



**HAL**  
open science

## Vaporization of an equivalent pastille

Roger Prud'homme, Kwassi Anani

► **To cite this version:**

Roger Prud'homme, Kwassi Anani. Vaporization of an equivalent pastille. *Thermodynamique des interfaces et mécanique des fluides*, 2018, 2 (1), 10.21494/ISTE.OP.2018.0240 . hal-03968745

**HAL Id: hal-03968745**

**<https://cnrs.hal.science/hal-03968745v1>**

Submitted on 1 Feb 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## EVAPORATION D'UNE PASTILLE EQUIVALENTE

### VAPORIZATION OF AN EQUIVALENT PASTILLE

Roger Prud'homme<sup>1</sup> et Kwassi Anani<sup>2</sup>

**Résumé :** On examine la réponse dynamique d'une goutte en évaporation en forme de pastille sous l'effet de petites oscillations acoustiques. La pastille est alimentée de façon continue avec un coefficient d'échange thermique  $h$  et il est tenu compte des effets de la convection de la chaleur et de la conduction sur le facteur de réponse en fréquence du système et sur le champ thermique dans la gouttelette. L'effet du coefficient d'échange thermique  $h$  est étudié.

**Mots clés :** pastille, évaporation, oscillations harmoniques, facteur de réponse, perturbations de température

**Abstract:** The dynamic response of a drop-shaped evaporative drop under the effect of small acoustic oscillations is examined. The pellet is fed continuously with a heat exchange coefficient  $h$  and the effects of convection of heat and conduction on the frequency response factor of the system and on the thermal field in the droplet are taken into account. The effect of the heat exchange coefficient  $h$  is studied.

**Key words :** pastille, evaporation, harmonic oscillations, response factor, temperature perturbation

#### Liste des symboles

<i>Symbole</i>	<i>Signification</i>	<i>Symbole</i>	<i>Signification</i>
$A, B$	Coefficients thermodynamiques	$r$	Rayon
$c$	Chambre de combustion	$R$	Paramètre
$f, \bar{f}$	Fonction, sa valeur moyenne	$\bar{r}_s$	Rayon moyen de la goutte
$\Delta f, f'$	Perturbation absolue, relative $\Delta f / \bar{f}$	$s$	Valeur propre caractéristique
$\hat{f}$	$f' = \hat{f} \exp(i\omega t)$	$S$	Surface d'évaporation ; aire de base
$G(\xi)$	Fonction de distribution	$t$	Temps ; paramètre
$H, h$	Coefficient d'échange thermique	$T$	Température
$k$	Conductivité thermique	$u$	Pulsation acoustique réduite
$L, l$	Phase liquide	$v$	Vitesse
$\ell$	Chaleur latente d'évaporation	$V$	Volume
$m, n$	Exposants dans la fonction $G$	$x$	Coordonnée axiale
$M$	Masse de la goutte	$Z$	Fonction de transfert
$\dot{M}$	Débit d'évaporation instantané	$\alpha, \mu$	Coefficients thermodynamiques
$\bar{M}$	Débit d'évaporation moyen	$\varepsilon$	1 si convection ; 0 sans convection
$N$	Facteur de réponse	$\kappa$	Diffusivité thermique
$p$	Pression	$\theta$	Rapport $\bar{\tau}_v / \bar{\tau}_T$ (inverse de $Pe_L$ )
$Pe$	Nombre de Péclet	$\tau$	Temps réduit $\tau = t / \bar{\tau}_T$
$p, q$	Paramètres physiques	$\bar{\tau}_T$	Temps caractéristique thermique
$Q$	Flux de chaleur instantané	$\bar{\tau}_v$	Temps de vie (ou de séjour) moyen
$\Delta Q_L$	Perturbation de $Q_L$	$\omega, \bar{\tau}_\omega$	Pulsation, période acoustique
		$\xi$	Coordonnée axiale réduite $\xi = x / \bar{x}_s$

<sup>1</sup> Sorbonne Université, CNRS, Institut Jean Le Rond d'Alembert, UMR 7190, F-75005 Paris, France – e-mail : roger.prud\_homme@upmc.fr

<sup>2</sup> Université de Lomé, Faculty of Sciences, Department of Mathematics, 02 BP 1515, Lomé, Togo – e-mail : kanani@univ-lome.tg

## 1. Introduction

On examine la réponse dynamique d'une goutte en évaporation en forme de pastille (un petit cylindre de liquide appelé "pastille", Figure 1) sous l'effet de petites oscillations acoustiques. Dans ce type d'études inspirées par le modèle de Heidmann<sup>i</sup> pour les gouttes sphériques<sup>ii</sup>, la pastille est alimentée de façon continue – adiabatique ou isotherme – et il est tenu compte des effets de la convection de la chaleur et de la conduction sur le facteur de réponse en fréquence du système et sur le champ thermique dans la gouttelette. Dans le présent travail l'alimentation de la pastille se fait avec un coefficient d'échange thermique et n'est plus limité aux cas limites adiabatique et isotherme.

La pastille équivalente a été introduite dans une modélisation simplifiée<sup>iii</sup> des instabilités HF de la combustion de gouttes. Il s'agit en effet de remplacer la résolution d'un problème instationnaire à symétrie sphérique de variables  $r$  et  $t$  par un problème 1D instationnaire à variable  $x$  et  $t$ .

L'avantage est que les équations aux petites perturbations de la pastille soumise à un champ acoustique sont linéaires à coefficients constants et présentent donc des solutions analytiques.

Comparée à la goutte sphérique de diamètre moyen  $2\bar{r}_s$ , une pastille équivalente a le même volume et s'évapore uniquement sur ses surfaces de base comme le montre la figure 1.

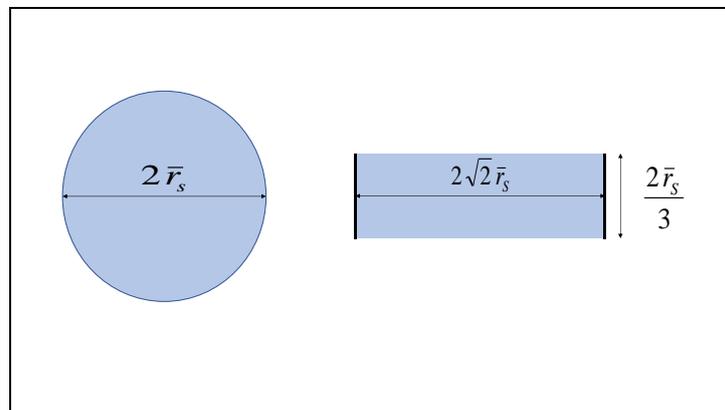


Figure 1. Configuration géométrique d'une pastille équivalente à une sphère de diamètre  $2\bar{r}_s$ . La paroi latérale du cylindre est rigide, imperméable et adiabatique, alors que la goutte sphérique échange sur toute sa surface.

Pour faciliter la mise en équation, nous choisissons de considérer la pastille équivalente de la figure 2 adaptée de l'article de Anani *et al*<sup>iii</sup>.

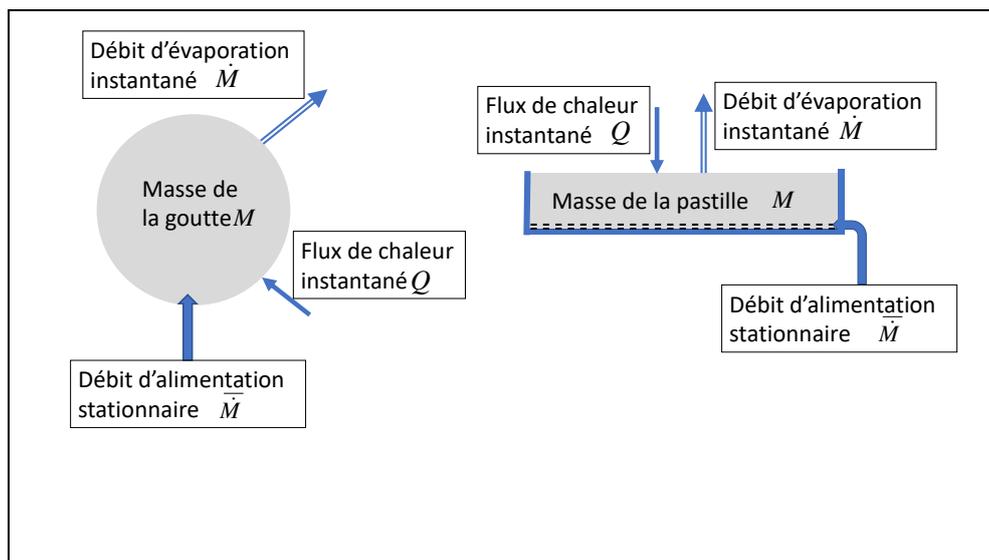


Figure 2. Goutte de rayon  $\bar{r}_s$  alimentée en liquide avec un débit  $\bar{M}$  et pastille équivalente. L'alimentation se fait sous le fond de la pastille liquide à travers une plaque poreuse cylindrique de même diamètre que la pastille.

Nous porterons notre attention sur les conditions d'alimentation de la goutte en forme de pastille. Le débit masse injecté est toujours le débit moyen d'évaporation  $\bar{M}$ , mais les conditions thermiques peuvent être différentes. Nous les caractérisons par un simple coefficient d'échange  $H$ . Jusqu'à présent seuls ont été étudiées l'injection adiabatique ( $H = 0$ ) et l'injection isotherme ( $H = \infty$ ).

Pour la phase gazeuse, nous ferons les mêmes hypothèses que dans les travaux précédents : mélange constitué de la vapeur de la goutte  $F$  et du gaz brûlé  $A$ , sachant que la combustion complète a lieu loin de la goutte dans la chambre de combustion (indice  $c$ ). L'état stabilisé de référence est celui où les grandeurs  $f$  ont la valeur locale  $\bar{f}$ , alors que dans l'état perturbé de manière harmonique par une onde acoustique stationnaire,  $f = \bar{f} + \Delta f$ ,  $f' = \Delta f / \bar{f}$ ,  $|\Delta f / \bar{f}| \ll 1$ , et  $f'(\mathbf{x}, t) = \hat{f}(\mathbf{x}) e^{i\omega t}$ . On suppose la goutte positionnée en un ventre de pression (qui est aussi un nœud de vitesse) d'amplitude maximale  $\hat{p}_c$ . On montre que l'évolution est gouvernée, au niveau de la surface de la goutte par les deux équations :

$$\hat{M} = \alpha \frac{i\omega}{1+i\omega} (\bar{b}\hat{T}_s - \hat{p}_c), \quad \Delta\hat{Q}_L = \bar{M} \bar{\ell} (\bar{a} \hat{p}_c - \mu \hat{T}_s) \quad [1]$$

Dans le système [1],  $\hat{M}, \hat{Q}_L, T_s, p_c, \ell$  sont respectivement le débit masse d'évaporation, le flux de chaleur pénétrant dans la goutte (n'ayant pas servi à l'évaporation), la température de surface, la pression de chambre et la chaleur latente d'évaporation. Les coefficients intervenant dans ces équations dépendent des valeurs des quantités thermodynamiques et chimiques de référence du mélange non perturbé dans la chambre et au niveau de la surface d'évaporation. On trouve leurs expressions dans les articles cités et dans l'annexe A4.3 de l'ouvrage de Prud'homme<sup>vi</sup>. Les équations du système [1] seront couplées à celle de la phase liquide lors de la résolution finale.

## 2. Equations du problème

La phase liquide est supposée incompressible et non dilatable. Ses coefficients thermodynamiques sont supposés constants.

Les **notations** sont les suivantes :

- Masse moyenne de la goutte cylindrique  $\bar{M} = S \rho_L \bar{x}_s$  (avec  $\bar{x}_s$ , épaisseur moyenne).
- Débit masse moyen d'alimentation (ou d'évaporation)  $\bar{M} = S \rho_L v_L$ .
- Temps de séjour moyen (ou durée de vie) du liquide  $\bar{\tau}_v = \bar{M} / \dot{M} = \bar{x}_s / v_L$ .
- Temps caractéristique de conduction thermique  $\tilde{\tau}_T = \bar{x}_s^2 / \kappa_L$  (avec  $\kappa_L = k_L / \rho_L c_L$ ).
- Nombre de Péclet dans le liquide  $Pe_L = \tilde{\tau}_T / \bar{\tau}_v$  (son inverse  $\theta$  est utilisé dans certains calculs)

Les **équations de base** de la phase liquide sont :

- Bilan de masse de la pastille :  $dM/dt = \dot{M} - M$ .
- Bilan local d'énergie interne :  $\partial T / \partial t + v_L \partial T / \partial x - \kappa_L \partial^2 T / \partial x^2 = 0$

Les **conditions limites** s'écrivent :

- En  $x = x_s$  (surface libre)  $T_l(x_s, t) = \bar{T}_s(t)$ ,  $S k_L \partial T_l / \partial x|_{x_s} = \dot{Q}_L$ .
- En  $x = 0$  (au fond du cylindre où a lieu l'alimentation)  $\partial T_l / \partial x|_0 = H(T_l - \bar{T}_s)$ . Pour une alimentation adiabatique  $H = 0$  et si l'alimentation est isotherme  $H = \infty$ .

### 3. Analyse linéaire de la phase liquide

#### 3.1. La fonction $G(u, Pe_L)$

On pose, comme il a été indiqué dans l'introduction :  $f = \bar{f} + \Delta f$  et  $f' = \Delta f / \bar{f}$ ,  $|\Delta f / \bar{f}| \ll 1$ .

L'équation de l'énergie devient :  $\partial T' / \partial t + v_L \partial T' / \partial x - \kappa_L \partial^2 T' / \partial x^2 = 0$  et la condition au niveau de la surface libre s'écrit :  $\pi \bar{r}_c^2 k_L \partial T'_l / \partial x|_{\bar{x}_s} = \Delta Q_L$  avec  $\bar{r}_c = 2 \bar{r}_s$ .

En posant  $f'(x, t) = \hat{f}(x) e^{i\omega t}$ , on obtient :  $i\omega + \frac{s x_s}{\tau_v} - \frac{(s x_s)^2}{\tilde{\tau}_T} = 0$ , soit encore :

$$(s x_s)^2 - \varepsilon Pe_L (s x_s) - i Pe_L u / 3 = 0$$

avec  $u = 3\omega \tilde{\tau}_T$ ,  $\varepsilon = 1$  en présence de convection et  $\varepsilon = 0$  en négligeant la convection. Cette équation caractéristique a deux racines  $s^+$  et  $s^-$ . On exprime alors la perturbation de température avec les quantités :  $m = s^+ \bar{x}_s$ ,  $n = s^- \bar{x}_s$ ,  $\xi = x / \bar{x}_s$ ,  $h = \bar{x}_s H$  :

$$\hat{T}_l(\xi) = \hat{T}_s \frac{e^{m\xi} / (m+h) - e^{n\xi} / (n+h)}{e^m / (m+h) - e^n / (n+h)} \quad [2]$$

La condition à la surface libre s'écrit  $\Delta \hat{Q}_L = S k_L \bar{T}_s \partial \hat{T}_l / \partial x|_{\bar{x}_s} = (S k_L \bar{T}_s / \bar{x}_s) G(u, Pe_L)$  et l'on a :

$$G(u, Pe_L) = \frac{\frac{m}{m+h} e^m - \frac{n}{n+h} e^n}{\frac{1}{m+h} e^m - \frac{1}{n+h} e^n} \quad [3]$$

#### 3.2. Résolution

Les coefficients  $m$  et  $n$  sont reliés aux quantités  $\varepsilon$ ,  $u$ ,  $\theta$  par l'enchaînement suivant :

$$t = -\frac{3\varepsilon Pe_L}{4u} + \sqrt{1 + \left(\frac{3\varepsilon Pe_L}{4u}\right)^2}, \quad R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon Pe_L^2}{4}\right)^2 + \left(\frac{u Pe_L}{3}\right)^2} \quad [4]$$

$$m = \frac{\varepsilon Pe_L}{2} + \sqrt{R} \frac{1+it}{\sqrt{1+t^2}}, \quad n = \frac{\varepsilon Pe_L}{2} - \sqrt{R} \frac{1+it}{\sqrt{1+t^2}}$$

On déduit :

$$\hat{T}_s = \frac{1}{b} \left( 1 + \frac{1+iu}{iu} Z \right) \hat{p}_c, \quad \text{avec la fonction de transfert complexe } Z :$$

$$Z = \frac{iu}{1+iu} \frac{A - 3\theta G(u, Pe_L)}{B + 3\theta G(u, Pe_L)} \quad [5]$$

Rappelons que le facteur de réponse  $N$  est défini à partir de :

$$N = \frac{\iint_{V,t} q'(V,t) p'(V,t) dt dV}{\iint_{V,t} (p'(V,t))^2 dt dV} \quad [6]$$

Où  $p'$  est la perturbation incidente (la perturbation de pression de chambre  $p'_c$ ) et  $q'$  la réponse du système (ici la perturbation de débit de la goutte  $\dot{M}'$ ) à cette perturbation (Critère de Rayleigh<sup>iv</sup>).

Le facteur de réponse réduit est alors égal à la partie réelle de  $Z$  :

$$\frac{N}{\alpha} = \Re(Z) \quad [7]$$

En définissant la perturbation de température du liquide dépendant du temps par :  $\hat{T}_{l\text{réd}} = \frac{\bar{b}}{\hat{p}_c}$ , on obtient :

$$\hat{T}_{l\text{réd}} = \frac{A+B}{B+3\theta G} \frac{e^{m\xi}/(m+h) - e^{n\xi}/(n+h)}{e^m/(m+h) - e^n/(n+h)} \quad [8]$$

Et la perturbation thermique réelle à l'intérieur de la pastille s'écrit :

$$T'_{l\text{réd}} = \Re\left(e^{\frac{i u \tau}{3}} \hat{T}_{l\text{réd}}\right) \Re\left(\frac{A+B}{B+3\theta G} e^{\frac{i u \tau}{3}} \frac{e^{m\xi}/(m+h) - e^{n\xi}/(n+h)}{e^m/(m+h) - e^n/(n+h)}\right) \quad [9]$$

### 3.3. Profondeur de pénétration thermique

Par un développement à l'ordre 1 en  $\Delta\xi$ , on trouve<sup>3</sup> :

$$T'_i \propto 1 + \frac{\frac{m}{m+h} e^m - \frac{n}{n+h} e^n}{\frac{1}{m+h} e^m - \frac{1}{n+h} e^n} \Delta\xi N/\alpha \quad [10]$$

La courbe des variations de température coupe l'axe des  $\xi$  pour :

$$|\Delta\xi| \approx \left| \frac{\frac{1}{m+h} e^m - \frac{1}{n+h} e^n}{\frac{m}{m+h} e^m - \frac{n}{n+h} e^n} \right| = \left| \frac{1}{G} \right| \quad [11]$$

et donne une évaluation de la profondeur de pénétration de l'onde acoustique dans la goutte lorsque cette quantité est faible.

<sup>3</sup> Ce développement limité n'a de valeur que pour les faibles profondeurs de pénétration  $\Delta\xi$ .

#### 4. Quelques résultats

	Sans convection thermique	Avec convection thermique
Fond adiabatique	$\varepsilon = 0, h = 0$	$\varepsilon = 1, h = 0$
Coefficient d'échange	$\varepsilon = 0, h > 0$	$\varepsilon = 0, h > 0$
Fond isotherme	$\varepsilon = 0, h = \infty$	$\varepsilon = 1, h = \infty$

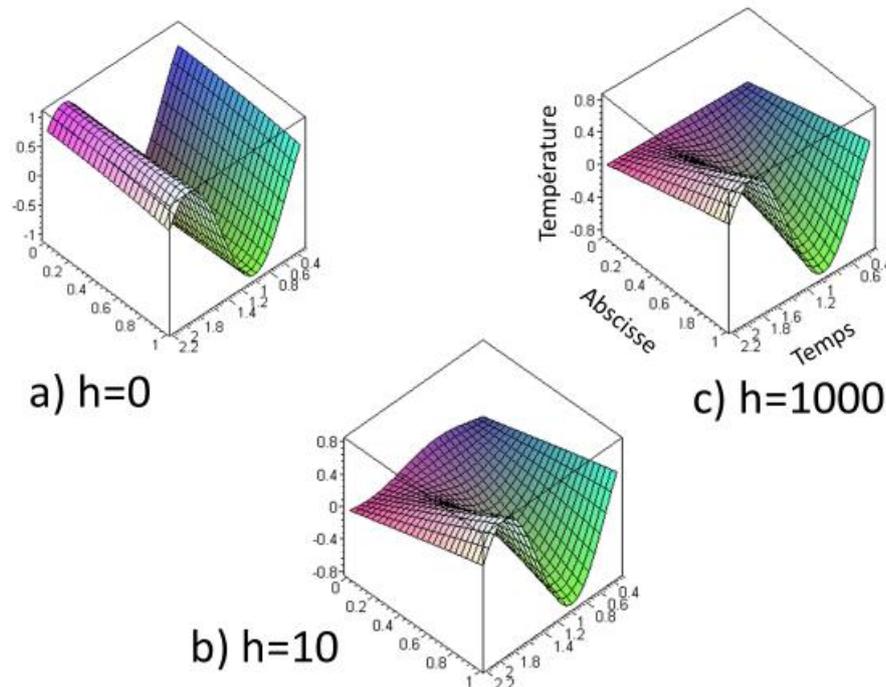
**Tableau 1.** Les six types de configuration en présence d'un coefficient d'échange au fond d'alimentation.

Le tableau1 donne les différentes configurations rendues possibles avec notre modélisation.

Les résultats obtenus pour  $h = 0$  et  $h = \infty$  ont été analysés par Anani<sup>9</sup>. Nous allons examiner les influences de coefficients d'échange de valeurs finies non nulles sur les courbes du facteur de réponse réduit  $N/\alpha$  et sur les profils de perturbations thermiques réduits  $T'_{1\text{réd}}$  à l'intérieur de la pastille.

##### 4.1. Perturbations thermiques

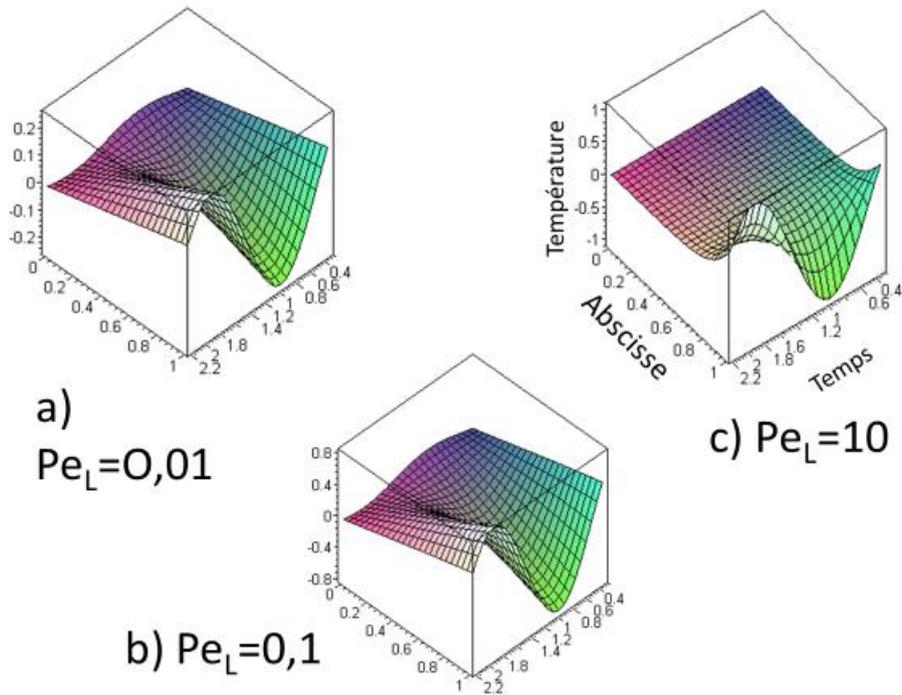
Les deux paramètres ayant une influence sur la conduction de la chaleur sont le nombre de Péclet  $Pe_L$  entre le haut et le bas de la pastille, et le coefficient d'échange  $h$  au bas de la pastille au niveau où pénètre le liquide d'alimentation qui est à la température  $\bar{T}_S$ . On vérifie bien que  $Pe_L$  contrôle la pénétration de la perturbation thermique à partir de la surface, alors que  $h$  a une action décisive au fond.



**Figure 3.** Influence du coefficient d'échange ( $h=0 ; 10 ; 1000$ ) pour des valeurs identiques des autres paramètres  $\varepsilon = 1, Pe_L = 0,1(\theta = 10), u = 10, A = 10, B = 100$ . Les axes correspondent à des coordonnées réduites : température  $T'_{1\text{réd}}$  (équation 9), abscisse  $\xi = x/x_S$ , temps  $\tau = t/\tilde{t}_T$ .

On constate sur la figure 3, à nombre de Péclet égal dans le corps du liquide de la pastille, la forte influence du coefficient d'échange thermique  $h$  au fond de la pastille en  $\xi = 0$ . Lorsque  $h=0$ , le fond est adiabatique et l'on voit que le profil thermique en fonction du temps observé à la surface de la pastille en  $\xi = 1$  se reproduit

intégralement au fond du fait que le transfert thermique dans le liquide le permet, vu la valeur nombre de Péclet. Au contraire le fond isotherme impose la température du liquide d'alimentation et  $T'_{l\text{réd}} = 0$ .



**Figure 4.** Influence du nombre de Péclet (inverse de  $\theta$ ) ( $Pe=0,01 ; 0,1 ; 10$ ) pour des valeurs identiques des autres paramètres  $\varepsilon = 1, h = 10, u = 10, A = 10, B = 100$  Les axes correspondent à des coordonnées réduites : température  $T'_{l\text{réd}}$  (équation 9), abscisse  $\xi = x/x_s$ , temps  $\tau = t/\tilde{\tau}_T$ .

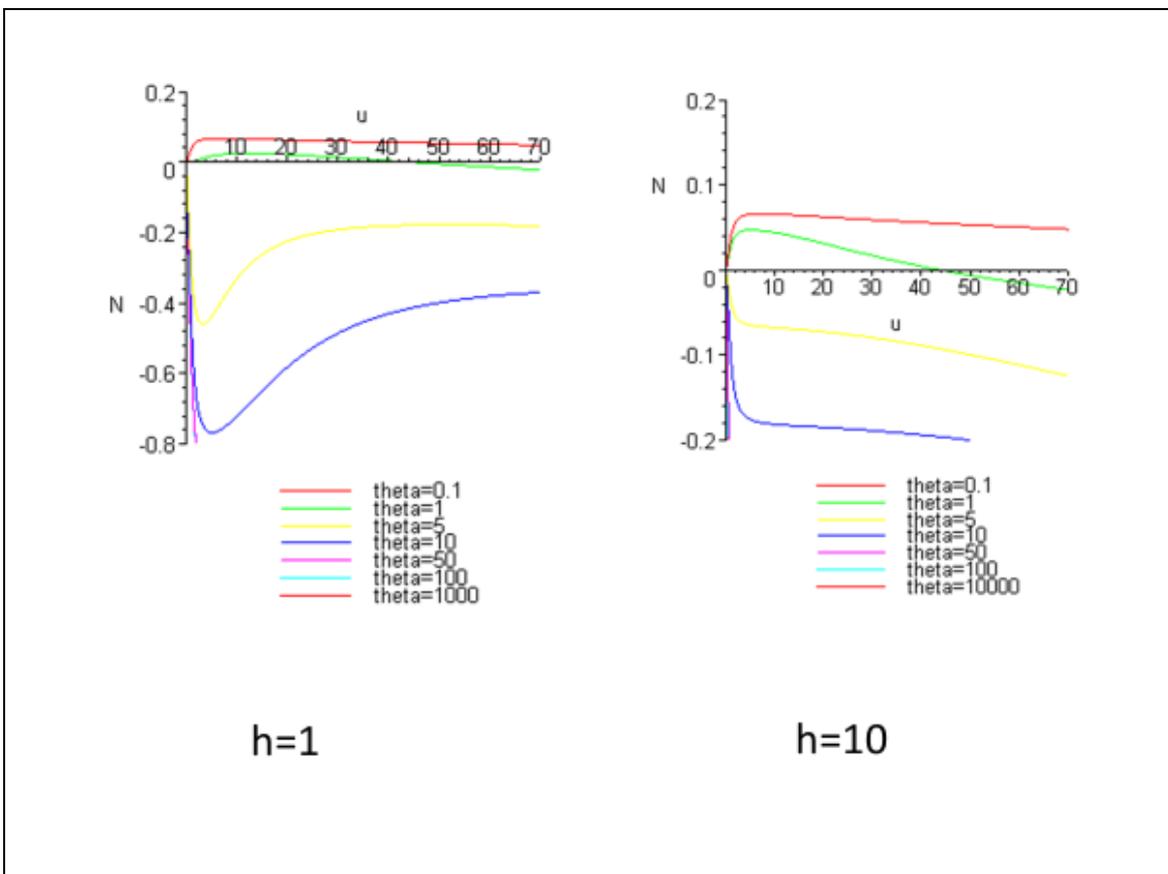
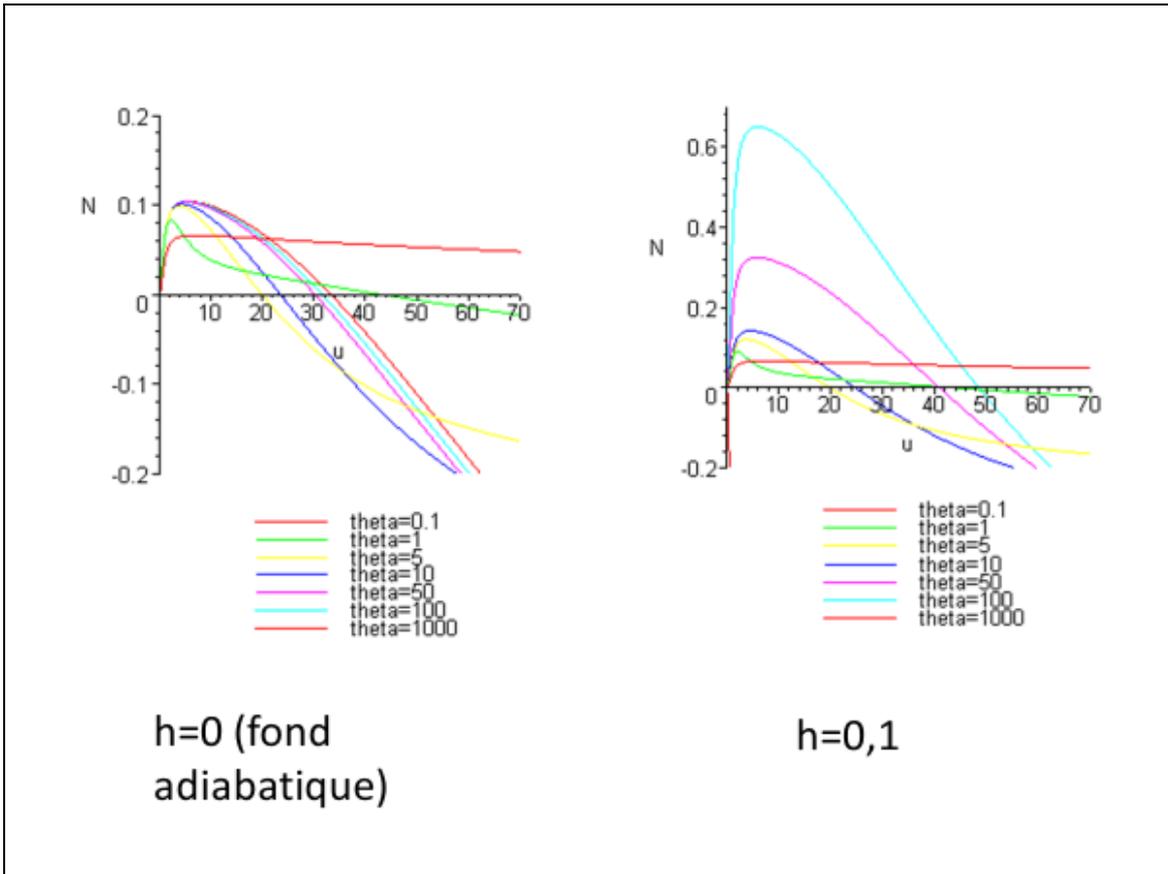
Sur la figure 4, on remarque l'influence du nombre de Péclet  $Pe_L = \tilde{\tau}_T/\bar{\tau}_v$  du liquide de la pastille. Pour  $Pe_L$  relativement grand c'est la température d'alimentation  $\bar{T}_S$  qui s'impose par convection dans 80% de l'épaisseur. Pour des valeurs plus petites de  $Pe_L$ , la température de la surface de la pastille pénètre mieux l'intérieur de la pastille, sans atteindre la situation de la figure 3a, vu que le coefficient d'échange  $h$  n'est pas nul cette fois.

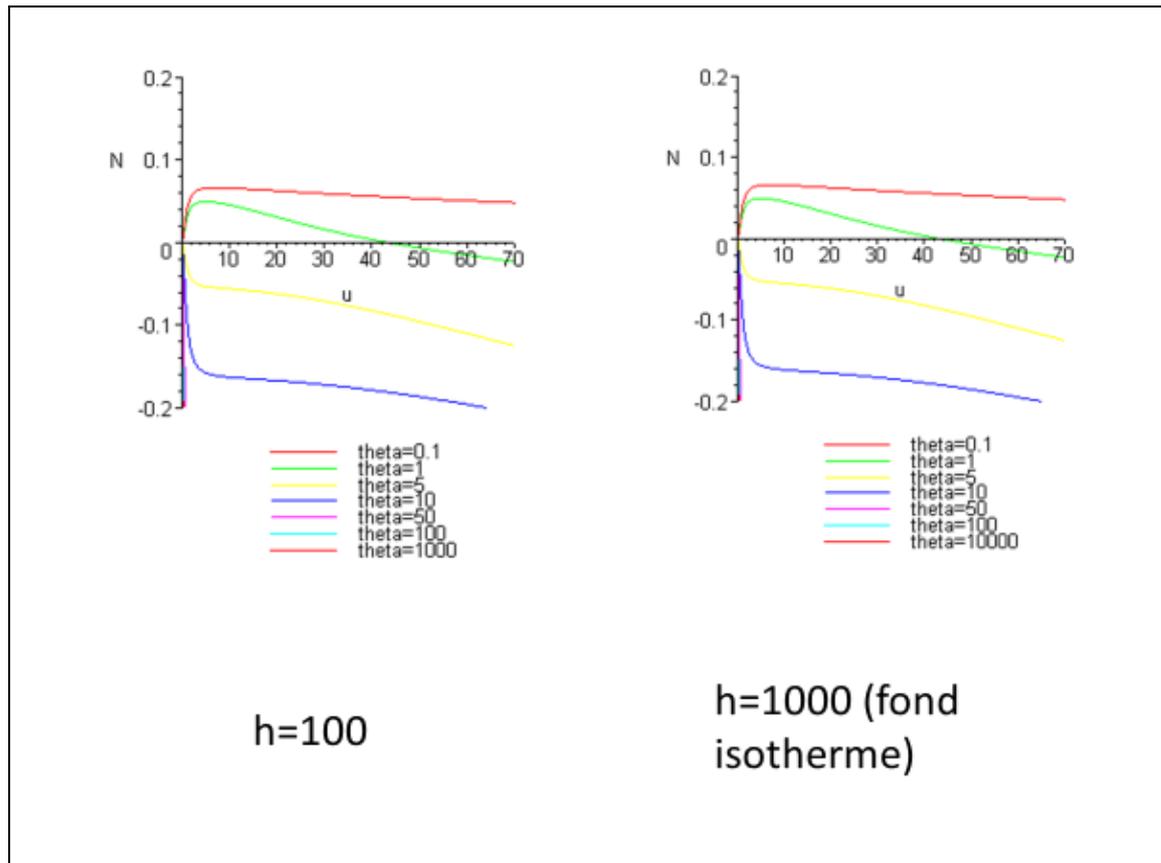
#### 4.2. Facteur de réponse

Le facteur de réponse  $N$  indique l'état de stabilité d'une évolution en fonction de la pulsation  $\omega$ . S'il est positif c'est instable et s'il est négatif c'est stable. Ce résultat est valable en grandeurs réduites  $N/\alpha$  et  $u$ . Nous présentons dans les figures 5 et 6 les résultats de calcul obtenus avec MAPLE 8. Ces résultats incluent les valeurs du coefficient d'échange  $h = 0; 10; 1000$  explorées dans la figure 3, ainsi que les valeurs de  $\theta$  et du nombre de Peclet  $Pe_L = 0,01; 0,1; 10$  de la figure 4.

Si l'on prend en compte la convection interne au liquide (ce que nous avons fait en section 4.1 où nous avons pris  $\varepsilon = 1$ ), on obtient la figure 5.

Pour un fond de pastille adiabatique ( $h=0$ ), pour des valeurs croissantes de  $\theta = 1/Pe_L$  il y a d'abord une très grande zone instable ( $\theta = 0,1$  dont la taille (fournie par la valeur  $u_c$  de l'intersection avec l'axe  $N=0$ ) décroît d'abord en fonction de  $\theta$  puis croît jusqu'à une valeur limite pour  $\theta$  infini. Cette valeur limite correspond à la conduction thermique infiniment rapide dans le liquide. Pour  $h=0,1$ , la courbe  $\theta = 1000$  disparaît du demi-plan supérieur pour passer dans les  $N < 0$  (stabilité). Puis seules les courbes  $\theta = 0,1$  et  $\theta = 1$  présentent des valeurs positives (donc des zones d'instabilité). Enfin, pour les valeurs de  $h$  supérieures ( $h = 10$  et  $h = 1000$ , ce qui signifie une alimentation isotherme), on constate la stabilisation complète ; en particulier la stabilité s'est installée pour les valeurs de  $\theta \geq 5$ .





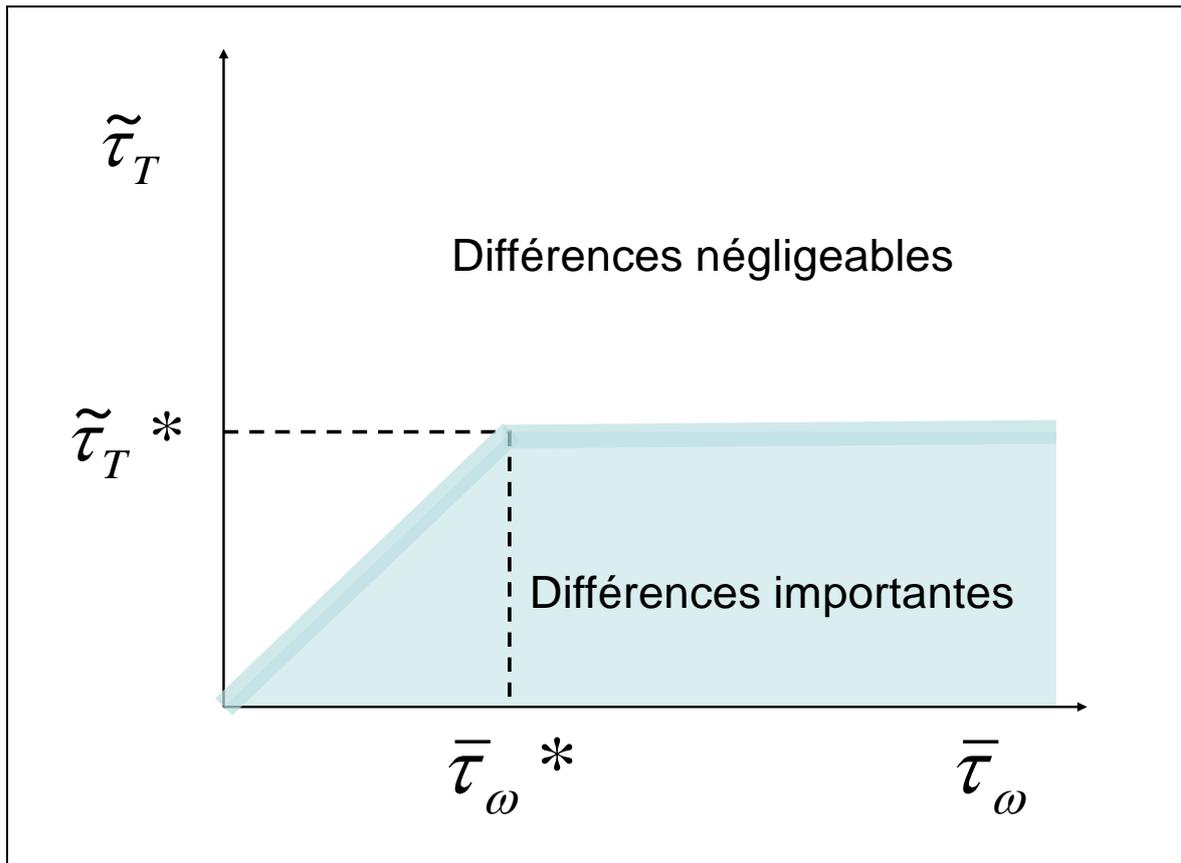
**Figure 5.** Courbes donnant le facteur de réponse réduit  $N/\alpha$  en fonction de la pulsation réduite de la perturbation harmonique de pression de la chambre de combustion, obtenues en tenant compte des effets de convection ( $\varepsilon = 1$ ).

L'interprétation générale des résultats n'est pas simple. Des zones d'analogies entre les régimes d'injection à fond adiabatique et à fond isotherme avaient été repérées dans l'article de Anani et al. <sup>iii</sup> (voir la figure 6) où il est indiqué que des différences importantes entre les deux régimes n'apparaissent que si la perturbation thermique atteint le fond de la pastille après que la diffusion thermique se soit accomplie à l'intérieur de cette pastille.

Ceci est possible si le temps de diffusion thermique est inférieur à une période d'oscillation et au temps de séjour  $\bar{\tau}_v$ . Les calculs effectués pour la pastille avec  $A = 10$  et  $B = 100$  donnent  $\theta^* = 5$  et  $u^* \approx 15$ .

## 5 Conclusion

Cette étude permet d'affiner des résultats relatifs aux effets de l'alimentation en liquide d'une goutte moyenne dans un moteur en introduisant un coefficient d'échange. En effet les études précédentes ne prenaient en considération que les cas limites de l'injection adiabatique et isotherme. On voit donc que l'extension de la configuration de Heidmann en tenant compte du champ thermique intérieur à la goutte moyenne supposée représenter la suspension en combustion dans un moteur à ergol liquide nécessite quelques précautions. La vérification expérimentale s'impose bien entendu. Mais l'introduction du coefficient d'échange introduit une nouvelle souplesse au modèle rendant possible une meilleure correspondance à la réalité.



**Figure 6.** Différences entre les champs de température du liquide pour les deux conditions en  $x = 0$  : isotherme (température imposée) et adiabatique (conduction thermique nulle).  $\bar{\tau}_\omega = 2\pi/\omega$  désigne la période de l'oscillation harmonique <sup>iii</sup>.

D'autre part, des aspects physiques portant sur cette goutte moyenne peuvent aider à mieux comprendre le comportement de l'écoulement diphasique lui-même. Il en est ainsi pour le temps caractéristique  $\bar{\tau}_v$ , qui est à la fois le temps de séjour du liquide entre le point d'alimentation et la surface d'évaporation, et le temps de vie moyen des gouttelettes de la suspension en combustion. L'intervention du nombre de Péclet de la phase liquide a certainement un sens pour l'écoulement de la suspension de même que les paramètres d'alimentation de la goutte moyenne.

Il reste à adapter ce modèle au cas de l'interface d'évaporation sphérique.

Les calculs effectués dans cet article et les tracés de courbes résultantes ont été réalisés avec les programmes Maple de tableaux 2 et 3.

Le modèle de la goutte moyenne a été utilisé par ailleurs pour une application de la thermodynamique irréversible étendue par Prud'homme<sup>vi</sup> (pp.282-288).

Il a servi de référence pour le perfectionnement du code CEDRE de l'ONERA <sup>ii</sup>.

Des travaux récents ont été publiés sur la goutte sphérique moyenne par Anani et al.<sup>vii</sup>.

D'autres travaux plus généraux compléteront utilement la documentation sur le sujet des instabilités en présence de gouttes en évaporation et en combustion<sup>viii,ix,x,xi</sup>.

```

> restart;
epsilon:=1;
h:=10;
A:=10;
B:=100;
theta:=0.1;
u:=10;
t:=(u,theta)->-3*epsilon/(4*theta*u)+(1+(3*epsilon/(4*theta*u))^2)^0.5;
R:=(u,theta)->(((u/(3*theta))^2+(epsilon/(4*theta^2))^2)^0.5;
m:=(u,theta)->epsilon/(2*theta)+(R(u,theta))^0.5*(1+I*t(u,theta))/(1+(t(u,theta))^2)^0.5;
n:=(u,theta)->epsilon/(2*theta)-(R(u,theta))^0.5*(1+I*t(u,theta))/(1+(t(u,theta))^2)^0.5;
G:=(u,theta)->(m(u,theta)*exp(m(u,theta)))/(m(u,theta)+h)-
n(u,theta)*exp(n(u,theta))/(n(u,theta)+h)/(exp(m(u,theta))/(m(u,theta)+h)-exp(n(u,theta))/(n(u,theta)+h));
T:=(u,theta,xi,tau)->((A+B)*((exp(I*u*tau/3)))/(B+3*theta*G(u,theta)))*((exp(m(u,theta)*xi))/(m(u,theta)+h)-
(exp(n(u,theta)*xi))/(n(u,theta)+h))/(exp(m(u,theta))/(m(u,theta)+h)-exp(n(u,theta))/(n(u,theta)+h));
X:=(u,theta,xi,t)->Re(T(u,theta,xi,tau));
plot3d([tau,xi,X(u,theta,xi)],xi=0..1,tau=1*Pi/u..7*Pi/u);

```

**Tableau 2.** Calcul de la perturbation de température à l'intérieur de la pastille liquide. Utilisé pour la réalisation des figures 3 et 4.

```

> restart;
epsilon:=1;
h:=1000;
A:=10;
B:=100;
t:=(u,theta)->-3*epsilon/(4*theta*u)+(1+(3*epsilon/(4*theta*u))^2)^0.5;
R:=(u,theta)->(((u/(3*theta))^2+(epsilon/(4*theta^2))^2)^0.5;
m:=(u,theta)->epsilon/(2*theta)+(R(u,theta))^0.5*(1+I*t(u,theta))/(1+(t(u,theta))^2)^0.5;
n:=(u,theta)->epsilon/(2*theta)-(R(u,theta))^0.5*(1+I*t(u,theta))/(1+(t(u,theta))^2)^0.5;
G:=(u,theta)->(m(u,theta)*exp(m(u,theta)))/(m(u,theta)+h)-
n(u,theta)*exp(n(u,theta))/(n(u,theta)+h)/(exp(m(u,theta))/(m(u,theta)+h)-
exp(n(u,theta))/(n(u,theta)+h));
Z:=(u,theta)->I*u/(1+I*u)*(A-3*theta*G(u,theta))/(B+3*theta*G(u,theta));
plot([Re(Z(u,1)),Re(Z(u,2)),Re(Z(u,3)),Re(Z(u,5)),Re(Z(u,10)),Re(Z(u,50)),Re(Z(u,1000))],u=0..70);

```

**Tableau 3.** Calcul du facteur de réponse de la pastille liquide en évaporation soumise à une perturbation harmonique. Utilisé pour la réalisation de la figure 5.

## Références

---

- <sup>i</sup> M.F. Heidmann, Frequency response of a vaporization process to distorted acoustic disturbances, NASA Technical Note D-6806, 197
- <sup>ii</sup> R. Prud'homme, M. Habiballah, L. Matuszewski, Y. Mauriot, A. Nicole, *Theoretical analysis of dynamic response of a vaporizing droplet to a acoustic oscillation*. Journal of Propulsion and Power (0748-4658) 26 (2010), 1
- <sup>iii</sup> Anani K., Prud'homme R., D'Almeida A., Assiamoua K. Effect of thermal convection on frequency response of a perturbed vaporizing pastille-shaped droplet. *Mécanique & Industries*, **12**, N°4, p. 301-314, 2011.
- <sup>iv</sup> L. Rayleigh, Theory of Sound (two volumes), Dover Publications, New York, 1877. Re-issued 1945.
- <sup>v</sup> Anani K., Contribution à l'étude de l'injection d'un fluide dans une goutte soumise aux instabilités acoustiques de combustion. Thèse de Doctorat, Université de Lomé (Togo), 25 février 2012.
- <sup>vi</sup> Prud'homme R., Ecoulements et réactions chimiques 1- collection *Mécanique des fluides, Hermès-Lavoisier, Cachan* (2012). ISBN 978-2-7462-3893-0, ISSN 1952-286 X
- <sup>vii</sup> Anani K., Prud'homme R., Theoretical Analysis of Thermal Conduction Effect on Frequency Response of a Perturbed Vaporizing Spherical Droplet, *Flow, Turbulence and Combustion*. (2016) <http://dx.doi.org/10.1007/s10494-016-9758-x>
- <sup>viii</sup> B. Abramzon, W. A. Sirignano, Droplet vaporization model for spray combustion calculations, *Int. J. Heat Mass Transfer* 32 (1989) 1605-1618.
- <sup>ix</sup> S.M. Candel, Combustion Instabilities Coupled by Pressure Waves and Their Active Control, *Proc. Combust. Inst.* 24 (1992) 1277-1296.
- <sup>x</sup> S.S. Sazhin, T. Kristyadi, W.A. Abdelghaffar, M.R. Heikal, Models for fuel droplet heating and evaporation: Comparative analysis, *Fuel* 85 (2006) 1613–1630
- <sup>xi</sup> W. A. Sirignano, Driving mechanisms for combustion instability, *Combust. Sci. Technol.* 187 (2015) 162-205.