



**HAL**  
open science

# Pourquoi la gamme a sept notes? Une mathématique des notes et des gammes

François Dubois

► **To cite this version:**

François Dubois. Pourquoi la gamme a sept notes? Une mathématique des notes et des gammes. 1999. hal-03177187v1

**HAL Id: hal-03177187**

**<https://cnrs.hal.science/hal-03177187v1>**

Preprint submitted on 23 Mar 2021 (v1), last revised 4 Oct 2023 (v4)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Pourquoi la gamme a sept notes ?

## Une mathématique des notes et des gammes

François Dubois  
mathématicien appliqué, amateur de musique

03 novembre 1999\*

### Résumé

Nous proposons une construction algébrique pour les notes de musique et montrons comment les associer de diverses façons pour former des gammes. La classification des gammes est naturelle avec la notion de structure multiplicative. L'action d'une structure multiplicative sur une note permet de définir une tonalité. Leur classification fait apparaître les notions de type et de mode.

### PLAN

1	La note <i>do</i> .....	2
2	Gammes à deux notes .....	3
3	Suite infinie des notes .....	4
4	Gammes à trois notes .....	6
5	Gammes à cinq notes.....	8
6	Construction récurrente.....	10
7	Quelques propriétés .....	12
8	Structure multiplicative et tonalité .....	15
9	Type et mode .....	16
10	Gammes à sept notes .....	19
11	Conclusion .....	21
12	Remerciements .....	22
	Références bibliographiques .....	22

---

\* Édition du 22 mars 2021.

## 1) La note do

- La musique est écrite avec des notes. Du point de vue de la modélisation acoustique, une **note** est une variation de pression au cours du temps caractérisée par une fenêtre temporelle qui définit la durée de la note et par une fréquence caractéristique de la « hauteur » du son. Du point de vue mathématique, une note est une fonction périodique du temps, de pulsation  $\omega$  appelée abusivement dans la suite « fréquence  $\omega$  », de période  $T = 2\pi/\omega$  dupliquée quelques centaines de fois pour les fréquences sonores habituelles. Nous ne nous intéressons pas ici au timbre de l'instrument, c'est à dire au spectre du motif intérieur à la période, mais simplement à la fréquence de la note.

- Pour nous, la première note est le *do*. Il s'agit d'une convention et le *do* représente ici une note de fréquence  $\omega_0$ , avec  $\omega_0$  fixé pour toute la suite de cette contribution. Nous introduisons aussi l'instrument de musique le plus primitif, c'est à dire la corde vibrante de longueur  $L$  tenue à ses deux extrémités. Nous supposons que le *do* correspond au premier mode de vibration de cette corde, c'est à dire que  $\omega_0$  est la fréquence fondamentale de la corde de longueur  $L$ . Si une corde de longueur  $L$  vibre à la fréquence  $\omega_0$ , sa première harmonique vibre à la fréquence  $2\omega_0$  et correspond à une longueur de  $\frac{L}{2}$ . La seconde harmonique vibre à la fréquence  $3\omega_0$  et est associée à une longueur de  $\frac{L}{3}$ . De façon générale, la  $n^{\text{o}}$  harmonique est de fréquence  $(n+1)\omega_0$  (voir par exemple le livre de Schwartz [Sc65]) et correspond à une longueur de corde égale à  $\frac{L}{n+1}$ .

- L'oreille humaine est sensible aux rapports de fréquence et deux notes dont le rapport de fréquences est égal à deux sont dites à l'octave. L'octave et la fréquence  $2\omega_0$  correspond à la première harmonique pour la vibration d'une corde si la fréquence fondamentale est égale à  $\omega_0$ . Par convention, nous appelons *do\** la note de fréquence  $2\omega_0$  :

$$do^* : 2\omega_0.$$

Ensuite, il y a tous les autres « *do* ». Tous ces *do* sont multiples du précédent via une puissance de 2 en termes de fréquence, le *do\** à l'octave, le suivant à deux octaves ( $4\omega_0$ ) etc... ou bien à l'octave plus grave ( $\frac{1}{2}\omega_0$ ), deux octaves ( $\frac{1}{4}\omega_0$ ), etc... Nous retenons que la note de référence de l'octave d'ordre  $k$  a une fréquence  $\mu_k$  définie par

$$\mu_k = 2^k \omega_0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- On étudie ensuite les autres notes et par convention on se place dans l'intervalle  $[\omega_0, 2\omega_0]$ , entre le *do* et le *do\** : le *do* est la première note de l'intervalle  $[\omega_0, 2\omega_0]$  et le *do\** la dernière. On introduit la notation  $\Omega_0$  utile dans la suite :

$$do : \Omega_0 = \omega_0.$$

Dans le système classique qui remonte au moins à Pythagore et nous sert ici de référence, la note suivante est le *sol*. On génère le *sol* grâce à la seconde harmonique, de fréquence  $3\omega_0$ , de la corde dont la fréquence fondamentale est le *do*. On ramène ensuite cette nouvelle note dans l'octave de référence  $[\omega_0, 2\omega_0]$  par division de la fréquence par deux, une transformation du boulanger multiplicative (voir par exemple Arnold et Avez [AA67]). Le *sol* définit la notation  $\Omega_1$ , de fréquence égale  $\frac{3}{2}\omega_0$  :

$$sol : \Omega_1 = \frac{3}{2}\omega_0.$$

## 2) Gammes à deux notes

• Une **gamme** est l'ensemble des notes disponibles pour écrire un morceau de musique, c'est à dire par convention l'ensemble des fréquences  $\nu_j$  utilisables à partir de la fréquence fondamentale  $\omega_0$  jusqu'à la première harmonique  $2\omega_0$  :

$$\omega_0 \leq \nu_j < 2\omega_0.$$

Une gamme contient  $p$  notes si l'indice entier  $j$  prend les valeurs  $j = 0, 1, 2, \dots, p-1$ . On ordonne alors les fréquences  $\nu_j$  en ordre croissant :

$$(1) \quad \omega_0 = \nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_j < \nu_{j+1} < \dots < \nu_{p-1} < 2\omega_0.$$

• Nous proposons dans ce qui suit une structure pour décrire une famille de gammes « naturelles ». Nous commençons avec les trois notes dont nous disposons : le *do*, le *sol* et le *do\**. On fabrique ainsi une gamme « primitive » à deux notes

$$(2) \quad \mathcal{D}_1 = \{do, sol, do^*\}.$$

L'intervalle  $sol/do = \frac{3}{2}$  définit une **quinte juste** et le second intervalle (plus petit)  $do^*/sol = \frac{2}{3/2} = \frac{4}{3}$  une **quarte juste**. Il n'y a aucune raison pour réduire une gamme primitive de deux notes à l'unique choix  $\mathcal{D}_1$  proposé à la relation (2) c'est à dire une quinte suivie d'une quarte. On peut faire aussi le contraire, c'est à dire une quarte suivie d'une quinte. Ce faisant, on définit ainsi à la fois une nouvelle note et une nouvelle gamme. La nouvelle note, le *fa*, de fréquence  $\Omega_{-1}$  est issue de  $\omega_0$  par une quarte juste, ce qui s'écrit par définition :

$$fa : \Omega_{-1} = \frac{4}{3}\omega_0 \approx 1.333333 \omega_0.$$

La seconde gamme primitive correspond donc à la séquence *do, fa, do\** :

$$(3) \quad \mathcal{D}_2 = \{do, fa, do^*\}.$$

• Nous disposons de deux **structures multiplicatives** pour les gammes primitives : la gamme  $\mathcal{D}_1$  avec (dans cet ordre), quinte et quarte et la gamme  $\mathcal{D}_2$  avec une quarte suivie d'une quinte. Mais une gamme, même primitive, doit-elle commencer par la note *do* ? La pratique de la musique montre qu'il n'en est rien. Nous nous livrons donc dans le paragraphe qui suit à la recherche d'une gamme ayant la même « structure » que la gamme  $\mathcal{D}_1$  et qui commence par un *sol*. La structure de la gamme  $\mathcal{D}_1$  est par définition la suite des intervalles multiplicatifs entre les notes de la gamme, ici (quinte, quarte) =  $(\frac{3}{2}, \frac{4}{3})$ . Nous retenons le relation

$$(4) \quad \text{structure multiplicative } (\mathcal{D}_1) = \left(\frac{3}{2}, \frac{4}{3}\right).$$

• Nous fabriquons la gamme  $\mathcal{D}_1$  qui commence par un *sol* en posant  $\nu_0 = \Omega_1$  au lieu de  $\nu_0 = \omega_0$  de la relation (1), ce qui consiste « à changer le *do* en *sol* », ou à changer la fréquence de référence pour la première note de cette gamme. La nouvelle gamme a la même structure multiplicative que la gamme  $\mathcal{D}_1$  et commence par un *sol*. Nous la notons  $\mathcal{D}_1(\Omega_1)$  et elle consiste en la succession suivante de fréquences :

$$(5) \quad \mathcal{D}_1(\Omega_1) = \left\{\Omega_1, \frac{3}{2}\Omega_1, 2\Omega_1\right\}.$$

La note intermédiaire de fréquence  $\frac{3}{2}\Omega_1$  entre le *sol* et son harmonique  $sol^* = 2\Omega_1$  est par définition le *ré\** de fréquence  $\frac{9}{4}\omega_0$ . Comme  $\frac{9}{4}$  n'appartient pas à l'intervalle  $[1, 2]$  mais à l'intervalle  $[2, 4]$ , on ramène le *ré\** dans l'intervalle  $[\omega_0, 2\omega_0]$  en divisant sa fréquence par deux. On définit ainsi le *ré*, de fréquence  $\Omega_2 = \frac{9}{8}\omega_0$  :

$$(6) \quad ré : \Omega_2 = \frac{9}{8}\omega_0 = \frac{3^2}{2^3}\omega_0 = 1.125\omega_0 .$$

La gamme de même structure que  $\mathcal{D}_1$  et qui commence par la note *sol*, soit  $\mathcal{D}_1(\Omega_1)$  s'écrit finalement, compte tenu de (5) et (6) :

$$(7) \quad \mathcal{D}_1(\Omega_1) = \{\Omega_1, 2\Omega_2, 2\Omega_1\} .$$

### 3) Suite infinie des notes

- Nous poursuivons l'idée de changer de fréquence de référence, mais à partir du *ré* au lieu du *sol* lors de l'étude précédente. Compte tenu des relations (4) et (7), la gamme  $\mathcal{D}_1(\Omega_2) = \{\Omega_2, \frac{3}{2}\Omega_2, 2\Omega_2\}$  définit une nouvelle note de fréquence  $\Omega_3 = \frac{3}{2}\Omega_2 = \frac{27}{16}\omega_0$ , qui appartient à l'intervalle  $[\omega_0, 2\omega_0]$  ; c'est le *la*.

$$la : \Omega_3 = \frac{27}{16}\omega_0 = \frac{3^3}{2^4}\omega_0 = 1.6875\omega_0 .$$

- On poursuit maintenant la construction précédente à l'infini. La gamme  $\mathcal{D}_1(\Omega_k)$  a la même structure multiplicative que  $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_1(\Omega_0)$  de relation (4) et commence par la note  $\Omega_k$  : elle est de la forme  $\mathcal{D}_1(\Omega_k) = \{\Omega_k, \frac{3}{2}\Omega_k, 2\Omega_k\}$ . Si  $\frac{3}{2}\Omega_k \leq 2\omega_0$ , on pose  $\Omega_{k+1} = \frac{3}{2}\Omega_k$  et dans le cas contraire où  $2\omega_0 < \frac{3}{2}\Omega_k < 4\omega_0$ , on définit la note  $\Omega_{k+1}$  par la relation  $\Omega_{k+1} = \frac{3}{4}\Omega_k$ . De cette façon, on construit une infinité de notes de fréquence  $\Omega_k$  ( $k$  entier supérieur ou égal à 1) donnée par une expression algébrique de la forme  $3^k\omega_0/2^{l(k)}$ , laquelle appartient par définition à l'intervalle  $[\omega_0, 2\omega_0]$ . Pour créer la note  $\Omega_k$ , on commence donc par construire  $k$  quintes successives à partir du *do* puis par mise à l'octave, on amène cette note dans l'intervalle de référence

$$(8) \quad \Omega_k = \frac{3^k}{2^{l(k)}}\omega_0, \quad \Omega_k \in [\omega_0, 2\omega_0] .$$

Notons bien que l'entier  $l(k)$  est défini par la condition (8). On peut encore écrire  $1 \leq \frac{3^k}{2^{l(k)}} < 2$  ou encore de façon équivalente  $l(k)\log 2 \leq k\log 3 < (l(k)+1)\log 2$ . Donc l'entier  $l(k)$  est la partie entière de  $k\log 3/\log 2$  :

$$(9) \quad l(k) \leq k \frac{\log 3}{\log 2} < l(k) + 1 ; \quad l(k) = E\left(k \frac{\log 3}{\log 2}\right) .$$

Nous pouvons regarder les premières notes ainsi construites au sein du tableau suivant.

numéro de la note	nom de la note	$\Omega_{\text{numéro}}/\omega_0$	valeur approchée
4	<i>mi</i>	$3^4/2^6$	1.265625
5	<i>si</i>	$3^5/2^7$	1.898437
6	<i>fa</i> ♯	$3^6/2^9$	1.423828
7	<i>do</i> ♯	$3^7/2^{11}$	1.067871
8	<i>sol</i> ♯	$3^8/2^{12}$	1.601806
9	<i>ré</i> ♯	$3^9/2^{14}$	1.201355
10	<i>la</i> ♯	$3^{10}/2^{15}$	1.802032
11	<i>mi</i> ♯	$3^{11}/2^{17}$	1.351524
12	<i>si</i> ♯	$3^{12}/2^{19}$	1.013643

On observe que les deux dernières notes sont confondues dans la musique classique occidentale avec le *fa* et le *do* puisque d'une part  $(\Omega_{11}/\omega_0 \approx 1.351524$  alors que  $\Omega_{-1}/\omega_0 \approx 1.333333$  et d'autre part  $\Omega_{12}/\omega_0 \approx 1.013643$  alors que  $\Omega_0/\omega_0 = 1$ .

- La gamme  $\mathcal{D}_1(\Omega_6)$  par exemple est égale à  $\{\Omega_6, 2\Omega_7, 2\Omega_6\} = \{fa\sharp, do\sharp^*, fa\sharp^*\}$  (avec des notations naturelles). De manière générale, on a

$$\mathcal{D}_1(\Omega_k) = \{\Omega_k, (\Omega_{k+1} \text{ ou } 2\Omega_{k+1}), 2\Omega_k\}.$$

Le choix  $\Omega_{k+1}$  comme seconde note de la gamme  $\mathcal{D}_1(\Omega_k)$  a lieu lorsque  $\Omega_{k+1} > \Omega_k$  et le choix  $2\Omega_{k+1}$  correspond au cas de figure  $\Omega_{k+1} < \Omega_k$  et dans ce cas  $2\Omega_{k+1} > 2\omega_0 > \Omega_k$ .

- Mais il manque encore des notes à notre catalogue. Nous repartons de la gamme primitive de deux notes  $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_2(\Omega_0) = \{do, fa, do^*\}$  (relation (3)). On a aussi  $\mathcal{D}_2(\Omega_0) = \{\Omega_0, \Omega_{-1}, 2\Omega_0\}$ . Au lieu de faire commencer la première note de ce type de gamme par un *do*, on peut la faire commencer par un *fa*. On définit pour cela la structure multiplicative de  $\mathcal{D}_2$  à savoir une quarte puis une quinte :

$$\text{structure multiplicative } (\mathcal{D}_2) = \left(\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right).$$

La note qui suit  $\Omega_{-1}$  dans la gamme  $\mathcal{D}_2(\Omega_{-1})$  est  $\Omega_{-2} = \frac{4}{3}\Omega_{-1}$  : c'est le *si* bémol ou *si b* :

$$si\ b : \Omega_{-2} = \frac{16}{9}\omega_0 = \frac{2^4}{3^2}\omega_0 \approx 1.777778\omega_0$$

et

$$\mathcal{D}_2(\Omega_{-1}) = \{fa, si\ b, fa^*\} = \{\Omega_{-1}, \Omega_{-2}, 2\Omega_{-1}\}.$$

- La construction de nouvelles notes entraîne celle de nouvelles gammes et réciproquement les nouvelles gammes  $\mathcal{D}_2(\Omega_{-k})$  permettent d'introduire de nouvelles notes  $\Omega_{-(k+1)}$ . L'algorithme se poursuit avec les quartes comme avec les quintes. La note  $\Omega_{-k}$  ( $k$  entier supérieur ou égal à un) est issue de la note fondamentale *do* par une succession de  $k$  quartes ensuite ramenées dans l'intervalle  $[\omega_0, 2\omega_0[$  à l'aide d'une division par la puissance de 2 qui convient. La note  $\Omega_{-k}$  est de la forme  $2^{-l(-k)}\omega_0/3^k$  ce qui revient à généraliser la relation (8) aux entiers  $k$  négatifs et la relation (9) s'applique encore.

- Les nouvelles notes d'indice négatif sont aussi utiles que celles d'indice positif. Nous présentons les premières dans un tableau.

numéro de la note	nom de la note	$\Omega_{\text{numéro}}/\omega_0$	valeur approchée
-3	<i>mi b</i>	$2^5/3^3$	1.185185
-4	<i>la b</i>	$2^7/3^4$	1.580247
-5	<i>ré b</i>	$2^8/3^5$	1.053498
-6	<i>sol b</i>	$2^{10}/3^6$	1.404664
-7	<i>do b</i>	$2^{12}/3^7$	1.872885
-8	<i>fa b</i>	$2^{13}/3^8$	1.248590

Les deux dernières notes de cette suite, à savoir *do b* et *fa b* sont éliminées classiquement au profit des notes *si* et *mi*. En effet, on a d'une part  $\Omega_{-7}/\omega_0 \approx 1.872885$  alors que  $\Omega_5/\omega_0 \approx 1.898437$  et d'autre part  $\Omega_{-8}/\omega_0 \approx 1.248590$  se confronte à  $\Omega_4/\omega_0 \approx 1.265625$ .

- On remarque que pour  $k \in \{-1, \dots, 5\}$ , on a

$$\Omega_k \sharp = \Omega_{k+7} \quad \text{et} \quad \Omega_k \flat = \Omega_{k-7}.$$

Il est donc naturel de poser ici

$$\Omega_k \sharp\sharp = \Omega_{k+14} \quad \text{et} \quad \Omega_k \flat\flat = \Omega_{k-14} \quad \text{pour} \quad -1 \leq k \leq 5.$$

Ces relations fournissent en pratique 14 nouvelles notes de musique :

numéro de la note	nom de la note	$\Omega_{\text{numéro}}/\omega_0$	valeur approchée
13	<i>fa</i> $\sharp\sharp$	$3^{13}/2^{20}$	1.520465
14	<i>do</i> $\sharp\sharp$	$3^{14}/2^{22}$	1.140349
15	<i>sol</i> $\sharp\sharp$	$3^{15}/2^{23}$	1.710523
16	<i>ré</i> $\sharp\sharp$	$3^{16}/2^{25}$	1.282892
17	<i>la</i> $\sharp\sharp$	$3^{17}/2^{26}$	1.924338
18	<i>mi</i> $\sharp\sharp$	$3^{18}/2^{28}$	1.443254
19	<i>si</i> $\sharp\sharp$	$3^{19}/2^{30}$	1.082440
-9	<i>si</i> $\flat\flat$	$2^{15}/3^9$	1.664787
-10	<i>mi</i> $\flat\flat$	$2^{16}/3^{10}$	1.109858
-11	<i>la</i> $\flat\flat$	$2^{18}/3^{11}$	1.479810
-12	<i>ré</i> $\flat\flat$	$2^{20}/3^{12}$	1.973081
-13	<i>sol</i> $\flat\flat$	$2^{21}/3^{13}$	1.315387
-14	<i>do</i> $\flat\flat$	$2^{23}/3^{14}$	1.753849
-15	<i>fa</i> $\flat\flat$	$2^{24}/3^{15}$	1.169233

- Quand on range les notes  $\Omega_{-15}$  à  $\Omega_{19}$  par fréquences croissantes et non plus par puissances de 3 croissantes, on trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} do < si \sharp < ré \flat < do \sharp < si \sharp\sharp < mi \flat\flat < ré \\ ré < do \sharp\sharp < fa \flat\flat < mi \flat < ré \sharp < fa \flat < mi \\ mi < ré \sharp\sharp < sol \flat\flat < fa \\ fa < mi \sharp < sol \flat < fa \sharp < mi \sharp\sharp < la \flat\flat < sol \\ sol < fa \sharp\sharp < la \flat < sol \sharp < si \flat\flat < la \\ la < sol \sharp\sharp < do \flat\flat < si \flat < la \sharp < do \flat < si \\ si < la \sharp\sharp < ré \flat\flat < do^* . \end{array} \right.$$

#### 4) Gammes à trois notes

- Pour composer une musique très primitive, nous disposons des deux gammes à deux notes  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ . Comme nous avons construit toute la famille de notes  $(\Omega_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ , nous disposons aussi des gammes  $\mathcal{D}_1(\Omega_k)$  et  $\mathcal{D}_2(\Omega_k)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Toutefois, on peut avoir envie de construire des gammes avec plus de deux notes. Nous proposons dans la suite le procédé récursif de « brisure des tons ». Nous introduisons une nouvelle notation pour les gammes à deux notes et nous posons

$$\mathcal{G}_i^1 = \mathcal{D}_i(\Omega_0) \quad \text{pour} \quad i = 1, 2.$$

Les gammes à deux notes forment la première famille des gammes.

- Nous définissons le *ton* des gammes à deux notes et nous le notons  $\theta_1$  ; il s'agit d'une quinte juste, comme proposé au paragraphe 2. Nous avons

$$\theta_1 = \frac{3}{2}.$$

Le demi-ton des gammes à deux notes, noté  $\delta_1$ , est par définition une quarte juste :

$$\delta_1 = \frac{4}{3}.$$

Nous cherchons à former une nouvelle gamme issue d'une gamme à deux notes et telle que le rapport de fréquences de deux notes successives  $\nu_{j+1} / \nu_j$  arbitraires vaille soit un ton  $\theta_2$  de la nouvelle gamme, soit un demi-ton  $\delta_2$  de celle ci :

$$\frac{\nu_{j+1}}{\nu_j} \in \{\theta_2, \delta_2\}.$$

Nous généralisons pour les nouvelles gammes ce qui existe pour la gamme à deux notes  $\mathcal{D}_1$  :

$$\frac{sol}{do}, \frac{do^*}{sol} \in \{\theta_1, \delta_1\}.$$

- Nous brisons multiplicativement le ton  $\theta_1$  à l'aide du demi-ton  $\delta_1$  et formons ainsi un nouveau ton avec le demi-ton précédent :

$$\theta_2 = \delta_1 = \frac{4}{3}$$

et un nouveau demi-ton avec le rapport de fréquences restant, c'est à dire le rapport de l'ancien ton sur le nouveau ton :

$$\delta_2 = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{\theta_1}{\delta_1} = \frac{9}{8} = \frac{3^2}{2^3}.$$

En procédant de cette manière, le ton primitif (une quite juste !) est brisé en un nouveau ton (une quarte juste) et un nouveau demi-ton  $\delta_2$  qu'on appelle classiquement une **seconde**.

- La gamme  $\mathcal{G}_1^1 \equiv \mathcal{D}_1$  donne naissance par brisure de son unique ton à deux gammes  $\mathcal{G}_1^2$  et  $\mathcal{G}_2^2$  selon la façon dont la quinte *sol/do* est découpée en « un demi-ton plus un ton ». Dans le premier cas, on a  $\frac{\nu_1}{\nu_0} = \delta_2 = \frac{9}{8}$ ,  $\frac{\nu_2}{\nu_1} = \theta_2 = \frac{4}{3}$ ,  $\frac{\nu_3}{\nu_2} = \theta_2 = \frac{4}{3}$  ; on vient de créer une gamme à trois notes qui comporte deux tons  $\theta_2$  (une quarte juste) et un demi-ton  $\delta_2$  (une seconde) :

$$\mathcal{G}_1^2 = \{do, ré, sol, do^*\} = \{\Omega_0, \Omega_2, \Omega_1, 2\Omega_0\}.$$

La seconde gamme à trois notes  $\mathcal{G}_2^2$  est issue de la gamme  $\mathcal{G}_1^1$ , ce qui signifie que toutes les notes de la gamme  $\mathcal{G}_2^2$  sont également des notes de la gamme  $\mathcal{G}_1^1$ . On débute cette gamme par un ton :  $\frac{\nu_1}{\nu_0} = \theta_2 = \frac{4}{3}$ , puis on la continue par un demi-ton :  $\frac{\nu_2}{\nu_1} = \delta_2 = \frac{9}{8}$  pour la terminer par un ton :  $\frac{\nu_3}{\nu_2} = \theta_2 = \frac{4}{3}$ . Le dernier ton de l'ancienne gamme devient le demi-ton de la nouvelle. La gamme  $\mathcal{G}_2^2$  est finalement donnée par la suite

$$(10) \quad \mathcal{G}_2^2 = \{do, fa, sol, do^*\} = \{\Omega_0, \Omega_{-1}, \Omega_1, 2\Omega_0\}.$$

- Mais la gamme  $\mathcal{G}_1^2 \equiv \mathcal{D}_2$  (relation (3)) peut elle-aussi servir de point de départ à deux nouvelles gammes à trois notes : on coupe le ton  $\theta_1 = do^*/fa$  en un demi-ton  $\delta_2$  suivi d'un ton  $\theta_2$  ou bien en un ton  $\theta_2$  suivi d'un demi-ton  $\delta_2$ . Dans le premier cas, on obtient

à nouveau la gamme  $\mathcal{G}_2^2$  (exercice laissé au lecteur !) et dans le second, on a  $\frac{\nu_1}{\nu_0} = \theta_2 = \frac{4}{3}$ ,  $\frac{\nu_2}{\nu_1} = \theta_2 = \frac{4}{3}$ ,  $\frac{\nu_2}{\nu_1} = \delta_2 = \frac{9}{8}$ . La note *si* bémol est utile pour fabriquer  $\mathcal{G}_3^2$  :

$$(11) \quad \mathcal{G}_3^2 = \{do, fa, si\flat, do^*\} = \{\Omega_0, \Omega_{-1}, \Omega_{-2}, 2\Omega_0\}.$$

- Nous retenons la structure multiplicative des trois gammes  $\mathcal{G}_i^2$  ( $i = 1, 2, 3$ ) :

$$(12) \quad \begin{cases} \text{structure multiplicative } (\mathcal{G}_1^2) = (\delta_2, \theta_2, \theta_2) = \left(\frac{9}{8}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) \\ \text{structure multiplicative } (\mathcal{G}_2^2) = (\theta_2, \delta_2, \theta_2) = \left(\frac{4}{3}, \frac{9}{8}, \frac{4}{3}\right) \\ \text{structure multiplicative } (\mathcal{G}_3^2) = (\theta_2, \theta_2, \delta_2) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{9}{8}\right). \end{cases}$$

## 5) Gammes à cinq notes

- Nous poursuivons le procédé de brisure de ton pour construire de nouvelles gammes : nous découpons le ton  $\theta_2 = \frac{4}{3}$  en un nouveau ton  $\theta_3$  et un demi-ton  $\delta_3$  de sorte que

$$\theta_3 \delta_3 = \theta_2$$

et a priori si on procède comme pour les gammes à trois notes,  $\theta_3 = \delta_2 = \frac{9}{8}$ . On obtient ainsi un nouveau « demi-ton »  $\delta_3 = \theta_2/\theta_3 = \frac{4/3}{9/8} = \frac{32}{27} = \frac{2^5}{3^3}$ . Mais les valeurs numériques sont cruelles : on trouve  $\theta_3 = \frac{9}{8} = 1.125$  et  $\delta_3 = \frac{32}{27} \approx 1.1852$  qui est supérieur strictement à  $\theta_3$  ! Nous venons de former un ton qui est plus petit que le demi-ton qui lui est associé. On décide donc d'échanger les rôles du ton et du demi-ton et l'on a

$$\delta_3 = \delta_2 = \frac{3^2}{2^3} \quad \text{et} \quad \theta_3 = \frac{\theta_2}{\delta_3} = \frac{\theta_2}{\delta_2} = \frac{2^5}{3^3}.$$

On poursuit ensuite le procédé de brisure des deux tons des gammes  $\mathcal{G}_i^2$  ( $i = 1, 2, 3$ ) pour former la troisième famille de gammes  $\mathcal{G}_j^3$ , à cinq notes.

- Les gammes à cinq notes ont toutes deux tons et trois demi-tons :

$$T_3 = 2, \quad D_3 = 3$$

alors que les gammes à deux notes ont toutes un ton et un demi-ton :

$$T_1 = 1, \quad D_1 = 1$$

et les gammes à trois notes ont deux tons et un demi-ton :

$$T_2 = 2, \quad D_2 = 1.$$

- Il y a quatre façons de briser les deux tons de la gamme  $\mathcal{G}_1^2$  : le premier demi ton  $ré/do = \frac{\nu_1}{\nu_0}$  est toujours un demi-ton  $\delta_3 = \delta_2$ . Si on décide que  $\frac{\nu_2}{\nu_1} = \delta_3$ , on va introduire la note *mi*. De même, si on casse le second ton  $\theta_2$  en commençant par un demi-ton  $\delta_3$ , on utilise le *la* de fréquence  $\Omega_3$ . La gamme  $\mathcal{G}_1^3$  à cinq notes ainsi obtenue s'écrit :

$$\mathcal{G}_1^3 = \{do, ré, mi, sol, la, do^*\} = \{\Omega_0, \Omega_2, \Omega_4, \Omega_1, \Omega_3, 2\Omega_0\}.$$

Si on brise le premier ton  $sol/ré = \theta_2$  de la gamme  $\mathcal{G}_1^2$  en commençant par un ton  $\theta_3$ , on retrouve la relation  $\frac{\nu_2}{\nu_1} = \theta_3 = \frac{32}{27}$ , soit  $\frac{\nu_2}{\omega_0} = \frac{9}{9} \frac{32}{27} = \frac{4}{3} = \frac{\Omega_{-1}}{\omega_0}$ , ce qui introduit à nouveau le *fa*. De même, si on brise le second ton  $do^*/sol$  de la gamme  $\mathcal{G}_1^2$  en commençant par un

ton nouveau, on a  $\frac{\nu_4}{\nu_3} = \theta_3$  donc  $\frac{\nu_4}{\omega_0} = \frac{3}{2} \frac{32}{27} = \frac{8}{9} = \frac{\Omega_{-2}}{\omega_0}$  et on reconnaît le *si♭*. Les trois autres gammes à cinq notes issues de  $\mathcal{G}_1^2$  s'en déduisent aisément :

$$\begin{cases} \mathcal{G}_2^3 = \{do, ré, fa, sol, la, do^*\} = \{\Omega_0, \Omega_2, \Omega_{-1}, \Omega_1, \Omega_3, 2\Omega_0\} \\ \mathcal{G}_3^3 = \{do, ré, fa, sol, si♭, do^*\} = \{\Omega_0, \Omega_2, \Omega_{-1}, \Omega_1, \Omega_{-2}, 2\Omega_0\} \\ \mathcal{G}_4^3 = \{do, ré, mi, sol, si♭, do^*\} = \{\Omega_0, \Omega_2, \Omega_4, \Omega_1, \Omega_{-2}, 2\Omega_0\}. \end{cases}$$

- Combien y a-t-il de gammes à cinq notes ? Autant que de façons de placer arbitrairement les deux ( $= T_3$ ) tons  $\theta_3$  et les trois ( $= D_3$ ) demi-tons  $\delta_3$  parmi cinq objets, puisque

$$\theta_3^{T_3} \delta_3^{D_3} = \left(\frac{2^5}{3^3}\right)^2 \left(\frac{3^2}{2^3}\right)^2 = 2.$$

On compte par conséquent un total de  $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$  gammes à cinq notes qui débutent par la note *do*.

- Examinons les gammes nouvelles issues de la brisure de la gamme  $\mathcal{G}_2^2$  (relation (10)) où les deux tons  $\theta_2$  sont aux extrémités. Si on commence par un demi-ton  $\delta_3$ , on a  $\frac{\nu_1}{\omega_0} = \delta_3 = \frac{9}{8} = \frac{\Omega_2}{\omega_0}$  et on retrouve le *ré* comme première note alors que si on commence par un ton  $\theta_3$ , on obtient  $\frac{\nu_1}{\omega_0} = \theta_3 = \frac{2^5}{3^3} = \frac{\Omega_{-3}}{\omega_0}$  et le *mi♭* doit être utilisé ici. De même si on brise le second ton *do\*/sol* de la gamme  $\mathcal{G}_2^2$  en commençant par un demi-ton  $\delta_3$ , on retrouve le *la*, alors que si on commence par un ton  $\theta_3$ , on doit utiliser le *si♭* : c'est analogue à la brisure du second ton de la gamme  $\mathcal{G}_1^2$ . Nous l'avons déjà vu ! On dispose maintenant de deux nouvelles gammes à cinq notes :

$$\begin{cases} \mathcal{G}_5^3 = \{do, mi♭, fa, sol, la, do^*\} = \{\Omega_0, \Omega_{-3}, \Omega_{-1}, \Omega_1, \Omega_3, 2\Omega_0\} \\ \mathcal{G}_6^3 = \{do, mi♭, fa, sol, si♭, do^*\} = \{\Omega_0, \Omega_{-3}, \Omega_{-1}, \Omega_1, \Omega_{-2}, 2\Omega_0\}. \end{cases}$$

- Nous continuons avec les gammes à cinq notes issues de la gamme  $\mathcal{G}_3^2$ , (relation (11)) qui a ses deux tons  $\theta_2$  au début. Pour briser le premier ton, le processus est analogue à la gamme  $\mathcal{G}_2^2$  et pour briser le second ton *si♭/fa*, on peut commencer par un demi-ton  $\delta_3$  et on obtient un *sol* et par conséquent une gamme déjà construite ( $\mathcal{G}_3^3$  ou  $\mathcal{G}_6^3$ ) ou bien on commence par un ton  $\theta_3$  et on a alors  $\frac{\nu_4}{\nu_3} = \theta_3 = \frac{32}{27}$ , donc  $\frac{\nu_4}{\omega_0} = \frac{4}{3} \frac{32}{27} = \frac{64}{81} = \frac{2^7}{3^4} = \frac{\Omega_{-4}}{\omega_0}$  ; on ne coupera pas au *la♭* cette fois. On a en définitive :

$$\begin{cases} \mathcal{G}_7^3 = \{do, ré, fa, la♭, si♭, do^*\} = \{\Omega_0, \Omega_2, \Omega_{-1}, \Omega_{-4}, \Omega_{-2}, 2\Omega_0\} \\ \mathcal{G}_8^3 = \{do, mi♭, fa, la♭, si♭, do^*\} = \{\Omega_0, \Omega_{-3}, \Omega_{-1}, \Omega_{-4}, \Omega_{-2}, 2\Omega_0\}. \end{cases}$$

- Le décompte des gammes comportant cinq notes n'est pas complet. Les huit gammes déjà vues sont issues des trois gammes à trois notes. Nous détaillons dans le tableau qui suit la succession des deux tons et des trois demi-tons, c'est à dire la structure multiplicative de ces huit gammes.

nom de la gamme	alternance des tons et des demi-tons	valeurs numériques
$\mathcal{G}_1^3$	$\delta_3, \delta_3, \theta_3, \delta_3, \theta_3$	$\frac{9}{8}, \frac{9}{8}, \frac{32}{27}, \frac{9}{8}, \frac{32}{27}$
$\mathcal{G}_2^3$	$\delta_3, \theta_3, \delta_3, \delta_3, \theta_3$	$\frac{9}{8}, \frac{32}{27}, \frac{9}{8}, \frac{9}{8}, \frac{32}{27}$
$\mathcal{G}_3^3$	$\delta_3, \theta_3, \delta_3, \theta_3, \delta_3$	$\frac{9}{8}, \frac{32}{27}, \frac{9}{8}, \frac{32}{27}, \frac{9}{8}$
$\mathcal{G}_4^3$	$\delta_3, \delta_3, \theta_3, \theta_3, \delta_3$	$\frac{9}{8}, \frac{9}{8}, \frac{32}{27}, \frac{32}{27}, \frac{9}{8}$
$\mathcal{G}_5^3$	$\theta_3, \delta_3, \delta_3, \delta_3, \theta_3$	$\frac{32}{27}, \frac{9}{8}, \frac{9}{8}, \frac{9}{8}, \frac{32}{27}$
$\mathcal{G}_6^3$	$\theta_3, \delta_3, \delta_3, \theta_3, \delta_3$	$\frac{32}{27}, \frac{9}{8}, \frac{9}{8}, \frac{32}{27}, \frac{9}{8}$
$\mathcal{G}_7^3$	$\delta_3, \theta_3, \theta_3, \delta_3, \delta_3$	$\frac{9}{8}, \frac{32}{27}, \frac{32}{27}, \frac{9}{8}, \frac{9}{8}$
$\mathcal{G}_8^3$	$\theta_3, \delta_3, \theta_3, \delta_3, \delta_3$	$\frac{32}{27}, \frac{9}{8}, \frac{32}{27}, \frac{9}{8}, \frac{9}{8}$

- Il manque clairement deux gammes qui ne sont pas issues de gammes à trois notes, mais qu'on peut construire simplement en complétant les structures multiplicatives précédentes. On trouve ainsi :

$$(13) \quad \begin{cases} \mathcal{G}_9^3 : (\delta_3, \delta_3, \delta_3, \theta_3, \theta_3) = \left( \frac{32}{27}, \frac{32}{27}, \frac{9}{8}, \frac{9}{8}, \frac{9}{8} \right) \\ \mathcal{G}_{10}^3 : (\theta_3, \theta_3, \delta_3, \delta_3, \delta_3) = \left( \frac{9}{8}, \frac{9}{8}, \frac{9}{8}, \frac{32}{27}, \frac{32}{27} \right). \end{cases}$$

Les successions de notes des deux gammes de structures décrites à la relation (13) qui commencent par un *do* sont faciles à calculer. Nous y rencontrons le *sol* bémol ( $\Omega_{-6}$ ) et le *fa* dièze (ou  $\Omega_6$ ) à nouveau :

$$\begin{cases} \mathcal{G}_9^3 = \{do, mi \flat, sol \flat, la \flat, si \flat, do^*\} = \{\Omega_0, \Omega_{-3}, \Omega_{-6}, \Omega_{-4}, \Omega_{-2}, 2\Omega_0\} \\ \mathcal{G}_{10}^3 = \{do, ré, mi, fa \sharp, la, do^*\} = \{\Omega_0, \Omega_2, \Omega_4, \Omega_6, \Omega_3, 2\Omega_0\}. \end{cases}$$

## 6) Construction récurrente

- Nous proposons maintenant un algorithme très simple pour passer des gammes de génération  $k$  (avec une notation générique  $\mathcal{G}_*^k$ ) aux gammes de génération  $k+1$ . Une gamme  $\mathcal{G}_*^k$  contient  $T_k$  tons et  $D_k$  demi-tons, de valeurs respectives  $\theta_k$  et  $\delta_k$ . L'ensemble des notes construites permettent de recouvrir l'octave de base  $[\omega_0, 2\omega_0]$ , et on en déduit simplement :

$$(14) \quad \theta_k^{T_k} \delta_k^{D_k} = 2.$$

On appelle  $p_k$  le nombre de notes d'une gamme de la  $k^{\text{ième}}$  famille et l'on a :

$$(15) \quad p_k = T_k + D_k.$$

- Notre construction consiste toujours à couper le ton  $\theta_k$  en un nouveau ton  $\theta_{k+1}$  « plus » un nouveau demi-ton  $\delta_{k+1}$  avec l'un des deux morceaux égal au demi-ton  $\delta_k$  :

$$(16) \quad \theta_{k+1} \delta_{k+1} = \theta_k.$$

On choisit de garder comme nouveau ton le demi-ton  $\delta_k$  si  $\frac{\theta_k}{\delta_k} < \delta_k$  ou bien on pose  $\theta_{k+1} = \frac{\theta_k}{\delta_k}$  dans le cas contraire, échappant de ce fait à la suite de Fibonacci (voir par exemple Demazure [De97]) :

$$(17) \quad \theta_{k+1} = \begin{cases} \delta_k & \text{si } \frac{\theta_k}{\delta_k} < \delta_k \\ \frac{\theta_k}{\delta_k} & \text{si } \frac{\theta_k}{\delta_k} > \delta_k \end{cases}$$

Le demi-ton complémentaire  $\delta_{k+1}$  est issu simplement des relations (6.3) et (17) :

$$(18) \quad \delta_{k+1} = \begin{cases} \frac{\theta_k}{\delta_k} & \text{si } \frac{\theta_k}{\delta_k} < \delta_k \\ \delta_k & \text{si } \frac{\theta_k}{\delta_k} > \delta_k \end{cases}$$

- Le nombre  $T_{k+1}$  de nouveaux tons dépend du cas de figure. On a  $T_{k+1} = T_k + D_k$  si les anciens demi-tons  $\delta_k$  deviennent des nouveaux tons  $\theta_{k+1}$  ou alors  $T_{k+1} = T_k$  dans le cas contraire où l'on conserve les demi-tons. De manière analogue, le nombre  $D_{k+1}$  de nouveaux demi-tons vaut  $D_{k+1} = T_k$  dans le premier cas et  $D_{k+1} = T_k + D_k$  dans le second :

$$(19) \quad T_{k+1} = \begin{cases} T_k + D_k & \text{si } \theta_k < \delta_k^2 \\ T_k & \text{si } \theta_k > \delta_k^2 \end{cases}$$

$$(20) \quad D_{k+1} = \begin{cases} T_k & \text{si } \theta_k < \delta_k^2 \\ T_k + D_k & \text{si } \theta_k > \delta_k^2. \end{cases}$$

- La relation (14) s'étend clairement à l'ordre  $k+1$  ainsi que la relation (15) qui prend aussi la forme :

$$(21) \quad p_{k+1} = p_k + T_k.$$

On peut recommencer à l'ordre suivant ! Le nombre  $N_k$  de gammes  $\mathcal{G}_*^k$  avec  $p_k$  notes et  $T_k$  tons est simplement égal au nombre de façons d'agencer  $T_k$  tons et  $D_k$  demi-tons, soit le nombre  $N_k$  de combinaisons :

$$(22) \quad N_k = \binom{p_k}{T_k} = \binom{p_k}{D_k} = \frac{p_k!}{T_k! D_k!}.$$

- Rappelons que la relation de récurrence débute avec les gammes ne comportant que deux notes :

$$(23) \quad p_1 = 2, \quad T_1 = 1, \quad D_1 = 1, \quad \theta_1 = \frac{3}{2} = 1.5, \quad \delta_1 = \frac{4}{3} \approx 1.333333, \quad N_1 = 2,$$

qu'elle se poursuit avec les gammes à trois notes

$$p_2 = 3, \quad T_2 = 2, \quad D_2 = 1, \quad \theta_2 = \frac{4}{3} \approx 1.333333, \quad \delta_2 = \frac{9}{8} = 1.125, \quad N_2 = 3$$

et qu'on vient de mettre en évidence toutes les gammes de troisième génération à cinq notes :

$$p_3 = 5, \quad T_3 = 2, \quad D_3 = 3, \quad \theta_3 = \frac{2^5}{3^3} \approx 1.185185, \quad \delta_3 = \frac{9}{8} = 1.125, \quad N_3 = 10.$$

Les gammes de quatrième génération comporte sept notes :

$$p_4 = 7, \quad T_4 = 5, \quad D_4 = 2, \quad \theta_4 = \frac{3^2}{2^3} = 1.125, \quad \delta_4 = \frac{2^8}{3^5} \approx 1.053498, \quad N_4 = 21$$

et contiennent toutes les gammes de la musique classique occidentale, plus quelques autres moins utilisées. Nous y reviendrons. Notons que la suite de Fibonacci 1, 2, 3, 5, 8, etc. aurait donné huit notes et non sept. Voilà pourquoi la gamme a sept notes ! Nous continuons pour le moment avec les gammes comprenant un nombre de notes plus important :

$$p_5 = 12, \quad T_5 = 5, \quad D_5 = 7, \quad \theta_5 = \frac{3^7}{2^{11}} \approx 1.067871, \quad \delta_5 = \frac{2^8}{3^5} \approx 1.053498, \quad N_5 = 792.$$

Le faible écart entre le ton  $\theta_5 \approx 1.0678711$  et le demi-ton  $\delta_5 \approx 1.053498$  puisque  $\frac{\theta_5}{\delta_5} = \frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1.013643$  pose la question de sa perception et motive la gamme tempérée proposée par Stevin (1548-1620) et Weirckmeister (1645-1706) et utilisée par Bach ; on les confond tous les deux au bénéfice de l'irrationnel racine douzième de 2.

• Nous terminons ce paragraphe en montrant quelques gammes avec de plus en plus de notes et poursuivons l'algorithme (de Pythagore ?) quelque peu. Nous omettons d'expliciter ces diverses gammes, compte tenu de leur nombre important, outil plus élaboré de classification. Nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_6 = 17, \quad T_6 = 12, \quad D_6 = 5, \quad \theta_6 = \frac{2^8}{3^5} \approx 1.053498, \quad \delta_6 = \frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1.013643 \\ p_7 = 29, \quad T_7 = 12, \quad D_7 = 17, \quad \theta_7 = \frac{2^{27}}{3^{17}} \approx 1.039318, \quad \delta_7 = \frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1.013643 \\ p_8 = 41, \quad T_8 = 12, \quad D_8 = 29, \quad \theta_8 = \frac{2^{46}}{3^{29}} \approx 1.025329, \quad \delta_8 = \frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1.013643. \end{array} \right.$$

On retrouve là une famille de gammes de Pythagore à 41 degrés, dite de Janko (1856-1919) (voir par exemple Hellegouarch [He99]) et la famille suivante comporte 53 notes et est connue [He99] avec le nom de Mercator :

$$p_9 = 53, \quad T_9 = 41, \quad D_9 = 12, \quad \theta_9 = \frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1.013643, \quad \delta_9 = \frac{2^{65}}{3^{41}} \approx 1.011529.$$

Pour ces gammes, le ton et le demi-ton diffèrent à nouveau très peu puisque  $\frac{\theta_9}{\delta_9} = \frac{3^{53}}{2^{84}} \approx 1.002090$ , c'est à dire  $|\frac{\theta_9}{\delta_9} - 1| \ll |\theta_9 - 1|$  et  $|\frac{\theta_9}{\delta_9} - 1| \ll |\delta_9 - 1|$ . Il est alors concevable de confondre les tons et les demi-tons pour former une seule gamme de cinquante trois degrés. Si on étudie le comportement des diverses familles de gammes pour  $k$  tendant vers l'infini, on trouve un système dynamique discret qui a des ruptures lorsque la différence entre le nombre irrationnel  $k \frac{\log 3}{\log 2}$  et sa partie entière saute d'une valeur proche de 1 à une valeur proche de 0 (voir par exemple Arnold-Avez [AA67]).

## 7) Quelques propriétés

• L'algorithme décrit au paragraphe précédent (relations (15) à (22)) joint à la « condition initiale » (23) des gammes à deux notes satisfait plusieurs propriétés mathématiques. Nous les énonçons et démontrons dans ce paragraphe.

### Proposition 1. Équilibre harmonique

Le nombre de tons  $T_k$  et le nombre de demi-tons  $D_k$  sont, pour  $k$  entier supérieur ou égal à 1, premiers entre eux :

$$(24) \quad (T_k, D_k) = 1.$$

On a une propriété analogue pour le nombre de tons  $T_k$  et le nombre  $p_k = T_k + D_k$  de notes d'une gamme d'ordre  $k$  :

$$(25) \quad (T_k, p_k) = 1.$$

• La preuve de la Proposition 1 et en particulier celle de la relation (24) s'effectue par récurrence sur l'entier  $k$ , en utilisant l'identité de Bézout (voir par exemple Demazure [De97]) : les entiers  $x$  et  $y$  sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers

$u$  et  $v$  de sorte que  $ux + vy = 1$ . On a dans un premier temps  $T_1 = 1$  et  $D_1 = 1$ , donc ces deux unités sont clairement premières entre elles. Si la relation (24) est vraie jusqu'à l'ordre  $k$ , on a

$$(26) \quad u_k T_k + v_k D_k = 1$$

pour deux entiers  $u_k$  et  $v_k$ . Mais alors,  $T_k$  et  $T_k + D_k$  sont encore premiers entre eux, puisque la relation (26) s'écrit aussi :

$$(27) \quad (u_k - v_k) T_k + v_k (T_k + D_k) = 1.$$

Par suite, compte tenu des relations (19) et (21), le nouveau ton  $T_{k+1}$  et le nouveau demi-ton  $D_{k+1}$  sont toujours premiers entre eux. De plus, compte tenu de la relation (15) et de l'identité de Bézout, la relation (27) exprime exactement la relation (25) et la proposition est établie à l'ordre suivant.  $\square$

### Proposition 2. Factorisabilité de la structure multiplicative

Pour  $k$  entier supérieur à 1 arbitraire, le nombre  $N_k$  de gammes à  $p_k$  notes (voir les relations (15) et (22)) est divisible par  $p_k$  :

$$\exists \tau_k \in \mathbb{N}, N_k = p_k \tau_k.$$

- Pour démontrer la Proposition 2, rappelons d'abord que la relation (22) s'écrit  $N_k = \binom{p_k}{T_k}$ . Donc elle entraîne  $T_k N_k = p_k \binom{p_k - 1}{T_k - 1}$  et l'entier  $p_k$  divise le produit  $T_k N_k$ . Comme  $p_k$  et  $N_k$  sont premiers entre eux d'après la proposition précédente,  $p_k$  divise  $N_k$  et la proposition en résulte.  $\square$

- On introduit maintenant la famille de rationnels  $\xi_k$  déjà utilisée pour définir la famille des notes  $\Omega_k$ . Compte tenu de la relation (8), on a

$$\Omega_k = \xi_k \omega_0, \quad k \in \mathbb{Z}$$

avec le nombre  $\xi_k$  défini par

$$(28) \quad \xi_k = \frac{3^k}{2^{l(k)}}, \quad l(k) \leq k \frac{\log 3}{\log 2} < l(k) + 1.$$

On a alors la propriété suivante :

### Proposition 3. Décalage

Soit  $\mathcal{G}^k$  l'ensemble des gammes  $\mathcal{G}_j^k$  ( $1 \leq j \leq N_k$ ) définies aux relations (15) à (22) du paragraphe 6. Alors il existe  $\varepsilon_k \in \{-1, +1\}$  tel que

$$(29) \quad \theta_k = \xi_{\varepsilon_k D_k}, \quad \delta_k = \xi_{-\varepsilon_k T_k}.$$

- Le ton  $\theta_k$  correspond pour la famille  $\Omega$  de toutes les notes à un décalage de paramètre égal (au signe près) au nombre de demi-tons et le demi-ton  $\delta_k$  à un décalage égal (au signe près) au nombre de tons. On peut ré-écrire de cette façon quelques gammes vues lors des paragraphes précédents :

$$(30) \quad \begin{cases} \mathcal{G}_1^1 &= \{ \Omega_0, \Omega_{0+1}, 2\Omega_{0+1-1} \} \\ \mathcal{G}_3^2 &= \{ \Omega_0, \Omega_{0-1}, \Omega_{0-1-1}, 2\Omega_{0-1-1+2} \} \\ \mathcal{G}_{10}^3 &= \{ \Omega_0, \Omega_{0+2}, \Omega_{0+2+2}, \Omega_{0+2+2+2}, \Omega_{0+2+2+2-3}, 2\Omega_{0+2+2+2-3-3} \} \end{cases}$$

qui montre qu'on a clairement

$$(31) \quad \begin{cases} \theta_1 = \xi_1, & \delta_1 = \xi_{-1} \\ \theta_2 = \xi_{-1}, & \delta_2 = \xi_2 \\ \theta_3 = \xi_2, & \delta_3 = \xi_{-3}. \end{cases}$$

• La Proposition 3 s'établit par récurrence sur  $k$ . Pour  $k = 1$ , la première des relations (31) est claire et montre que les relations (29) ont bien lieu, avec de plus  $\varepsilon_1 = +1$ . Dans le cas général, on a toujours

$$(32) \quad \delta_k < \theta_k$$

et les relations (17) à (21) ont été construites pour maintenir cette propriété. On déduit donc de (32) et de l'hypothèse de récurrence l'inégalité suivante  $\frac{3^{-\varepsilon_k T_k}}{2^{l(-\varepsilon_k T_k)}} < \frac{3^{\varepsilon_k D_k}}{2^{l(\varepsilon_k D_k)}}$ , soit

$$(33) \quad l(\varepsilon_k D_k) - l(-\varepsilon_k T_k) < \varepsilon_k (T_k + D_k) \frac{\log 3}{\log 2}.$$

De plus, compte tenu de la relation (28), on a

$$(34) \quad l(\varepsilon_k D_k) \leq \varepsilon_k D_k \frac{\log 3}{\log 2} < l(\varepsilon_k D_k) + 1$$

et

$$l(-\varepsilon_k T_k) \leq -\varepsilon_k T_k \frac{\log 3}{\log 2} < l(-\varepsilon_k T_k) + 1$$

dont on déduit par changement de signe

$$(35) \quad -l(-\varepsilon_k T_k) - 1 < \varepsilon_k T_k \frac{\log 3}{\log 2} \leq -l(-\varepsilon_k T_k).$$

En additionnant les inégalités de droite des relations (34) et (35), il vient

$$(36) \quad \varepsilon_k (T_k + D_k) \frac{\log 3}{\log 2} < l(\varepsilon_k D_k) - l(-\varepsilon_k T_k) + 1.$$

Les relations (33) et (36) établissent donc, compte tenu de la définition (28), la propriété qui suit :

$$(37) \quad l(\varepsilon_k D_k) - l(-\varepsilon_k T_k) = l(\varepsilon_k (T_k + D_k)), \quad k \geq 1.$$

• Nous supposons dans ce paragraphe que la famille de gammes  $\mathcal{G}^k$  de numéro  $k$  satisfait l'hypothèse  $\theta_k < \delta_k^2$ . On a alors, compte tenu des relations (17) à (21) :  $T_{k+1} = T_k + D_k$ ,  $D_{k+1} = T_k$ ,  $\theta_{k+1} = \delta_k$  et  $\delta_{k+1} = \frac{\theta_k}{\delta_k}$ . Par suite,  $\theta_{k+1} = \xi_{-\varepsilon_k T_k} = \xi_{-\varepsilon_k D_{k+1}}$  et la première relation (29) est vraie à l'ordre  $k + 1$ , en remarquant que

$$(38) \quad \varepsilon_{k+1} = -\varepsilon_k \quad \text{si} \quad \theta_k < \delta_k^2.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \delta_{k+1} &= \frac{\xi_{\varepsilon_k D_k}}{\xi_{-\varepsilon_k T_k}} = \frac{3^{\varepsilon_k D_k}}{2^{l(\varepsilon_k D_k)}} \frac{2^{l(-\varepsilon_k T_k)}}{3^{-\varepsilon_k T_k}} = \frac{3^{\varepsilon_k (T_k + D_k)}}{2^{l(\varepsilon_k D_k) - l(-\varepsilon_k T_k)}} \\ &= \frac{3^{\varepsilon_k (T_k + D_k)}}{2^{l(\varepsilon_k (T_k + D_k))}} \quad \text{compte tenu de la relation (37)} \\ &= \frac{3^{-\varepsilon_{k+1} T_{k+1}}}{2^{l(-\varepsilon_{k+1} T_{k+1})}} = \xi_{-\varepsilon_{k+1} T_{k+1}} \quad \text{au vu de la relation (38)} \end{aligned}$$

et la seconde relation de (29) passe à l'ordre supérieur.

- Dans l'autre cas de figure où l'on a  $\theta_k > \delta_k^2$ , on déduit des relations (17) à (21) :  $T_{k+1} = T_k$ ,  $D_{k+1} = T_k + D_k$ ,  $\theta_{k+1} = \frac{\theta_k}{\delta_k}$  et  $\delta_{k+1} = \delta_k$ . Il résulte alors des relations (29)  $\delta_{k+1} = \delta_k = \xi_{-\varepsilon_k T_k} = \xi_{-\varepsilon_k T_{k+1}}$  et la seconde relation (29) est encore vraie à l'ordre  $k+1$ , avec

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k \quad \text{si} \quad \theta_k > \delta_k^2.$$

On a alors  $\theta_{k+1} = \frac{\xi_{\varepsilon_k D_k}}{\xi_{-\varepsilon_k T_k}} = \xi_{\varepsilon_k (T_k + D_k)}$  compte tenu de (37) et du calcul mené plus haut, donc  $\theta_{k+1} = \xi_{\varepsilon_{k+1} D_{k+1}}$  et la première relation (29) est vraie à l'ordre  $k+1$ . La proposition 3 est établie.  $\square$

## 8) Structure multiplicative et tonalité

- On utilise dans ce paragraphe une gamme  $\gamma$  à  $p$  notes qui commence par un *do*. C'est une suite  $(\nu_j)_{0 \leq j \leq p}$  de la forme

$$(39) \quad \gamma = \{\omega_0 = \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_j < \nu_{j+1}, \dots, \nu_{p-1}, \nu_p = 2\omega_0\}.$$

De plus, le rapport  $\nu_{j+1}/\nu_j$  de deux notes successives est soit un ton  $\theta$  soit un demi-ton  $\delta$  :

$$\frac{\nu_{j+1}}{\nu_j} \in \{\theta, \delta\}, \quad 0 \leq j \leq p-1.$$

Par définition, la **structure multiplicative**  $\mathcal{S}(\gamma)$  de la gamme  $\gamma$  est la suite des rapports de fréquences entre deux notes successives, c'est à dire :

$$\mathcal{S}(\gamma) = \left( \frac{\nu_1}{\nu_0}, \frac{\nu_2}{\nu_1}, \dots, \frac{\nu_{j+1}}{\nu_j}, \dots, \frac{\nu_p}{\nu_{p-1}} \right) \in \{\theta, \delta\}^p.$$

La structure  $\mathcal{S}(\gamma)$  permet de savoir quel est l'agencement précis des tons et des demi-tons de la gamme  $\gamma$ . Si  $T$  est le nombre de tons et  $D$  le nombre de demi-tons de cette gamme, on a vu que

$$p = T + D$$

et que de plus (Proposition 3) qu'il existe  $\varepsilon \in \{-1, +1\}$  tel que

$$\theta = \xi_{\varepsilon D}, \quad \delta = \xi_{-\varepsilon T}$$

ce qui permet de construire les notes  $\nu_j$  de la gamme  $\gamma$  par décalage successif des indices des notes « de base »  $\Omega_k$ , ainsi qu'on l'a vu aux exemples (30). Il est donc naturel de ne pas forcément commencer une gamme de structure  $\mathcal{S}(\gamma)$  par le *do* (ou  $\Omega_0$ ) mais par une note  $\Omega_k$  arbitraire telle qu'introduite au paragraphe 3.

- Par définition, la gamme  $\Gamma(\mathcal{S}(\gamma), \Omega_k)$  de structure multiplicative  $\mathcal{S}(\gamma)$  et de **tonalité**  $\Omega_k$  est la gamme obtenue à partir de la relation (39) en gardant la même structure  $(\mu_1 = \frac{\nu_1}{\nu_0}, \mu_2 = \frac{\nu_2}{\nu_1}, \dots, \mu_j = \frac{\nu_{j+1}}{\nu_j}, \dots, \mu_p = \frac{\nu_p}{\nu_{p-1}})$  que la gamme  $\gamma$  mais en changeant la première note générique  $\omega_0$  pour la note particulière  $\Omega_k$ . On a donc en général

$$(40) \quad \Gamma(\sigma, \Omega_k) = \{ \Omega_k, \mu_1 \Omega_k, \mu_2 \mu_1 \Omega_k, \dots, (\mu_j \mu_{j-1} \dots \mu_1) \Omega_k, \dots, 2 \Omega_k \}$$

si

$$\sigma = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_j, \dots, \mu_p) \in \{\theta, \delta\}^p.$$

Nous avons vu au paragraphe 3 que les structures des deux gammes primitives à deux notes, à savoir

$$\mathcal{S}_1 = \left( \frac{3}{2}, \frac{4}{3} \right), \quad \mathcal{S}_2 = \left( \frac{4}{3}, \frac{3}{2} \right)$$

permettent de construire de proche en proche la suite infinie  $(\Omega_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  de toutes les notes. Afin de s'autoriser une richesse tonale arbitraire, nous ne devons retenir de la construction proposée au paragraphe 6 que la structure multiplicative des différentes gammes. Le paragraphe suivant propose d'y mettre un peu d'ordre, avec une classification en type et mode.

## 9) Type et mode

- On suppose dans ce paragraphe que l'on a fixé le nombre  $p$  de notes (avec  $p$  de la forme  $p = p_k$  pour un certain entier  $k$  que l'on n'écrit pas pour alléger les notations), un nombre de tons  $T$  et un nombre de demi-tons  $D$ , la valeur du ton  $\theta$  et du demi-ton  $\delta$ . On note  $\mathbf{G}^p$  l'ensemble des gammes commençant par la note *do* et comportant exactement  $p$  notes. L'ensemble  $\mathbf{S}^p$  des structures multiplicatives des gammes à  $p$  notes est l'ensemble des  $p$ -uplets à valeurs dans la paire  $\{\theta, \delta\}$  tels que le nombre de tons  $\theta$  est égal à  $T$  et le nombre de demi-tons  $\delta$  est exactement égal à  $D$  :

$$\mathbf{S}^p = \left\{ \begin{array}{l} \{(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p), \mu_j \in \{\theta, \delta\} \quad \forall j \in \{1, \dots, p\}, \\ \#\{j, \mu_j = \theta\} = T, \quad \#\{j, \mu_j = \delta\} = D \end{array} \right\}.$$

Il est facile de voir que, comme  $\mathbf{G}^p$ , l'ensemble  $\mathbf{S}^p$  comporte exactement  $N = \binom{p}{T}$  éléments distincts puisqu'il suffit de choisir la position des  $T$  tons parmi les  $p$  possibles rapports des notes successives.

- On regarde maintenant comment agit la permutation circulaire  $\sigma$  définie par  $1 \mapsto 2$ ,  $2 \mapsto 3$ ,  $\dots$ ,  $p-1 \mapsto p$  et  $p \mapsto 1$  de l'ensemble  $\{1, \dots, p\}$  :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p-1 & p \\ 2 & 3 & \dots & p & 1 \end{pmatrix}$$

sur l'ensemble  $\mathbf{S}^p$  des structures multiplicatives des gammes à  $p$  notes. À partir d'une configuration donnée  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$  appartenant à  $\mathbf{S}^p$ , on pose

$$\sigma(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p) = (\mu_{\sigma(1)}, \mu_{\sigma(2)}, \dots, \mu_{\sigma(p)})$$

qui appartient encore à la famille  $\mathbf{S}^p$ . Deux structures multiplicatives  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$  et  $(\mu'_1, \mu'_2, \dots, \mu'_p)$  sont dites de même **type** si il existe une permutation circulaire  $\sigma$  de l'ensemble  $\{1, \dots, p\}$  et un entier  $i \in \{0, \dots, p-1\}$  de sorte que

$$(41) \quad \mu'_j = \mu_{\sigma^i(j)} \quad \text{pour tout } j \text{ tel que } 1 \leq j \leq p.$$

- L'ensemble  $\mathbf{T}^p$  des types des gammes à  $p$  notes est l'ensemble des structures multiplicatives des gammes à  $p$  notes à une permutation circulaire près. Le nombre de types

$$\#\mathbf{T}^p = \frac{1}{p} \binom{p}{T} ; \quad p = T + D$$

est bien un nombre entier, comme on l'a vu lors de la proposition 2 de la septième partie. Il y a un seul type de gammes à deux notes et un seul type de gammes à trois notes, deux types de gammes à cinq notes, trois types de gammes à sept notes, soixante six types de gammes

à douze notes, etc. D'un point de vue formel, l'ensemble des types  $\mathbf{T}^p$  est le quotient de l'ensemble  $\mathbf{S}^p$  par l'équivalence  $\sim$  suivante :

$$\mu \sim \mu' \text{ si et seulement si } \exists i \in \{0, \dots, p-1\}, \text{ la relation (41) a lieu}$$

et on note  $\mathbf{T}^p = \mathbf{S}^p / \sim$ .

• On suppose dans la suite qu'un représentant  $\tau \in \tilde{\tau}$  de chaque type  $\tilde{\tau} \in \mathbf{T}^p$  a été **choisi**. Il s'agit en pratique d'une structure multiplicative, à une permutation près :

$$(42) \quad \tau = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_j, \dots, \mu_p) \in \tilde{\tau} \in \mathbf{T}^p.$$

Pour les gammes de moins de cinq notes, nous proposons le choix suivant :

$$\begin{cases} \tau^1 &= \left( \frac{3}{2}, \frac{4}{3} \right) & \in \mathbf{S}^2 \\ \tau^2 &= \left( \frac{4}{3}, \frac{9}{8}, \frac{4}{3} \right) & \in \mathbf{S}^3 \\ \tau_1^3 &= \left( \frac{32}{27}, \frac{9}{8}, \frac{9}{8}, \frac{9}{8}, \frac{32}{27} \right) & \in \mathbf{S}^5 \\ \tau_2^3 &= \left( \frac{9}{8}, \frac{32}{27}, \frac{9}{8}, \frac{32}{27}, \frac{9}{8} \right) & \in \mathbf{S}^5 \end{cases}$$

On a alors, compte tenu des relations (4) (12) et de la structure des gammes  $(\mathcal{G}_3^3)$  et  $(\mathcal{G}_5^3)$  :

$$(43) \quad \begin{cases} \mathcal{S}(\mathcal{G}_1^1) = \tau^1 \\ \mathcal{S}(\mathcal{G}_2^2) = \tau^2 \\ \mathcal{S}(\mathcal{G}_5^3) = \tau_1^3 \\ \mathcal{S}(\mathcal{G}_3^3) = \tau_2^3. \end{cases}$$

• Une fois le type fixé et (surtout) une structure multiplicative  $\tau$  qui le représente, on construit simplement une gamme « fondamentale »  $\mathcal{G}_\tau$  en commençant par convention par la note *do*, comme on l'a vu aux relations (43) pour les gammes à deux, trois et cinq notes. Il est alors « naturel » de fabriquer les autres gammes de même type, mais par définition de **mode** différent, en construisant les  $p$  gammes ayant les mêmes notes que  $\mathcal{G}_\tau$ , mais obtenues par action successive de la permutation circulaire  $\sigma$ . Si le type  $\tau$  a un représentant donné en (42), on a (cf. (40)) :

$$\begin{cases} \mathcal{G}_\tau &= \{ \omega_0, \mu_1 \omega_0, \dots, (\mu_1 \cdots \mu_j) \omega_0, \dots, (\mu_1 \cdots \mu_{p-1}) \omega_0, 2 \omega_0 \} \\ \mathcal{G}_\tau &\equiv \{ \Phi_{\tau,0}, \Phi_{\tau,1}, \dots, \Phi_{\tau,j}, \dots, \Phi_{\tau,p-1}, 2 \Omega_0 \} \end{cases}$$

avec

$$\Phi_{\tau,0} = \Omega_0, \quad \Phi_{\tau,j} = \mu_{j-1} \Phi_{\tau,j-1}, \quad 1 \leq j \leq p-1.$$

Pour les quatre exemples précédents, on a

$$\Phi_{\tau^1,1} = \Omega_1 = \textit{sol}$$

$$\Phi_{\tau^2,1} = \Omega_{-1} = \textit{fa}, \quad \Phi_{\tau^2,2} = \Omega_1 = \textit{sol}$$

$$(44) \quad \Phi_{\tau_1^3,1} = \Omega_3 = \textit{mi b}, \quad \Phi_{\tau_1^3,2} = \Omega_{-1} = \textit{fa}, \quad \Phi_{\tau_1^3,3} = \Omega_1 = \textit{sol}, \quad \Phi_{\tau_1^3,4} = \Omega_3 = \textit{la}$$

$$(45) \quad \Phi_{\tau_2^3,1} = \Omega_2 = \textit{ré}, \quad \Phi_{\tau_2^3,2} = \Omega_{-1} = \textit{fa}, \quad \Phi_{\tau_2^3,3} = \Omega_1 = \textit{sol}, \quad \Phi_{\tau_2^3,4} = \Omega_{-2} = \textit{si b}.$$

- Le mode  $i \in \{0, \dots, p-1\}$  du type  $\tau$  est engendré par la gamme de première note  $\Phi_{\tau,i}$  et de structure  $(\mu_{\sigma^i(1)}, \mu_{\sigma^i(2)}, \dots, \mu_{\sigma^i(p)})$  : on fait agir  $i$  fois la permutation circulaire  $\sigma$  de référence. On pose en conséquence :

$$\mathcal{G}_{\tau,i} = \{ \Phi_{\tau,i}, \Phi_{\tau,i+1}, \dots, \Phi_{\tau,p-1}, 2\Omega_0, 2\Phi_{\tau,1}, \dots, 2\Phi_{\tau,i-1} \}$$

et on a par définition même

$$\mathcal{S}(\mathcal{G}_{\tau,i}) = (\mu_{\sigma^i(1)}, \mu_{\sigma^i(2)}, \dots, \mu_{\sigma^i(p)}).$$

- Il peut être utile de nommer le mode, c'est à dire le choix précis de la structure multiplicative à travers le type et l'ordre de la permutation circulaire grâce au nom de la première note  $\Phi_{\tau,i}$ . Pour les gammes à deux notes, on a un seul type et deux modes, le mode de *do* qui débute par une quinte et le mode de *sol* qui commence par une quarte :

$$\begin{cases} \mathcal{G}_{\tau^1,0} = \{ do, sol, do^* \} = \mathcal{D}_1 \\ \mathcal{G}_{\tau^1,1} = \{ sol, do, sol^* \} = \mathcal{D}_2(sol). \end{cases}$$

Pour les gammes à trois notes, on a encore un seul type mais, outre le mode de *do*, on dispose des modes de *fa* et de *sol* :

$$\begin{cases} \mathcal{G}_{\tau^2,0} = \{ do, fa, sol, do^* \} = \mathcal{G}_2^2 \\ \mathcal{G}_{\tau^2,1} = \{ fa, sol, do^*, fa^* \} = \mathcal{G}_2^1(\Omega_{-1}) \\ \mathcal{G}_{\tau^2,2} = \{ sol, do^*, fa^*, sol^* \} = \mathcal{G}_2^3(\Omega_1). \end{cases}$$

Pour les gammes à cinq notes, la classification (type, mode) permet un nouveau rangement des dix gammes vues au paragraphe 5 comme des gammes qui débute par la note *do*. On trouve pour le premier type (relation (44)), les cinq modes de *do*, *mi b*, *fa*, *sol*, *la* :

$$\begin{cases} \mathcal{G}_{\tau^3,0} = \{ do, mi\flat, fa, sol, la, do^* \} = \mathcal{G}_5^3 \\ \mathcal{G}_{\tau^3,1} = \{ mi\flat, fa, sol, la, do^*, mi\flat^* \} = \mathcal{G}_{10}^3(\Omega_{-3}) \\ \mathcal{G}_{\tau^3,2} = \{ fa, sol, la, do^*, mi\flat^*, fa^* \} = \mathcal{G}_{10}^3(\Omega_{-1}) \\ \mathcal{G}_{\tau^3,3} = \{ sol, la, do^*, mi\flat^*, fa^*, sol^* \} = \mathcal{G}_7^3(\Omega_1) \\ \mathcal{G}_{\tau^3,4} = \{ la, do^*, mi\flat^*, fa^*, sol^*, la^* \} = \mathcal{G}_9^3(\Omega_3). \end{cases}$$

Pour le second type (relation (45)), on dispose des cinq modes de *do*, *ré*, *fa*, *sol* et *si b* :

$$\begin{cases} \mathcal{G}_{\tau^3,0} = \{ do, ré, fa, sol, si\flat, do^* \} = \mathcal{G}_3^3 \\ \mathcal{G}_{\tau^3,1} = \{ ré, fa, sol, si\flat, do^*, ré^* \} = \mathcal{G}_8^3(\Omega_2) \\ \mathcal{G}_{\tau^3,2} = \{ fa, sol, si\flat, do^*, ré^*, fa^* \} = \mathcal{G}_2^3(\Omega_{-1}) \\ \mathcal{G}_{\tau^3,3} = \{ sol, si\flat, do^*, ré^*, fa^*, sol^* \} = \mathcal{G}_6^3(\Omega_1) \\ \mathcal{G}_{\tau^3,4} = \{ si\flat, do^*, ré^*, fa^*, sol^*, si\flat^* \} = \mathcal{G}_1^3(\Omega_{-2}). \end{cases}$$

## 10) Gammes à sept notes

- Avec les définitions introduites plus haut, il existe 21 gammes à 7 notes qui commencent par la note *do*, composées de 5 tons  $\theta_4$  où

$$\theta_4 = \xi_2 = \frac{9}{8}$$

et de deux demi-tons  $\delta_4$  avec

$$\delta_4 = \xi_{-5} = \frac{2^8}{3^5}.$$

Nous proposons de les construire dans ce paragraphe, en utilisant la classification par type et mode introduite dans les paragraphes précédents. On dispose de trois types et pour chacun de ces types, de sept modes. Nous posons ici, mais il s'agit d'une convention et d'autres choix équivalents sont possibles,

$$(46) \quad \begin{cases} \tau_1^4 = \{\theta_4, \theta_4, \delta_4, \delta_4, \theta_4, \theta_4, \theta_4\} \\ \tau_2^4 = \{\theta_4, \theta_4, \delta_4, \theta_4, \delta_4, \theta_4, \theta_4\} \\ \tau_3^4 = \{\theta_4, \theta_4, \delta_4, \theta_4, \theta_4, \theta_4, \delta_4\}. \end{cases}$$

Ces trois types sont caractérisés par la « distance » entre les demi-tons : jointifs pour le type  $\tau_1^4$ , distants d'un ton pour le second type  $\tau_2^4$  et distants de deux et trois tons pour le troisième type  $\tau_3^4$ . Cette information est claire au vu des relations (46) si l'on garde en mémoire l'hypothèse d'invariance d'un type par permutation circulaire. Ce troisième type  $\tau_3^4$  est appelé classique dans la suite.

- Pour ces trois types, les gammes fondamentales, c'est à dire en mode de *do* s'écrivent facilement. On a :

$$\begin{cases} \mathcal{G}_{\tau_1^4,0} = \left\{ \begin{array}{l} \{do, ré, mi, fa, sol\flat, la\flat, si\flat, do^*\} \\ \{\Omega_0, \Omega_2, \Omega_4, \Omega_{-1}, \Omega_{-6}, \Omega_{-4}, \Omega_{-2}, 2\Omega_0\} \end{array} \right\} \\ \mathcal{G}_{\tau_2^4,0} = \left\{ \begin{array}{l} \{do, ré, mi, fa, sol, la\flat, si\flat, do^*\} \\ \{\Omega_0, \Omega_2, \Omega_4, \Omega_{-1}, \Omega_1, \Omega_{-4}, \Omega_{-2}, 2\Omega_0\} \end{array} \right\} \\ \mathcal{G}_{\tau_3^4,0} = \left\{ \begin{array}{l} \{do, ré, mi, fa, sol, la, si, do^*\} \\ \{\Omega_0, \Omega_2, \Omega_4, \Omega_{-1}, \Omega_1, \Omega_3, \Omega_5, 2\Omega_0\} \end{array} \right\} \end{cases}$$

ce qui permet (enfin !) de retrouver la gamme la plus « élémentaire ». Pour chacun de ces types, on dispose de sept modes distincts. Leurs noms sont obtenus en lisant les noms des notes des gammes précédentes, choisies pour la classification. Il vient :

$$(47) \quad \begin{cases} \text{Modes de type } \tau_1^4 : do, ré, mi, fa, sol\flat, la\flat, si\flat \\ \text{Modes de type } \tau_2^4 : do, ré, mi, fa, sol, la\flat, si\flat \\ \text{Modes (classiques) de type } \tau_3^4 : do, ré, mi, fa, sol, la, si. \end{cases}$$

- Pour chacun de ces modes, nous exposons simplement la gamme de tonalité *do* qui par définition commence par *do*, ce qui fournit une suite possible des 21 gammes à sept notes. Pour le type  $\tau_1^4$ , la suite des modes est donnée à la première des relations (47). On trouve

alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G}_{\tau_1^4,0}^4 (do) = \left\{ \begin{array}{l} \{ do, ré, mi, fa, sol \flat, la \flat, si \flat, do^* \} \\ \{ \Omega_0, \Omega_2, \Omega_4, \Omega_{-1}, \Omega_{-6}, \Omega_{-4}, \Omega_{-2}, 2\Omega_0 \} \end{array} \right\} \\ \mathcal{G}_2^4 = \mathcal{G}_{\tau_1^4,1}^4 (ré) = \left\{ \begin{array}{l} \{ do, ré, mi \flat, fa \flat, sol \flat, la \flat, si \flat, do^* \} \\ \{ \Omega_0, \Omega_2, \Omega_{-3}, \Omega_{-8}, \Omega_{-6}, \Omega_{-4}, \Omega_{-2}, 2\Omega_0 \} \end{array} \right\} \\ \mathcal{G}_3^4 = \mathcal{G}_{\tau_1^4,2}^4 (mi) = \left\{ \begin{array}{l} \{ do, ré \flat, mi \flat\flat, fa \flat, sol \flat, la \flat, si \flat, do^* \} \\ \{ \Omega_0, \Omega_{-5}, \Omega_{-10}, \Omega_{-8}, \Omega_{-6}, \Omega_{-4}, \Omega_{-2}, 2\Omega_0 \} \end{array} \right\} \\ \mathcal{G}_4^4 = \mathcal{G}_{\tau_1^4,3}^4 (fa) = \left\{ \begin{array}{l} \{ do, ré \flat, mi \flat, fa, sol, la, si, do^* \} \\ \{ \Omega_0, \Omega_{-5}, \Omega_{-3}, \Omega_{-1}, \Omega_1, \Omega_3, \Omega_5, 2\Omega_0 \} \end{array} \right\} \\ \mathcal{G}_5^4 = \mathcal{G}_{\tau_1^4,4}^4 (sol \flat) = \left\{ \begin{array}{l} \{ do, ré, mi, fa \sharp, sol \sharp, la \sharp, si, do^* \} \\ \{ \Omega_0, \Omega_2, \Omega_4, \Omega_6, \Omega_8, \Omega_{10}, \Omega_5, 2\Omega_0 \} \end{array} \right\} \\ \mathcal{G}_6^4 = \mathcal{G}_{\tau_1^4,5}^4 (la \flat) = \left\{ \begin{array}{l} \{ do, ré, mi, fa \sharp, sol \sharp, la, si \flat, do^* \} \\ \{ \Omega_0, \Omega_2, \Omega_4, \Omega_6, \Omega_8, \Omega_3, \Omega_{-2}, 2\Omega_0 \} \end{array} \right\} \\ \mathcal{G}_7^4 = \mathcal{G}_{\tau_1^4,6}^4 (si \flat) = \left\{ \begin{array}{l} \{ do, ré, mi, fa \sharp, sol, la \flat, si \flat, do^* \} \\ \{ \Omega_0, \Omega_2, \Omega_4, \Omega_6, \Omega_1, \Omega_{-4}, \Omega_{-2}, 2\Omega_0 \} \end{array} \right\} . \end{array} \right.$$

- Pour le type  $\tau_2^4$ , la suite des modes est donnée par la seconde relation (47). Nous avons donc en choisissant toujours de faire opérer ces modes sur la tonalité de *do* :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G}_8^4 = \mathcal{G}_{\tau_2^4,0}^4 (do) = \left\{ \begin{array}{l} \{ do, ré, mi, fa, sol, la \flat, si \flat, do^* \} \\ \{ \Omega_0, \Omega_2, \Omega_4, \Omega_{-1}, \Omega_1, \Omega_{-4}, \Omega_{-2}, 2\Omega_0 \} \end{array} \right\} \\ \mathcal{G}_9^4 = \mathcal{G}_{\tau_2^4,1}^4 (ré) = \left\{ \begin{array}{l} \{ do, ré, mi \flat, fa, sol \flat, la \flat, si \flat, do^* \} \\ \{ \Omega_0, \Omega_2, \Omega_{-3}, \Omega_{-1}, \Omega_{-6}, \Omega_{-4}, \Omega_{-2}, 2\Omega_0 \} \end{array} \right\} \\ \mathcal{G}_{10}^4 = \mathcal{G}_{\tau_2^4,2}^4 (mi) = \left\{ \begin{array}{l} \{ do, ré \flat, mi \flat, fa \flat, sol \flat, la \flat, si \flat, do^* \} \\ \{ \Omega_0, \Omega_{-5}, \Omega_{-3}, \Omega_{-8}, \Omega_{-6}, \Omega_{-4}, \Omega_{-2}, 2\Omega_0 \} \end{array} \right\} \\ \mathcal{G}_{11}^4 = \mathcal{G}_{\tau_2^4,3}^4 (fa) = \left\{ \begin{array}{l} \{ do, ré, mi \flat, fa, sol, la, si, do^* \} \\ \{ \Omega_0, \Omega_2, \Omega_{-3}, \Omega_{-1}, \Omega_1, \Omega_3, \Omega_5, 2\Omega_0 \} \end{array} \right\} \\ \mathcal{G}_{12}^4 = \mathcal{G}_{\tau_2^4,4}^4 (sol) = \left\{ \begin{array}{l} \{ do, ré \flat, mi \flat, fa, sol, la, si \flat, do^* \} \\ \{ \Omega_0, \Omega_{-5}, \Omega_{-3}, \Omega_{-1}, \Omega_1, \Omega_3, \Omega_{-2}, 2\Omega_0 \} \end{array} \right\} \\ \mathcal{G}_{13}^4 = \mathcal{G}_{\tau_2^4,5}^4 (la \flat) = \left\{ \begin{array}{l} \{ do, ré, mi, fa \sharp, sol \sharp, la, si, do^* \} \\ \{ \Omega_0, \Omega_2, \Omega_4, \Omega_6, \Omega_8, \Omega_3, \Omega_5, 2\Omega_0 \} \end{array} \right\} \\ \mathcal{G}_{14}^4 = \mathcal{G}_{\tau_2^4,6}^4 (si \flat) = \left\{ \begin{array}{l} \{ do, ré, mi, fa \sharp, sol, la, si \flat, do^* \} \\ \{ \Omega_0, \Omega_2, \Omega_4, \Omega_6, \Omega_1, \Omega_3, \Omega_{-2}, 2\Omega_0 \} \end{array} \right\} . \end{array} \right.$$

- Pour le type classique  $\tau_3^4$ , la suite des modes est donnée par la troisième relation (47), la suite plus courante des notes « sans altération ». Les tonalités de la gamme de *do*

s'écrivent dans ces sept modes de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G}_{15}^4 = \mathcal{G}_{\tau_3^4, 0}^4 (do) = \left\{ \begin{array}{l} \{ do, ré, mi, fa, sol, la, si, do^* \} \\ \{ \Omega_0, \Omega_2, \Omega_4, \Omega_{-1}, \Omega_1, \Omega_3, \Omega_5, 2\Omega_0 \} \end{array} \right\} \\ \mathcal{G}_{16}^4 = \mathcal{G}_{\tau_3^4, 1}^4 (ré) = \left\{ \begin{array}{l} \{ do, ré, mi\flat, fa, sol, la, si\flat, do^* \} \\ \{ \Omega_0, \Omega_2, \Omega_{-3}, \Omega_{-1}, \Omega_1, \Omega_3, \Omega_{-2}, 2\Omega_0 \} \end{array} \right\} \\ \mathcal{G}_{17}^4 = \mathcal{G}_{\tau_3^4, 2}^4 (mi) = \left\{ \begin{array}{l} \{ do, ré\flat, mi\flat, fa, sol, la\flat, si\flat, do^* \} \\ \{ \Omega_0, \Omega_{-5}, \Omega_{-3}, \Omega_{-1}, \Omega_1, \Omega_{-4}, \Omega_{-2}, 2\Omega_0 \} \end{array} \right\} \\ \mathcal{G}_{18}^4 = \mathcal{G}_{\tau_3^4, 3}^4 (fa) = \left\{ \begin{array}{l} \{ do, ré, mi, fa\sharp, sol, la, si, do^* \} \\ \{ \Omega_0, \Omega_2, \Omega_4, \Omega_6, \Omega_1, \Omega_3, \Omega_5, 2\Omega_0 \} \end{array} \right\} \\ \mathcal{G}_{19}^4 = \mathcal{G}_{\tau_3^4, 4}^4 (sol) = \left\{ \begin{array}{l} \{ do, ré, mi, fa, sol, la, si\flat, do^* \} \\ \{ \Omega_0, \Omega_2, \Omega_4, \Omega_{-1}, \Omega_1, \Omega_3, \Omega_{-2}, 2\Omega_0 \} \end{array} \right\} \\ \mathcal{G}_{20}^4 = \mathcal{G}_{\tau_3^4, 5}^4 (la) = \left\{ \begin{array}{l} \{ do, ré, mi\flat, fa, sol, la\flat, si\flat, do^* \} \\ \{ \Omega_0, \Omega_2, \Omega_{-3}, \Omega_{-1}, \Omega_1, \Omega_{-4}, \Omega_{-2}, 2\Omega_0 \} \end{array} \right\} \\ \mathcal{G}_{21}^4 = \mathcal{G}_{\tau_3^4, 6}^4 (si) = \left\{ \begin{array}{l} \{ do, ré\flat, mi\flat, fa, sol\flat, la\flat, si\flat, do^* \} \\ \{ \Omega_0, \Omega_{-5}, \Omega_{-3}, \Omega_{-1}, \Omega_{-6}, \Omega_{-4}, \Omega_{-2}, 2\Omega_0 \} \end{array} \right\} . \end{array} \right.$$

Le mode de *do* de type classique est le mode **majeur** et le mode de *la* le mode **mineur**. Le mode de *ré* a le charme de la musique du moyen-âge. Les modes de *mi* et de *si* commencent la gamme par un demi-ton. Les modes de *fa* et de *sol* ne doivent pas être confondus avec les gammes de “fa majeur” et “sol majeur” et leur *si\flat* et *fa\sharp* à l’armure, au bénéfice de la longueur du mode de *fa* et de l’éclat retrouvé du mode de *sol*.

## 11) Conclusion

- Dans ce travail, nous sommes partis d’une division très simple de l’octave pour former des gammes primitives à deux notes. Nous avons montré ensuite qu’avec cette notion très simple, l’invariance multiplicative des tonalités induit naturellement un nombre de notes a priori infini. Nous avons ensuite proposé une définition récursive d’une famille de gammes qui permet de reconstruire la gamme de Pythagore et ses diverses variantes. Une classification en type et mode utilise la structure cyclique du motif formé par la suite des tons et demi-tons. Nous avons détaillé les gammes à sept notes, en insistant sur le fait que deux structures seulement sur les vingt et un possibles sont utilisées dans la musique classique occidentale.
- Une telle construction théorique semble très classique et a probablement été formalisée en des termes voisins depuis de nombreuses années. De plus, elle peut être enrichie par une algorithmique plus complexe prenant comme base de construction non seulement la seconde harmonique de la vibration d’une corde mais aussi la quatrième au cinquième de la longueur par exemple. Toutefois, il semble utile à ce niveau d’explorer quelles sont les gammes proposées dans ce mémoire qui ont été ou sont effectivement utilisées pour composer de la musique et quelles sont les musiques dont l’écriture ou la tradition utilise des gammes qui relèvent d’un autre type de construction formelle.

## 12) Remerciements

Sans les remarques de Stéphane Dubois, Jean-François Gonzales, Maurice Rosset et Michel Rosset, ce texte n'existerait pas sous cette forme. Qu'ils soient ici remerciés pour leur aide.

## Références bibliographiques

- [AA67] V. Arnold, A. Avez. *Problèmes Ergodiques de la Mécanique Classique*, Gauthier-Villars, Paris, 1967.
- [De97] M. Demazure. *Cours d'algèbre ; primalité, divisibilité, codes*, Nouvelle bibliothèque mathématique, Cassini, Paris, 1997.
- [He99] Y. Hellegouarch. Gammes naturelles 1, *La gazette des mathématiciens*, n° 81, pages 25-39, juillet 1999.
- [Sc65] L. Schwartz. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann, Paris, 1965 .