HAL open science

Formulation euclidienne équivalente de la relativité restreinte

Alain Kirèche

▶ **To cite this version:**

Alain Kirèche. Formulation euclidienne équivalente de la relativité restreinte : Application au temps de vie des particules. Le Bulletin de l'Union des Professeurs de Physique et de Chimie, 2022, 116 (1048), pp.1001-1014. hal-03991095

HAL Id: hal-03991095

https://cnrs.hal.science/hal-03991095

Submitted on 15 Feb 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Formulation euclidienne équivalente de la relativité restreinte

Application au temps de vie des particules

par **Alain KIRÈCHE**
Lycée Honoré d'Estienne d'Orves - 06000 Nice
alain.kireche@ac-nice.fr

La formulation classique de la relativité restreinte s'appuie sur l'espace-temps pseudo-euclidien de Minkowski. Il existe cependant une formulation alternative euclidienne de la théorie qui donne des résultats identiques tout en simplifiant sensiblement les outils mathématiques et graphiques nécessaires aux démonstrations. Après avoir établi, dans le cadre de cette formulation, les équations de la transformation de Lorentz, fondatrices de la théorie, il est proposé comme application la mesure du temps de vie des particules, notamment des muons.

INTRODUCTION

Dès son origine, la relativité restreinte a été formulée dans le cadre d'un espace non euclidien (espace-temps pseudo-euclidien de Minkowski), nécessitant d'utiliser quadrivecteurs avec pseudonormes pouvant prendre des valeurs négatives et géométrie hyperbolique, ce qui rend délicate la lecture des diagrammes de Minkowski qui y sont associés. Il existe cependant plusieurs versions de relativité restreinte euclidienne qui évitent ce genre de paradoxe, mais les plus couramment développées font intervenir un référentiel privilégié (relativité néo-lorentzienne) [1] et remettent donc en question les fondements mêmes de la relativité telle qu'exposée par Albert Einstein en 1905. Ces approches peuvent donc légitimement laisser sceptiques, d'autant plus qu'elles aboutissent à des résultats différents de ceux obtenus en relativité classique.

La version que nous allons développer ici ne remet pas en cause la relativité restreinte d'Albert Einstein puisqu'elle aboutit exactement aux mêmes conclusions que cette dernière, et qu'à ce titre, elle peut être perçue comme une formulation équivalente à la formulation couramment enseignée. Avec l'avantage sur cette dernière, cependant, de n'utiliser que vecteurs classiques et géométrie circulaire, et, donc, d'établir des diagrammes relativement familiers pour traiter de manière particulièrement visuelle certains problèmes classiques de relativité restreinte, comme par exemple la dilatation du temps de vie des muons créés dans la haute atmosphère par rapport à leur temps de vie propre.

1. LES BASES D'UNE FORMULATION ALTERNATIVE EUCLIDIENNE DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE

1.1. De l'espace-temps de Minkowski à l'espace-temps euclidien équivalent

Comme dans toutes les versions de relativité euclidienne, nous allons commencer par modifier les coordonnées de l'espace-temps de Minkowski [2]. Dans ce dernier, une particule est repérée dans un référentiel inertiel (R) par sa coordonnée d'espace x (pour simplifier les expressions, nous choisirons un espace-temps à une dimension d'espace, au lieu des trois habituelles) et sa coordonnée de temps t (mesurée par l'horloge d'un observateur immobile dans (R)), ou, mieux, sa coordonnée ct, où c est la vitesse de la lumière dans le vide, de manière à homogénéiser les coordonnées d'espace et de temps. Le temps propre τ de la particule, mesuré par l'horloge de la particule, permet de définir l'intervalle d'espace-temps $s = c\tau$, grandeur invariante par changement de référentiel. La figure 1 illustre le déplacement, dans un espace-temps de Minkowski à une dimension d'espace, de deux particules P_0 et P, la première étant spatialement immobile et la seconde étant animée d'une vitesse spatiale v_P, les deux particules étant initialement à l'origine O d'un référentiel immobile par rapport à l'observateur.

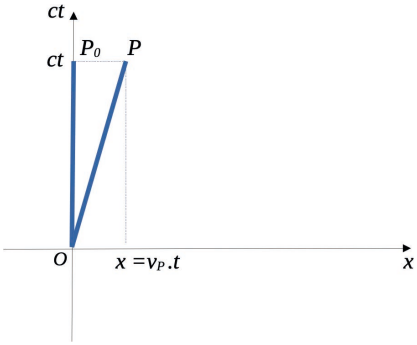

Figure 1 - Représentation du déplacement pendant la durée t de deux particules P_0 (spatialement immobile) et P (animée d'une vitesse spatiale constante v_P) dans un espace-temps de Minkowski à une dimension d'espace x (la coordonnée de temps t est remplacée par la coordonnée ct pour homogénéiser les dimensions de temps et d'espace). Dans ce diagramme, le segment OP ne représente pas l'intervalle d'espace-temps $s = c\tau$, où τ est le temps propre de la particule P, puisque $s^2 = -x^2 + (ct)^2 \neq x^2 + (ct)^2$.

L'espace-temps de Minkowski est pseudo-euclidien. En effet, dans un espace-temps euclidien, le carré de l'intervalle d'espace-temps s de la particule P serait tel que $s^2 = x^2 + (ct)^2$, alors que la métrique particulière de l'espace-temps de Minkowski impose que $s^2 = -x^2 + (ct)^2$. Le signe «–» intervenant dans cette métrique a une conséquence dommageable sur la lecture du diagramme : la longueur du segment OP ne correspond pas à la valeur de s.

Pour passer de l'espace-temps pseudo-euclidien de Minkowski à un espace-temps euclidien, où l'on retrouve la métrique habituelle de la relativité galiléenne (avec une dimension supplémentaire), intervertissons les rôles de t et de τ. Ainsi, dans l'espace-temps de notre formulation alternative euclidienne, que nous nommerons Formulation euclidienne équivalente de la relativité restreinte (FEERR), une particule est repérée dans un référentiel inertiel (R) par sa coordonnée d'espace x et sa coordonnée de temps propre τ (ou, mieux, $s = c\tau$, de manière à homogénéiser les dimensions d'espace et de temps). Certains auteurs nomment un tel espace-temps un *espace-temps propre* [3], mais nous continuerons à l'appeler *espace-temps*, par commodité. Le temps t (ou ct) devient, lui, un paramètre. Cependant, dans le cas d'une particule P de vecteur vitesse $\mathbf{v_P} = v_P\,\mathbf{e}_x$ dans l'espace (à une dimension) émise en O à l'instant $t = 0$, le paramètre ct peut être considéré comme équivalent à la coordonnée de P le long d'un nouvel axe Oct défini par le vecteur unitaire $\mathbf{e} = \mathbf{OP}/ct$, comme illustré dans la figure 2 ci-après.

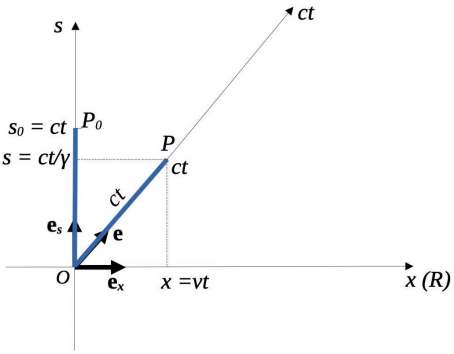

Figure 2 - Espace-temps euclidien ($\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_s$ et $\mathbf{e}$ sont les vecteurs unitaires associés respectivement aux axes Ox, Os et Oct d'un référentiel inertiel (R)). La particule P ayant une vitesse spatiale constante, l'intervalle d'espace-temps ct qu'elle parcourt pendant la durée t correspond à la coordonnée de P suivant l'axe Oct. Sa coordonnée selon l'axe Os est alors $s = ct/\gamma$ (cf. relation (4)). Pendant la même durée t, la particule P_0, immobile dans (R), parcourt le même intervalle d'espace-temps ct, correspondant à la coordonnée s_0 de P_0 suivant l'axe Os.

Dans cet espace-temps euclidien, le vecteur position d'une particule P à l'instant t dans le référentiel inertiel (R) s'écrit :

$$\mathbf{OP} = x\,\mathbf{e_x} + s\,\mathbf{e_s}. \tag{1}$$

En considérant le cas d'une particule émise en O à l'instant $t = 0$ animée d'une vitesse spatiale constante dans le référentiel (R) on peut écrire (cf. figure 2) :

$$\mathbf{OP} = ct\,\mathbf{e}. \tag{2}$$

En élevant les relations (1) et (2) au carré, il vient :

$$\mathbf{OP}^2 = (ct)^2 = x^2 + s^2$$

que l'on peut écrire :

$$s^2 = (ct)^2 - x^2. \tag{3}$$

On retrouve ainsi l'expression du carré de l'intervalle d'espace-temps de Minkowski, expression qui permet d'établir, sachant que $x = v \cdot t$, que :

$$s = \sqrt{1 - v^2/c^2} \cdot ct = ct/\gamma \tag{4}$$

(où $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \geqslant 1$ est le coefficient de Lorentz), expression qui permet également d'écrire que :

$$t = \gamma \cdot \tau, \tag{5}$$

relation qui, en relativité restreinte, exprime la « dilatation des durées » [4-5].

Cependant, dans l'espace-temps euclidien, l'intervalle d'espace-temps n'est pas s, mais ct (on pourrait poser $s = ct$ et définir s comme le nouvel intervalle d'espace-temps, mais, pour conserver l'analogie formelle avec la formulation de Minkowski, il a été convenu ici de garder $s = c\tau$, où s est maintenant la distance parcourue par la lumière pendant l'intervalle de temps propre τ). Dans ces conditions, le diagramme de la figure 2 (cf. page précédente) indique bien que, pour une particule P_0 immobile dans (R), dont le temps propre est égal à t, on a bien $s_0 = ct > s = ct/\gamma$ (cf. relation (4)) : la lecture du diagramme est donc conforme aux résultats attendus !

1.2. Représentation d'un changement de référentiel

Comment représenter sur un diagramme d'espace-temps euclidien un changement de référentiel ? Dans un diagramme de Minkowski, l'invariance de l'intervalle d'espace-temps entraîne une *rotation* des axes x et ct du référentiel (R) d'origine (cf. figure 3).

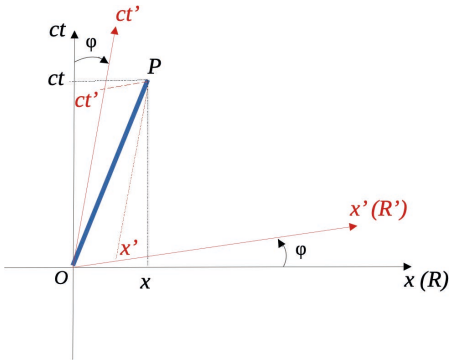

Figure 3 - Représentation d'un changement de référentiel dans un diagramme de Minkowski. Les axes du référentiel (R) tournent d'un angle φ lié à la vitesse v du référentiel (R').

Peut-il en être de même dans l'espace-temps euclidien ? À l'évidence, non. L'invariance de s suggère plutôt que l'axe temporel des coordonnées s reste le même pour tous les référentiels inertiels, ce qui impose une *translation* des référentiels entre

eux suivant l'axe Ox. Cependant, vu d'un référentiel, l'autre référentiel, mobile avec une vitesse spatiale v, subit une contraction des longueurs suivant l'axe Ox, ce qui oblige à introduire les vecteurs unitaires « vus de (R) », comme $(\mathbf{e}_{x'})_R$ et $(\mathbf{e}')_R$ dans le diagramme de la figure 4, ou « vus de (R') », comme $(\mathbf{e}_x)_{R'}$ et $(\mathbf{e})_{R'}$ dans le diagramme de la figure 5. En effet, l'invariance de la vitesse de la lumière permet d'établir les relations suivantes (cf. annexe 1) :

$$(\mathbf{e}_{x'})_R = \mathbf{e}_x / \gamma \tag{6}$$

$$(\mathbf{e}_x)_{R'} = \mathbf{e}_{x'} / \gamma . \tag{7}$$

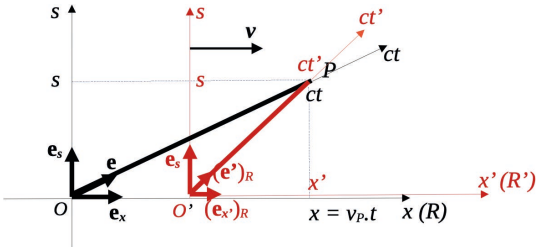

Figure 4 - Diagramme d'espace-temps euclidien montrant une particule P et un référentiel inertiel (R') vus depuis le référentiel inertiel (R). Le référentiel (R'), en translation suivant l'axe Ox à la vitesse spatiale v, subit une contraction des longueurs suivant l'axe Ox telle que le vecteur unitaire $\mathbf{e}_{x'}$ vu de (R) devient $(\mathbf{e}_{x'})_R = \mathbf{e}_x / \gamma$ (cf. annexe 1), ce qui entraîne également une contraction du vecteur $\mathbf{e}'$.

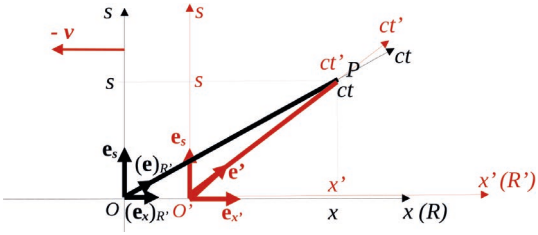

Figure 5 - La même situation que dans la figure 4, mais vue depuis le référentiel inertiel (R'). Cette fois-ci, ce sont les vecteurs unitaires $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}$ de (R) qui sont contractés, avec $(\mathbf{e}_x)_{R'} = \mathbf{e}_{x'} / \gamma$.

Voyons maintenant comment il est possible de retrouver les équations de la transformation de Lorentz lors d'un changement de référentiel inertiel dans un espace-temps euclidien.

2. FEERR ET TRANSFORMATION DE LORENTZ

2.1. Transformation des coordonnées x et x'

Considérons une particule P animée, dans un référentiel (R), d'une vitesse spa-

tiale v_P. Initialement, la particule P est à l'origine O d'un référentiel inertiel (R) (cf. figure 4, page précédente). Dans ces conditions, le vecteur position de la particule P à l'instant t est donné par les relations (1) et (2), d'où :

$$\mathbf{OP} = x\,\mathbf{e_x} + s\,\mathbf{e_s} = ct\,\mathbf{e}. \tag{8}$$

Dans un référentiel (R') en mouvement rectiligne uniforme par rapport à (R) tel que $\mathbf{v_{R'/R}} = v\,\mathbf{e_x}$, dont l'origine O' coïncide avec O à l'instant $t = t' = 0$, le vecteur position de la particule P devient (cf. figure 5, page précédente) :

$$\mathbf{O'P} = x'\,\mathbf{e_{x'}} + s\,\mathbf{e_s} = ct'\,\mathbf{e}'. \tag{9}$$

Cependant, comme on peut le voir sur le diagramme de la figure 4 (cf. page précédente), vu de (R), le vecteur position de P dans (R') devient, compte tenu de la relation (6) :

$$(\mathbf{O'P})_R = x'\,(\mathbf{e_{x'}})_R + s\,\mathbf{e_s} = \left(x'/\gamma\right)\mathbf{e_x} + s\,\mathbf{e_s}. \tag{10}$$

Or, le diagramme de la figure 4 (cf. page précédente) nous permet également d'écrire, puisque $x_{O'} = v \cdot t$, que :

$$(\mathbf{O'P})_R = (x - x_{O'})\,\mathbf{e_x} + s\,\mathbf{e_s} = (x - vt)\,\mathbf{e_x} + s\,\mathbf{e_s}. \tag{11}$$

En comparant les relations (10) et (11), il vient :

$$x' = \gamma\,(x - vt). \tag{12}$$

Il s'agit de l'équation bien connue de la transformation de Lorentz relative à la coordonnée d'espace x.

L'équation inverse s'obtient de la même manière, mais en raisonnant à partir du diagramme de la figure 5 (cf. page précédente) et en tenant compte de la relation (7) :

$$(\mathbf{OP})_{R'} = x\,(\mathbf{e_x})_{R'} + s\,\mathbf{e_s} = \left(x/\gamma\right)\mathbf{e_{x'}} + s\,\mathbf{e_s} \tag{13}$$

et :

$$(\mathbf{OP})_{R'} = (x' - x'_O)\,\mathbf{e_{x'}} + s\,\mathbf{e_s} = (x' + vt')\,\mathbf{e_{x'}} + s\,\mathbf{e_s} \tag{14}$$

puisque $x_O{}' = -vt'$.

En comparant les relations (13) et (14), on trouve l'équation cherchée :

$$x = \gamma\,(x' + vt'). \tag{15}$$

2.2. Transformation des coordonnées t et t'

Les équations relatives à t et t' peuvent s'obtenir à l'aide de l'équation (3). En effet, compte tenu de l'invariance de s, on peut écrire que :

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2.$$

En remplaçant x' par son expression de l'équation (12), on obtient :

$$(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - \gamma^2\,(x - vt)^2.$$

Cette relation permet d'établir, après développement et simplification (cf. annexe 2),

que :

$$ct' = \gamma\left(ct - vx/c\right). \tag{16}$$

En remplaçant x dans cette dernière relation par son expression de l'équation (15) et en réarrangeant les termes, on obtient l'équation inverse :

$$ct = \gamma\left(ct' + vx'/c\right). \tag{17}$$

2.3. Conséquences

Les relations (12), (15), (16) et (17) correspondent aux équations de la transformation de Lorentz lors d'un changement de référentiel inertiel. Elles sont au fondement de la relativité restreinte énoncée par Albert Einstein. Elle permettent, par exemple, de retrouver la loi de composition relativiste des vitesses (cf. annexe 2) :

$$v_p' = \frac{v_P - v}{1 - v_p \cdot v/c^2}. \tag{18}$$

Aussi surprenant que cela puisse paraître, la FEERR est bien une formulation rigoureuse de la relativité restreinte dans un cadre purement euclidien !

3. APPLICATION À LA MESURE DU TEMPS DE VIE D'UNE PARTICULE

3.1. Dilatation du temps de vie d'une particule mobile

Considérons, dans un référentiel (R), deux particules P_0 et P_1 de même temps de vie propre τ_V (mesuré à l'horloge de chaque particule) créées simultanément en O à l'instant $t = 0$. Si ces deux particules sont spatialement immobiles dans (R), leurs désintégrations seront bien évidemment simultanées(1) à l'instant $t = \tau_V$ (cf. figure 6).

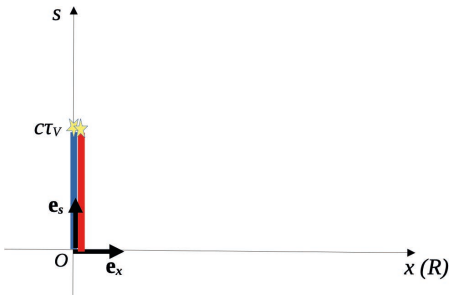

Figure 6 - Désintégrations simultanées de deux particules P_0 (trajet bleu) et P_1 (trajet rouge) de même temps de vie propre τ_V au repos dans (R).

(1) On considère ici que les particules se désintègrent au bout d'un temps *égal* à τ_V. Comme τ_V est en réalité une durée de vie *moyenne*, la vérification expérimentale ne peut s'effectuer que sur un grand nombre de particules [4].

Que se passe-t-il maintenant si la particule P_1 est créée, non plus spatialement immobile, mais avec la vitesse spatiale v ? Comme le montre le diagramme de la figure 7, lorsque P_0 se désintègre à l'instant $t_0 = \tau_V$, la particule P_1, elle, ne se désintègre pas, puisque son temps propre est alors inférieur à τ_V. En effet, comme le montre ce même diagramme, la désintégration de P_1 n'aura lieu qu'à l'instant $t_1 = \gamma \cdot \tau_V > t_0$: pour un observateur immobile spatialement dans (*R*), la désintégration des deux particules n'est donc plus simultanée, la particule en mouvement se désintégrant après la particule immobile.

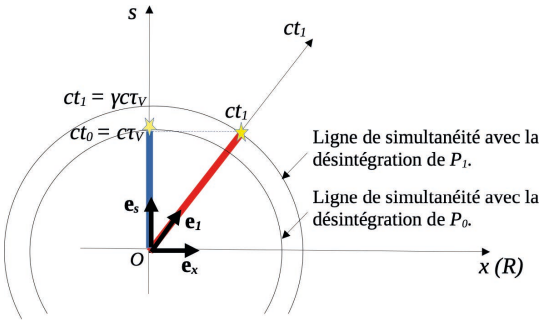

Figure 7 - Désintégrations dans (*R*) de deux particules P_0 (au repos, trajet bleu) et P_1 (en mouvement, trajet rouge) de même temps de vie propre τ_V. Les deux désintégrations ne sont pas sur la même ligne de simultanéité : dans (*R*), la particule en mouvement se désintègre après la particule au repos P_0.

Ainsi, la particule P_1, au lieu de parcourir la distance $d_0 = v \cdot \tau_V$ à laquelle on s'attendrait si les effets relativistes n'existaient pas, parcourt, en prenant en compte la relativité restreinte, la distance (cf. figure 8) :

$$d = x_1 = v \cdot t_1 = v \cdot \gamma \cdot \tau_V = \gamma \cdot d_0 > d_0. \tag{19}$$

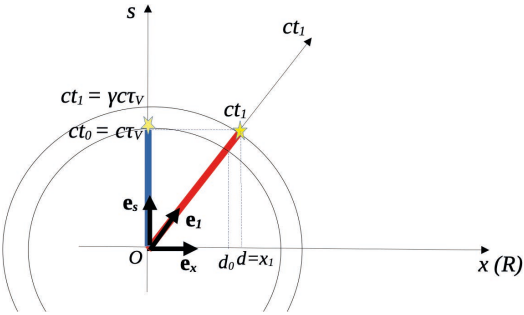

Figure 8 - La distance $d = x_1 = vt_1 = \gamma v \tau_V$ parcourue dans (*R*) par la particule P_1 pendant son temps de vie t_1 est plus grande que la distance $d_0 = v \cdot \tau_V$ qu'aurait parcourue la particule si les effets relativistes n'existaient pas.

Ce résultat est confirmé par l'étude de la distance moyenne parcourue dans l'atmosphère par les muons, particules créées à plusieurs kilomètres d'altitude avec une vitesse proche de celle de la lumière. En effet, le temps de vie propre moyen des muons est de 2,2 µs, ce qui leur permettrait, si les effets relativistes n'existaient pas, de parcourir en moyenne environ 650 m. Or, les observations montrent que nombre de muons traversent l'atmosphère jusqu'à atteindre le sol, ce qui confirme que leur temps de vie moyen est bien supérieur à 2,2 µs, comme le prévoit la relativité restreinte. Par exemple, à la vitesse de 0,995 c (soit pour un facteur de Lorentz $\gamma = 10$), on calcule une durée de vie moyenne de 22 µs et une distance moyenne parcourue d'environ 6,5 km, ce que confirment les expériences [4].

3.2. Point de vue de la particule mobile

Qu'observerions-nous dans un référentiel (R') animé d'une vitesse spatiale $\boldsymbol{v}_{\mathbf{R'/R}} = v \cdot \mathbf{e_x}$ par rapport à (R), donc dans un référentiel dans lequel la particule P_1 serait immobile et la particule P_0 animée d'une vitesse $\mathbf{v_0}' = -v \cdot \mathbf{e_{x'}}$? Le diagramme de la figure 9 représente cette situation. Nous pouvons voir que, si la particule P_1 (trajet rouge) s'y désintègre, comme il se doit, à l'instant $t_1' = \tau_V$, la particule P_0 s'y désintègre, elle, à l'instant $t_0' = \gamma c \tau_V > t_1'$, donc après la particule P_1. Cela, bien sûr, n'a rien d'étonnant, puisque la situation dans (R') est la réciproque de la situation dans (R), avec, cette fois-ci, P_1 immobile et P_0 en mouvement (on notera que les lignes de simultanéité avec un événement donné ne coïncident pas dans (R) et (R') : comme le prévoit la relativité restreinte, deux événements simultanés dans (R) ne le sont plus dans (R')).

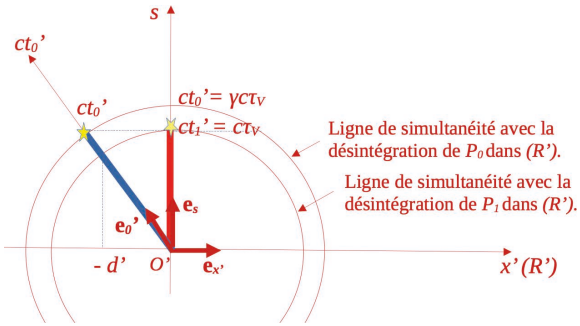

Figure 9 - Dans le référentiel (R') lié à P_1, P_1 se désintègre à la date $t_1' = \tau_V$ (trajet rouge) alors que P_0 se désintègre à la date ultérieure $t_0' = \gamma \tau_V$ (trajet bleu). De plus, la distance parcourue par un point immobile dans (R), comme par exemple P_0, sera égale à $d' = v\tau_V = d/\gamma$.

3.3. Contraction relativiste des longueurs

Pour finir, il est intéressant de noter que, lorsque P_1 se désintègre, la distance qu'a

parcourue la particule P_0 (et donc tout point immobile dans (R)) dans (R') est égale à (cf. figure 9, page précédente) :

$$d' = v \cdot \tau_V = d/\gamma < d. \tag{20}$$

On en conclut qu'un observateur lié à un muon de temps de vie propre $\tau_V = 2{,}2\ \mu s$ se déplaçant à la vitesse de 0,995 c considérera avoir parcouru dans l'atmosphère terrestre la distance $d' = 650\ \text{m}$, et non la distance $d = 6{,}5\ \text{km}$ mesurée par un observateur terrestre, entre la création du muon et sa désintégration. On retrouve la loi de la contraction des longueurs dans la direction du déplacement introduite dans le sous-paragraphe 1.2., qui peut s'écrire ici, compte tenu de la relation (7) :

$$d' \cdot \mathbf{e}_{x'} = d \cdot (\mathbf{e}_x)_{R'} = d \cdot \mathbf{e}_{x'}/\gamma. \tag{21}$$

On peut illustrer la relation (21) par le diagramme de la figure 10 ci-dessous :

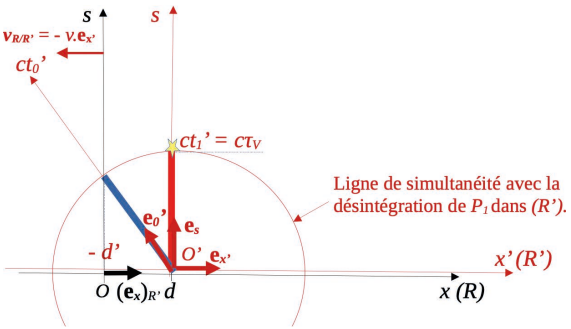

Figure 10 - Quand P_1 (trajet rouge) se désintègre, son déplacement spatial dans (R) vu de (R') peut s'écrire $(\mathbf{OO'})_{R'} = d \cdot (\mathbf{e}_x)_{R'}$. Simultanément, la particule P_0 (trajet bleu) s'est déplacée dans (R') selon $(\mathbf{O'O})_{R'} = -d' \cdot \mathbf{e}_{x'}$. Il en découle que $(\mathbf{OO'})_{R'} = d' \cdot \mathbf{e}_{x'} = d \cdot (\mathbf{e}_x)_{R'} = d \cdot \mathbf{e}_{x'}/\gamma$.

Cet exemple montre comment la FEERR, grâce au vecteur $(\mathbf{e}_x)_{\mathbf{R}'}$, vecteur unitaire $\mathbf{e}_x$ «vu de (R')», permet de visualiser l'effet purement relativiste de la contraction des longueurs d'un référentiel en mouvement [5-6].

CONCLUSION

La FEERR est une reformulation de la relativité restreinte dans un cadre géométrique purement euclidien. À ce titre, son pouvoir prédictif est le même que celui de la relativité restreinte (cf. les équations de la transformation de Lorentz). Cependant, son cadre géométrique, similaire au cadre géométrique de la relativité galiléenne, mais avec une dimension supplémentaire, tend à présenter la FEERR comme une formulation «naturelle» de la relativité restreinte, même si, historiquement, c'est la formulation pseudo-euclidienne de Minkowski qui a prévalu.

Mais l'intérêt pédagogique majeur de cette formulation euclidienne est qu'elle

permet de représenter sur un même diagramme les grandeurs ct, x et s (ce que ne permet pas, par exemple, un diagramme de Minkowski), ce qui peut aider à la visualisation d'effets relativistes pas toujours évidents à appréhender par les personnes peu familiarisées avec le formalisme de Minkowski, telles les dilatations des durées ou les contractions des longueurs qui apparaissent lors de l'étude de particules très rapides comme les muons.

Pourquoi alors ne pas imaginer la FEERR et ses diagrammes comme un pont entre la relativité galiléenne et la relativité restreinte dans sa formulation de Minkowski, dont la métrique pseudo-euclidienne, quoique moins évidente à maîtriser que la métrique euclidienne, est cependant nécessaire, actuellement, à l'expression des théories modernes de la physique(2) ?

REMERCIEMENTS

Merci à mon ami Thomas Guillemaud, chercheur à l'Institut national de la recherche agronomique (INRA), ainsi qu'à Olivier Minazzoli, chercheur à l'Observatoire de la Côte d'Azur (OCA), pour leurs précieux conseils.

BIBLIOGRAPHIE ET NETOGRAPHIE

À notre connaissance, il n'existe pas de référence en français sur la relativité euclidienne.

[1] J. M. C. Montanus, "Proper Time Physics", *Hadronic Journal*, n° 22, 1999.

[2] Euclidean Relativity : https://www.euclideanrelativity.com

[3] R.G. Newburgh and Jr T.E. Phipps, "A Space-Proper Time Formulation of Relativistic Geometry", *Physical Sciences Research Paper*, November 1969.

[4] P. Magnien, *Désintégration du muon : une horloge relativiste*
https://vaubsciences-56.webself.net/file/si76624/download/DESINTEGRATION%20DU%20MUON_UNE%20HORLOGE%20RELATIVISTE-fi2454489.pdf

[5] Dossier du CLEA sur la relativité restreinte :
http://clea-astro.eu/lunap/Relativite/relativite-restreinte-principes-et-applications/
Voir notamment l'article intitulé « De la dilatation des temps à la contraction des longueurs », de Pierre Magnien.

[6] J.-M. Vigoureux, *L'Univers en perspective*, Ellipse, 2006.

(2) Voir à ce propos les excellentes vidéos d'Alessandro Roussel sur le site ScienceClic, notamment celles consacrées à la relativité générale.

Annexe 1

Vecteur unitaire d'espace d'un référentiel en mouvement vu d'un référentiel immobile

Pour déterminer la relation entre le vecteur unitaire $\mathbf{e_x}$ et le vecteur unitaire $(\mathbf{e_x}')_R$, qui est le vecteur unitaire $\mathbf{e_x}'$ « vu de (R) », nous allons imaginer la situation où des photons sont émis à l'instant $t = t' = 0$ par une source S et sont reçus par les observateurs Ω et Ω' liés respectivement aux référentiels (R) et (R'), (R) étant considéré immobile et (R') allant à la vitesse v par rapport à (R). Le diagramme de la figure A1.1 ci-dessous représente cette situation.

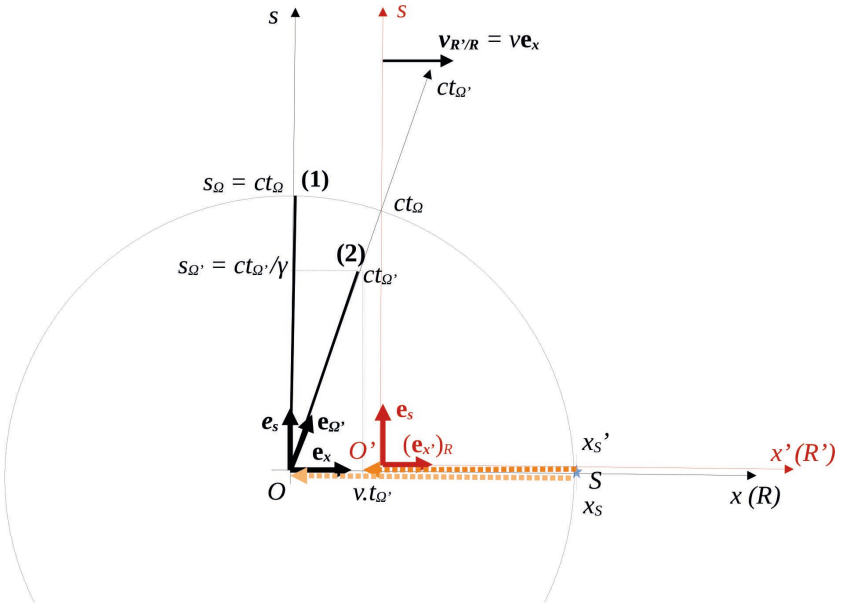

Figure A1.1 - À l'instant $t = t' = 0$, la source S émet des photons (flèches orange). Ces photons atteignent l'observateur Ω (flèche orange clair), immobile spatialement dans (R), à l'instant $t_\Omega = x_s/c$ (Ω est alors en position (1)). Ils atteignent l'observateur Ω' (flèche orange foncé), immobile dans le référentiel (R') qui va à la vitesse v dans (R), à l'instant $t_{\Omega'}$ (Ω' est alors dans la position (2), de coordonnée suivant l'axe temporel $s_{\Omega'} = ct_{\Omega'}/\gamma$) . On montre que l'instant $t_{\Omega'}$ est tel que l'abscisse x_s' de la source S mesurée dans (R') vérifie la relation $x_S' \cdot (\mathbf{e_x}')_R = (ct_{\Omega'}/\gamma^2) \cdot \mathbf{e_x}$, où $(\mathbf{e_x}')_R$ est le vecteur unitaire $\mathbf{e_x}'$ entrainé par (R') (qui, au repos, est égal à $\mathbf{e_x}$) « vu du référentiel (R) ». *A priori* $(\mathbf{e_x}')_R \neq \mathbf{e_x}$.

Comme les photons se déplacent dans l'espace à la vitesse c, il n'ont pas de temps propre. L'observateur Ω, lié au référentiel (R), recevra donc les photons à l'instant

$t_\Omega = x_S/c$ (position **(1)** sur le diagramme). À quel instant $t_{\Omega'}$ l'observateur Ω' recevra-t-il les photons (position **(2)** sur le diagramme) ? Le diagramme nous indique qu'il s'agit de l'instant $t_{\Omega'}$ tel que :

$$x_S = ct_\Omega = ct_{\Omega'} + v \cdot t_{\Omega'},$$

$ct_{\Omega'}$ étant la distance parcourue par les photons, dans (R), entre la source S et leur réception par Ω' (flèche orange foncé sur la figure A1.1). On en déduit que :

$$ct_\Omega = ct_{\Omega'}\left(1 + v/c\right).$$

Or, toujours d'après le diagramme de la figure A1.1 :

$$x_S{}' \cdot (\mathbf{e_x'})_R = (x_S - x_{O'}) \cdot \mathbf{e_x} = (ct_\Omega - v \cdot t_\Omega) \cdot \mathbf{e_x} = ct_\Omega \cdot \left(1 - v/c\right) \cdot \mathbf{e_x}$$

puisque $x_S = ct_\Omega$ et $x_{O'} = v \cdot t_\Omega$.

On en déduit donc que :

$$x_S{}' \cdot (\mathbf{e_x'})_R = ct_{\Omega'}\left(1 + v/c\right) \cdot \left(1 - v/c\right) \cdot \mathbf{e_x} = ct_{\Omega'} \cdot \left(1 - v^2/c^2\right) \cdot \mathbf{e_x} = \left(ct_{\Omega'}/\gamma^2\right) \cdot \mathbf{e_x}. \qquad (22)$$

Observons maintenant la situation, représentée dans le diagramme de la figure A1.2, dans le référentiel (R') :

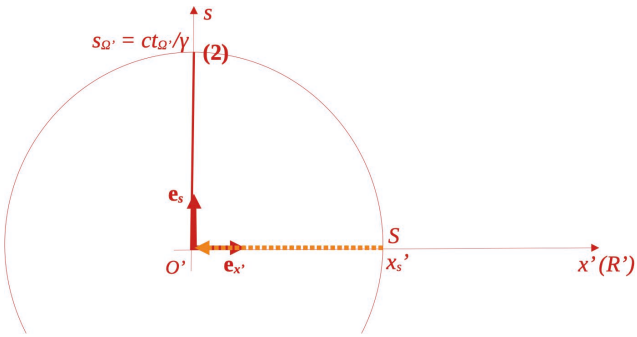

Figure A1.2 - Dans le référentiel (R') la source S est à l'abscisse $x_S{}'$. Les photons émis par S (flèche orange foncé) atteignent l'observateur Ω' immobile dans (R') à l'instant $t_{\Omega'}$ (Ω' est alors en position (2)), de coordonnée invariante suivant l'axe temporel $s_{\Omega'} = ct_{\Omega'}/\gamma$). L'abscisse $x_S{}'$ vérifie donc la relation $x_S{}' = s_{\Omega'} = ct_{\Omega'}/\gamma$. Comme $x_S{}' \cdot (\mathbf{e_x'})_R = \left(ct_{\Omega'}/\gamma^2\right) \cdot \mathbf{e_x}$ (cf. figure A1.1, page ci-contre), on en déduit que $(\mathbf{e_x'})_R = \mathbf{e_x}/\gamma$.

Il apparaît immédiatement que :

$$x_S{}' = s_{\Omega'} = ct_{\Omega'}/\gamma. \qquad (23)$$

(22) et (23) impliquent donc que :

$$\left(ct_{\Omega'}/\gamma\right) \cdot (\mathbf{e_x'})_R = \left(ct_{\Omega'}/\gamma^2\right) \cdot \mathbf{e_x}$$

d'où l'on déduit que : $$(\mathbf{e_x'})_R = \mathbf{e_x}/\gamma.$$

La relation $(\mathbf{e_x})_{R'} = \mathbf{e_{x'}}/\gamma$ s'obtient de la même manière, mais en partant d'abord de la situation vue de (R'), puis en la comparant à la situation vue de (R).

Annexe 2
Loi de transformation du temps t
Loi de composition relativiste des vitesses

LOI DE TRANSFORMATION DU TEMPS t

L'invariance de s permet d'écrire :

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2 \quad \text{avec} \quad x' = \gamma(x - vt) \quad \text{d'où} \quad (ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - \gamma^2 (x - vt)^2.$$

En développant cette expression on obtient :

$$(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - \gamma^2 x^2 - \gamma^2 v^2 t^2 + 2\gamma^2 xvt = (ct')^2 - \gamma^2 x^2 - \gamma^2 \beta^2 (ct)^2 + 2\gamma^2 x\beta ct$$

avec : $\beta = v/c$

d'où :

$$(ct')^2 = (ct)^2 - x^2 + \gamma^2 x^2 + \gamma^2 \beta^2 (ct)^2 - 2\gamma^2 x\beta ct = (ct)^2 (1 + \gamma^2 \beta^2) - x^2 (1 - \gamma^2) - 2\gamma^2 x\beta ct.$$

Or : $1 + \gamma^2 \beta^2 = \gamma^2$ et $1 - \gamma^2 = -\gamma^2 \beta^2$

donc : $(ct')^2 = \gamma^2 (ct)^2 + \gamma^2 \beta^2 x^2 - 2\gamma^2 x\beta ct = \gamma^2 \left((ct)^2 + \beta^2 x^2 - 2x\beta ct\right) = \gamma^2 (ct - \beta x)^2.$

On en déduit que : $ct' = \gamma\left(ct - vx/c\right).$

LOI DE COMPOSITION RELATIVISTE DES VITESSES

Les équations de la transformation de Lorentz permettent d'établir la loi de composition des vitesses en relativité restreinte. En effet, en différenciant $x' = \gamma(x - vt)$ on obtient :

$$dx' = \gamma(dx - vdt) \tag{24}$$

et en différenciant $ct' = \gamma\left(ct - vx/c\right)$ on obtient :

$$cdt' = \gamma\left(cdt - vdx/c\right). \tag{25}$$

En divisant l'équation (24) par l'équation (25), on obtient :

$$dx'/dt' = (dx - vdt)\Big/\left(dt - vdx/c^2\right) = \left(dx/dt - v\right)\Big/\left(1 - v\left(dx/dt\right)/c^2\right).$$

En posant $v_P' = dx'/dt'$ et $v_P = dx/dt$, il vient :

$$v_P' = \frac{v_P - v}{1 - v_P \cdot v/c^2}.$$

Alain KIRÈCHE
Professeur agrégé
Lycée Honoré d'Estienne d'Orves
Nice (Alpes-Maritimes)