Conception d'un miroir pauci-adaptatif à facettes tuilées en spirale pour la création de vortex optique de grande taille

Gaëtan Fauvel and Philippe Balcou

***Abstract*—Nous proposons la conception optique d'un système adaptatif et flexible de miroirs à 4 quadrants, ou à N facettes tuilées en spirale, afin de créer un vortex optique sur des faisceaux laser de grande taille. Par une analyse en champ lointain, nous calculons les paramètres angulaires qui maximisent la composante du mode Laguerre-Gauss ciblé. Les puretés modales ainsi obtenues sont proches de celles obtenues par des lames ou de miroirs de phase spiralée segmentés. Le profil d'éclairement obtenu dans la zone de Rayleigh au foyer est régulier, et l'effet d'un faible astigmatisme initial, connu pour rompre la circularité du profil d'éclairement au foyer, peut être atténué. Ce miroir pauci-adaptatif à facettes tuilées semble particulièrement bien adapté aux systèmes laser de Ultra-Haute Intensité ou de haute énergie.**

***Index Terms*—Moment cinétique orbital, faisceaux vortex, miroirs adaptatifs, miroirs tuilés, faisceaux laser de haute énergie.**

I. Introduction

LES faisceaux laser portant un moment cinétique orbital (Optical Angular Momentum, OAM) ouvrent des perspectives fascinantes pour induire puis étudier de nouveaux phénomènes d'interaction laser-plasma en champ fort, comme la génération de champs magnétiques géants [1], la création de faisceaux vortex d'harmoniques d'ordre élevé [2], le contrôle orbital de la filamentation [3], l'accélération laser directe d'électrons en régime fortement relativiste [4], ou l'excitation d'ondes plasma complexes dans des plasmas chauds et denses [5]. Les études d'interaction laser/plasma à haute intensité et haute énergie laser nécessitent de pouvoir créer de manière simple fiable des faisceaux portant un moment cinétique orbital (OAM), voire même de contrôler les composantes de modes orbitaux, certaines applications pouvant requérir une superposition de charges topologiques.

Plusieurs des méthodes pour créer des faisceaux OAM, comme les modulateurs de phase spatiale à cristaux liquides ou la combinaison de faisceaux Gaussiens à un foyer, ne sont pas applicables aux lasers intenses, car ces dispositifs sont handicapés par des seuils d'endommagement faibles. L'approche usuelle est dès lors l'utilisation de lames de phase spiralée (spiral phase plates, SPP) [6], [7]. Cependant, les cas des lasers à Ultra-haute intensité (femtosecondes, énergies dans les gammes J à kJ) et des lasers de haute énergie (nanoseconde, kJ à MJ) présentent des problématiques bien spécifiques. Dans le cas des lasers de haute intensité à dérive de fréquence (Chirped Pulse Amplification, CPA), la SPP doit être positionnée après les réseaux du compresseur pour prévenir tout endommagement sur celui-ci; l'impulsion est donc recomprimée, auquel cas on évite généralement de faire traverser au laser quelque lame de verre que ce soit, au moins pour des systèmes de classe multi-100-TW. Longman *et al.* et Bae *et al.* ont contourné élégamment ce problème en inventant des miroirs de repli à phase spiralée [8], [9]. Pour les lasers de haute énergie, le souci vient de la taille des optiques, soit typiquement entre 30 cm et 1 m. Bien qu'il soit en principe possible de graver par faisceaux d'ions des lames de phase de taille arbitraire, il serait largement préférable de pouvoir disposer d'une manière simple et flexible de créer des faisceaux OAM de grande taille, rendant ainsi caduques les soucis de disponibilité technique et commerciale de SPP de grande taille.

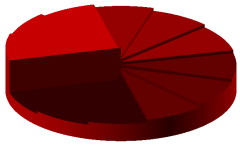
Dans cet article, nous proposons d'utiliser un petit nombre N de mirrors conventionnels pour créer un faisceau à moment cinétique orbital arbitraire, par un dispositif proche de certains miroirs adaptatifs, mais avec un nombre réduit de degrés de liberté (miroirs pauci-adaptatifs). Par des équations de propagation standard, nous montrons que la part du mode OAM ciblé peut être étonnament élevée, même pour un petit nombre de miroirs. Nous fournissons un exemple dans lequel la nature adaptative du dispositif permet d'atténuer l'effet de l'astigmatisme du faisceau incident.

L'étude suivante est principalement consacrée au cas de base d'un miroir 4-quadrants, soit $N = 4$, principalement en raison de la facilité de sa mise en oeuvre, et d'un taux de conversion OAM élevé. Cependant, nous reviendrons au cas d'un N générique quand des formules générales pourront être présentées.

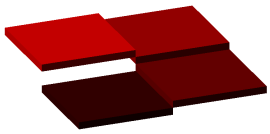
II. Description du dispositif optique

Le dispostif proposé comprend des aspects communs aux miroirs adaptatifs, et aux miroirs à facettes tuilées que l'on trouve en astronomie. Quelques propositions ont déjà été faites pour créer des faisceaux OAM sur la base de miroirs adaptatifs : Ghai ont proposé un dispositif piézo induisant une contrainte pour courber un miroir circulaire fendu, et lui donner une forme hélicoïdale [10]; Tyson ont décrit un miroir adaptatif de 37 segments en nid d'abeille, d'une pupille de 3.5 mm [11], trop petite pour des lasers UHI ou de haute énergie.

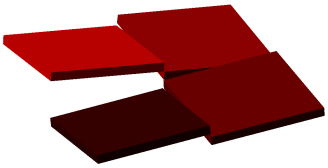
G. Fauvel est affilié au Centre ELI Beamlines, Institut de physique de l'Académie des Sciences Tchèques, 25241 Dolni Brezany, République Tchèque. G. Fauvel et Ph. Balcou sont affiliés à l'Université de Bordeaux, CNRS, CEA; Centre Lasers Intenses et Applications, UMR 5107, Talence, France. Courriel: philippe.balcou@u-bordeaux.fr .



(a) Principe d'une lame de phase spiralée, avec $N = 12$ marches.



(b) Arrangement de 4 miroirs, équivalent à une lame de phase spiralée de $N = 4$ marches.



(c) Tuilage en spirale de 4 miroirs reproduisant une lame de phase spiralée.

Fig. 1: Transition d'une lame de phase spiralée à un dispositif de 4 miroirs tuilés en spirale induisant un front d'onde quasi-hélicoïdal.

La figure 1a rappelle la forme typique d'une lame de phase spiralée, avec N marches successives caracterisées par une largeur angulaire $\theta = 2\pi/N$, et une valeur de phase constante sur chaque marche; les frontières entre marches sont des lignes droites issues du centre de la lame, dans la direction radiale.

Pour $N = 4$, un tel dispositif réfléchissant de phase spiralée est strictement équivalent à un ensemble de 4 miroirs, illustré en Fig. 1b, avec des surfaces parallèles d'élévation 0, $\lambda/8$, $\lambda/4$, et $3\lambda/8$, ces valeurs supposant une incidence normale et une longueur d'onde centrale du laser λ. Une rotation de chaque miroir suivant la diagonale dans la direction radiale, comme illustré en Fig. 1c, amène à un dispositif présentant une analogie globale avec une SPP ; vérifier que ceci nous permet effectivement de créer un faisceau AOM fait l'objet de l'étude décrite ci-dessous.

Tuiler quatre miroirs carrés, ou N miroirs triangulaires en configuration spiralée est techniquement similaire à la méthode parfaitement maitrisée de tuilage des réseaux de diffraction, très utilisée pour les lasers à dérive de fréquence de haute énergie [12]. De tels dispositifs opto-mécaniques requièrent d'une part des degrés de liberté de précision nanométrique, à chaque fois que des sous-pupilles doivent interférer constructivement; et des degrés de liberté de basse précision, pour le positionnement et l'orientation traditionnelle du dispositif.

La figure 2 montre des vues par conception assisté par ordinateur d'une mise en oeuvre possible d'un dispositif opto-mécanique de miroir à 4-quadrants, avec des platines de basse précision, et des positionneurs de haute résolution, par exemple des transducteurs piézo-électriques, pour orienter chacun des miroirs. Trois positionneurs sont nécessaires pour définir chacune des facettes avec une résolution nanométrique; ceci donne un total de 12 degrés de liberté de haute précision. Nous verrons en section IV qu'une rotation globale de basse précision autour de l'axe central peut aussi être utile. Se basant sur les dimensions habituelles des transducteurs piézo et des platines de translation, on peut estimer que l'empreinte sur table est d'environ 20 cm sur 20, soit un encombrement bien

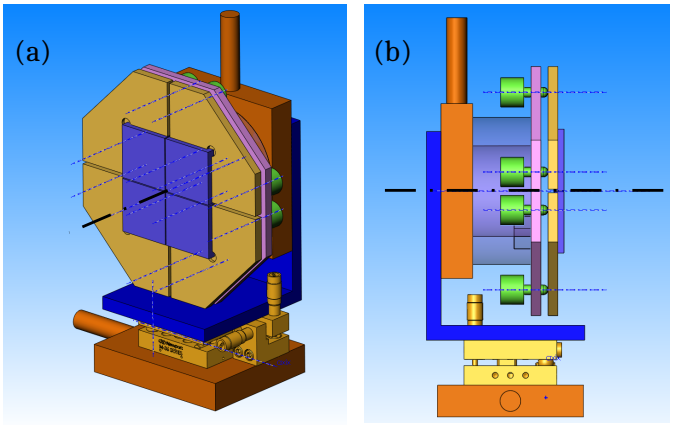


Fig. 2: Vues prospectives de face (a) et de côté (b) d'un dispositif de miroir 4-quadrants tuilé en spirale.

adapté à l'usage sur des faisceaux laser centimétriques. Il reste néanmoins possible d'installer des miroirs de petite taille au centre du dispositif, sans perte de résolution; inversement, une mise en oeuvre sur des très grands miroirs est parfaitement possible.

III. Modélisation de la génération de vortex par un miroir à facettes

La figure 3 présente le processus numérique, dont les étapes successives suivent pas à pas le laser modélisé, depuis le profil laser initial, en éclairement et en phase, jusqu'à l'analyse modale du faisceau vortex en sortie.

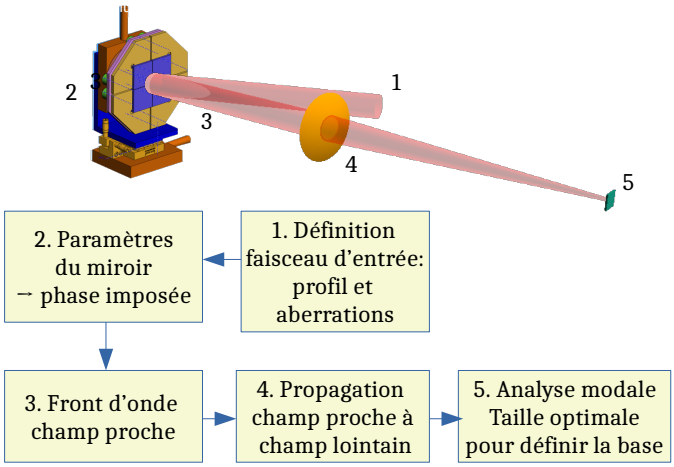


Fig. 3: Principe de l'imposition de phase par un miroir 4-quadrant, et étapes successives du schéma numérique.

En entrée, nous considérons un faisceau laser, que nous supposons suivre un mode soit parfaitement gaussien TEM_{00}, soit super-Gaussien. Les aberrations sont prises en compte par une fonction de phase. Il serait tout à fait possible de prendre en entrée une amplitude complexe de faisceau déterminée expérimentalement.

Dans la présente étude de conception optique, l'effet du miroir 4-quadrants est ramené à l'imposition d'une fonction

de phase bilinéaire par morceaux, déduite des paramètres d'orientation présentés ci-dessous. Une phase parabolique modélise l'élément optique focalisant; l'amplitude complexe est alors propagée jusqu'au plan focal par une intégrale de diffraction standard de Huygens-Fresnel [13]. Nous effectuons alors l'analyse du contenu modal du faisceau ainsi calculé dans le plan focal. Une intégrale de diffraction entre les plans source et objet étant une transformation linéaire, cette analyse modale est possible dès le plan source; cependant, il est important de pouvoir aussi combiner l'analyse modale et l'examen de la distribution spatiale du champ laser non seulement dans le plan focal mais dans toute la région focale, dans l'ensemble de laquelle se produisent les processus physiques d'interaction laser/plasma. Seule une analyse après propagation permet cela, en fournissant par exemple les profils en champs intermédiaires.

A. *Définition des paramètres d'un quadrant*

La figure 4 illustre les degrés de liberté mécaniques de haute précision requis pour chaque quadrant. Nous commençons par repérer les quadrants par des numéros tels qu'indiqué, dans le sens horaire quand l'observateur fait face au dispositif.

Pour chaque miroir de quadrant, le premier degré de liberté est l'élévation du miroir le long de la direction normale au dispositif. Ce degré de liberté est connu sous le nom de piston, comme pour un miroir adaptatif conventionnel. Le piston est pris comme positif quand il correspond au raccourcissement du chemin optique du rayon réfléchi. Une position de référence est nécessaire pour définir sans ambiguïté la valeur du piston; nous choisissons comme référence le coin du miroir quadrant, correspond à l'axe central du dispositif.

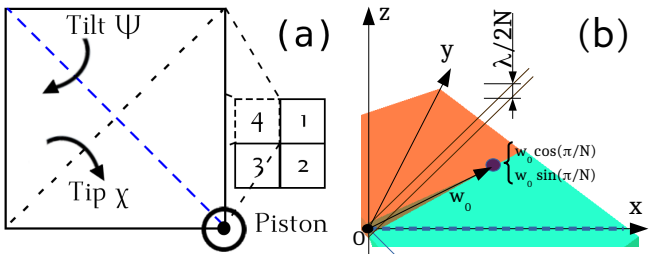


Fig. 4: (a) Définition des paramètres géométriques d'un quadrant : angles diagonaux axiaux et d'inclinaison, et piston. (b) vue 3D des quadrants 4 (marron) et 1 (cyan) dans un repère dont l'axe des x correspond à la diagonale du quadrant 1 issue de l'origine. L'axe des z est orienté dans la direction normale au miroir, suivant le sens du rayon réfléchi. Le point central indique la position où les élévations des deux miroirs sont égales, pour une différence de pistons de $\lambda/2N$ et une inclinaison de $-\Psi_0^{(N)}$.

L'orientation doit être donnée par deux angles ; il faut une définition qui respecte la symétrie d'ordre 4 du dispositif. Nous prenons donc comme référence la première diagonale de chaque quadrant, c'est à dire la diagonale issue du centre du dispositif, défini comme origine O. Pour des raisons de clarté de la représentation graphique, nous représentons en Fig. 4 la première diagonale de la facette considérée comme une ligne pointillée bleue. Par rapport à cette diagonale, nous définissons un angle axial (tip) χ_i et un angle d'inclinaison (tilt) Ψ_i, comme illustré en Fig. 4a. Par convention, nous considérons l'angle axial comme positif si un rayon normal incident sur le quadrant est réfléchi vers l'axe central; nous considérons une inclinaison comme positive si elle confère une hélicité positive au même rayon réfléchi.

Pour aider à poser les calculs géométriques de base, la figure 4b présente une représentation 3D de la facette 1 et de son interface à la facette 4, l'origine correspondant au centre du dispositif, l'axe des (x) correspondant à la première diagonale de la facette 1, l'axe des (y) orthogonal à (x) dans le plan du miroir, l'axe des (z) orienté suivant le rayon réfléchi, (x, y, z) formant un repère orienté. Considérons à présent une inclinaison de chaque quadrant d'un angle Ψ, et un angle axial χ, les deux supposés très petits devant 1.

Au premier ordre, le vecteur directeur du plan est :

$$\boldsymbol{e} = (-\chi, \Psi, 1) \tag{1}$$

Se rappelant que les pistons sont définis au centre du dispositif, pris comme origine O et correspondant ici au coin inférieur gauche, l'équation du plan d'un quadrant j a pour équation :

$$-\chi_j x + \Psi_j y + z = h_j. \tag{2}$$

Un miroir à N facettes tuilé en spirale en incidence normale présente une symétrie de rotation spécifique d'ordre N, dans laquelle une rotation de $2\pi/N$ par rapport à l'axe central des z doit mener à un accroissement de phase global de $2l\pi/N$ à la réflexion, modulo 2π. Ceci implique d'abord que tous les angles axiaux et d'inclinaison, tels que définis chacun dans son propre système de référence en suivant le modèle de la figure 4, soient identiques; puis que chaque facette doive présenter un piston tel que :

$$h_j = \frac{j\ l\ \lambda}{2N}. \tag{3}$$

Des valeurs non-nulles et identiques des χ_j induiront une fonction de phase de forme pyramidale, tendant vers un cône dans la limite des grands N, comme pour un axicon; ceci peut induire des déplacements de positions focales, des comportements rappelant les faisceaux de Bessel, mais n'a aucune raison d'avoir le moidre effet sur le moment cinétique orbital – tout en ouvrant peut-être une voie vers des faisceaux vortex de Bessel. Les angles axiaux χ_j seront donc fixés à 0 à partir de maintenant. Les pistons étant définis par l'équation (3), ceci ne laisse que l'inclinaison ψ comme variable à optimiser. Une discussion géométrique plus poussée peut fournir une valeur caractéristique de l'inclinaison, qui pourra servir de valeur de départ à l'optimisation numérique.

Considérons en effet la frontière entre les facettes 4 et 1 telle que representée en figure 4b, dans un système de référence déjà utilisé, dans lequel l'axe local des x suit la première diagonale de la la facette 1, c'est à dire la diagonale issue de l'origine et représentée en tirets bleus. Au point origine, la frontière présente une marche $h_4 - h_1$; pour une raison de clarté de la représentation graphique, nous prendrons $l = -1$, et $h_4 = h_1 + \lambda/4N$. A leur frontière, pour une même

inclinaison négative Ψ, l'élévation de la facette 4 diminue et celle de la facette 1 augmente quand le point de contact voit sa distance r à l'origine augmenter; la marche entre les facettes doit donc décroitre linéairement. Il existe un point pour lequel cette marche s'annule, puis devient négative. w_0^{nf} dénotant la taille du faisceau incident (nous apposons un exposant ^{nf} aux grandeurs en champ proche), définissons $\Psi_0^{(N)}$ comme l'inclinaison pour laquelle, à une distance w_0^{nf} de l'origine, les bords des deux facettes accolées ont la même élévation $\lambda/4N$. La fig. 4b montre que les coordonnées de ce point de contact sont $[w_0^{nf}\cos(\pi/N), w_0^{nf}\sin(\pi/N)]$, ce qui donne :

$$-\psi_0^{(N)} w_0^{nf}\sin(\pi/N) + \lambda/4N = 0. \tag{4}$$

et finalement :

$$\psi_0^{(N)} = \frac{\lambda}{4N\sin(\pi/N)w_0^{nf}}. \tag{5}$$

Les angles $\psi_0^{(2)}$ et $\psi_0^{(4)}$ seront utilisés plus bas comme références pour les inclinaisons optimales des cas $N = 2$ et 4.

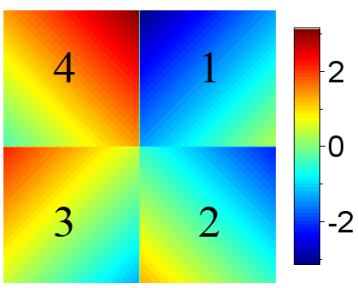


Fig. 5: Exemple de masque de phase $l = -1$ obtenu par l'application de pistons et d'inclinaisons diagonales d'un miroir 4-quadrant tuilé en spirale.

En conclusion de ces considérations géométriques, la figure 5 présente un masque de phase typique imposé par un miroir 4-quadrant tel qu'utilisé dans les calculs ci-dessous ($l = -1$), vu par un observateur faisant face au miroir.

B. Analyse modale de la composition du vortex

L'amplitude $\underline{A}_0(r,\theta)$ obtenue dans le plan focal par un propagateur de Huygens-Fresnel est analysée sur une base choisie de modes de Laguerre-Gauss. Notre procédure numérique suit les méthodes proposées par D'Errico [14], Sanson [2], et Longman [15].

Rappelons qu'un mode de Laguerre-Gauss $\mathcal{LG}_{p,l}$ d'amplitude $\underline{u}_{p,l}^{\mathcal{LG}}(r,\theta)$, caractérisé par deux nombres entiers p et l, sous les approximations paraxiale, monochromatique, et de polarisation linéaire, s'écrit :

$$\begin{aligned}\underline{u}_{p,l}^{\mathcal{LG}}(r,\theta) = L_p^{|l|}\left(\tfrac{2r^2}{w(z)^2}\right) C_{p,l}^{\mathcal{LG}} \tfrac{(\sqrt{2}r)^{|l|}}{w(z)^{|l|+1}} \times \\ \exp\left[\tfrac{-ikr^2}{2R(z)} - \tfrac{r^2}{w(z)^2} + i(2p+|l|+1)\phi(z) - il\theta\right]\end{aligned} \tag{6}$$

où k est le vecteur d'onde laser, $w(z)$ la taille de faisceau avec un col minimum (waist) w_D, $R(z)$ est la courbure de front d'onde, z la distance de propagation par rapport au point focal positionné en z_D, z_R est la longueur de Rayleigh reliée à w_D, $\phi(z)$ est la phase de Gouy, et $L_p^{|l|}$ est le polynôme de Laguerre généralisé bien connu. Ici $p+1$ correspond au nombre d'anneaux dans le profil d'intensité, et l est la charge topologique, représentant le nombre de périodes dans la phase azimutale. Ces modes de Laguerre-Gauss forment une base orthonormée avec:

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} \underline{u}_{p,l}^{\mathcal{LG}*}\underline{u}_{p',l'}^{\mathcal{LG}'} r dr d\theta = \delta_{ll'}\delta_{pp'} \tag{7}$$

Notons que cette base orthonormée dépend de 2 paramètres libres, w_D et z_D.

A partir de l'amplitude en champ lointain $\underline{A}_0(r,\theta)$, nous définissons un coefficient α_l^p comme la projection sur le mode Laguerre-Gauss d'indices (p,l) :

$$\alpha_l^p = \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} \underline{A}_0(r,\theta)\underline{u}_{p,l}^{\mathcal{LG}*}(r,\theta) r dr d\theta \tag{8}$$

Un seul terme dépend de θ dans $\underline{u}_{p,l}^{\mathcal{LG}}$; par conséquent nous pouvons intégrer d'abord sur θ puis sur r :

$$\alpha_l^p = \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\underline{A}_0(r,\theta)e^{il\theta}d\theta\right) f_{p,l}^*(r) r dr, \tag{9}$$

avec

$$\begin{aligned}f_{p,l}^*(r) = 2\pi L_p^{|l|}\left(\tfrac{2r^2}{w(z)^2}\right) C_{p,l}^{\mathcal{LG}} \tfrac{(\sqrt{2}r)^{|l|}}{w(z)^{|l|+1}} \times \\ \exp\left[\tfrac{-ikr^2}{2R(z)} - \tfrac{r^2}{w(z)^2} + i(2p+|l|+1)\phi(z)\right]\end{aligned} \tag{10}$$

Dans les parenthèses centrales de l'équation (9), nous reconnaissons un développement en série de Fourier :

$$C_l(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\underline{A}_0(r,\theta)e^{il\theta}d\theta, \tag{11}$$

si bien que :

$$\alpha_l^p = \int_0^{+\infty} C_l(r) f_{p,l}^*(r) r dr \tag{12}$$

Il est pratique de définir dorénavant la pureté du mode (p,l) comme le module carré de l'équation précédente, exprimée en pourcentage :

$$P_l^p = |\alpha_l^p|^2 \times 100 \tag{13}$$

Notons que la décomposition en l donnée par (11) est unique [14], car elle provient d'une transformée en série de Fourier azimutale ; à l'inverse, la décomposition radiale (12) dépend en fait du choix de taille de col de mode gaussien. Par défaut, la valeur de la taille w définissant la base de modes $\mathcal{LG}$ a longtemps été prise comme celle du faisceau incident TEM_{00}, notée w_0^{nf} en champ proche. Une lame SPP parfaite donne une efficacité de conversion de 78% sous cette hypothèse [6] . Cependant Longman et Fedosejevs ont montré que cette valeur prise par défaut n'est en fait pas la plus adéquate [15]; par des calculs analytiques, ils proposent d'utliser plutôt w_D^{nf}, donné par $w_D^{nf} = w_0^{nf}/\sqrt{|l|+1}$, ce qui donne une valeur de 93% pour la pureté de $\mathcal{LG}_{0\,1}$. Le plan focal reste fixe.

Nous choisissons une approche globale similaire, mais avec des calculs en champ lointain. La procédure numérique suit les étapes indiquées ci-dessus, avec quelques indications complémentaires requises pour décrire complètement la démarche. Le faisceau incident est représenté sur une

grille cartésienne, sur laquelle les fonctions de phase diverses (aberrations, miroir tuilé en spirale, focalisation) sont définies. Cependant, la transformée de Fourier azimutale (11) nécessite que le champ propagé soit donné en coordonnées polaires ; il faut donc traduire le champ de coordonnées cartésiennes en polaires, ce qui est fait par une interpolation standard bilinéaire d'ordre 1 sur une grille structurée.

Une fois les fonctions radiales (11) calculées par une intégrale de Fourier sur θ pour chaque r, nous recherchons la nouvelle taille optimale qui donne au final la plus forte composante du mode $\mathcal{LG}$ ciblé, par exemple $\mathcal{LG}_{0\,1}$. Pour cela, nous balayons une gamme de valeurs de la taille w_D servant à définir la base dans un intervalle incluant la valeur de la taille w_0 en champ lointain du faisceau incident TEM_{00}, calculons la décomposition modale pour chaque w_D, puis choisissons la valeur w_D qui fournit la plus forte composante de $\mathcal{LG}_{0\,1}$. Nous vérifions que le second paramètre libre de la base de fonctions, la position en z du foyer, reste constant. Ceci peut être fait après la propagation par Huygens-Fresnel, en suivant les variations d'intensité dans le plan (x, z) de la région focale, et en vérifiant que la position en z du maximum demeure inchangée.

C. Optimisation de la génération de faisceau OAM

L'ensemble de cette procédure numérique peut maintenant être utilisée pour étudier la capacité d'un système de miroir tuilé en spirale à 4-quadrants, ou à N facettes, à induire un faisceau OAM portant une charge topologique cible l. L'essentiel de l'attention sera donné au cas de base de $l = 1$ et $N = 4$; néanmoins les cas de moments cinétiques plus élevés, et d'autres nombres de facettes seront également abordés.

Nous avons fait le choix d'un jeu spécifique de paramètres pour cette série de simulations, afin de présenter des valeurs réalistes pour les grandeurs physiques obtenues. Nous utilisons ainsi des spécifications inspirées du laser L4n [16] à Prague, un laser nanoseconde kiloJoule. Nous définissions une longueur d'onde λ = 526.6 nm, une taille de faisceau en champ proche w_0^{nf} = 247 mm (taille de faiseau reportée sur le plan du miroir 4-quadrant en Fig. 3), et une longueur focale f = 2.6 m donnant une taille minimale au foyer de $w_0 \approx 1.8$ μm.

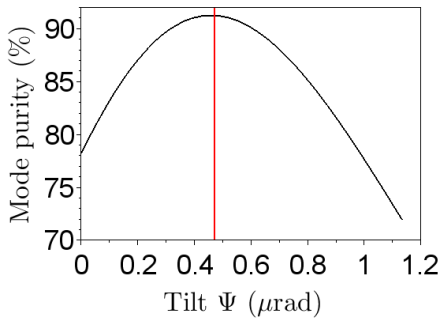


Fig. 6: Optimisation de la pureté du mode $l = 1$ avec l'inclinaison Ψ.

La figure 6 montre la pureté du mode $\mathcal{LG}_{0\,1}$ en fonction de l'angle d'inclinaison Ψ. Rappelons que $\Psi = 0$ correspond à une lame SPP présentant quatre marches, ce qui donne déjà une purité de 78%; lorsque Ψ augmente, chaque facette se tourne vers l'inclinaison de la spirale correspondante, accroissant ainsi la pureté du mode $l = 1$. Un optimum de 91% est obtenu à un angle Ψ de 4.7×10^{-7} rad, une valeur faible mais atteignable avec des positionneurs piezo-électriques et des optiques de grandes tailles. La décroissance de la pureté du mode $l = 1$ pour des valeurs plus élevées de Ψ est reliée à une augmentation graduelle des composantes de l plus élevé. En unités sans dimension, nous obtenons :

$$\Psi_{opt} = 1.25\ \Psi_0^{(4)} \tag{14}$$

Gardant à présent cette valeur de Ψ, nous pouvons extraire des calculs la valeur optimale de la taille de faisceau w_D qui permet à la base de modes $\mathcal{LG}$ de décrire aussi précisément que possible la distribution du champ. La figure 7 présente la purité modale en fonction de la taille testée w_D. La position du maximum est signalée par une ligne rouge, et correspond à 2.5×10^{-6}m.

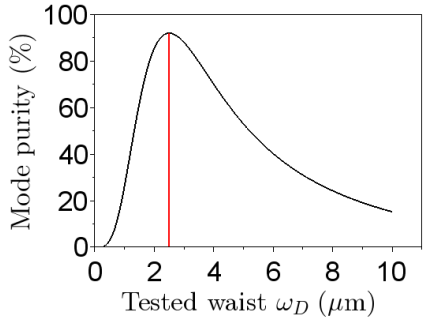


Fig. 7: Optimisation de la pureté modale $l = 1$ à l'inclinaison optimale Ψ en fonction de la taille w_D testée.

A un faible écart près, nous obtenons $w_D = w_0\ \sqrt{|l| + 1}$, si bien que le rapport $\gamma = w_D/w_0$ se trouve correspondre à l'inverse du résultat de Longman. En effet, l'analyse de [15] est effectuée en champ proche, avant toute optique de focalisation; la notre est effectuée en champ lointain du laser. La comparaison devrait donc être faite entre le rapport que nous obtenons, et le rapport des divergences en champ proche, variant effectivement comme l'inverse des tailles en champ proche. Nos resultats sont ainsi cohérents avec [15], malgré la spécificité de la géometrie du miroir tuilé en spirale.

La figure 8 montre les distributions en intensité et phase obtenues au plan focal, avec la représentation en fausses couleurs de la distribution des modes en échelle log, pour un faisceau incident gaussien (a,c,e) ou super-Gaussien (b,d,f). En effet, la plupart des installations laser de haute énergie utilisent des faisceaux plats, ou "haut-de-forme", dont l'amplitude U_{SG} est généralement décrite par une fonction super-Gaussienne d'ordre 20 :

$$|U_{SG}|^2 = \exp\big(-2(\frac{r^2}{w_0^2})^{20}\big) \tag{15}$$

Le cas gaussien donne une pureté du mode $(0, 1)$ de 91%; le cas super-Gaussian une valeur à peine plus faible de 86%. Le nombre de facettes ($N = 4$) transparait directement sur la décomposition modale à $l = 1 \pm N$ pour des raisons

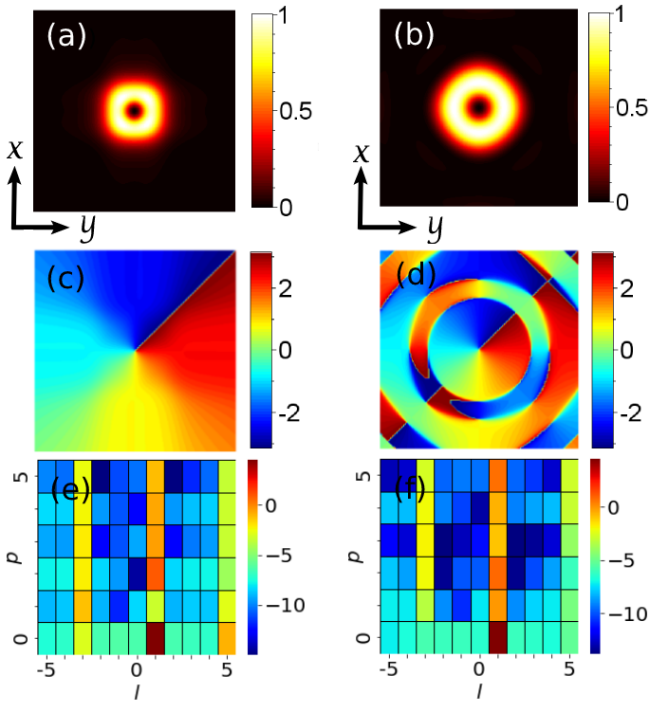


Fig. 8: Profils d'éclairement normalisé (a et b), distribution de phase au foyer (c et d), et matrices de composantes modales du faisceau vortex cible $l = 1$ en échelle log de couleurs (e et f), créé à partir d'un faisceau Gaussien parfait (a,c et e) ou d'un faisceau super-Gaussien (b, d et f).

de symétrie. Cependant le niveau de ces modes reste bas, la somme sur p des modes $l = 1 - 4$, ou $l = 1 + 4$, restant typiquement au niveau de 1%, aussi bien pour le cas Gaussien que super-Gaussien. Le principal mode secondaire est systématiquement le $\mathcal{LG}_{2\,1}$ à un niveau de 2.5%. Le cas super-Gaussien donne des composantes plus importantes de $l = 1$ and $p >= 3$, typiquement entre 1 et 2%, avec un maximum à $p = 5$.

Notre approche permet d'explorer non seulement le plan focal, mais toute la zone focale ; la figure 9 présente ainsi la distribution d'intensité normalisée dans le plan (x, z). La dépression d'intensité caractéristique sur l'axe apparait clairement, sans signe de structure parasite jusqu'au moins 10 longueurs de Rayleigh, ce qui indique e.g. que le schéma peut être utilisé pour de l'accélération directe d'électrons.

Nous nous intéressons maintenant aux cas d'autres nombres de facettes. Considérons tout d'abord le cas spécifique de 2 facettes; en effet, une pureté de 82% pour le mode $l = 1$ peut déjà être obtenu avec seulement deux miroirs, pour une valeur d'inclinaison de 1.10 $\Psi_0^{(2)}$. Bien que cette pureté soit notablement plus basse que celle obtenue pour N = 4, elle est déjà suffisante pour présenter un grand intérêt, en tenant compte de la simplification notable de la mise en oeuvre expérimentale.

A l'inverse, de hautes valeurs de N peuvent être intéressantes pour atteindre de hautes valeurs de l. La table I donne l'évolution de la pureté optimale du mode $\mathcal{LG}_{0\,5}$, en fonction de N et de profil du faisceau incident. On constate

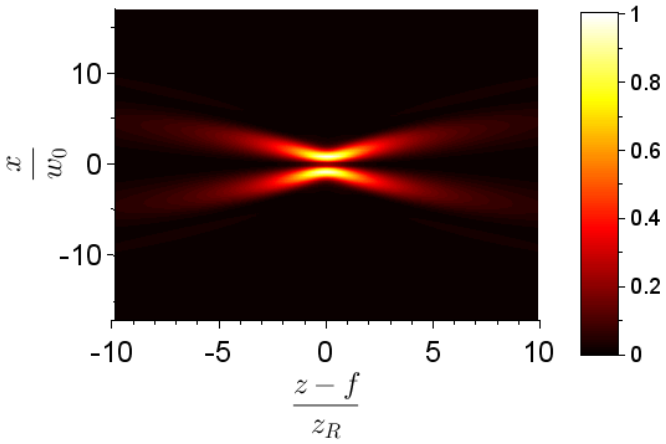


Fig. 9: Distribution d'éclairement normalisé dans un plan axial (x, z) de la région focale. L'axe des z est en unités de longueurs de Rayleigh.

que la pureté augmente régulièrement avec N, avant de saturer à une valeur proche de celle d'une lame SPP parfaite.

Nombre de facettes (N)	5	8	10	12	14	SPP
Pureté $\mathcal{LG}_{0\,5}$ (TEM_{00} incident)	54	63	65	66	67	68
Pureté $\mathcal{LG}_{0\,5}$ (super-gaussien)	71	78	80	81	82	83

TABLE I: Pureté modale en fonction du nombre de facettes N pour l=5, et comparaison au cas d'une lame SPP parfaite.

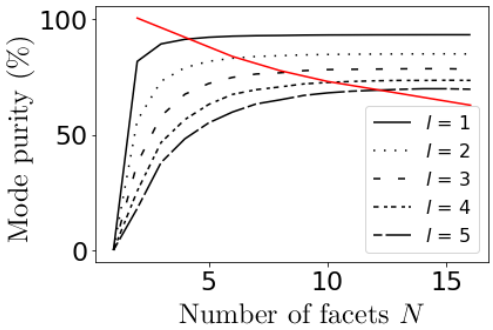


Fig. 10: Evolution de la pureté modale pour différentes charges topologiques en fonction du nombre de facettes N. L'intersection entre la ligne rouge et les courbes indique la pureté modale atteinte pour N = 2l+2 facettes.

Prenons comme critère de cette saturation à un nombre optimal de facettes N_{opt}, le fait que l'amélioration marginale de pureté entre N_{opt} et $N_{opt}+1$ soit inférieure ou égale à 1% . La figure 10 montre une série de courbes de pureté en fonction du nombre N de facettes pour differentes valeurs de la charge topologique l; la courbe rouge épaisse relie les N_{opt} ainsi définis. Cette courbe correspond à une loi empirique linéaire:

$$N_{opt} = 2l + 2. \tag{16}$$

La figure 11 utilise cette loi empirique pour donner la pureté modale obtenue en fonction de la valeur de la charge topologique l (axe inférieur des abcisses), le nombre de facettes $N(l)$ étant donné par l'équation (16) (axe supérieur

des abcisses). La table II complète la figure 11 en fournissant les chiffres de pureté pour les 5 modes de l les plus bas. Pour un faisceau supergaussien, on constate que la pureté optimale sur le mode ciblé reste à des valeurs élevées, supérieures à 80% jusqu'à l =10; à l'inverse, un faisceau gaussien donne d'abord la valeur particulièrement élevée de 91% pour $l = 1$, puis décroit rapidement jusqu'à 60% dans la même gamme. Ceci indique que les zones du faisceau éloignées de l'axe optique jouent un rôle important dans la formation du vortex par le miroir tuilé spiralé; pour de hautes valeurs de l, notre schéma apparait donc particulièrement bien adapté aux profils haut-de-forme typiques des lasers haute énergie.

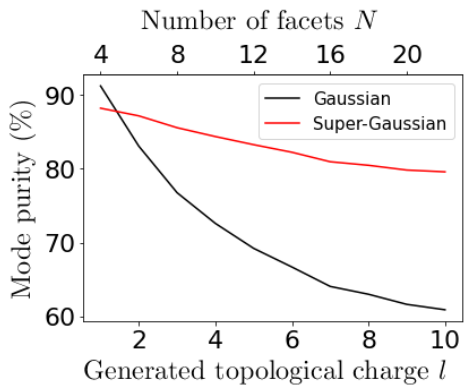


Fig. 11: Pureté modale en fonction de la charge topologique l, en utilisant un nombre de facettes N = $2l$ + 2 pour un faisceau Gaussien (en noir) et super-Gaussien (en rouge).

Charge topologique (l)	1	2	3	4	5
Nombre optimal de facettes (N_{opt})	4	6	8	10	12
% pureté modale (TEM_{00} incident)	91	82	75	70	66
% pureté modale (superGaussien)	88	87	85	83	81

TABLE II: Valeurs de pureté modale obtenues en fonction de l par des miroirs à $(2l + 2)$ facettes tuilées en spirale.

IV. Atténuation adaptative de la rupture de circularité due à l'astigmatisme

En dehors de la phase statique introduite pour induire un vortex optique, le système 4-quadrants peut être utilisé comme miroir adaptatif, bien qu'avec moins de degrés de liberté qu'un miroir adaptatif conventionnel; il peut donc êre qualifié de miroir pauci-adapatatif. Nous cherchons à présent quel est l'intérêt pour générer des faisceaux vortex lorsque le faisceau incident présente l'aberration la plus courante : l'astigmatisme.

L'astigmatisme est en effet connu pour poser problème lors de la génération d'un faisceau vortex; Bekshaev et al. [17] ont montré que tout astigmatisme, même faible, dans le faisceau incident induit une rupture de la symétrie cylindrique du profil d'intensité en anneau obtenu au foyer. Une forme typique en deux lobes, ou "haricots", est alors observée, orientée à 45° des axes propres d'astigmatisme. Cette déformation peut être à l'origine de soucis expérimentaux, particulièrement quand le processus physique étudié a une dépendance non linéaire en éclairement [18], [19].

Ce comportement peut se comprendre en examinant la fonction de phase correspondant à l'astigmatisme, qui, en coordonnées polaires (r, θ), s'écrit :

$$\Phi_a(r, \theta) = \alpha_a \sqrt{6} \cos(2\theta - \beta_a) r^2 / w_0^2 \tag{17}$$

où α_a est un coefficient de polynôme de Zernike, et β_a est l'orientation de l'aberration, en général 0° or 45° dans un développement de Zernike. En raison du terme en $\cos(2\theta)$, cette fonction de phase couple le mode spatial initial du laser, supposé ne pas avoir de moment cinétique orbital, avec des bandes latérales de moment cinétique d'ordres ± 2. Cependant, cette fonction de phase ne modifie pas l'intensité, ce qui implique que ces bandes latérales de moment cinétique soient en quadrature de phase avec la composante principale $\mathcal{LG}_{00}$ du faisceau. Cette relation de phase est modifiée lors de la transmission ou de la réflexion sur une optique de phase spiralée suivie de la propagation vers le foyer, car les composantes de l différents acquièrent des phases dépendant de l, amenant dès lors les bandes latérales à être en phase avec la composante principale $\mathcal{LG}_{01}$, et conduisant à des interférences angulaires. La figure 12a illustre cette discussion, en présentant le profil d'éclairement obtenu au foyer d'un faisceau incident sur lequel la phase d'astigmatisme donnée par l'équation (17) est imposée, avec $\alpha_a = 0.1$ et $\beta_a = 0$.

Contrairement aux miroirs adaptatifs conventionnels, qui comportent un nombre élevé d'actuateurs et fournissent une phase spatiale lisse, le miroir pauci-adaptatif tuilé proposé ici n'est pas en mesure de compenser exactement la phase spatiale d'astigmatisme; en revanche, il peut induire de nouvelles bandes latérales de moment cinétique, qui peuvent être choisies pour diminuer voire annuler les interférences présentes avec des modes de moment cinétique parasites pré-existants.

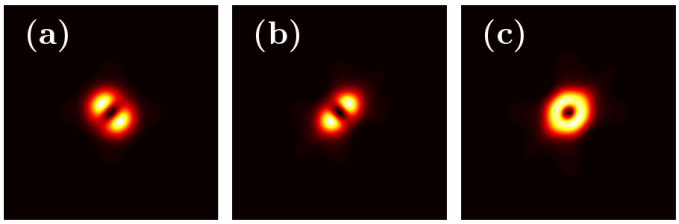


Fig. 12: (a) Two-lobe structure from an incident astigmatic beam (parameters : $\lambda = 0.63$ μm, $z_R = 0.9$ mm; $\alpha_a = 0.1$,$\beta_a = 0$). (b) Two-lobe structure from a π-crown phase imprint $\delta\phi$ ($\delta\phi_c = 0.4$, $\beta_c = 45°$). (c) Corrected vortex beam, when both phase imprints are added.

Afin d'illustrer cette stratégie, nous choisissons la fonction la plus simple possible pour créer des bandes latérales $l = \pm 2$ via un miroir 4-quadrants, en jouant avec les pistons h des quadrants : $h_1 = h_3 = +h_c, h_2 = h_4 = -h_c$, où $h_c = (\lambda/4\pi)\ \delta\phi_c$ et $\delta\phi_c$ est le retard de phase du premier quadrant. Le masque de phase ainsi défini a une périodicité de π rad; pour fixer les idées, nous appellerons cette fonction une phase en couronne-π.

La figure 12b montre le profil d'éclairement résultant au foyer, avec $\delta\phi_c = 0.4$ rad et une orientation $\beta_c = 45°$. Une structure en double lobe apparait bien, très semblable à celle

induite par l'astigmatisme, chacune étant essentiellement le résultat visuel de l'existence d'interférences avec les bandes latérales $l = \pm 2$. L'angle de l'axe entre les lobes provient de notre choix de l'orientation β_c, et d'une valeur de piston $\delta\phi_c$ positive.

La figure 12c présente le profil final d'intensité au foyer, lorsqu'à la fois la phase d'astigmatisme en selle de cheval de l'équation (17), et la phase en couronne-π correspondant à la figure 12b sont imposées sur le front d'onde. L'allure en anneau régulier est essentiellement restaurée; numériquement nous remarquons que ceci se produit lorsque les composantes de ($p = 1$,$l = -1$) et de ($p = 1$,$l = 3$) ont des valeurs proches. La pureté du mode ($p = 0$,$l = 1$) décroît à 86% dans ce cas. Ceci illustre le défaut évident de l'imposition d'une telle phase en couronne-π : des modes spatiaux élevés à très élevés sont excités par les nouvelles discontinuités du front d'onde, si bien que l'atténuation des défauts d'ordre bas se produit au prix d'une perte d'énergie dans des défauts d'ordre élevé. Néanmoins, du point de vue d'un expérimentateur, il peut être avantageux de perdre quelques pourcents d'énergie, mais de disposer de la flexibilité d'atténuer les effets d'un astigmatisme faible, et d'améliorer la symétrie circulaire globale de l'anneau d'intensité. En effet, la plupart des systèmes laser bénéficient d'au moins un miroir adaptatif dans la chaine, si bien que l'astigmatisme du faisceau en fin de chaine est généralement faible – ce qui constitue précisément la condition pour laquelle cette correction ultime peut être appliquée de manière efficace, avec une faible perte d'énergie vers des modes spatiaux élevés.

La phase en couronne-π n'est pas la seule qui puisse être mise en oeuvre sur un miroir 4-quadrants pauci-adaptatif; n'importe quelle combinaison de piston, et d'angles d'inclinaison axiaux ou diagonaux ayant une périodicité de π rad excite des bandes latérales $l = \pm 2$. Un miroir à N facettes triangulaires, avec N = 6, pourrait par exemple être exploité pour atténuer les effets d'une aberration d'ordre plus élevé, le trifoil. Une telle discussion sort toutefois du champ de ce travail.

V. Conclusion

Dans cette étude de conception optique, nous avons déterminé numériquement si un nouveau dispositif optique basé sur N miroirs individuels tuilés dans une configuration spiralée pouvait permettre de générer efficacement des faisceaux vortex optiques. Nous nous sommes particulièrement intéressés au cas d'un miroir 4-quadrants; les résultats semblent très prometteurs, dans la mesure où les phases imposées par les pistons et les inclinaisons diagonales permettent d'atteindre des puretés modales de $\mathcal{LG}_{0\,1}$ jusqu'à 91%, si le faisceau incident est un pur faisceau Gaussien TEM_{00}, et 86% dans le cas d'un mode super-Gaussien. La première de ces valeurs est proche du taux de conversion optimal de 93% prédit pour une optique idéale de phase spiralée.

Nous avons étudié d'autres valeurs du moment cinétique orbital cible, et d'autres nombres de facettes : N=2, mais aussi des valeurs de N plus élevées pour générer des faisceaux de charges topologiques supérieures. Néanmoins, le principal intérêt du dispositif nous semble rester le cas d'un miroir 4-quadrants, utilisé pour des charges topologiques l 1 ou 2.

D'un point de vue expérimental, le miroir 4-quadrants tuilé en spirale présente un ensemble d'avantages pratiques :

1) il peut être mis en oeuvre sur la base de miroirs carrés commerciaux de taille arbitraire, avec des traitements de surface arbitraires, ce qui le rend idéal pour des faisceaux de grande taille, pour lesquels l'approvisionnement de lames ou de miroirs de phase spiralée est difficile;
2) l'angle d'incidence peut être choisi à volonté;
3) il peut être réglé facilement et créer différentes charges topologiques, sans le moindre changement dans le dispositif global. Des charges topologiques élevées peuvent être obtenues sur la base de dispositifs avec un nombre élevé de facettes;
4) tout miroir endommagé peut être remplacé individuellement;
5) la génération de vortex d'ordres fractionnaires, donc un mélange contrôlé de modes de Laguerre-Gauss, peut être explorée;
6) enfin, ce dispositif pauci-adaptatif peut être utilisé comme miroir adaptatif de dernier recours, permettant d'obtenir des ajustements fins pour compenser la présence de bandes latérales de moment cinétique, connues pour dégrader le profil d'intensité du vortex au foyer.

A partir de cette étude de conception optique, plusieurs voies existent pour aller vers une mise en oeuvre expérimentale, et pour la définition de procédures d'alignement. Le dispositif que nous proposons pourra bénéficier pour cela de l'expérience gagnée dans les travaux sur le tuilage de miroirs des très grands télescopes, ou le tuilage des réseaux de diffraction des lasers à amplification à dérive de fréquence. Réussir cette mise en oeuvre expérimentale pourrait s'avérer très utile aux développements de nouveaux champs de recherche au sein de la physique de l'interaction laser-plasma, comme le couplage entre vortex optiques de haute énergie et champs magnétiques dans des plasmas chauds [1], [4], [5].

Acknowledgment

G. Fauvel remercie l'Institut de Physique de l'Académie Tchèque des Sciences pour son financement. Les auteurs remercient également l'Ecole Universitaire de Recherche Light S&T pour son soutien financier, Mlle Lise Brigot et Mme Julie Camus pour leur aide, R. Bouillaud, L. Merzeau, G. Corde et R. Ferrère pour le soutien technique et informatique.

References

[1] R. Nuter, P. Korneev, I. Thiele, and V. Tikhonchuk, "A plasma solenoid driven by an Orbital Angular Momentum laser beam," *Physical Review E*, vol. 98, no. 3, p. 033211, Sep. 2018, arXiv: 1804.03574.

[2] F. Sanson, A. K. Pandey, F. Harms, G. Dovillaire, E. Baynard, J. Demailly, O. Guilbaud, B. Lucas, O. Neveu, M. Pittman, D. Ros, M. Richardson, E. Johnson, W. Li, Ph. Balcou, and S. Kazamias, "Hartmann wavefront sensor characterization of a high charge vortex beam in the extreme ultraviolet spectral range," *Opt. Lett.*, vol. 43, no. 12, pp. 2780–2783, Jun 2018.

[3] E. V. Vasilyev, S. A. Shlenov, and V. P. Kandidov, "The multifocus structure of radiation upon femtosecond filamentation of an optical vortex in a medium with an anomalous group velocity dispersion," *Optics and Spectroscopy*, vol. 126, no. 3, pp. 16–24, 2019.

[4] D. R. Blackman, R. Nuter, P. Korneev, and V. T. Tikhonchuk, "Nonlinear Landau damping of plasma waves with orbital angular momentum," *Phys. Rev. E*, vol. 102, p. 033208, 2020.

[5] Y. Shi, D. R. Blackman, D. Stutman, and A. Arefiev, "Generation of ultra-relativistic monoenergetic electron bunches via a synergistic interaction of longitudinal electric and magnetic fields of a twisted laser," *Physical Review Letters*, vol. 126, p. 234801, 2021.

[6] M. W. Beijersbergen, R. P. C. Coerwinkel, and M. Kristensen, "Helical-wavefront laser beams produced with a spiral phase plate," *Optics Communications*, p. 7, 1994.

[7] K. Sueda, G. Miyaji, N. Miyanaga, and M. Nakatsuka, "Laguerre-Gaussian beam generated with a multilevel spiral phase plate for high intensity laser pulses," *Opt. Express*, p. 6, 2004.

[8] A. Longman, C. Salgado, G. Zeraouli, J. I. Apiñaniz, J. Antonio Pérez-Hernández, M. K. Eltahlawy, L. Volpe, and R. Fedosejevs, "Off-axis spiral phase mirrors for generating high-intensity optical vortices," *Optics Letters*, vol. 45, no. 8, p. 2187, Apr. 2020.

[9] J. Y. Bae, C. Jeon, K. H. Pae, C. M. Kim, H. S. Kim, I. Han, W.-J. Yeo, B. Jeong, M. Jeon, D.-H. Lee, D. U. Kim, S. Hyun, H. Hur, K.-S. Lee, G. H. Kim, K. S. Chang, I. W. Choi, C. H. Nam, and I. J. Kim, "Generation of low-order Laguerre-Gaussian beams using hybrid-machined reflective spiral phase plates for intense laser-plasma interactions," *Results in Physics*, vol. 19, p. 103499, Dec. 2020.

[10] D. Pal Ghai, P. Senthilkumaran, and R. S. Sirohi, "Adaptive helical mirror for generation of optical phase singularity," *Applied Optics*, vol. 47, no. 10, p. 1378, Apr. 2008.

[11] R. K. Tyson, M. Scipioni, and J. Viegas, "Generation of an optical vortex with a segmented deformable mirror," *Applied Optics*, vol. 47, no. 33, p. 6300, Nov. 2008.

[12] A. Cotel, M. M. Castaing, P. P. Pichon, and C. Le Blanc, "Phased-array grating compression for high-energy chirped pulse amplification lasers," *Optics Express*, vol. 15, no. 5, 2007.

[13] E. Hecht, *Optics*, 4th ed. Addison Wesley, 2002.

[14] A. D'Errico, R. D'Amelio, B. Piccirillo, F. Cardano, and L. Marrucci, "Measuring the complex orbital angular momentum spectrum and spatial mode decomposition of structured light beams," *Optica*, vol. 4, no. 11, p. 1350, Nov. 2017.

[15] A. Longman and R. Fedosejevs, "Mode conversion efficiency to Laguerre-Gaussian OAM modes using spiral phase optics," *Optics Express*, vol. 25, no. 15, p. 17382, Jul. 2017.

[16] N. Jourdain, U. Chaulagain, M. Havlík, D. Kramer, D. Kumar, I. Majerová, V. T. Tikhonchuk, G. Korn, and S. Weber, "The L4n laser beamline of the P3-installation: Towards high-repetition rate high-energy density physics at ELI-Beamlines," *Matter and Radiation at Extremes*, vol. 6, no. 1, p. 015401, Jan. 2021.

[17] A. Y. Bekshaev, M. S. Soskin, and M. V. Vasnetsov, "Optical vortex symmetry breakdown and decomposition of the orbital angular momentum of light beams," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 20, no. 8, p. 1635, Aug. 2003.

[18] F. Sanson, A. K. Pandey, I. Papagiannouli, F. Harms, G. Dovillaire, E. Baynard, J. Demailly, O. Guilbaud, B. Lucas, O. Neveu, M. Pittman, D. Ros, M. Richardson, E. Johnson, W. Li, Ph. Balcou, and S. Kazamias, "Highly multimodal structure of high topological charge extreme ultraviolet vortex beams," *Optics Letters*, vol. 45, no. 17, p. 4790, Sep. 2020.

[19] J. Courtial, K. Dholakia, L. Allen, and M. J. Padgett, "Second-harmonic generation and the conservation of orbital angular momentum with high-order Laguerre-Gaussian modes," *Phys. Rev. A*, p. 4, 1997.