange américain de ces deux paquets.

Théorème 1. *Le jeu mélangé est également composé de p séries $S_1, S_2, \dots, S_p$ contenant chacune les cartes $C_1, \dots, C_r$ (éventuellement dans le désordre).*

La suite de cette partie est organisée comme suit : dans la section III.1, nous mettons en place une modélisation arithmétique du processus de mélange ; dans la section III.2 nous proposons une démonstration du théorème 1 et dans la section III.3 nous examinons le cas de séries de deux cartes ($r = 2$) ainsi que celui de deux séries de cartes ($p = 2$).

III.1 Modélisation

Nous renumérotons les cartes de 1 à n avec une identification modulo r, ce qui donne la répartition suivante pour le jeu initial :

$$\underbrace{C_1\cdots C_r}_{C_1\cdots C_r}\ \underbrace{C_{r+1}\cdots C_{2r}}_{C_1\cdots C_r}\ \underbrace{C_{2r+1}\cdots C_{3r}}_{C_1\cdots C_r}\ \dots\ \underbrace{C_{(p-1)r}\cdots C_{pr}}_{C_1\cdots C_r}.$$

Soient $N_1, N_2, \dots, N_{n-m}$ les positions dans le jeu mélangé des $(n-m)$ cartes du deuxième paquet inversé $C_nC_{n-1}\cdots C_{m+1}$. Nous posons $N_0 = 0$ et $N_{n-m+1} = n+1$. Nous avons $1 \leqslant N_1 < N_2 < \cdots < N_{n-m} \leqslant n$.

Nous allons décrire une bijection f de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ qui à un numéro de place i dans le jeu mélangé associe le numéro de la carte $f(i)$ occupant cette place (avec la numérotation $1, 2, \dots, n$ des cartes, figure 5).

Aux positions $N_1, N_2, \dots, N_{n-m}$ se trouvent les cartes du deuxième paquet $C_nC_{n-1}\cdots C_{m+1}$. Nous avons

nº de position	$\xrightarrow{f}$	nº de carte
1	$\longmapsto$	1
2	$\longmapsto$	2
⋮		⋮
N_1-1	$\longmapsto$	N_1-1
N_1	$\longmapsto$	n
N_1+1	$\longmapsto$	N_1
⋮		⋮
N_2-1	$\longmapsto$	N_2-2
N_2	$\longmapsto$	$n-1$
N_2+1	$\longmapsto$	N_2-1
⋮		⋮
N_3-1	$\longmapsto$	N_3-3
N_3	$\longmapsto$	$n-2$
N_3+1	$\longmapsto$	N_3-2
⋮		⋮
$N_{n-m}-1$	$\longmapsto$	$N_{n-m}-(n-m)$
N_{n-m}	$\longmapsto$	$m+1$
$N_{n-m}+1$	$\longmapsto$	$N_{n-m}-(n-m)+1$
⋮		⋮
n	$\longmapsto$	m

Figure 5. Permutation f.

donc $f(N_1) = n$, $f(N_2) = n-1$, …, $f(N_{n-m}) = m+1$, ce qui s'écrit de manière plus générale

$$f(N_k) = n-k+1 \text{ pour } k \in \{1, \dots, n-m\}.$$

Concernant les positions intermédiaires, un numéro de position i autre que les N_k est compris entre deux N_k consécutifs : il existe un $k \in \{0, 1, \dots, n-m\}$ tel que $N_k < i < N_{k+1}$. Nous trouvons à cette position la carte numéro $(i-k)$, car k cartes du deuxième paquet ont été insérées dans le premier jeu et ont repoussé les cartes de position initiale comprise entre N_k et N_{k+1} de k cartes. Ainsi,

$$f(i) = i-k \text{ pour } \{N_k+1, \dots, N_{k+1}-1\}.$$

Les cartes de la j^{e} série ($1 \leqslant j \leqslant p$) du jeu initial occupent les positions $(j-1)r+1, (j-1)r+2, \dots, jr$. Nous observons visuellement $S_j = C_1C_2\cdots C_r$ (dans l'ordre), mais nous avons plus précisément (toujours dans l'ordre)

$$S_j = C_{(j-1)r+1}C_{(j-1)r+2}\cdots C_{jr}.$$

Nous introduisons l'ensemble des positions associées :

$$P_j = \{(j-1)r+1, (j-1)r+2, \dots, jr\}.$$

Rappelons la notation ($a \bmod r$) pour un entier a quelconque qui désigne le reste de la division euclidienne

de a par r. Nous modifions légèrement cette définition lorsque a est divisible par r auquel cas nous prenons r : nous avons $(a \bmod r) \in \{1,2,\dots,r\}$. Notons de plus $(f(P_j) \bmod r)$ l'ensemble $\{f((j-1)r+1) \bmod r, f((j-1)r+2) \bmod r, \dots, f(jr) \bmod r\}$. Le théorème 1 – que nous démontrons dans la sous-section suivante – stipule que pour tout $j \in \{1,\dots,p\}$, $(f(P_j) \bmod r) = \{1,2,\dots,r\}$. Donc, en introduisant la permutation $\mathfrak{f}$ agissant sur les cartes différenciées $C_1 \cdots C_n$ associée à la bijection entre les numéros de positions et les numéros de cartes, nous avons précisément

$$\mathfrak{f}(\{C_{i_1},\dots,C_{i_r}\}) = \{C_{j_1},\dots,C_{j_r}\}$$

où $i_1,\dots,i_r$ sont r indices consécutifs respectivement congrus à $1,\dots,r$ modulo r et $j_1,\dots,j_r$ congrus dans leur ensemble à $1,\dots,r$ modulo r. De façon plus visuelle, en revenant aux séries de cartes $C_1 \cdots C_r$,

$$\underbrace{\mathfrak{f}(\ S_j\ )}_{\substack{C_1\cdots C_r\\ \text{dans l'ordre}}} \quad = \quad \underbrace{S_j.}_{\substack{C_1\cdots C_r\\ \text{éventuellement}\\ \text{dans le désordre}}}$$

Pour démontrer le théorème 1, nous allons détailler les éléments de l'ensemble

$$f(P_j) = \{f((j-1)r+1), f((j-1)r+2), \dots, f(jr)\}.$$

L'idée consiste à repérer des positions particulières N_k (pour certains k) figurant dans l'ensemble P_j.

III.2 Démonstration du théorème 1

Nous allons distinguer trois cas :
- lorsque les extrémités de P_j sont des N_k ;
- lorsqu'une seule des extrémités de P_j est un N_k ;
- lorsqu'aucune des extrémités de P_j ne sont des N_k.

III.2.1 Premier cas

Supposons que les extrémités de l'ensemble P_j soient des N_k et N_ℓ pour des indices k et ℓ tels que $1 \leqslant k < \ell \leqslant n-m$:

$$(j-1)r+1 = N_k \text{ et } jr = N_\ell.$$

En fait, nous avons $\ell \leqslant (k+r-1)$ puisque l'ensemble P_j contient r numéros. Nous avons donc dans P_j les $(\ell-k+1)$ positions particulières $N_k, N_{k+1}, \dots, N_\ell$ associées aux cartes de numéros

$$\begin{aligned} f(N_k) &= n-k+1,\\ f(N_{k+1}) &= n-k,\\ &\vdots\\ f(N_\ell) &= n-\ell+1, \end{aligned}$$

et les $(r+k-\ell-1)$ positions intermédiaires $N_k,\dots,N_{k+1}-1, N_{k+1}+1,\dots,N_{k+2}-1, N_{k+2}+1, \dots, N_{\ell-1}+1,\dots,N_\ell-1$ relatives aux cartes de numéros

$$\begin{aligned} f(N_k+1) &= N_k-k+1,\dots, & f(N_{k+1}-1) &= N_{k+1}-k-1,\\ f(N_{k+1}+1) &= N_{k+1}-k,\dots, & f(N_{k+2}-1) &= N_{k+2}-k-2,\\ f(N_{k+2}+1) &= N_{k+2}-k-1,\dots, & f(N_{k+3}-1) &= N_{k+3}-k-3,\\ &\vdots & &\vdots\\ f(N_{\ell-1}+1) &= N_{\ell-1}-\ell+2,\dots, & f(N_\ell-1) &= N_\ell-\ell. \end{aligned}$$

Tous ces numéros se suivent de N_k-k+1 à $N_\ell-\ell$ avec $N_k-k+1 = (j-1)r-k+2$ et $N_\ell-\ell = jr-\ell$. Ainsi :

$$\begin{aligned} f(P_j) = \{&(j-1)r-k+2, (j-1)r-k+3,\dots, jr-\ell\}\\ &\cup \{n-k+1, n-k,\dots, n-\ell+1\}. \end{aligned} \qquad (\ddagger)$$

Nous écrivons cet ensemble sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} f(P_j) = \{&[(j-1)r-k+1]+1, [(j-1)r-k+1]+2,\\ &\dots, [(j-1)r-k+1]+[r+k-\ell-1],\\ &[(j-1)r-k+1]+[n-(j-1)r+k-\ell],\\ &\dots, [(j-1)r-k+1]+[n-(j-1)r]\}\\ = [&(j-1)r-k+1]+\{1,2,\dots,r+k-\ell-1,\\ &(p-j)r+(r+k-\ell),\dots,(p-j)r+r\}. \end{aligned}$$

En introduisant l'ensemble

$$\begin{aligned} R_j = \{&1,2,\dots,r+k-\ell-1,\\ &(p-j)r+(r+k-\ell),\dots,(p-j)r+r\}, \end{aligned}$$

nous remarquons que $f(P_j)$ se déduit de R_j par translation :

$$f(P_j) = [(j-1)r-k+1]+R_j.$$

Rappelons que $j \leqslant p$; nous voyons que les éléments de R_j sont strictement ordonnés donc tous différents et

$$\begin{aligned} R_j \bmod r &= \{1,2,\dots,r+k-\ell-1, r+k-\ell,\dots,r\}\\ &= \{1,\dots,r\}. \end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble $(f(P_j) \bmod r)$ est constitué des restes de r nombres consécutifs, c'est exactement $\{1,\dots,r\}$, soit

$$f(P_j) \bmod r = \{1,\dots,r\}.$$

En d'autres termes, nous retrouvons une série de cartes $C_1 \cdots C_r$ complète éventuellement dans le désordre.

III.2.2 Deuxième cas

Supposons à présent qu'aucune des extrémités de l'ensemble P_j ne soit des N_k. Alors, il existe des indices k et ℓ tels que $1 \leqslant k < \ell \leqslant n-m$ et $N_{k-1} < (j-1)r+1 < N_k$ et $N_\ell < jr < N_{\ell+1}$. La correspondance entre positions et numéros de cartes associées relative à P_j s'effectue de la manière suivante : aux positions $(j-1)r+1,\dots,N_k-1,N_k,N_k+1,\dots,N_\ell-1,N_\ell,N_\ell+1,\dots,jr$ se situent respectivement les cartes de numéros $(j-1)r-k+2,\dots,N_k-k,n-k+1,N_k-k+1,\dots,N_\ell-\ell,n-\ell+1,N_\ell-\ell+1,\dots,jr-\ell$. Cette liste est identique à (‡) et nous obtenons la même conclusion que dans le cas précédent.

III.2.3 Troisième cas

Supposons enfin que seule l'une des extrémités de P_j coïncide avec un N_k. Dans ce cas deux possibilités se présentent :

- soit $(j-1)r+1 = N_k$ et $N_\ell < jr < N_{\ell+1}$ pour des indices k et ℓ tels que $1 \leqslant k < \ell \leqslant n-m$;
- soit $N_{k-1} < (j-1)r+1 < N_k$ et $jr = N_\ell$ pour des indices k et ℓ tels que $1 \leqslant k < \ell \leqslant n-m$.

Nous trouvons les mêmes résultats pour $f(P_j)$ que dans les cas antérieurs.

La preuve du théorème 1 est terminée.

III.3 Exemples

III.3.1 Premier exemple

Considérons un jeu constitué de p séries de deux cartes ($r = 2$). Nous avons un jeu initialement classé selon

$$\underbrace{C_1C_2}_{\text{série 1}}\ \underbrace{C_1C_2}_{\text{série 2}}\ \dots\ \underbrace{C_1C_2}_{\text{série } p}.$$

Nous sommes dans le contexte du premier principe de Gilbreath. Pour la coupe de ce jeu, deux possibilités se présentent :

- soit nous coupons le jeu n'importe où, puis nous retournons le deuxième paquet, ce qui donne l'une des deux répartitions suivantes :

$$\underbrace{C_1C_2}_{\text{série 1}}\ \underbrace{C_1C_2}_{\text{série 2}}\ \dots\ \underbrace{C_1C_2}_{\text{série } k}\ \Big|\ \text{coupe}\ \Big|\ \underbrace{C_2C_1}_{\substack{\text{série } p\\ \text{inversée}}}\ \dots\ \underbrace{C_2C_1}_{\substack{\text{série } (k+1)\\ \text{inversée}}};$$

$$\underbrace{C_1C_2}_{\text{série 1}}\ \dots\ \underbrace{C_1C_2}_{\text{série } (k-1)}\ C_1\ \Big|\ \text{coupe}\ \Big|\ \underbrace{C_2C_1}_{\substack{\text{série } p\\ \text{inversée}}}\ \dots\ \underbrace{C_2C_1}_{\substack{\text{série } (k+1)\\ \text{inversée}}}\ C_2.$$

  Dans la première situation, la coupe est effectuée entre les k^{e} et $(k+1)^{\text{e}}$ séries, alors que dans la deuxième, elle est effectuée au milieu de la k^{e} série. Dans ce dernier cas, le retournement d'un paquet à l'issue de la coupe n'est pas indispensable, car les paquets ayant un nombre impair de cartes, un paquet retourné reste identique à lui-même.
  Cet exemple est encore un cas particulier de la manipulation décrite dans le préambule de la section III. Dans le cas d'une coupe exactement au milieu du jeu, nous trouvons une disposition en miroir ;
- soit nous coupons le jeu en deux paquets contenant un nombre pair de cartes sans retournement du deuxième paquet. Ce cas ne relève pas de l'analyse menée dans cette section. En revanche, nous l'avons étudié différemment dans la section II.

III.3.2 Deuxième exemple

Considérons un jeu constitué de deux séries ($p = 2$) de r cartes identiques $C_1\cdots C_rC_1\cdots C_r$. En numérotant les cartes de la deuxième série selon $C_1 = C_{r+1}, C_2 = C_{r+2},\dots,C_r = C_{2r}$, notre jeu de $2r$ cartes admet une composition de la forme $C_1\cdots C_{2r}$. Nous coupons ce dernier n'importe où. Nous disposons alors de deux paquets, l'un contenant m cartes pour un $m \in \{1,\dots,2r-1\}$, l'autre contenant $(2r-m)$ cartes que nous retournons. Cela donne la répartition $C_1\cdots C_mC_{2r}\cdots C_{m+1}$. Remarquons qu'en choisissant une coupe correspondant à $m = r$, nous sommes exactement dans le contexte du second principe de Gilbreath. Un mélange américain des deux paquets ainsi obtenus donne une composition de la forme

$$\underbrace{C'_1\cdots C'_r}_{\text{série 1}}\ \underbrace{C'_{r+1}\cdots C'_{2r}}_{\text{série 2}}.$$

Le théorème 1 appliqué à l'exemple présent (deux séries de r cartes, $p = 2, m = r$) assure que le jeu mélangé est lui-même composé de deux séries contenant chacune les cartes $C_1,\dots,C_r$ (éventuellement dans le désordre).

A Appendice : une autre démonstration du premier principe

Dans cet appendice, nous proposons une démonstration plus abstraite du premier principe de Gilbreath qui nous semble intéressante.

Nous disposons d'un jeu de $2n$ cartes classé en rouges et noires alternées une à une. Nous définissons trois variables qui serviront dans cette preuve.

- Soit R_k (resp. N_k) le nombre de cartes rouges (resp. noires) contenues dans le paquet mélangé

une fois que k cartes ($1 \leqslant k \leqslant 2n$) sont comptées. Nous avons :

$$\forall k \in \{1,2,\dots,2n\}, \quad R_k + N_k = k.$$

– Soit D_k la différence du nombre de cartes rouges et noires dans le paquet de k cartes extrait :

$$\forall k \in \{1,2,\dots,2n\}, \quad D_k = R_k - N_k.$$

Nous posons aussi $D_0 = 0$. Il est clair que

$$\forall k \in \{0,1,\dots,2n-1\}, \quad D_{k+1} = D_k \pm 1,$$

le signe + (resp. −) correspondant au cas où la $(k+1)^{\text{e}}$ carte est rouge (resp. noire).

Proposition 2. *Si après la coupe du jeu initial, les deux paquets ont sur le dessus des cartes de couleurs différentes, alors les nombres D_k, $0 \leqslant k \leqslant 2n$, vérifient les propriétés $\forall k \in \{0,1,\dots,n\}, D_{2k} = 0$ et $\forall k \in \{0,1,\dots,n-1\}, D_{2k+1} \in \{-1,1\}$.*

Démonstration. Nous vérifions la propriété $\forall k \in \{0,1,\dots,n\}, D_{2k} = 0$ en prouvant la relation

$$\forall k \in \{0,1,\dots,n-1\}, D_{2k+2} = D_{2k}.$$

Nous disposions au départ de deux paquets commençant par des cartes de couleurs différentes. Il est immédiat que les deux premières cartes du jeu mélangé sont de couleurs différentes et donc $D_2 = 0$.

Les $2k$ premières cartes du jeu mélangé comportent les p premières cartes du premier paquet et les q premières cartes du second pour certains nombres p et q tels que $p + q = 2k$. Cela entraîne naturellement que p et q ont même parité. Les deux cartes suivantes (la $(p+1)^{\text{e}}$ du premier paquet et la $(q+1)^{\text{e}}$ du second) sont alors de couleurs différentes. En effet, partant de deux paquets avec sur le dessus, l'un une carte rouge, l'autre une carte noire, du fait du classement initial en cartes rouges et noires alternées, nous trouvons respectivement pour les $(p+1)^{\text{e}}$ et $(p+2)^{\text{e}}$ cartes d'une part, les $(q+1)^{\text{e}}$ et $(q+2)^{\text{e}}$ cartes d'autre part,

– lorsque p et q sont pairs, une rouge suivie d'une noire et une noire suivie d'une rouge ;
– lorsque p et q sont impairs, une noire suivie d'une rouge et une rouge suivie d'une noire.

Il devient clair que les $(2k+1)^{\text{e}}$ et $(2k+2)^{\text{e}}$ cartes du jeu mélangé sont de couleurs différentes, puisqu'elles proviennent d'un mélange américain de deux sous-paquets RN et NR. Cette discussion montre que $R_{2k+2} = R_{2k} + 1$ et $N_{2k+2} = N_{2k} + 1$ puis que $D_{2k+2} = D_{2k}$.

Ainsi la suite de nombres $D_0, D_2, D_4, \dots, D_{2n}$ est stationnaire identiquement nulle. Enfin, la propriété $D_{2k+1} = D_{2k} \pm 1$ entraîne immédiatement $D_{2k+1} = \pm 1$. □

Corollaire 3. *Si après la coupe du jeu initial, les deux paquets ont sur le dessus des cartes de couleurs différentes, alors le jeu mélangé est classé par paires de cartes de couleurs différentes.*

Démonstration. L'égalité $D_{2k+2} = D_{2k}$ fournit $R_{2k+2} - R_{2k} = N_{2k+2} - N_{2k}$. Ces relations signifient que les nombres de cartes rouges et de cartes noires dans la paire constituée des $(2k+1)^{\text{e}}$ et $(2k+2)^{\text{e}}$ cartes sont identiques. Cela prouve bien que le jeu mélangé est classé en paires de cartes de couleurs différentes. □

De manière tout à fait analogue, nous pourrions établir les deux résultats ci-dessous que nous énonçons sans démonstration.

Proposition 4. *Si après la coupe du jeu initial, les deux paquets ont sur le dessus des cartes de couleur rouge (resp. noire), alors les nombres D_k, $0 \leqslant k \leqslant 2n$, vérifient les propriétés $\forall k \in \{0,1,\dots,n-1\}, D_{2k+1} = 1$ (resp. -1) et $\forall k \in \{0,1,\dots,n\}, D_{2k} \in \{0,2\}$ (resp. $\{0,-2\}$).*

Corollaire 5. *Si après la coupe du jeu initial, les deux paquets ont sur le dessus des cartes de même couleur, alors les cartes successives de même couleur du jeu mélangé se situent dans une même paire.*

Remerciements. Un grand merci à Gérald Mainart (président du club Magica) qui a fait découvrir à Pierre les principes de Gilbreath, Guillaume Batog pour sa contribution à l'appendice, ainsi qu'à Francis Denise pour une relecture minutieuse de ce travail et ses remarques constructives.

Références

[1] N. L. GILBREATH, *Magnetic colors,* The Linking Ring 38(5) (1958), 60.

[2] N. L. GILBREATH, *Second Gilbreath principle,* The Linking Ring, June 1966.

[3] N. L. GILBREATH, *Magic for an audience,* Genii 52(9-10-11) (1989).

[4] A. LACHAL, P. SCHOTT, *Cartomagie : principes de Gilbreath (I) — Dénombrement de mélanges américains,* Quadrature 85 (2012), 24–35.

[5] A. LACHAL, P. SCHOTT, *Cartomagie : principes de Gilbreath (II) — Quelques applications,* Quadrature 86 (2012).

[6] D. PÉRIS, *La Péristance (généralisation du second principe de Gilbreath),* La boutique de l'illusion, Paris, 2006.

[7] S. WILLEMIN, *Principe de Gilbreath et mélange américain,* Quadrature 84 (2012), 31–36.