Quand les zelliges entrent dans la classe…
Étude de la symétrie

Marc Moyon

© Éditions Le Pommier, 2009

Introduction

Les artisans des pays d'Islam utilisent les propriétés mathématiques et artistiques de la rotation, de la symétrie et du pavage, c'est-à-dire du recouvrement du plan par un motif pour leurs créations de représentations géométriques. Ils embellissent ainsi de nombreuses réalisations architecturales (maisons, palais, mosquées, hôpitaux, madrasa, mausolées) et décorent différents types de livres (religieux, littéraires et même scientifiques). Par exemple, ils remplissent, à partir de cercles et de figures polygonales construites à la règle et au compas, un espace plan. Pour cela, ils utilisent notamment des petits carreaux d'argile la plupart du temps recouverts d'émail appelés « zelliges ». Ce sont ces mêmes carreaux que les artisans apportent chez Fadila et Nabil afin de restaurer une partie du mur de leur maison. Ceux-ci deviennent caractéristiques de l'architecture maroco-andalouse. Leur présence est attestée dès le XII^e^ siècle dans les minarets de la Koutoubia et de la Qasbah à Marrakech. Comme le précise le film d'animation, ils se retrouvent dans la décoration de plusieurs salles de l'Alhambra de Grenade, dont la construction date de la première moitié du XIV^e^ siècle. Sont également réalisés des motifs en trois dimensions appelés « muqarnas », soit comme éléments architecturaux constitutifs d'une voûte, soit comme décorations. Ils sont obtenus à partir de triangles, de carrés et de losanges. Au XV^e^ siècle, le mathématicien iranien al-Kâshî (mort en 1429) s'intéresse de manière scientifique à ces muqarnas en consacrant un chapitre entier de son *Miftâh al-hisâb* (*La Clé du calcul*) à leurs constructions et mesures.

La richesse de la géométrie présente dans les décorations islamiques lui confère une approche souvent ardue. Elle est représentée par des figures très élaborées. La construction de ces décorations repose principalement sur quatre transformations du plan : les symétries axiales et centrales, la translation et la rotation.

Ces quatre transformations, perceptibles par simple observation, intègrent les apprentissages de l'école et du collège. Ici, notre projet est de faire découvrir les caractéristiques de la symétrie axiale à travers ses manifestations artistiques dans les pays d'Islam. En effet, cette transformation est la seule au programme du cycle 3 et de la sixième. Les activités proposées pourront d'ailleurs faire l'objet d'un travail commun dans une liaison école-collège.

La symétrie axiale, aussi appelée « symétrie orthogonale », d'axe *d* est une transformation ponctuelle telle que si M' est l'image de M par rapport à *d*, alors *d* est la médiatrice de [MM'], c'est-à-dire la droite perpendiculaire à [MM'] et passant par son milieu. La droite *d* est alors un ensemble de points fixes : chacun de ses points est sa propre image.

Avant de décrire en détail les activités, nous désirons présenter les connaissances et compétences explicitement citées par les instructions officielles du cycle 3 travaillées ici. En plus des objectifs transversaux déjà décrits dans l'introduction de cet ouvrage, les activités que nous proposons dans la suite concourent à plusieurs objectifs notionnels :

– connaître et savoir utiliser le vocabulaire spécifique : points alignés, milieu d'un segment, droites perpendiculaires, droites parallèles, figures symétriques d'une figure donnée par rapport à une droite, axe de symétrie ; savoir effectuer les constructions et tracés correspondants ;
– utiliser les instruments (règle et compas) ;
– percevoir qu'une figure possède un ou plusieurs axes de symétrie et le vérifier en utilisant différentes techniques (pliage, calque) ;
– compléter une figure par symétrie axiale en utilisant des techniques telles que le pliage et le papier-calque ;
– reconnaître de manière perceptive une figure plane, donner son nom ;
– décomposer une figure complexe en figures simples.

À la découverte de la symétrie

C'est dans les classes de cycle 3 qu'une transformation géométrique – la symétrie axiale – sera enseignée pour la première fois. Devront alors en être dégagés les éléments caractéristiques ainsi que les principales propriétés géométriques (conservation des longueurs, des aires, etc.).

Une introduction générale peut être conduite à partir d'une recherche documentaire. L'enseignant répartit sa classe en plusieurs groupes qui travaillent séparément sur un lieu ou un bâtiment (historiques ou contemporains). On peut considérer, par exemple, en Espagne, l'Alhambra de Grenade, ou, au Maroc, la mosquée Hassan II de Casablanca, la mosquée al-Qarawiyine de Fès ou bien le mausolée de Moulay Ismaïl de Meknès dont plusieurs seront cités ultérieurement. Les élèves doivent dégager un des points communs de tous ces lieux : la présence de riches représentations géométriques, caractéristiques des pays d'Islam et utilisées comme éléments de décoration.

L'observation doit être le point de départ de l'apprentissage. Comme le montrent le film d'animation ainsi que le texte pour enfants, elle permet, entre autres choses, de repérer un motif géométrique qui se répète et des axes de symétrie. Les élèves sont ensuite amenés à verbaliser le « retournement » du motif intrinsèque à la symétrie axiale.

Cette mosaïque (voir la figure 1) est la réplique des décorations réalisées à l'aide de zelliges. Reproduite en couleurs sur un papier transparent, elle est rétroprojetée en classe.



Figure 1 : Mosaïque d'un patio d'une construction moderne de Grenade (xx^{e} s.)

Dans un premier temps s'engage une discussion sur la description d'un élément qui, répété plusieurs fois, permet de reconstruire la mosaïque observée. Tous les élèves ne vont pas repérer le même élément ; un débat dans la classe peut être envisagé. Dans un second temps, l'observation doit permettre aux élèves de décrire les divers mouvements d'un élément constitutif (par exemple, voir les figures 2 et 3) qui leur permettent de construire l'ensemble. L'enseignant pourra alors manipuler cet élément en suivant pas à pas les consignes des élèves. Il aura donc prévu un nombre suffisant de copies de l'élément constitutif. Attention aux retournements que les élèves doivent mettre en évidence !

Pour les classes équipées d'un vidéoprojecteur, l'enseignant peut utiliser des fichiers Word ou Paint qui permettent, à partir du copier/coller et des options de retournement horizontal ou vertical, de visualiser la construction de la mosaïque. Dans la continuité, l'animation du site du projet sera visualisée comme bilan de l'activité. Ce film d'animation peut être l'occasion d'une phase d'écriture en demandant aux élèves de définir ce qu'est une symétrie.



Figure 2 : Repérage d'un élément constitutif de la mosaïque



Figure 3 : Agrandissement d'un élément constitutif de la mosaïque de Grenade

L'enseignant peut poursuivre cette observation en distribuant aux élèves la frise qu'ils pourront plier et découper comme ils le souhaitent afin de déterminer l'élément constitutif de la mosaïque le plus petit possible : l'élément minimal. Les élèves pourront être répartis en groupes pour faciliter les échanges d'idées et les manipulations nécessaires. Ils devront alors sortir de leurs références verticales et horizontales : un axe de symétrie oblique se dégagera. En effet, en plus des axes verticaux et horizontaux qui correspondent aux pliages successifs, il faudra prendre en compte la diagonale du carré de l'élément travaillé jusqu'alors. Un nouveau débat (ou bien une production écrite) pourra être engagé en demandant aux élèves les raisons pour lesquelles il est certain que le triangle rectangle ainsi obtenu correspond à l'élément minimal. D'une part il permet la construction de la mosaïque entière, et d'autre part c'est le plus petit car il ne possède plus d'axe de symétrie, il ne peut donc plus être réduit. Une seconde question pourra être proposée : le découpage du carré selon son autre diagonale aurait-il fourni un nouvel élément minimal ? En conclusion, il est important que les élèves repèrent qu'un axe de symétrie, c'est-à-dire la droite selon laquelle il faut plier, peut être horizontal, vertical ou oblique. Cet axe peut, par exemple, être mis en évidence grâce au film d'animation. En exercice, il sera intéressant de considérer un axe oblique qui ne soit pas à 45° avec l'horizontale.



Figure 4 : Élément minimal

Dans la suite, nous proposons plusieurs activités, indépendantes les unes des autres, qui permettent aux élèves de s'approprier progressivement le concept mathématique de symétrie axiale. La réalisation effective de la dernière d'entre elles est assez difficile et ne pourra donc pas être exigée de tous.

L'étoilé décalquée

Le but est de construire, de deux manières différentes, une première étoile qui sera à la base de l'activité suivante : la frise d'étoiles. Cette construction permet une première identification entre pliage et axe de symétrie.

Dans un premier temps, les traits pleins de la figure 5a sont à reproduire sur une feuille de papier-calque. L'élève doit alors plier le long des pointillés afin de reproduire la figure dans les trois quarts restants. Le résultat attendu est la figure 5b. Dans un second temps, l'enseignant prend soin de reproduire la figure 5a sur papier blanc et l'élève doit la compléter sans utiliser la feuille de papier-calque. Il est nécessaire de choisir un papier suffisamment épais pour que l'élève ne puisse pas voir par transparence. Ainsi, il doit mettre en place une procédure pour remplacer la reproduction par transparence et par pliage. Néanmoins, il peut à nouveau plier convenablement sa feuille mais seulement pour visualiser puis valider la figure obtenue.

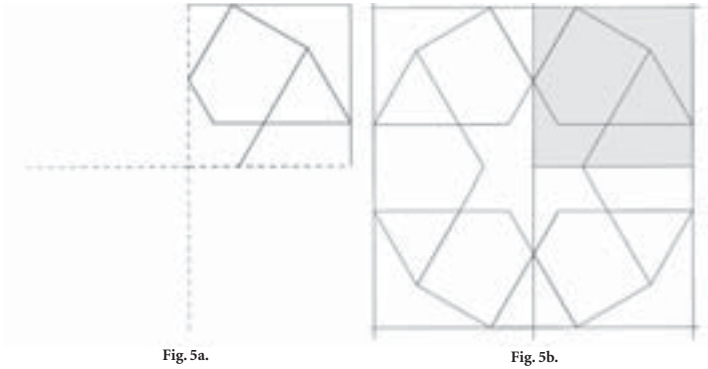


Figure 5 : L'étoile décalquée

La frise d'étoiles

Cette deuxième activité propose la construction d'une frise dont l'élément central est l'étoile à six branches précédemment construite.

Le premier travail sur cette frise est purement géométrique : il consiste à prolonger la frise, dont les deux premiers éléments sont déjà construits. Pour cela, l'élève est laissé libre pour mener son projet à bout. À la suite



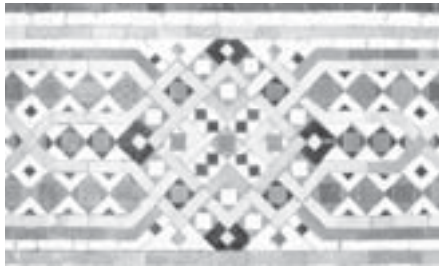
Figure 6 : La frise d'étoiles

de la construction, l'enseignant provoque un débat dans la classe sur les différents procédés mis en œuvre. Bien sûr, tous les élèves doivent être amenés à « matérialiser » les axes de symétrie à l'aide d'une droite.

Le but essentiel est de comprendre que le principe fondamental d'une frise repose sur la répétition de figures, répétition possible par pliage ou par… symétrie axiale.

Introduisons la couleur

La frise peut, dans un premier temps, être coloriée à l'aide d'une seule couleur, comme y incite la figure 6. C'est alors l'occasion d'étudier la façon de colorier la frise pour ne pas « perdre » la symétrie. L'élève doit convoquer les résultats précédents sur la notion d'axe de symétrie, avec éventuellement l'exécution mentale d'un pliage. Mais, dans un deuxième temps, avec l'introduction d'une variation de couleurs, la frise étoilée est aussi l'occasion d'une digression numérique.



Détail d'une frise moderne
de la grande mosquée Hassan II
à Casablanca (xx^{e} siècle)

L'enseignant définit une suite de n ($n \geq 2$) couleurs. Le but est alors de déterminer la couleur

de la p-ième étoile. Il est intéressant d'augmenter progressivement le rang p (c'est-à-dire sa position dans la frise, à savoir la p-ième étoile) de l'étoile dont on désire connaître la couleur. Pour un rang p suffisamment petit, c'est-à-dire correspondant à une étoile représentée sur la frise, l'élève observe simplement la couleur cherchée. Mais, pour p relativement grand (sans aucun majorant), il doit mettre en place une nouvelle stratégie :
– si $n = 2$, la recherche mène l'élève à identifier la couleur d'une étoile avec la parité ou l'imparité de son rang ;
– si $n > 2$, l'élève doit faire appel à l'interprétation du reste de la division euclidienne de p par n.

Par exemple, l'enseignant définit une suite ordonnée de $n = 3$ couleurs (bleu, orange, vert) et donne ensuite aux élèves un nombre p pour connaître la couleur *a priori* de l'étoile de rang p. La recherche doit être progressive, p doit prendre des valeurs de plus en plus grandes.

Prenons quelques exemples avec p suffisamment grand pour décrire la démarche de l'élève :
– soit $p = 158$. La division euclidienne de 158 par 3 donne la relation : $158 = 3 \times 52 + 2$. L'interprétation de cette relation nous permet de décrire la frise : il y aura 52 séries de trois couleurs et deux étoiles supplémentaires. Ces deux étoiles seront, dans l'ordre, bleue et orange. En conclusion, la 158e étoile sera orange ;
– soit $p = 241$. Alors $241 = 3 \times 80 + 1$. La frise sera construite avec 80 séries de trois couleurs, et la 241e étoile sera donc bleue ;
– soit $p = 345$. Alors le reste de la division euclidienne est 0 car $345 = 3 \times 115$. La 345e étoile sera alors verte.

Ces trois exemples suffisent à décrire tous les cas puisque la division euclidienne par 3 ne peut avoir que trois restes possibles : 0, 1, 2.

L'enseignant peut ensuite donner une nouvelle valeur de n plus importante et, à nouveau, différentes valeurs pour p. Cette recherche numérique est propice à un exercice d'écriture. Elle peut même être envisagée dans le cadre d'une narration de recherche. L'élève devra ainsi raconter et expliquer sa démarche qui, dans ce cadre, est expérimentale, en faisant appel à son vécu scolaire et à ses connaissances théoriques. Cette activité peut intervenir soit en rappel, soit en introduction à la division euclidienne.

L'étoile à huit branches : deux carrés entrecoupés

Contemporain de Louis XIV, Moulay Ismaïl (1645-1727) devient sultan du Maroc en 1672. Au début de son règne, il choisit Meknès comme capitale de son royaume. Son mausolée, c'est-à-dire le lieu où repose son corps, est une mosquée de cette ville construite en 1703. On y trouve de très belles mosaïques, construites notamment autour de l'étoile à huit branches. Voici deux exemples qui peuvent être le point de départ d'une nouvelle observation dont le but sera la construction effective de l'étoile à huit branches. L'enseignant doublera cette observation d'une phase d'écriture en demandant un programme de construction de cette même étoile.



Détail d'une frise
du mausolée de Moulay Ismaïl
à Meknès (XVIIIe siècle)



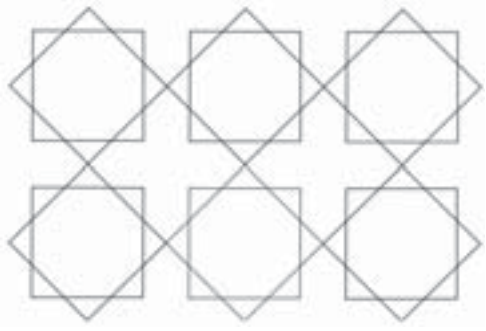
Fontaine du patio
du mausolée de Moulay Ismaïl
à Meknès (XVIIIe siècle)

En fonction des textes rédigés par les élèves, l'enseignant sera amené à donner une construction de l'étoile comme superposition de deux carrés. L'un des deux doit faire un quart de tour sur l'autre autour de son centre. C'est l'occasion d'aborder une nouvelle transformation géométrique : la rotation. Celle-ci n'est pas au programme de l'école mais elle peut être utile pour montrer que la symétrie axiale n'est pas la seule transformation géométrique existante.



Rotation du
carré autour
de son centre

L'une des mosaïques les plus rencontrées avec cette étoile est le pavage croix-étoiles suivant :



Mosaïque de croix
et d'étoiles à huit points

L'étoile à huit branches est idéale pour appréhender la notion d'axe de symétrie par le pliage/découpage. En effet, l'élève équipé d'une feuille de papier carrée et d'une paire de ciseaux a pour mission de retrouver l'étoile à huit branches en donnant le moins possible de coups de ciseaux. L'élève doit en fait retrouver l'élément minimal (voir la figure 7a) structurant le motif général (voir la figure 7b), à savoir,



Figure 7a : Élément de base
de l'étoile à huit branches

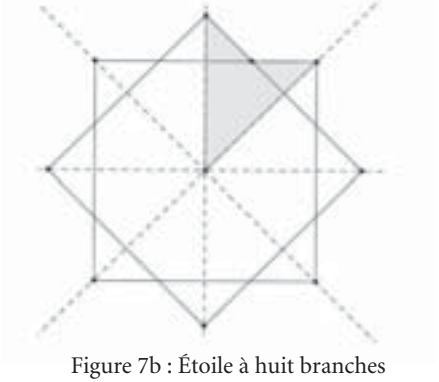
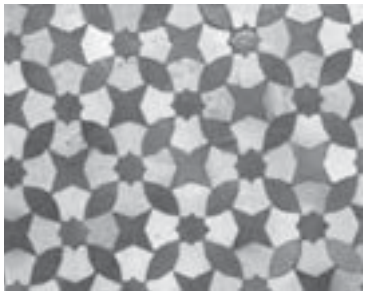


Figure 7b : Étoile à huit branches
et axes de symétrie

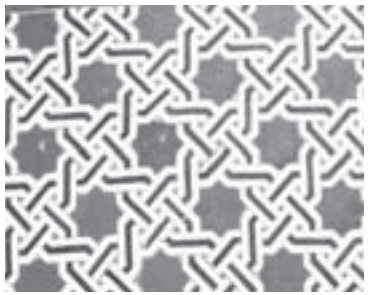
L'élève arrive au résultat par trois pliages successifs : deux pliages parallèles aux côtés et un pliage diagonal par exemple.

Construire un pavage à partir d'une enveloppe : un projet collaboratif

Cette quatrième activité permet à l'élève de « paver le plan », c'est-à-dire de remplir un espace à deux dimensions (dont un échantillon pourrait être une feuille de papier, un mur de la classe, etc.) sans laisser de place vide. Le pavage est un procédé de décoration très utilisé dans l'art islamique dont voici quelques illustrations. Celles-ci peuvent être montrées, en exemple, aux élèves en les imprimant sur un transparent pour rétroprojecteur. Les deux font apparaître l'étoile à huit branches précédemment réalisée.



Pavage du mausolée
de Moulay Ismaïl à Meknès
(XVIII^e siècle)



Pavage d'un banc de la mosquée
Hassan II à Casablanca
(XX^e siècle)

Cette activité repose sur la propriété des parallélogrammes, qui pavent le plan quelles que soient leurs dimensions, leurs formes (parallélogrammes quelconques, rectangles, carrés ou losanges). Nous prendrons donc comme forme de base un rectangle que nous « transformerons » par symétries successives.

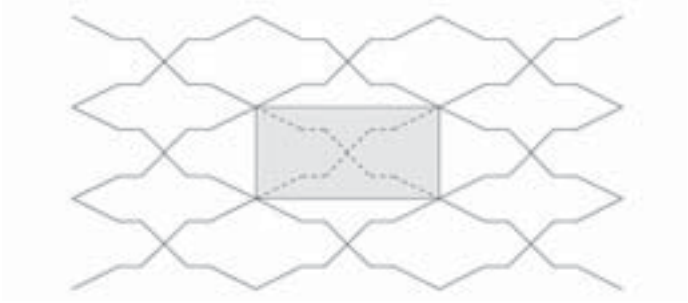
Chaque élève construit un élément du pavage, et l'enseignant rassemble toutes les productions pour composer celui-ci. Il est important de prévenir les élèves de cet objectif afin qu'ils sachent que la réussite globale du projet repose sur chacune de leurs contributions. Une précision fine du tracé géométrique ainsi que du découpage est nécessaire.

Le point de départ de l'activité est une enveloppe rectangulaire de format quelconque et de préférence autocollante.

Tout d'abord, l'élève représente sur le dos de l'enveloppe les segments pointillés en suivant le programme de construction suivant :

– tracer les diagonales de l'enveloppe ;
– placer le milieu des quatre moitiés des diagonales ;
– relier ces milieux deux à deux dans le sens de la longueur ;
– placer le quart et le trois-quarts de chacun des segments obtenus ;
– relier deux à deux, en diagonale, les points obtenus. Ces deux segments se coupent au centre du rectangle.

Ensuite, il coupe le long des pointillés une seule face de l'enveloppe. Enfin, il développe les morceaux latéralement pour obtenir l'élément de base du pavage. Il est temps pour l'enseignant et les élèves de rassembler tous les éléments… Ce travail pourra être produit à partir d'enveloppes de différentes couleurs afin de mieux mettre en évidence le pavage obtenu.



Le pavage par l'enveloppe

Symétrie axiale : constructions

Le dodécagone peut être obtenu de multiples manières. L'une des plus simples est sans doute celle obtenue par la construction de trois carrés inscrits dans un cercle de base. Cette dernière activité se décompose en quatre étapes indépendantes les unes des autres. Nous précisons à nouveau qu'elle constitue une activité difficile qui doit être réservée aux élèves qui auraient parfaitement assimilé les activités précédentes.

Première étape : les axes de symétrie

L'élève doit commencer par repérer les axes de symétrie de la figure ci-dessous et la colorier de façon à conserver tous ces axes. L'enseignant lui demande quel est le nombre maximum de couleurs qu'il peut utiliser.

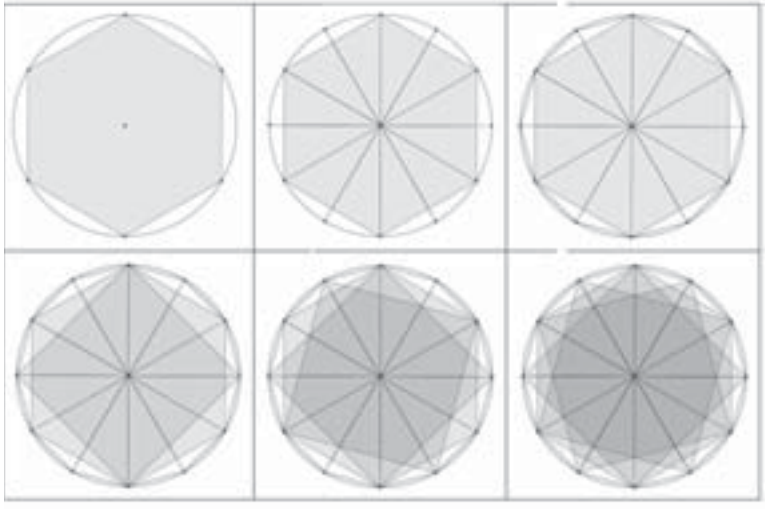
À cette occasion, l'élève prend conscience du faible degré de liberté dont il dispose dans le choix des couleurs compte tenu du nombre d'axes. En effet, la couleur d'une zone impose celle de la zone symétrique. Les symétries repérées décident de la répartition des couleurs dès le départ pour chacune des figures isolées (losange, carré, branche d'étoile).



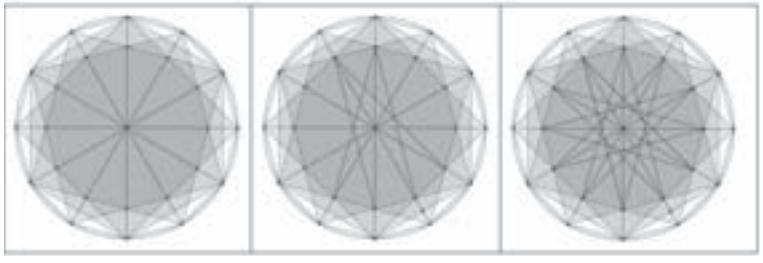
Le dodécagone étoilé

Ensuite, l'enjeu est la construction effective de la figure. Un programme de construction risque d'être fastidieux à suivre pour l'élève et ne présente pas d'intérêt particulier. L'élève est amené à suivre la « bande dessinée » présentée ci-dessous dont seule une observation raisonnée lui permettra la construction finale. L'enseignant pourra demander à l'élève d'écrire, au fur et à mesure, les tâches réalisées à l'aide du vocabulaire approprié (cercle, centre, hexagone, diamètre, milieu, carré, etc.).

Deuxième étape : l'imbrication des carrés



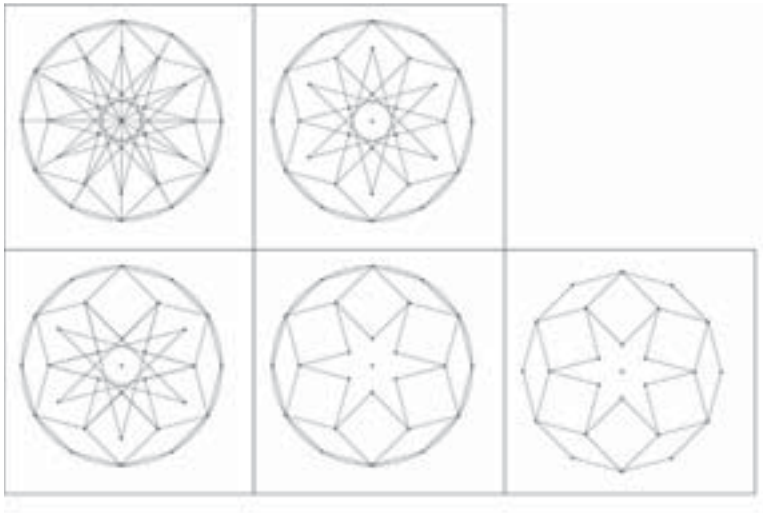
Troisième étape : l'étoile centrale à douze branches



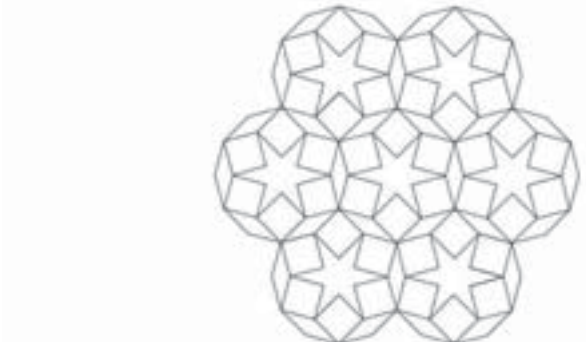
Remarque : il est possible de conserver l'étoile à douze branches pour le pavage final, mais il est évident que la tâche sera alors moins évidente.

Quatrième étape : l'élaboration du motif final

Il s'agit de l'étape la plus difficile du point de vue de l'observation mais aussi de la réalisation puisqu'il faut effacer. Mais, là encore, c'est la symétrie qui est à l'œuvre…



Enfin, l'enseignant reproduit le pavage suivant, sous la forme d'un poster A3 à afficher au tableau par exemple, en proposant aux élèves de l'imiter en partant de leurs propres constructions.



Répétition du dodécagone par symétrie

Conclusion

Ces activités ont un double objectif. Elles permettent d'abord de découvrir, de définir et de construire la symétrie dans les classes. Ensuite, elles concourent au développement culturel des élèves en leur offrant une opportunité de découvrir une civilisation à travers son art.

Toutefois, ces activités peuvent aussi participer à l'élaboration d'une représentation erronée chez l'élève. En effet, elles peuvent laisser croire que la symétrie ne serait qu'une construction humaine consciente et réfléchie conçue pour atteindre le Beau. Pour terminer l'étude sur la symétrie, il sera donc indispensable d'observer quelques manifestations « naturelles » de celle-ci.

La cristallographie décrit les structures et les propriétés des cristaux à partir de l'analyse de leurs symétries. Les cristaux de glace fournissent probablement les exemples les plus communs pour les élèves : les flocons de neige. Tous différents, ils sont néanmoins tous caractérisés par une même structure hexagonale. Une série de photographies de cristaux de neige peut être, par exemple, le support d'une évaluation sur les axes de symétrie.

Les êtres vivants (faune et flore) peuvent aussi faire l'objet d'observations. Fleurs, papillons, coquillages, alvéoles des ruches, etc., sont autant de témoignages naturels de la symétrie que tous les élèves ont sans doute déjà repérés.

Bibliographie

André Deledicq, *Jeux de symétries*, Paris, ACL-Les éditions du Kangourou, 2001.

Ahmed Djebbar, « Mathématiques et arts en pays d'Islam », *Textes et Documents pour la classe*, n° 883, *La Symétrie*, 2004.

Expériences de narration de recherches en mathématiques, Paris, ACL-Les éditions du Kangourou, IREM de Paris 7, 2002.

Bernard Maitte, « Cristaux : des formes à la structure », *Textes et Documents pour la classe*, n° 883, *La Symétrie*, 2004.

« Programmes de l'école primaire, cycle des approfondissements, cycle 3 », *B.O.*, n° 5, 12 avril 2007.