



**HAL**  
open science

# Géométrisation des univers quantifiables

Jean louis Jonot

► **To cite this version:**

| Jean louis Jonot. Géométrisation des univers quantifiables : Quantique. 2023. hal-04116617

**HAL Id: hal-04116617**

**<https://cnrs.hal.science/hal-04116617>**

Preprint submitted on 4 Jun 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# GÉOMÉTRISATION DES UNIVERS QUANTIFIABLES

JONOT JEAN LOUIS

ABSTRACT. In this article, an approach to the physical universe is introduced using the notion of string field. This representation allows to describe the particles of the physical universe as string that evolve on an universe surface along a chronological field. The notion of time disappears to reveal a notion of own time associated with the particle. The finitude axiom allows to define the notion of quantifiable physical universe, this quantifiable universe for a pair  $(\mathcal{Z}, \mathcal{D})$  verifying the Dirac-Beltrami equation,

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{D}} \mathcal{Z} = \lambda \mathcal{Z}$$

where  $\mathcal{Z}$  is a section of  $\mathcal{F}(\xi_{\mathcal{C}})$ ,  $\mathfrak{D}_{\mathcal{D}}$  is the section of Dirac operators associated with the observable  $\mathcal{D}$  of  $\xi_{\mathcal{C}}$ .

## 1. INTRODUCTION

Un paire quantique est une paire  $(\mathcal{F}, \mathcal{D})$  pour laquelle  $\mathcal{F}$  est un fibré hilbertien de base  $\mathcal{W}$  qui est une variété connexe de dimension finie munie d'une métrique riemannienne, d'une fibre un espace de Hilbert  $H$  séparable en dimension infinie et d'une observable de Dirac  $\mathcal{D}$ , c'est-à-dire, d'une section du fibré  $\text{End}(\mathcal{F})$

$$\mathcal{D} : \mathcal{W} \longrightarrow \text{End}(\mathcal{F})$$

qui à chaque événement  $w \in \mathcal{W}$  associe un opérateur autoadjoint  $\mathcal{D}(w)$  de la fibre  $E_w(\mathcal{F})$ . L'espace  $H$  est l'espace des mesures faites sur les sections locales du fibré  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{W}$  est l'univers observable. Les applications de transition de  $\text{End}(\mathcal{F})$  sont définies par

$$\widehat{\tau_{\alpha\beta}}(w) u = \tau_{\alpha\beta}(w) u \tau_{\alpha\beta}^{-1}(w), \forall w \in W_{\alpha} \cap W_{\beta} \quad (1.1)$$

où  $\tau_{\alpha\beta}(w)$  sont les applications de transitions du fibré  $\mathcal{F}$ .

Le théorème de Von Neumann donne l'existence d'une bijection entre l'ensemble des opérateurs autoadjoints de  $H$  et l'ensemble des mesures spectrales. Cette bijection peut être décrite de la façon suivante, un projecteur  $P$  de  $H$  est un opérateur vérifiant

$$P = P^* \text{ et } P^2 = P,$$

une mesure spectrale est une application de l'ensemble des boréliens de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans l'ensemble des projecteurs

$$\mathfrak{m} : B \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{m}(B) = P_B$$

---

*Date:* 2023-06-02.

*2020 Mathematics Subject Classification.* 47B07, 47B15, 47B25, 47B93, 58A05, 58C40, 58D17, 51P05, 53B21, 53B30, 53C12, 53Z05..

*Key words and phrases.* Fibré de Bose-Fermi-Fock, section d'opérateurs de Dirac, section de Laplace-Beltrami, mesure spectrale, champ chronologique, champ en corde, observable locale, champ à singularités lisses.

pour laquelle

$$P_\emptyset = \mathbf{0}_H, P_{\mathbb{R}} = \mathbf{1}_H, \\ P_{B_1} P_{B_2} = P_{B_2} P_{B_1} = P_{B_1 \cap B_2}$$

et ayant la propriété d'additivité complète. On pose

$$d\mathbf{m}(\lambda) = P_{]-\infty, \lambda]}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

la bijection est définie par

$$\mathbf{m} \longrightarrow T$$

dont le domaine est donné par

$$\text{dom}(T) = \left\{ h \in H : \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \langle P_{]-\infty, \lambda]} h, h \rangle_H d\lambda \right| < +\infty \right\}$$

et  $T$  est l'unique opérateur autoadjoint vérifiant

$$\langle Th, k \rangle_H = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \langle P_{]-\infty, \lambda]} h, k \rangle_H d\lambda,$$

on le note

$$T = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda P_{]-\infty, \lambda]} d\lambda \text{ et } T(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda P_{]-\infty, \lambda]}(h) d\lambda, \forall h \in H.$$

A l'opérateur  $\mathcal{D}(w)$  on associe une mesure spectrale

$$P_{\mathcal{D}(w)} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(E_w(\mathcal{F})),$$

à chaque borélien  $B$  de  $\mathbb{R}$  on associe un projecteur  $P_{\mathcal{D}(w)}(B)$  de l'espace de Hilbert  $E_w(\mathcal{F})$ . Pour chaque couple de sections de  $\mathcal{F}$ ,  $(s, t) \in \Gamma(\mathcal{F})$  et chaque  $w \in \mathcal{W}$ , la mesure complexe  $\nu_{(s,t)}$  sur les boréliens de  $\mathbb{R}$  est définie par

$$\nu_{(s,t)}(w)(B) = \langle P_{\mathcal{D}(w)}(B)(s(w)) | t(w) \rangle_{E_w(\mathcal{F})},$$

on en déduit que pour chaque  $w \in \mathcal{W}$  et chaque  $s \in \Gamma(\mathcal{F})$ , l'existence d'une mesure sur les boréliens de  $\mathbb{R}$  définie par

$$\nu_s(w)(B) = \langle P_{\mathcal{D}(w)}(B)(s(w)) | s(w) \rangle_{E_w(\mathcal{F})}.$$

Si  $s$  est normalisée, c'est-à-dire,  $\|s(w)\|_{E_w(\mathcal{F})} = 1$ ,  $\nu_s(w)$  est une probabilité sur les boréliens de  $\mathbb{R}$ , notée  $P_{s, \mathcal{D}}$  avec  $P_{s, \mathcal{D}}(w) = \nu_s(w)$ . En utilisant la décomposition de Paul Levy,  $\nu_s$  s'écrit comme une somme de mesures

$$\nu_s(w) = \nu_s^{ac}(w) + \nu_s^p(w) + \nu_s^{sc}(w),$$

où  $\nu_s^{ac}(w)$  est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue,  $\nu_s^p(w)$  est une somme de mesures de Dirac et  $\nu_s^{sc}(w)$  est une mesure singulièrement continue. Pour la mesure  $\nu_s^{sc}(w)$ , la fonction de répartition est une fonction continue et la mesure n'est chargée que sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. Si

$$\nu_s(w) = \nu_s^p(w)$$

on dit que la section  $s$  a un spectre discret en  $w$  et si

$$\nu_s(w) = \nu_s^{ac}(w),$$

on dit que la section  $s$  a un spectre continu en  $w$ . Dans l'hypothèse où

$$\nu_s(w) = \nu_s^{sc}(w),$$

le spectre de  $s$  est dit singulier en l'événement  $w$ .

## 2. AXIOMATIQUE DE LA QUANTIFICATION

Dans ce qui suit, on identifie l'univers des particules aux champs locaux  $\chi$  de  $\mathcal{W}$  où  $\mathcal{W}$  est l'univers que l'on représente comme l'espace de base du fibré d'état  $\mathcal{F}$ . Si l'espace  $\mathcal{W}$  est muni d'une métrique lorentzienne locale, cette métrique permet de définir des champs chronologiques et des champs espaces locaux. Les sections locales du fibrés  $\mathcal{F}$  forment l'espace des états possibles de  $\chi$ ,  $\mathcal{F}$  est le fibré des états ou fibré d'état. Par rapport à une observable  $\mathcal{D}$ , ces états vérifient l'axiomatique suivante.

**Axiom 1.** *L'état d'un champ local  $\chi$  de  $\mathcal{W}$  est défini par une section locale  $s$  du fibré d'état  $\mathcal{F}$ .*

**Axiom 2.** *A tout champ  $\chi$  est associé une observable de Dirac  $\mathcal{D}$ .*

**Axiom 3.** *Les seules mesures possibles, en l'événement  $w$ , sur un champ  $\chi$  pour cette observable  $\mathcal{D}$ , sont les valeurs propres de  $\mathcal{D}(w)$ .*

**Axiom 4.** *Si  $\mathfrak{s}$  représente l'état normalisé de  $\chi$ , la probabilité de trouver la valeur  $\lambda(w)$  dans le borélien  $\Delta(w)$  lors d'une mesure sur  $\chi$  en  $w$  est*

$$p_{\mathcal{D}}(w) = P_{\mathfrak{s}, \mathcal{D}}(w)(\Delta(w))$$

avec  $\Delta(w) = ]\lambda_1(w), \lambda_2(w)]$  si le spectre  $\mathfrak{s}$  est "continu". Si le spectre est "discret", cette probabilité est

$$p_{\mathcal{D}}(w) = P_{\mathfrak{s}, \mathcal{D}}(w)(\{\lambda(w)\}).$$

**Axiom 5.** *L'état du champ immédiatement, après une mesure ayant donnée en  $w$  la valeur  $\lambda(w)$ , est donnée par la section*

$$P_{E_{\lambda}}(s)(w) = P_{E_{\lambda(w)}}s(w)$$

avec  $P_{E_{\lambda(w)}}$  est le projecteur sur le sous-espace propre  $E_{\lambda(w)}$  associé à la valeur propre  $\lambda(w)$ .

**Axiom 6.** *L'équation d'évolution locale sur un voisinage  $W$  de  $\mathcal{W}$  de l'état d'un champ  $\chi$  pour l'observable  $\mathcal{D}$  est*

$$\mathcal{D}(w)(s(w)) = \lambda(w)s(w), \forall w \in W \subset \mathcal{W} \quad (2.1)$$

où  $\lambda$  est une fonction propre locale de  $\mathcal{D}$ .

**Definition 1.** *Un état  $\mathcal{D}$ -observable  $s$  est un état qui vérifie les axiomes précédents.*

Si l'on fait une mesure sur un état  $\mathcal{D}$ -observable  $s$ , l'état perturbé par cette mesure est encore un état  $\mathcal{D}$ -observable. On remarque en particulier que, en  $w$ , l'état transformé est un vecteur propre  $P_{E_{\lambda}}(s)(w)$  de  $\mathcal{D}(w)$ . Comment le changement d'état en  $w$  s'étend-t-il en un changement de l'état initial  $s$  dans un voisinage de  $w$ ? Dans le cas d'une observable compacte, on a une réponse sous l'hypothèse que  $\mathcal{D}$  soit  $C^0$ -stable et a la propriété des graphes disjoints. La  $C^p$ -stabilité pour un opérateur  $\mathcal{D}$  est définie par la propriété suivante, si  $s$  est une section de classe  $C^p$  alors  $\mathcal{D}(s)$  est une section de classe  $C^p$  pour  $p \in \mathbb{N}$ . Si  $s$  vérifie l'équation d'évolution 2.1 alors  $\lambda$  est de classe  $C^p$  si  $s$  est de classe  $C^p$ .

**Definition 2.** *Une observable  $\mathcal{D}$  est compacte si pour tout événement  $w$ ,  $\mathcal{D}(w)$  est un opérateur compact.*

Pour une observable compacte, sur chaque fibre  $E_w(\mathcal{F})$ , il existe une suite de valeurs propres positives  $\{\lambda_n(w)\}$  strictement décroissante qui tend vers 0. L'ordre de multiplicité de  $\lambda_n(w)$  est la dimension du sous-espace propre associé à  $\lambda_n(w)$ . On définit ainsi une suite de fonction  $\{\lambda_n\}$  sur l'univers  $\mathcal{W}$  vérifiant

$$\lambda_{n+1} < \lambda_n \text{ et } \lim_n \lambda_n = 0.$$

On fait l'hypothèse supplémentaire que  $\mathcal{D}$  vérifie la propriété des graphes disjoints, c'est-à-dire que les fonctions  $\lambda_n$  ont des graphes deux à deux disjoints, alors la seule fonction propre  $\lambda$  associée à une section  $\mathcal{D}$ -observable  $s$  de classe  $C^p$  est de la forme  $\lambda = \lambda_n$  pour un unique entier  $n$  car  $\lambda(w) \in \{\lambda_n(w)\}$  et  $\lambda$  est de classe  $C^p$  sur un voisinage  $W$  de  $w$ . Pour une section  $\mathcal{D}$ -observable  $s$ , si on fait une mesure  $\lambda(w)$  en  $w$ , le changement d'état en  $w$  va s'étendre dans un voisinage  $W$  de  $w$  sous la forme

$$\mathbf{s}(w) = P_{E_{\lambda_n}}(s)(w), \forall w \in W$$

où  $\lambda_n$  est l'unique fonction propre de  $\mathcal{D}$  sur  $W$  vérifiant  $\lambda_n(w) = \lambda(w)$ .

Si l'hypothèse sur les graphes n'est pas vérifiée, la situation est plus compliquée. Soit  $w_t$  un chemin allant de l'événement  $w_0$  à  $w_1$  et posons  $\tilde{\lambda}(t) = \lambda(w_t)$ ,  $\tilde{\lambda}$  est une fonction continue de  $[0, 1]$  à valeurs dans  $]0, +\infty[$ . Aux points d'intersection des graphes des fonctions  $\tilde{\lambda}_n(t) = \lambda_n(w_t)$  et  $\tilde{\lambda}_m(t) = \lambda_m(w_t)$ , le graphe de  $\tilde{\lambda}$  peut passer du graphe  $\tilde{\lambda}_n$  à celui de  $\tilde{\lambda}_m$ .

**Remark 1.** *Pour une observable compacte, la probabilité de trouver une mesure  $\lambda$  en  $w$ , entre  $\mu_0$  et  $\mu_1$  avec  $0 < \mu_0 < \mu_1$  et  $\mu_1 \ll 0$ , est petite car il y a un grand nombre d'entiers  $n$  pour lesquelles  $\lambda_n(w) \in ]\mu_0, \mu_1]$ . On peut estimer cette probabilité à  $\frac{1}{N}$  où  $N$  est l'entier défini par*

$$N = \# \{n : \lambda_n(w) \in ]\mu_0, \mu_1]\}.$$

### 3. CONNEXION DE KOSZUL ET SECTION DE DIRAC

Lorsque que l'on veut décrire l'évolution d'un état  $s$  d'un champ local on fait intervenir une connexion de Koszul  $\nabla$  sur le fibré d'état  $\mathcal{F}$ . L'observable de Dirac est définie comme la composée de la section de Dirac avec la connexion de Koszul,

$$\mathcal{D} = \gamma \circ \nabla \tag{3.1}$$

où la connexion de Koszul  $\nabla$  est définie par

$$\nabla : \Gamma(\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(\xi_{\mathbb{C}}^* \otimes \mathcal{F}), \quad \nabla s : \Gamma(\xi) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{F})$$

$\nabla s$  est  $\mathbb{C}$ -linéaire sur chaque fibre,  $\xi_{\mathbb{C}}^*$  est le complexifié du dual du fibré tangent  $\xi$  et  $\nabla$  vérifie la formule de Leibniz

$$\nabla(\phi s) = d\phi \otimes s + \phi \nabla s.$$

On pose

$$\nabla_X : \Gamma(\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{F}), \quad \nabla_X s = \nabla s(X)$$

la formule de Leibniz s'écrit

$$\nabla_X(\phi s) = d\phi(X) s + \phi \nabla_X(s),$$

$d\phi(X)$  représente la dérivée de Lie de  $\phi$  le long du champ  $X$ . La section de Dirac est définie comme la "pseudo réciproque" de  $\nabla$  à unité  $\mathcal{D}$  (3.1). Cette section est un morphisme de fibrés

$$\gamma : \Gamma(\xi_{\mathbb{C}}^* \otimes \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{F})$$

vérifiant

$$\gamma^{d\phi} = [\phi, \gamma] \circ \nabla$$

où  $[\phi, \gamma]$  est définie par

$$[\phi, \gamma]s = \phi\gamma(s) - \gamma(\phi s), \forall s \in \Gamma_{\text{loc}}(\xi_{\mathbb{C}}^* \otimes \mathcal{F}), \forall \phi \in C^\infty(\mathcal{W}, \mathbb{C})$$

et

$$\gamma^d : \Gamma(\mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{F}), \gamma^d(s) = \gamma(d \otimes s)$$

est l'opérateur de Dirac associé à la section  $d$  de  $\xi_{\mathbb{C}}^*$ .

On se fixe une carte de trivialisations  $W$  de  $\xi$  et  $\mathcal{F}$ . Soit  $\{e_n\}$  une section de bases hilbertiennes et  $\{d^\mu\}$  une section de bases duales sur  $W$  alors  $\{d^\mu \otimes e_n\}$  est une section locale de bases du fibré  $\xi_{\mathbb{C}}^* \otimes \mathcal{F}$ .

**Theorem 1.** *Localement, pour les bases  $\{d^\mu\}$  et  $\{d^\mu \otimes e_n\}$  on a*

$$\nabla e_n = \nabla_{n\mu}^m d^\mu \otimes e_m \text{ avec } \sum_{m,\mu} |\nabla_{n\mu}^m(w)|^2 < +\infty, \forall w \in W$$

et

$$\gamma^\mu(e_m) = \gamma_m^{\mu p} e_p \text{ avec } \sum_p |\gamma_m^{\mu p}(w)|^2 < +\infty, \forall w \in W,$$

si les sections d'opérateurs de Dirac  $\gamma^\mu$  sont autoadjointes alors  $\mathcal{D}$  est autoadjointe quand

$$\nabla_{m\mu}^p \overline{\gamma_l^{\mu p}} = \overline{\nabla_{l\mu}^p} \gamma_m^{\mu p}, \forall p, m, l. \quad (3.2)$$

*Proof.* On a

$$\mathcal{D}e_n = \mathcal{D}_n^p e_p \text{ avec } \mathcal{D}_n^p = \nabla_{n\mu}^m \gamma_m^{\mu p} \text{ et } \sum_p |\nabla_{n\mu}^m(w) \gamma_m^{\mu p}(w)|^2 < +\infty, \forall w \in W.$$

L'opérateur  $\gamma^\mu$  est autoadjoint si

$$\begin{aligned} \langle \gamma^\mu e_m, e_l \rangle &= \langle e_m, \gamma^\mu e_l \rangle, \forall m, l \\ \gamma_m^{\mu p} \langle e_p, e_l \rangle &= \overline{\gamma_l^{\mu p}} \langle e_m, e_p \rangle \\ \gamma_m^{\mu p} \delta_{pl} &= \overline{\gamma_l^{\mu p}} \delta_{pm} \text{ ou encore } \gamma_m^{\mu l} = \overline{\gamma_l^{\mu m}}, \end{aligned}$$

$\mathcal{D}$  est une section autoadjointe si

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}e_m, e_l \rangle &= \langle e_m, \mathcal{D}e_l \rangle, \forall m, l \\ \nabla_{m\mu}^k \gamma_k^{\mu p} \delta_{pl} &= \overline{\nabla_{l\mu}^k} \gamma_k^{\mu p} \delta_{pm} \text{ ou encore } \nabla_{m\mu}^k \gamma_k^{\mu l} = \overline{\nabla_{l\mu}^k} \times \gamma_k^{\mu m} \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} \nabla_{m\mu}^k \gamma_k^{\mu p} \delta_{pl} &= \nabla_{m\mu}^k \overline{\gamma_l^{\mu p}} \delta_{kp} = \nabla_{m\mu}^p \overline{\gamma_l^{\mu p}} \\ \overline{\nabla_{l\mu}^k} \times \gamma_k^{\mu p} \delta_{pm} &= \overline{\nabla_{l\mu}^k} \gamma_m^{\mu p} \delta_{pk} = \overline{\nabla_{l\mu}^p} \gamma_m^{\mu p} \end{aligned}$$

et on a

$$\nabla_{m\mu}^p \overline{\gamma_l^{\mu p}} = \overline{\nabla_{l\mu}^p} \gamma_m^{\mu p}.$$

□

Dans ce qui suit on suppose que la section de Dirac  $\gamma$  est une section à trace et autoadjointe. La section  $\gamma$  est à trace si pour toute section  $d$  de  $\xi_{\mathbb{C}}^*$  la section formée d'opérateurs de Dirac  $\gamma^d$  est à trace sur chaque fibre de  $\mathcal{F}$ . La section  $\gamma$  est autoadjointe si la section  $\gamma^d$  est formée d'opérateurs autoadjoints sur chaque fibre. Avec cette définition on peut définir une pseudo-métrique sur chaque carte de trivialisations  $W$  des fibrés  $\xi$  et  $\mathcal{F}$ . Sur une carte de trivialisations  $W$  de  $\xi$  et  $\mathcal{F}$ , on se fixe une section locale  $\{\partial_\mu\}$  et la section duale  $\{d^\nu\}$  définie par

$$d^\nu(\partial_\mu) = \delta_\mu^\nu$$

les sections d'opérateurs  $\gamma^\nu = \gamma^{d^\nu}$  définissent le tenseur de Poisson en posant

$$\gamma^{\mu\nu} = \text{Trace}(\gamma^\mu \gamma^\nu)$$

ce tenseur est symétrique, les fonctions  $\gamma^{\mu\nu}$  sont réelles sur  $W$ . Si ce tenseur définit une métrique sur  $W$ , on dit que  $\gamma$  est métrisable. La métrique est définie par

$$g(\partial_\mu, \partial_\nu) = \frac{1}{\dim \mathcal{W}} \gamma^{\mu\nu},$$

si  $g$  est une métrique riemannienne, respectivement lorentzienne alors  $\gamma$  est une section de Dirac riemannienne, respectivement lorentzienne. Dans le cas de la dimension 4, si  $g$  a pour signature  $(-, -, +, +)$  sur  $W$ , la métrique est dite métrique de Fermi. Dans le cas riemannien, on peut étendre les métriques riemanniennes locales en une métrique riemannienne sur l'univers  $\mathcal{W}$ . Pour une section de Dirac métrisable, on note  $\nabla$  la connexion de Levi-Civita associée à la métrique  $g$ .

**Definition 3.** *Une section de Dirac-Einstein est une section métrisable qui vérifie l'équation relativiste d'Einstein*

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\gamma^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu} + \Lambda\gamma^{\mu\nu}$$

où  $R^{\mu\nu}$  est le tenseur de Ricci associé à  $\nabla$ ,  $R$  est la courbure scalaire,  $T^{\mu\nu}$  le tenseur énergie-impulsion. Les constantes  $c$ ,  $\Lambda$  et  $G$  sont les constantes universelles.

Dans l'univers d'Einstein, les observables permises sont de la forme  $\mathcal{D} = \nabla \circ \gamma$  où  $\gamma$  est une section de Dirac-Einstein.

#### 4. UNIVERS QUANTIQUE

En dimension 4, sur le complexifié du fibré tangent  $\xi_{\mathbb{C}}$ , chaque métrique riemannienne  $g_R$  induit une structure de fibré hermitien, en posant

$$\langle X, Y \rangle = g_R(X, Y)$$

pour tous les champs  $X$  et  $Y$  réels. On se fixe, sur  $W$ , une section locale de bases  $\{\partial_\mu\}$ . La section locale de bases duales relativement à  $g_R$  est définie par

$$d^\mu(X) = g_R(X, \partial_\mu)$$

pour tout champ local  $X$ . On munit le fibré hermitien  $\xi_{\mathbb{C}}$  d'une section de Dirac  $\gamma$  métrisable Lorentzienne. Les opérateurs de Dirac  $\gamma^\mu = \gamma^{d^\mu}$  sont autoadjoints et le tenseur de Poisson

$$\gamma^{\mu\nu} = \text{Trace}(\gamma^\mu \gamma^\nu)$$

induit une métrique Lorentzienne locale sur  $W$  en posant

$$g_L(\partial_\mu, \partial_\nu) = \frac{1}{4} \gamma^{\mu\nu}.$$

On note  $\nabla$  le complexifié de la connexion de Levi-Civita associée à la métrique  $g_L$  et on pose  $\mathcal{D} = \nabla \circ \gamma$ .

**Theorem 2.** *Si  $\gamma$  est une section vérifiant 3.2 alors  $\mathcal{D}$  est une observable locale.*

La section locale d'opérateurs  $\mathcal{D}$  n'est pas, en général, une observable. Les sections d'opérateurs  $\{\gamma^\mu\}$  sont des observables locales, l'équation d'évolution d'un champ local complexe  $Z$  le long du champ  $\partial$  s'écrit

$$\gamma^d(Z) = \lambda^d Z, \quad d(X) = g_R(X, \partial), \quad (4.1)$$

$\lambda^d$  est une fonction définie sur  $W$  strictement positive. L'évolution globale d'un champ complexe  $Z$  sur  $W$  est de la forme

$$\mathcal{D}(Z) = \lambda Z, \quad (4.2)$$

$\lambda$  est définie sur  $W$ . Pour une observable locale  $\mathcal{D}$ , les champs complexes  $Z$  pour lesquels 4.2 est vérifiée sont dits mesurables. Pour un champ  $\partial$ , si l'équation 4.1 est vérifiée, le champ complexe local  $Z$  est dit mesurable le long du champ  $\partial$ . On dira simplement qu'il est  $\partial$ -mesurable.

Dans ce qui suit, on définit la notion d'univers quantique et on propose une représentation géométrique dans l'espace-temps d'Einstein sous forme de corde. La notion de champ en corde permet cette approche.

**Definition 4.** *Un champ en **corde** est un champ complexe local  $Z = X + iT$ ,  $X$  et  $T$  sont des champs réels tels que*

$$[X, T] \in \text{Vect}\{X, T\} \text{ avec } \dim \text{Vect}\{X, T\} = 2$$

où  $[X, T]$  est le crochet de Lie. Un champ en **corde chronologique** est un champ en corde pour lequel  $X$  est un champ espace et  $T$  est un champ chronologique.

**Remark 2.** *Pour un champ en corde chronologique,  $\dim(\text{Vect}\{X, T\}) = 2$ . On peut comparer cette définition à celle donnée dans [5].*

La fonction complexe locale  $\phi = \alpha + i\beta$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont définies par

$$[X, T] = \alpha X + \beta T \quad (4.3)$$

est l'onde associée associée au champ  $Z$ . L'application  $\text{Tan}_Z$  définie localement par

$$w \in W \longrightarrow \text{Tan}_Z(w) = \text{Vect}\{X(w), T(w)\}$$

est un système de Pfaff local sur  $W$ . Ce système est complètement intégrable. En chaque événement  $w \in W$ , il existe une surface connexe maximale  $S$  pour laquelle  $w \in S$  et  $S$  est une intégrale de  $\text{Tan}_Z$ . Pour un champ en corde chronologique, les intégrales maximales connexes associées au système Pfaff

$$w \in S \longrightarrow \text{Tan}_X(w) = \text{Vect}\{X(w)\}$$

sont des cordes possibles  $\zeta$  sur  $S$ , difféomorphe à  $\mathbb{S}^1$  ou  $\mathbb{I} = ]0, 1[$  dites respectivement fermées et ouvertes. Dans le cas des cordes ouvertes, on définit les fermetures relatives

$$\mathbb{I}_1 = ]0, 1], \mathbb{I}_0 = ]0, 1[ \text{ et } \mathbb{I}_{0,1} = [0, 1]$$

ces fermetures sont des cordes possibles si on retire à la surface  $S$  des disques ouverts ou fermés. Une corde  $\zeta$  est la représentation géométrique de la notion de particule en physique. La surface  $S$  est la trajectoire de cette particule  $\zeta$  le long du champ chronologique  $T$ . Par exemple, si la trajectoire est un tore, les petits cercles représentent la particule en déplacement et les grands cercles représentent les

courbes intégrales du champ chronologique (ou inversement), cette représentation est une représentation cyclique.

On peut remarquer, qu'avec cette définition, une particule peut être en deux événements distincts  $w_0$  et  $w_1$  simultanément et que chaque particule a un temps propre associé à son champ chronologique  $T$ . On pointe la particule  $\varsigma$  en l'événement  $w_0$ , on note  $\varsigma_0$  cette particule pointée. Pour une particule  $\varsigma$  qui se déplace localement sur la surface  $S$ ,  $w_0$  se déplace le long de la courbe intégrale de  $T$  de  $w_0$  à  $w_1$ . Si  $\varsigma_1$  est la position de la particule  $\varsigma$  pointée en  $w_1$  alors  $\varsigma_1$  est la courbe intégrale du champ  $X$  contenant  $w_1$ . Une corde  $\varsigma$  est une feuille connexe du feuilletage de  $S$  associée au champ espace  $X$ , les feuilles chronologiques définies par le champ chronologique  $T$  sont les trajectoires de la particule pointée.

Soit  $S$  une surface d'univers d'un champ en corde chronologique et  $\text{in} : S \rightarrow \mathcal{W}$ , l'inclusion de  $S$  dans  $\mathcal{W}$ . L'application tangente de  $\text{in}$  en  $w$ ,

$$T_w \text{in} : T_w S \rightarrow T_w \mathcal{W}$$

est un isomorphisme de  $T_w S$  sur  $\text{Vect} \{X(w), T(w)\}$ . Par la suite, on identifie  $T_w S$  et  $\text{Vect} \{X(w), T(w)\}$  à l'aide de cet isomorphisme. On définit les deux 1-formes  $\lambda$  et  $\mu$  sur  $S$  par  $\lambda(w)(u) = \alpha$  et  $\mu(w)(u) = \beta$  pour

$$T_w \text{in}(u) = \alpha X(w) + \beta T(w),$$

ces deux 1-formes définissent la 2-forme  $\sigma = \lambda \wedge \mu$  sur  $S$ . Avec les notations précédentes, on remarque que

$$\sigma(X, T) = 1,$$

la surface  $S$  est orientable et on prend pour orientation l'orientation induite par la section des bases  $\{X, T\}$  sur  $S$ .

**Definition 5.** *La tension de la feuille  $S$  est*

$$\mathcal{T}(S) = \int_S \sigma. \quad (4.4)$$

La tension est une quantité positive par le choix de l'orientation de  $S$ . La corde ne peut pas occuper toutes les surfaces d'univers, on suppose que les surfaces d'univers possibles  $S$  sont celles qui rendent minimale  $\mathcal{T}(S)$ . Il peut y avoir une infinité de surface d'univers avec une tension minimale.

**Definition 6.** *Un temps relatif sur  $S$  est une  $C^\infty$ -application  $\tau : S \rightarrow \mathbb{R}$  pour laquelle*

$$\text{Ker } d\tau = \mathbb{R}T,$$

*le temps relatif est constant en tout événement situé sur la corde.*

La condition nécessaire et suffisante pour que  $\tau$  soit un temps relatif sur  $S$  est que, pour tout  $w \in S \subset W$ , la dérivée de Lie le long du champ chronologique de l'application  $\tau$  vérifie  $\mathcal{L}_T \tau(w) = 0$ . Cette égalité est équivalente à l'existence d'une  $C^\infty$ -application  $f$  sur  $W$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  vérifiant  $d\tau = f\lambda$ . Le temps relatif est orienté positivement si  $f > 0$  sur  $S \setminus \{f = 0\}$ . Si  $\tau$  est orienté négativement,  $-\tau$  est orienté positivement. Si  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont deux temps relatifs sur  $S$  alors  $\tau_2 - \tau_1$  est un temps relatif sur  $S$ . Un temps relatif  $\tau$  est un temps propre quand  $f = 1$ . Si  $S \setminus \{f = 0\}$  n'est pas connexe, un temps relatif peut être positif sur une composante connexe et négatif sur l'autre. Dans la suite un temps relatif est tel que  $\{f = 0\}$  est vide ou une sous-variété de dimension 0 de  $S$ .

**Theorem 3.** *Il y a équivalence entre la 1-forme différentielle  $\lambda$  est exacte et  $S$  est muni d'un temps propre, tous les temps propres  $\tau$  de  $S$  sont les primitives de  $\lambda$ . Si  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont deux temps propres sur  $S$  alors  $\tau_2 - \tau_1$  est constante sur  $S$ .*

*Proof.* La fonction  $f$  est définie par  $f(w) = \mathcal{L}_T \tau(w)$ . Si  $f = 1$ ,  $d\tau = \lambda$ .  $\square$

**Definition 7.** *Le champ en corde  $Z$  est exacte sur la surface d'univers  $S$  si la 1-forme  $\lambda$  est exacte.*

Pour un champ en corde  $Z = X + iT$  qui est  $T$ -mesurable, on définit la masse de la corde  $\varsigma$  par

$$\mathcal{M}_\varsigma = \int_\varsigma m \mu \quad (4.5)$$

avec  $\mu = \iota_X \sigma$  qui est une forme volume sur  $\varsigma$  et  $m$  est la densité de masse définie par, si

$$d^T = g_R(\cdot, T) \text{ et } \gamma^T = \gamma^{dT}$$

alors

$$\gamma^T(Z) = mZ.$$

**Remark 3.** *On rappelle que  $\lambda = -\iota_T \sigma$  et  $\mu = \iota_X \sigma$ .*

La tension est définie par

$$\mathcal{T}_\varsigma = \int_\varsigma \mu = \int_\gamma \iota_X \sigma. \quad (4.6)$$

**Definition 8.** *Une corde complète  $\varsigma$  au temps  $t$  est l'union des composantes connexes de  $\tau^{-1}(t)$  où  $\tau$  est un temps relatif propre.*

Avec cette définition on peut faire la remarque suivante,

**Remark 4.** *En physique relativiste, l'énergie est proportionnelle à la masse de la corde complète avec un coefficient de proportionnalité positif, noté  $c^2$ ,*

$$E_\varsigma = \mathcal{M}_\varsigma c^2,$$

*pour un champ en corde exacte  $Z$  sur  $S$ , si on impose que l'énergie de chaque corde connexe est invariante sur  $S$  et vaut  $E_S$ , alors l'énergie d'une particule complète au temps  $t$  pour le temps propre  $\tau$  est*

$$E_t = k(t) E_S$$

*où  $k(t)$  est le nombre de cordes connexes composant cette particule complète. Si on passe d'un temps  $t$  à  $t + \Delta t$ , la variation d'énergie est*

$$\Delta E = (k(t + \Delta t) - k(t)) E_S = \Delta k(t) E_S.$$

*Pour un temps propre différent, on a*

$$\Delta E = \Delta k(t + \alpha) E_S,$$

*où la constante  $\alpha$  est la différence entre le nouveau et l'ancien temps propre. Ainsi, on a quantifié l'énergie en imposant une énergie constante sur chaque corde située sur la surface d'univers composant la corde complète. Si on utilise la formule de Planck*

$$E_\varsigma = h\nu$$

où  $\nu$  est la fréquence d'oscillation de la corde et  $h$  est la constante de Planck, alors les cordes ont même fréquence d'oscillation sur  $S$ . Les équations d'Einstein et Plank,  $E_\zeta = \mathcal{M}_\zeta c^2$  et  $E_\zeta = h\nu_\zeta$ , permettent d'écrire

$$\mathcal{E}_\zeta = \mathcal{M}_\zeta T_\zeta = \frac{h}{c^2} \quad (4.7)$$

qui est invariant,  $T_\gamma = \frac{1}{\nu_\gamma}$  est la période d'oscillation de la corde  $\gamma$ .

On se fixe une métrique riemannienne  $g_S$  canonique sur  $S$  définie par

$$g_S(X, X) = g_S(T, T) = 1 \text{ et } g_S(X, T) = g_S(T, X) = 0.$$

Avec cette métrique pour un temps propre,  $X = \text{grad } \tau$ . L'excitation globale de la surface d'univers de  $S$  est une section  $\mathfrak{e}$  de  $S$  à valeurs dans  $\text{Isom}_+(TS)$  qui à chaque événement  $w \in S$  associe une isométrie de  $(T_w S, g_S(w))$  conservant l'orientation. La restriction de cette section à une corde  $\zeta$  est l'excitation de cette corde sur  $S$ . On pose  $\mathcal{M}_w$  la matrice de  $\mathfrak{e}(w)$  dans la base  $\{X(w), T(w)\}$ , il existe une  $C^\infty$ -application  $\mathfrak{t} : S \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant

$$\mathcal{M}_w = \begin{pmatrix} \cos \mathfrak{t}(w) & -\sin \mathfrak{t}(w) \\ \sin \mathfrak{t}(w) & \cos \mathfrak{t}(w) \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Si  $\zeta$  est diffeomorphe à  $\mathbb{S}^1$  ou  $\mathbb{I} = [0, 1]$ , on prend un paramétrage par longueur d'arc  $\varrho : [0, l] \rightarrow \zeta$ , l'application  $\theta \circ \varrho : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  est prolongeable par périodicité sur  $\mathbb{R}$ , la période  $T_\zeta$  de cette fonction est la période d'excitation de la corde  $\zeta$ . La longueur de la corde  $l$  qui est la tension  $\mathcal{T}_\zeta$  de la corde vérifie

$$\mathcal{T}_\zeta = kT_\zeta, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

**Proposition 1.** *La tension de la corde  $\zeta$  est un multiple entier de la période  $T_\zeta$ .*

**Remark 5.** *La fréquence d'excitation de  $\zeta$  est  $\nu_\zeta = \frac{1}{T_\zeta}$ .*

Pour comprendre la notion de fréquence d'excitation d'une corde  $\zeta$ , on se place dans un voisinage de cette corde dans lequel il existe un temps propre  $\tau$ . On choisit l'unique temps propre pour lequel  $\zeta = \tau^{-1}(t_0)$  et on pose  $\zeta_0 = \zeta$ . Ensuite, on fait varier le temps propre de  $t_0$  à  $t_1$ . Si on pense  $\zeta_0$  comme une corde ouverte ou fermée qui évolue, sur la surface  $S$ , de  $\zeta_0 = \tau^{-1}(t_0)$  à  $\zeta_1 = \tau^{-1}(t_1)$  et on se fixe un événement  $w_{t_0}$  sur  $\zeta_0$ , cet événement décrit une trajectoire de  $w_{t_0}$  à  $w_{t_1} \in \zeta_1$ . On pose  $w_t \in \zeta_t = \tau^{-1}(t)$  un paramétrage de cette courbe. Le transport parallèle le long de cette courbe permet de définir une isométrie de  $\varsigma_{w_t, w_{t_0}} : T_{w_{t_0}} S \rightarrow T_{w_t} S$  pour tout  $t \in [t_0, t_1]$ , qui préserve l'orientation. On a

$$\varsigma_{w_{t_1}, w_{t_0}} = \varsigma_{w_{t_1}, w_t} \circ \varsigma_{w_t, w_{t_0}}.$$

L'événement marqué  $w$  sur  $\zeta_0 = \tau^{-1}(t_0)$  suit la trajectoire  $w_t$  pour laquelle

$$\mathfrak{e}(w_{t_1}) = \varsigma_{w_{t_1}, w_{t_0}} \circ \mathfrak{e}(w_0) \circ \varsigma_{w_{t_1}, w_{t_0}}^{-1}, \quad \forall t_0, t_1.$$

Si on se place sur la corde, il y a une excitation donnée en chaque événement  $w$  par  $\mathfrak{e}(w)$  et les déplacements suivant un temps propre, de chaque événement de la corde, vérifient 4.7. On en déduit la relation de quantification d'une corde,

$$\mathcal{M}_\zeta \mathcal{T}_\zeta = k \frac{h}{c^2}, \quad k \in \mathbb{N}^*. \quad (4.9)$$

**Remark 6.** *Pour un champ en corde, la notion de chronologie n'existe plus. La notion de surface d'univers continue à exister mais comment définir la notion de déplacement. Le déplacement peut être défini à partir d'une métrique lorentzienne qui fait du champ  $T$  un champ chronologique, cette métrique est construite à partir d'une métrique riemannienne définie sur l'univers  $W$ . La notion de particule reste une sous-variété aléatoire de dimension 1 de  $S$ . Aléatoire signifie que si on pointe cette particule en l'événement  $w$ , toutes les sous-variétés connexes de dimension 1 de  $S$  contenant  $w$  sont des candidats possibles pour cette particule si on ne définit pas de temps propre sur la surface d'univers  $S$ .*

## 5. INTERACTION ENTRE CHAMPS EN CORDE CHRONOLOGIQUE

Une observable de Lie est une observable locale  $\mathcal{D}$  telle que  $\mathcal{D}(w)$  est un morphisme de l'algèbre de Lie  $E_w(\xi_{\mathbb{C}})$ . Une observable de Lorentz est une observable locale qui conserve la structure espace temps. De façon précise, l'image d'un vecteur espace de  $u \in E_w(\xi)$  par  $\mathcal{D}(w)$  est un vecteur espace de  $E_w(\xi)$  et l'image d'un vecteur chronologique est un vecteur chronologique de  $E_w(\xi)$  pour une métrique lorentzienne locale dans une carte de  $\mathcal{W}$  contenant l'événement  $w$ .

**Definition 9.** *Une observable de type LL est une observable locale qui est à la fois de Lie et de Lorentz.*

**Claim 1.** *Dans ce qui suit, sauf mention contraire, les observables sont de type LL.*

L'univers quantique observable est formé des champs en cordes chronologiques locaux pour lesquels on peut associer une observable de type LL de  $\xi_{\mathbb{C}}$ , toutes les observables commutent deux à deux. La représentation géométrique est donnée par les cordes associées à ces champs. L'univers quantique observable est localement dénombrable si sur chaque carte  $W$  de l'univers  $\mathcal{W}$ , l'ensemble des champs en corde chronologiques définis sur  $W$  est au plus dénombrable. On se fixe une carte  $W$  de  $\mathcal{W}$ , on note  $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$  l'ensemble des champs en corde chronologiques définis sur  $W$  et  $\mathcal{D}_n$  l'observable de type LL associée à  $Z_n$ . Comment définir l'interaction entre deux champs en corde chronologiques  $Z_1$  et  $Z_2$ ?

**Lemma 1.** *Si  $Z_1$  et  $Z_2$  sont des champs de l'univers quantique alors les champs locaux*

$$Z_{21} = \mathcal{D}_2(Z_1) \text{ et } Z_{12} = \mathcal{D}_1(Z_2)$$

*sont des champs de l'univers quantique qui vérifient la même équation d'évolution, si*

$$\mathcal{D}_1(Z_1) = \lambda_1 Z_1 \text{ alors } \mathcal{D}_1(Z_{21}) = \lambda_1 Z_{21}$$

*et si*

$$\mathcal{D}_2(Z_2) = \lambda_2 Z_2 \text{ alors } \mathcal{D}_2(Z_{12}) = \lambda_2 Z_{12}.$$

*Proof.* L'observable  $\mathcal{D}_1$  est du type LL, donc

$$Z_{21} = \mathcal{D}_2(X_1) + i\mathcal{D}_2(T_1)$$

avec  $\mathcal{D}_2(X_1)$  est un champ espace local de  $\xi$  car  $X_1$  est un champ espace et  $\mathcal{D}_2(T_1)$  est un champ chronologique car  $T_1$  est un champ chronologique. L'équation

$$[X_1, T_1] = \alpha_1 X_1 + \beta_1 T_1$$

permet d'écrire

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}_2(X_1), \mathcal{D}_2(T_1)] &= \mathcal{D}_2([X_1, T_1]) = \mathcal{D}_2(\alpha_1 X_1 + \beta_1 T_1) \\ &= \alpha_1 \mathcal{D}_2(X_1) + \beta_1 \mathcal{D}_2(T_1). \end{aligned}$$

Le champ  $Z_{21}$  est un champ en corde chronologique, il en est de même de  $Z_{12}$ . De l'équation

$$\mathcal{D}_1(Z_1) = \lambda_1 Z_1$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2(Z_1)) &= \lambda_1 \mathcal{D}_2(Z_1) \\ \mathcal{D}_1(Z_{21}) &= \lambda_1 Z_{21} \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{D}_2(Z_{12}) = \lambda_2 Z_{12}.$$

□

**Remark 7.** Si  $\sigma$  est une permutation de  $\{1, 2\}$ , les deux champs de vecteurs obtenus sont notés  $Z_\sigma$ .

De façon plus générale, pour une famille au plus dénombrable de champs en corde chronologiques

$$\{Z_1, \dots, Z_N\}$$

d'observables associées

$$\{\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_N\},$$

on peut définir une famille de champs en cordes chronologiques en définissant  $Z_{12}$ ,  $Z_{123}$ ,  $Z_{1234}$  et ainsi de suite pour obtenir  $Z_{123\dots N}$ . Pour toute permutation  $\sigma$  de  $\{1, 2, 3, \dots, N\}$  on peut définir les champs

$$\{Z_{\sigma(1)\sigma(2)}, \dots, Z_{\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)\dots\sigma(N)}\},$$

les champs ainsi obtenus sont notés  $\{Z_\sigma\}$ . La famille

$$\{Z_1, \dots, Z_N\}$$

est la famille souche et la famille  $\{Z_\sigma\}$  est la famille de première génération engendrée par cette souche. La première génération  $\{Z_\sigma\}$  engendre une deuxième génération et ainsi de suite.

**Remark 8.** Si  $Z_{12} = (Z_1)_2$  alors  $Z_{123} = (Z_{12})_3$  et ainsi de suite....

**Notation 1.** Les champs de la  $n^{\text{ième}}$  génération sont notés  $\{Z_\sigma^n\}$ .

**Definition 10.** L'univers est de type fini si tous les champs en cordes chronologiques de cet univers sont engendrés par une souche de cardinal fini. L'univers est fini si il ne contient qu'un nombre fini de champs en corde chronologiques.

Comment définir le résultat de l'interaction entre les cordes  $\gamma_i$  qui génèrent les champs  $Z_i$ ? Les observables  $\mathcal{D}_i$  associées aux champs  $Z_i$  sont des champs propres de  $\mathcal{D}_i$ . L'interaction doit être indépendante de l'ordre des indices  $i$ . On est amené à regarder les observables

$$\widehat{\mathcal{D}}_i = \mathcal{D}_1 \circ \dots \circ \widehat{\mathcal{D}}_i \circ \dots \circ \mathcal{D}_N$$

et ensuite le résultat est donné par des champs en cordes, si ils existent, qui sont des champs propres de l'observable  $\mathcal{D}$ .

**Lemma 2.** *Avec les hypothèses précédentes, les sections locales  $\widehat{\mathcal{D}}_i$  de  $\text{End}(\xi_{\mathbb{C}})$  sont des observables locales de type LL.*

Il existe une section locale de base  $\{e_\nu\}$  telle que

$$\mathcal{D}_i e_\nu = \lambda_{i,\nu} e_\nu$$

les fonctions propres de  $\widehat{\mathcal{D}}_i$  forment un sous-ensemble de

$$\left\{ \lambda_\nu = \prod_{k \neq i} \lambda_{k,\nu}, \nu = 0, 1, 2, 3 \right\}, \quad (5.1)$$

la section de sous-espaces propres  $E(\lambda_\nu)$  associée à la fonction propre  $\lambda_\nu$  contient des champs en corde chronologiques si il existe un champ espace  $X$  et un champ chronologique  $T$  vérifiant

$$X(w), T(w) \in E(\lambda_\nu(w)) \subset E_w(\xi)$$

et

$$[X(w), T(w)] \in \text{Vect} \{X(w), T(w)\}$$

$X + iT$  est un champ chronologique en corde ayant pour fonction d'état  $\lambda_\nu$  et pour onde

$$\phi_Z = \alpha + i\beta \text{ si } Z = X + iT \text{ et } [X, T] = \alpha X + \beta T.$$

**Remark 9.** *A partir du champ en corde chronologique  $Z$ , on peut construire une famille infinie de champs  $\mathcal{Z} = \alpha X + i\beta T$ , en remarquant que*

$$\begin{aligned} [aX, bT] &= ab[X, T] + (a\mathcal{L}_X b)T - (b\mathcal{L}_T a)X \\ [aX, bT] &= b(\alpha a - \mathcal{L}_T a)X + a(\beta b + \mathcal{L}_X b)T, \end{aligned}$$

l'onde associée

$$\phi_{\mathcal{Z}} = b(\alpha a - \mathcal{L}_T a) + ia(\beta b + \mathcal{L}_X b).$$

**Definition 11.** *Les champs résultants de l'interaction entre  $N$  champs en corde chronologiques  $\{Z_1, \dots, Z_N\}$  est une sous-famille de la famille*

$$\{Z_1, \dots, Z_N\}, Z_\mu = \widehat{\mathcal{D}}_\mu(Z_\mu).$$

La sous-famille de  $\{Z_1, \dots, Z_N\}$  formée des champs propres de

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \circ \dots \circ \mathcal{D}_i \circ \dots \circ \mathcal{D}_N$$

est la résultante de l'interaction entre les champs  $\{Z_1, \dots, Z_N\}$ .

**Remark 10.** *Les champs  $Z_\mu$  et  $\mathcal{Z}_\mu$  sont décrits par la même observable  $\mathcal{D}_\mu$  et la même fonction d'état.*

Une représentation géométrique de l'univers  $\mathcal{W}$  est une variété lisse, connexe, de dimension 4, la représentation physique est donnée par une famille de cordes de  $\mathcal{W}$ . Pour décrire une représentation de  $\mathcal{W}$ , on construit une métrique riemannienne  $g$  à partir d'un recouvrement localement fini de cartes et d'une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement. Ce procédé n'est plus applicable pour construire une métrique lorentzienne sur  $\mathcal{W}$ . Sur chaque carte on peut construire une métrique lorentzienne à partir de la métrique de Minkowski qui n'a pas, nécessairement, d'extension sur  $\mathcal{W}$ . La notion de champ en corde chronologique ne peut être définie

à partir d'une métrique lorentzienne globale. Pour remédier à cette difficulté, on part d'un champ globale  $T$  et on pose

$$\phi_T : \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{R}^+, \phi_T(w) = g(w)(T(w), T(w))$$

qui est  $C^\infty$  si  $T$  est lisse.

**Definition 12.** *Le champ  $T$  est un champ à singularités lisses si chaque composante connexe de  $\phi_T^{-1}(0)$  est une  $C^\infty$  sous-variété de  $\mathcal{W}$  de dimension  $\leq 3$ . Une singularité de  $T$  est une composante connexe de  $\phi_T^{-1}(0)$ .*

Une singularité de dimension 0 est un événement de  $\mathcal{W}$ , une singularité de dimension 1 est une corde de  $\mathcal{W}$ , une singularité de dimension 2 est une surface d'univers de  $\mathcal{W}$  et les singularités de dimension 3 sont les bords de l'univers dans le sens suivant, chaque composante connexe de

$$\mathcal{W} \setminus \sum_{\dim(\mathcal{B})=3} \mathcal{B}$$

est un univers. En dehors des singularités de  $T$ , on peut définir une métrique lorentzienne  $g_T$  en posant

$$g_T(w)(T(w), T(w)) = -g(w)(T(w), T(w))$$

et

$$g_T(w)(X(w), X(w)) = g(w)(X(w), X(w))$$

si  $X(w) \in \mathbb{R}T(w)^\perp$ , l'orthogonalité est donnée pour la forme bilinéaire  $g(w)$  et  $w$  est un événement en dehors des singularités de  $T$ . Pour cette métrique,  $T$  est un champ chronologique et  $X \in \mathbb{R}T^\perp$  est un champ espace si  $X \neq o$ . Les champs espaces locaux  $X$ , définis en dehors des singularités de  $T$ , pour lesquels

$$[X, T] = \alpha X + \beta T,$$

permettent de construire des champs en corde chronologiques  $Z = X + iT$  pour la métrique lorentzienne  $g_T$ . En résumé, un champ en corde local  $Z = X + iT$  est chronologique pour la métrique lorentzienne locale  $g_T$  en dehors de  $\phi_T^{-1}(0)$ . Un champ en corde local définit un temps propre pour lequel la notion de déplacement d'une corde a un sens.

**Remark 11.** *On peut appliquer cette construction pour tout champ local  $T$ .*

Comment décrire l'interaction de toutes les cordes de l'univers? Pour cette description on se fixe l'**axiome de finitude** suivant,

**Axiom 7.** *En chaque événement  $w$  de l'univers mathématique  $\mathcal{W}$ , il n'y a qu'un nombre fini de corde connexe contenant cet événement  $w$ .*

Si on applique cet axiome en chaque événement  $w \in \mathcal{W}$ , il existe une famille finie  $\{Z_1, \dots, Z_N\}$  de champs locaux en corde vérifiant  $w \in \cap_{i=1}^N Z_i$ . On peut construire une section de l'espace Bose-Fermi-Fock en prenant pour vecteur de cet espace en  $w$  le vecteur

$$s(w) = \mathcal{S}(Z_1(w) \otimes \dots \otimes Z_N(w)) \otimes \mathcal{A}(Z_1(w) \otimes \dots \otimes Z_N(w))$$

où

$$\mathcal{S}(Z_1(w) \otimes \dots \otimes Z_N(w))$$

est le symétrisé de  $Z_1(w) \otimes \cdots \otimes Z_N(w)$  et

$$\mathcal{A}(Z_1(w) \otimes \cdots \otimes Z_N(w))$$

est l'antisymétrisé de  $Z_1(w) \otimes \cdots \otimes Z_N(w)$ . L'intérêt de cette construction permet de définir une section de l'espace de Bose-Fermi-Fock du complexifié du fibré tangent  $\xi_{\mathbb{C}}$ , à savoir  $\mathcal{F}(\xi_{\mathbb{C}}) = \mathcal{F}_+(\xi_{\mathbb{C}}) \otimes \mathcal{F}_-(\xi_{\mathbb{C}})$ , qui donne une description de l'univers physique en chaque événement  $w$ . Si on définit une observable  $\mathcal{D}$  sur l'ensemble de l'univers  $\mathcal{W}$ , peut-on quantifier cette observable et définir les sections d'opérateurs de Dirac et de Beltrami opérant sur les sections locales de  $\mathcal{F}(\xi_{\mathbb{C}})$ .

## 6. QUANTIFICATION DE L'UNIVERS PHYSIQUE

On rappelle la construction des espaces de Fock à partir des sommes de Whitney. On note  $\xi_{\mathbb{C}}^{\otimes n}$ , le produit tensoriel d'ordre  $n$  de  $\xi_{\mathbb{C}}$ , avec

$$\xi^{\otimes 0} = (\mathcal{W} \times \mathbb{C}, \text{pr}_1, \mathcal{W}, \mathbb{C})$$

est le fibré trivial de fibre  $\mathbb{C}$  sur  $\mathcal{W}$ . On note  $\mathcal{S}_n(\xi_{\mathbb{C}})$ , le symétrisé de  $\xi_{\mathbb{C}}^{\otimes n}$  et  $\mathcal{A}_n(\xi_{\mathbb{C}})$ , l'antisymétrisé de  $\xi_{\mathbb{C}}^{\otimes n}$ . L'espace de Bose-Fock de  $\xi_{\mathbb{C}}$  est la somme de Whitney infinie et complète des symétrisés  $\mathcal{S}_n(\xi_{\mathbb{C}})$

$$\mathcal{F}_+(\xi_{\mathbb{C}}) = (E(\mathcal{F}_+(\xi_{\mathbb{C}})), \pi_+, \mathcal{W}, \mathcal{F}_+(\mathbb{C}^4))$$

c'est-à-dire, pour chaque  $w \in \mathcal{W}$

$$E_w(\mathcal{F}_+(\xi_{\mathbb{C}})) = \left\{ u = \left\{ u^{(n)} \right\}_{n=0}^{\infty} : u^{(n)} \in \mathcal{S}_n(E_w(\xi_{\mathbb{C}})), \sum_{n=0}^{\infty} \left\| u^{(n)} \right\|_w^2 < \infty \right\},$$

$\mathcal{S}_n(E_w(\xi_{\mathbb{C}}))$  est le symétrisé d'ordre  $n$  de la fibre  $E_w(\xi_{\mathbb{C}})$  munit du produit scalaire induit par le produit scalaire de  $E_w(\xi_{\mathbb{C}})$ , noté  $\langle \cdot | \cdot \rangle_w$ , et l'espace de Fermi-Fock est la somme de Whitney infinie et complète des antisymétrisés  $\mathcal{A}_n(\xi_{\mathbb{C}})$

$$\mathcal{F}_-(\xi_{\mathbb{C}}) = (E(\mathcal{F}_-(\xi_{\mathbb{C}})), \pi_-, \mathcal{W}, \mathcal{F}_-(H)),$$

c'est-à-dire, pour chaque  $w \in \mathcal{W}$ ,

$$E_w(\mathcal{F}_-(\xi_{\mathbb{C}})) = \left\{ u = \left\{ u^{(n)} \right\}_{n=0}^{\infty} : u^{(n)} \in \mathcal{A}_n(E_w(\xi_{\mathbb{C}})), \sum_{n=0}^{\infty} \left\| u^{(n)} \right\|_w^2 < \infty \right\}.$$

On rappelle que pour un espace de Hilbert  $H$ , séparable en dimension infinie et hilbertien en dimension finie, on a

$$\mathcal{F}_+(H)(w) = \left\{ u = \left\{ u^{(n)} \right\}_{n=0}^{\infty} : u^{(n)} \in \mathcal{S}_n(H), \sum_{n=0}^{\infty} \left\| u^{(n)} \right\|^2 < \infty \right\}$$

et

$$\mathcal{F}_-(H)(w) = \left\{ u = \left\{ u^{(n)} \right\}_{n=0}^{\infty} : u^{(n)} \in \mathcal{A}_n(H), \sum_{n=0}^{\infty} \left\| u^{(n)} \right\|^2 < \infty \right\}$$

$\|u^{(n)}\|$  désigne la norme définie par le produit hermitien induit par  $H$  sur respectivement  $\mathcal{S}_n(H)$  et  $\mathcal{A}_n(H)$ . Les espaces de Bose-Fock et de Fermi-Fock ont une structure de fibré hermitien sur  $\mathcal{W}$ . L'espace de Bose-Fermi-Fock de  $\xi_{\mathbb{C}}$  est défini par le produit tensoriel des fibrés  $\mathcal{F}_+(\xi_{\mathbb{C}})$  et  $\mathcal{F}_-(\xi_{\mathbb{C}})$

$$\mathcal{F}(\xi_{\mathbb{C}}) = \mathcal{F}_+(\xi_{\mathbb{C}}) \otimes \mathcal{F}_-(\xi_{\mathbb{C}}),$$

c'est le fibré de Bose-Fermi-Fock associé à  $\xi_{\mathbb{C}}$ . Si on prend  $n$  sections  $Z_1, \dots, Z_n$  de  $\xi_{\mathbb{C}}$ , le symétrisé s'écrit

$$\mathcal{S}_n(Z_1 \otimes \dots \otimes Z_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \text{Perm}\{1, \dots, n\}} Z_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes Z_{\sigma(n)}$$

et l'antisymétrisé s'écrit

$$\mathcal{A}_n(Z_1 \otimes \dots \otimes Z_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \text{Perm}\{1, \dots, n\}} \varepsilon(\sigma) Z_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes Z_{\sigma(n)},$$

$\mathcal{S}_n(Z_1 \otimes \dots \otimes Z_n)$  est une section de  $\mathcal{S}_n(\xi_{\mathbb{C}})$  et  $\mathcal{A}_n(Z_1 \otimes \dots \otimes Z_n)$  est une section de  $\mathcal{A}_n(\xi_{\mathbb{C}})$ . On peut consulter, sur les sommes de Whitney infinies et fermées, l'article [6]. Dans notre situation, le fibré  $\xi_{\mathbb{C}}^{\otimes n}$  a pour fibre  $H^{\otimes n}$  avec  $H = \mathbb{C}^4$  et est muni d'une structure de Hilbert canonique induite par  $H$ , chaque fibre est donnée par

$$E_w(\xi_{\mathbb{C}}^{\otimes n}) = E_w(\xi_{\mathbb{C}})^{\otimes n}$$

est munie d'un produit scalaire hermitien induit par une métrique riemannienne  $g$  sur  $\mathcal{W}$ . Chaque section  $X$  de  $\mathcal{F}_+(\xi_{\mathbb{C}})$  s'écrit

$$X = \{X^{(n)}\},$$

où  $X^{(n)}$  est une section de  $\mathcal{S}_n(\xi_{\mathbb{C}})$  que l'on peut identifier à une section de  $\mathcal{F}_+(\zeta)$  par

$$\{o, \dots, o, X^{(n)}, o, \dots\},$$

la section vide de l'espace de Bose-Fock est la section constante  $\mathbf{1}_+$  définie par

$$\mathbf{1}_+(w) = \{1, o_w, o_w, \dots\} \in E_w(\mathcal{F}_+(\xi_{\mathbb{C}})).$$

Pour chaque section  $X$  de  $\xi_{\mathbb{C}}$ , il existe un unique opérateur linéaire  $a(X)$  densément défini et fermé sur  $\mathcal{F}_+(\xi_{\mathbb{C}})$ , non borné, appelé annulateur de Bose sur le champ  $X$ , son adjoint est l'opérateur  $a(X)^*$ . Il vérifie les propriétés

$$(a(X)^* Y)^{(0)} = o,$$

$$(a(X)^* Y)^{(n)} = \sqrt{n} \mathcal{S}_n(X \otimes Y^{(n-1)}) \text{ pour tout } n \geq 1,$$

pour chaque  $u \in E_w(\mathcal{F}_+(\xi_{\mathbb{C}}))$ , l'opérateur  $a(u)$  a pour adjoint  $a(u)^*$  qui s'écrit

$$a(u)^* \left( \left\{ v^{(n)} \right\} \right) = \left\{ o, \left\{ \sqrt{n} \mathcal{S}_n(u \otimes v^{(n-1)}) \right\}_{n \geq 1} \right\}$$

où  $\mathcal{S}_n(u \otimes v^{(n-1)})$  est le symétrisé de  $u \otimes v^{(n-1)}$  pour tout  $\{v^{(n)}\} \in E_w(\mathcal{F}_+(\xi_{\mathbb{C}}))$  [1], [2] et [10]. L'opérateur  $a(X)^*$  est défini en prenant pour chaque  $w$ , l'adjoint de l'opérateur

$$a(X)(w) : E_w(\mathcal{F}_+(\xi_{\mathbb{C}})) \rightarrow E_w(\mathcal{F}_+(\xi_{\mathbb{C}})),$$

sur chaque fibre. On a

$$a(X) \mathbf{1}_+ = \mathbf{o} \text{ pour toute section } X \in \mathcal{S}(\xi_{\mathbb{C}}),$$

où  $\mathbf{o}(w) = (0, o_w, o_w, \dots)$ . Pour chaque section  $X$  de  $\xi_{\mathbb{C}}$ , il existe une unique section d'opérateurs linéaires  $b(X)$  de  $\mathcal{F}_-(\xi_{\mathbb{C}})$  appelée annulateur de Fermi sur le champ  $X$  tel que

$$\text{dom}(b(X)) = \mathcal{F}_-(\xi_{\mathbb{C}}) \text{ et } \|b(X)(w)\| = \|X(w)\|_w,$$

donc  $b(X)$  est borné, l'adjoint  $b(X)^*$  vérifie

$$(b(X)^* Y)^{(0)} = \mathbf{o},$$

$$(b(X)^* Y)^{(n)} = \sqrt{n} \mathcal{A}_n (X \otimes Y^{(n-1)}), \quad n \geq 1 \text{ et } Y \in \mathcal{F}_- (\xi_{\mathbb{C}}),$$

$\mathcal{A}_n (X \otimes Y^{(n-1)})$  est l'antisymétrisé d'ordre  $n$  de  $X \otimes Y^{(n-1)}$ . Pour chaque  $u \in E_w (\xi)$ , l'opérateur  $b(u)$  a pour adjoint  $b(u)^*$  qui vérifie

$$b(u)^* \left( \left\{ v^{(n)} \right\} \right) = \left\{ 0, \left\{ \sqrt{n} \mathcal{A}_n (u \otimes v^{(n-1)}) \right\}_{n \geq 1} \right\}, \quad \left\{ v^{(n)} \right\} \in E_w (\mathcal{F}_- (\xi_{\mathbb{C}})).$$

**Proposition 2.** *Pour toutes sections  $X$  et  $Y$  de  $\xi_{\mathbb{C}}$*

$$\begin{aligned} [b(X), b(Y)^*] &= \langle X | Y \rangle \mathbf{1}, \\ \{b(X), b(Y)\} &= \mathbf{o} \end{aligned}$$

*En particulier,*

$$b(X)^2 = \mathbf{o}.$$

*Proof.* On peut consulter [12] pour une preuve.  $\square$

La section vide de l'espace de Fermi-Fock est la section constante  $\mathbf{1}_-$  définie par

$$\mathbf{1}_- (w) = \{1, o_w, o_w, \dots\},$$

$$\mathbf{1}_- (w) = \{1, o_w, o_w, \dots\} \in E_w (\mathcal{F}_- (\xi_{\mathbb{C}})),$$

cette section vide vérifie

$$b(X) \mathbf{1}_- = \mathbf{o} \text{ pour toute champ } X \text{ de } \xi_{\mathbb{C}}.$$

On introduit un opérateur différentiel extérieur sur les fibrés de Fock de la façon suivante. Soit  $\mathcal{D}$  une observable de  $\xi_{\mathbb{C}}$ , on pose

$$V_{\mathcal{D}}^{\infty} = \text{Vect} \left\{ a(X_1)^* \cdots a(X_n)^* \mathbf{1}_+ \otimes b(Y_1)^* \cdots b(Y_p)^* \mathbf{1}_- : X_j, Y_k \in \Gamma^{\infty} (\xi_{\mathbb{C}}) \right\}.$$

**Theorem 4.** *Il existe une unique section  $d_{\mathcal{D}}$  d'opérateurs de  $\mathcal{F} (\xi_{\mathbb{C}})$ , densément définie et fermée telle que*

$$V_{\mathcal{D}}^{\infty} \subset \text{dom} (d_{\mathcal{D}}) \text{ et } V_{\mathcal{D}}^{\infty} \text{ est un coeur de } d_{\mathcal{D}},$$

*pour chaque section  $\mathbf{X} \in V_{\mathcal{D}}^{\infty}$ ,*

$$\mathbf{X} = a(X_1)^* \cdots a(X_n)^* \mathbf{1}_+ \otimes b(Y_1)^* \cdots b(Y_p)^* \mathbf{1}_-$$

*on a*

$$d_{\mathcal{D}} \mathbf{X} = \mathbf{o} \text{ pour } n = 0$$

$$d_{\mathcal{D}} \mathbf{X} = \sum_{j=1}^n a(X_1)^* \cdots a(\widehat{X_j})^* \cdots a(X_n)^* \mathbf{1}_+ \otimes b(\mathcal{D}(X_j))^* b(Y_1)^* \cdots b(Y_p)^* \mathbf{1}_-,$$

*$d_{\mathcal{D}}$  laisse invariant  $V_{\mathcal{D}}^{\infty}$ . De plus,*

$$V_{\mathcal{D}}^{\infty} \subset \text{dom} (d_{\mathcal{D}}^*)$$

*et*

$$d_{\mathcal{D}}^* \mathbf{X} = \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} a(\mathcal{D}Y_k)^* a(X_1)^* \cdots a(X_n)^* \mathbf{1}_+ \otimes b(Y_1)^* \cdots b(\widehat{Y_k})^* \cdots b(Y_p)^* \mathbf{1}_-$$

*pour tout  $\mathbf{X} = a(X_1)^* \cdots a(X_n)^* \mathbf{1}_+ \otimes b(Y_1)^* \cdots b(Y_p)^* \mathbf{1}_-$ . Dans le cas  $p = 0$ , on a*

$$d_{\mathcal{D}}^* \mathbf{X} = \mathbf{o},$$

en particulier,  $d_{\mathcal{D}}^*$  laisse invariant  $V_{\mathcal{D}}^{\infty}$ .

**Proposition 3.**

$$\text{dom}(d_{\mathcal{D}}^2) = \text{dom}(d_{\mathcal{D}}) \text{ et pour tout } \mathbf{X} \in \text{dom}(d_{\mathcal{D}}), d_{\mathcal{D}}^2 \mathbf{X} = \mathbf{o}.$$

Si  $\mathcal{T}$  est une section d'opérateurs de  $\text{End}(\xi_{\mathbb{C}})$  alors pour tout  $\mathbf{X} \in V_{\mathcal{D}}^{\infty}$  et  $\alpha, \beta \in C^{\infty}(\mathcal{W}, \mathbb{C})$ ,

$$\alpha d_{\mathcal{D}} \mathbf{X} + \beta d_{\mathcal{T}} \mathbf{X} = d_{\alpha \mathcal{D} + \beta \mathcal{T}} \mathbf{X}.$$

*Proof.* Il suffit de vérifier que la propriété est vraie sur chaque fibre des fibrés considérés. La démonstration sur une fibre du fibré est donnée dans [3], [10] et [11].  $\square$

**Remark 12.** Le coeur  $V$  d'une section  $T$  d'opérateurs d'un fibré hilbertien  $\zeta$  dans un fibré hilbertien  $\eta$  est une famille de sous-espaces  $\{V_w\}$

$$V_w \subset E_w(\zeta)$$

pour laquelle  $V_w$  est un coeur de l'opérateur

$$T(w) : E_w(\zeta) \longrightarrow E_w(\eta)$$

c'est-à-dire,

$$\overline{T(w)|_{V_w}} = T(w), \forall w.$$

Le théorème précédent est encore vrai pour des sections d'opérateurs densément définis et fermés d'un fibré hilbertien dans un autre.

**Definition 13.** La section de Dirac sur  $\mathcal{F}(\xi_{\mathbb{C}})$  associée à l'observable  $\mathcal{D}$  est définie par

$$\mathfrak{d}_{\mathcal{D}} = d_{\mathcal{D}} + d_{\mathcal{D}}^*$$

avec  $\text{dom}(\mathfrak{d}_{\mathcal{D}}) = \text{dom}(d_{\mathcal{D}}) \cap \text{dom}(d_{\mathcal{D}}^*)$ . La section de Laplace-Beltrami sur de  $\mathcal{F}(\xi_{\mathbb{C}})$  est

$$\Delta_{\mathcal{D}} = d_{\mathcal{D}} d_{\mathcal{D}}^* + d_{\mathcal{D}}^* d_{\mathcal{D}}.$$

**Remark 13.** Les sections de Dirac et Laplace-Beltrami sur l'espace de Bose-Fermi-Fock opèrent sur l'espace des sections du fibré.

Pour une observable  $\mathcal{D}$  de  $\xi_{\mathbb{C}}$ , on pose

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(n)} : \xi_{\mathbb{C}}^{\otimes n} \rightarrow \xi_{\mathbb{C}}^{\otimes n}$$

la section de  $\text{End}(\xi_{\mathbb{C}}^{\otimes n})$  définie par

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(0)} = \mathbf{o}$$

est la section identiquement nulle et

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(n)} = \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\xi_{\mathbb{C}}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_{\xi_{\mathbb{C}}} \otimes \mathcal{D} \otimes \mathbf{1}_{\xi_{\mathbb{C}}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_{\xi_{\mathbb{C}}}, n \geq 1$$

où  $\mathcal{D}$  se trouve à la  $j$ -ième place. La seconde quantification de  $\mathcal{D}$  sur  $\mathcal{F}(\xi_{\mathbb{C}})$  est définie sur les sections du fibré  $\mathcal{F}(\xi_{\mathbb{C}})$  par

$$\widehat{\mathcal{D}} = \oplus_{n=0}^{\infty} \widehat{\mathcal{D}}^{(n)}, \widehat{\mathcal{D}} \left( \left\{ X^{(n)} \right\} \right) = \left\{ \widehat{\mathcal{D}}^{(n)} \left( X^{(n)} \right) \right\},$$

où, si

$$X^{(n)} = X_1 \otimes X_2 \otimes \cdots \otimes X_n$$

alors

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(n)} \left( X^{(n)} \right) = \sum_{j=1}^n X_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{D} (X_j) \otimes \cdots \otimes X_n,$$

$\widehat{\mathcal{D}}$  est une section d'opérateurs autoadjoints, il suit que pour tout  $w \in \mathcal{W}$ ,  $0 \in \sigma_p \left( \widehat{\mathcal{D}} (w) \right)$ ,  $\mathbf{1} (w) \in \ker \left( \widehat{\mathcal{D}} (w) \right)$ . On pose

$$\widehat{\mathcal{D}}_+ = \widehat{\mathcal{D}} |_{\mathcal{F}_+(\zeta)} \text{ et } \widehat{\mathcal{D}}_- = \widehat{\mathcal{D}} |_{\mathcal{F}_-(\zeta)},$$

ces opérateurs sont autoadjoints et la fonction identiquement nulle est propre pour  $\widehat{\mathcal{T}}_+$  et  $\widehat{\mathcal{T}}_-$  car  $\mathbf{1}_\pm (w) \in \ker \left( \widehat{\mathcal{T}}_\pm (w) \right)$ .

**Proposition 4.** *La seconde quantification de  $\widehat{\mathcal{D}}$  est stable sur les sections de  $\mathcal{F}_+(\xi_{\mathbb{C}})$  et  $\mathcal{F}_-(\xi_{\mathbb{C}})$ .*

*Proof.* On a

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{D}}^{(n)} \left( X_\sigma^{(n)} \right) &= \sum_{j=1}^n X_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \mathcal{D} (X_{\sigma(\sigma^{-1}(j))}) \otimes \cdots \otimes X_{\sigma(n)} \\ &= \sum_{k=1}^n X_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \mathcal{D} (X_{\sigma(k)}) \otimes \cdots \otimes X_{\sigma(n)} = \widehat{\mathcal{D}}^{(n)} \left( X^{(n)} \right)_\sigma, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{D}}^{(n)} \left( \mathcal{S}_n \left( X^{(n)} \right) \right) &= \frac{1}{n!} \sum_\sigma \widehat{\mathcal{D}}^{(n)} \left( X_\sigma^{(n)} \right) = \frac{1}{n!} \sum_\sigma \widehat{\mathcal{D}}^{(n)} \left( X^{(n)} \right)_\sigma = \mathcal{S}_n \left( \widehat{\mathcal{D}}^{(n)} \left( X^{(n)} \right) \right), \\ \widehat{\mathcal{D}}^{(n)} \left( \mathcal{A}_n \left( X^{(n)} \right) \right) &= \frac{1}{n!} \sum_\sigma \varepsilon(\sigma) \widehat{\mathcal{D}}^{(n)} \left( X_\sigma^{(n)} \right) = \frac{1}{n!} \sum_\sigma \varepsilon(\sigma) \widehat{\mathcal{D}}^{(n)} \left( X^{(n)} \right)_\sigma \\ &= \mathcal{A}_n \left( \widehat{\mathcal{D}}^{(n)} \left( X^{(n)} \right) \right). \end{aligned}$$

□

On pose

$$\mathcal{F}_{+1} (\xi_{\mathbb{C}}) = \oplus_{p=0}^\infty \mathcal{F}_+ (\xi_{\mathbb{C}}) \otimes \mathcal{A}_{2p} (\xi_{\mathbb{C}})$$

et

$$\mathcal{F}_{-1} (\xi_{\mathbb{C}}) = \oplus_{p=0}^\infty \mathcal{F}_+ (\xi_{\mathbb{C}}) \otimes \mathcal{A}_{2p+1} (\xi_{\mathbb{C}}),$$

les sous-fibrés de  $\mathcal{F} (\xi_{\mathbb{C}})$  qui donnent la décomposition orthogonale

$$\mathcal{F} (\xi_{\mathbb{C}}) = \mathcal{F}_{+1} (\xi_{\mathbb{C}}) \oplus \mathcal{F}_{-1} (\xi_{\mathbb{C}}),$$

si on note  $\pi_+$  et  $\pi_-$  les projections orthogonales sur respectivement  $\mathcal{F}_{+1} (\xi_{\mathbb{C}})$  et  $\mathcal{F}_{-1} (\xi_{\mathbb{C}})$ , l'opérateur  $\Gamma$  de  $\mathcal{F} (\xi_{\mathbb{C}})$  est défini par

$$\Gamma = \pi_+ - \pi_-$$

cet opérateur a pour fonctions propres les fonctions constantes  $-1$  et  $+1$  et vérifie

$$\Gamma^2 = \mathbf{1}_{\mathcal{F}(\xi_{\mathbb{C}})}.$$

**Remark 14.** *L'opérateur nombre sur  $\mathcal{F}_- (\xi_{\mathbb{C}})$  est défini par  $N = \widehat{\mathbf{1}}_{\xi_-}$ , en utilisant la notation de [2] sur chaque fibre, on peut écrire*

$$\Gamma = \mathbf{1}_{\mathcal{F}_+(\zeta)} \otimes (-1)^N \mathbf{1}_{\mathcal{F}_-(\zeta)}.$$

Soit l'opérateur

$$\mathbf{D} = \widehat{\mathcal{D}^* \mathcal{D}}_+ \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{F}_-(\xi)} \oplus \mathbf{1}_{\mathcal{F}_+(\xi)} \otimes \widehat{\mathcal{D} \mathcal{D}^*}_-,$$

c'est une section d'opérateurs de  $\mathcal{F}(\xi_{\mathbb{C}})$  qui sont positifs et autoadjoints, la fonction identiquement nulle sur  $\mathcal{W}$  est une fonction propre de  $\mathbf{D}$  car

$$\mathbf{1} = \mathbf{1}_+ \otimes \mathbf{1}_- \in \ker(\mathbf{D}).$$

**Theorem 5.** *L'opérateur  $\mathfrak{d}_{\mathcal{D}}$  est autoadjoint et essentiellement autoadjoint sur chaque coeur de  $\mathbf{D}$ . En particulier,  $\mathfrak{d}_{\mathcal{D}}$  est essentiellement autoadjoint sur  $V_{\mathcal{D}}^{\infty}$ . L'opérateur  $\Gamma$  laisse invariant  $\text{dom}(\mathfrak{d}_{\mathcal{D}})$  et*

$$\{\Gamma, \mathfrak{d}_{\mathcal{D}}\} = \Gamma \mathfrak{d}_{\mathcal{D}} + \mathfrak{d}_{\mathcal{D}} \Gamma = \mathbf{0}_{\mathcal{F}(\xi_{\mathbb{C}})}$$

sur  $\text{dom}(\mathfrak{d}_{\mathcal{D}})$ . On a l'égalité entre les opérateurs

$$\Delta_{\mathcal{D}} = \mathbf{D} = \mathfrak{d}_{\mathcal{D}}^2.$$

*Proof.* Il suffit de vérifier le résultat sur chaque fibre du fibré  $\mathcal{F}(\xi_{\mathbb{C}})$ . Sur les fibres, on peut consulter [2], [10] et [11].  $\square$

**Definition 14.** *Le quadruplet*

$$\{\mathcal{F}(\xi_{\mathbb{C}}), \mathfrak{d}_{\mathcal{D}}, \mathbf{D}, \Gamma\}$$

*est appelé quantification supersymétrique du couple  $(\xi_{\mathbb{C}}, \mathcal{D})$ .*

La nullité de l'observable  $\mathcal{D}$  est la fonction

$$\text{nul}_{\mathcal{D}}(w) = \dim(\ker \mathcal{D}(w)),$$

si

$$\ker \mathcal{D} = \left( \bigcup_{w \in \mathcal{W}} \ker \mathcal{D}(w), \pi, \mathcal{W} \right)$$

sont des sous-fibrés de  $\xi_{\mathbb{C}}$  alors  $\text{nul}_{\mathcal{D}}$  est constante de fibre  $\mathbb{C}^{\text{nul}_{\mathcal{D}}}$ .

**Theorem 6.** *Si  $\ker \mathcal{D}$  est un sous-fibré de  $\xi_{\mathbb{C}}$ , alors  $\ker \mathfrak{d}_{\mathcal{D}}$  et  $\ker \mathbf{D}$  sont des sous-fibrés de  $\mathcal{F}(\xi_{\mathbb{C}})$  et*

$$\ker \mathfrak{d}_{\mathcal{D}} = \ker \mathbf{D} = \oplus_{n,p=0}^{\infty} [\mathcal{S}_n(\ker \mathcal{D}) \otimes \mathcal{A}_p(\ker \mathcal{D})].$$

On a, si

$$\text{nul}_{\mathcal{D}} = 0 \text{ alors } \text{nul } \mathfrak{d}_{\mathcal{D}} = 0,$$

et si

$$\text{nul}_{\mathcal{D}} \neq 0 \text{ alors } \text{nul } \mathfrak{d}_{\mathcal{D}} = \infty,$$

*Proof.* On vérifie que si  $\ker \mathcal{D}$  et  $\ker \mathcal{D}^*$  sont des sous-fibrés de  $\xi_{\mathbb{C}}$  alors  $\ker \mathfrak{d}_{\mathcal{D}}$  et  $\ker \mathbf{D}$  sont des sous-fibrés de  $\mathcal{F}(\xi_{\mathbb{C}})$  en remarquant que la propriété

$$\ker \mathfrak{d}_{\mathcal{D}}(w) = \ker \widehat{\mathcal{D}}(w) = \oplus_{n,p=0}^{\infty} [\mathcal{S}_n(\ker(\mathcal{D}(w))) \otimes \mathcal{A}_p(\ker(\mathcal{D}^*(w)))] \quad (6.1)$$

est vraie pour tout  $w \in \mathcal{W}$ . Ensuite, on peut écrire, puisque  $\ker \mathcal{D}$  et  $\ker \mathcal{D}^*$  sont des fibrés

$$\ker \mathfrak{d}_{\mathcal{D}} = \ker \mathcal{L} = \oplus_{n,p=0}^{\infty} [\mathcal{S}_n(\ker \mathcal{D}) \otimes \mathcal{A}_p(\ker \mathcal{D}^*)].$$

La relation 6.1 a été démontrée dans [1].  $\square$

## 7. MODÉLISATION DE L'UNIVERS DES CORDES

L'axiome de finitude donne l'existence d'un nombre fini de cordes en l'événement  $w \in \mathcal{W}$ . On note  $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$  la famille de cordes contenant l'événement  $w$ ,  $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$  et  $\{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ , respectivement, les champs en corde et les observables locales associées de type  $LL$ . On pose  $D$  l'observable locale définie sur

$$\text{dom } D = \bigcap_{i=1}^n \text{dom } D_i, \quad D = D_1 \circ D_2 \circ \dots \circ D_n,$$

$\text{dom } D_i$  est formé de l'ensemble des événements  $v \in \mathcal{W}$  pour lesquels  $D_i(v)$  est un opérateur autoadjoint de  $E_v(\xi_{\mathbb{C}})$ . L'univers physique des cordes est quantifiable si il existe une paire  $(\mathcal{Z}, \mathcal{D})$  telle que  $\mathcal{Z}$  est une section du fibré de Bose-Fermi-Fock qui vérifie

$$\mathcal{Z}(w) = \mathcal{S}_n(Z(w)) \otimes \mathcal{A}_n(Z(w)), \quad \forall w \in \mathcal{W} \quad (7.1)$$

avec

$$Z(w) = Z_1(w) \otimes Z_2(w) \otimes \dots \otimes Z_n(w)$$

et d'une observable définie en chaque événement  $w$  par

$$\mathcal{D}(w) = D(w). \quad (7.2)$$

On peut définir les sections de Dirac et Beltrami, notée  $\mathfrak{D}_{\mathcal{D}}$  et  $\Delta_{\mathcal{D}}$ , ces sections opèrent sur les sections du fibré de Bose-Fermi-Fock, l'équation de Dirac-Beltrami est définie par

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{D}}\mathcal{Z} = \lambda\mathcal{Z}, \quad (7.3)$$

ou encore

$$\Delta_{\mathcal{D}}\mathcal{Z} = \lambda^2\mathcal{Z}.$$

Déterminer tous les couples  $(\mathcal{Z}, \mathcal{D})$  revient, pour une observable  $\mathcal{D}$  décrit précédemment, à décrire toutes les fonctions propres  $\lambda$  de l'opérateur de Dirac associé à  $\mathcal{D}$  et de prendre une section propre  $\mathcal{Z}$  de  $\mathfrak{D}_{\mathcal{D}}$ . On sait, en utilisant une généralisation de la théorie des opérateurs de Dirac aux fibrés de Bose-Fermi-Fock, décrire les fonctions propres de  $\mathfrak{D}_{\mathcal{D}}$  à partir des fonctions propres de  $\mathcal{D}$ . Pour une observable  $\mathcal{D}$  de l'univers vérifiant 7.2 et une section  $\mathcal{Z}$  de  $\mathcal{F}(\xi_{\mathbb{C}})$  vérifiant 7.1, les seules quantifications possibles de l'univers des cordes sont données par les couples  $(\mathcal{Z}, \mathcal{D})$  vérifiant 7.3. La fonction  $\lambda$  est la fonction de couplage entre l'observable  $\mathcal{D}$  et la section  $\mathcal{Z}$ . Si  $\lambda$  est une fonction de Morse sur  $\mathcal{W}$ , cette fonction permet de décrire la structure géométrique de l'univers mathématique  $\mathcal{W}$ . L'ensemble des points critiques est discret, ce sont les événements critiques  $w$  pour lesquels la valeur  $\lambda(w)$  est singulière. Si on note  $\mathcal{W}_{\leq \alpha}$ , le passé de  $\mathcal{W}_{\alpha}$  et  $\mathcal{W}_{> \alpha}$  le futur, c'est à dire,  $\mathcal{W}_{\leq \alpha} = \lambda^{-1}([-\infty; \alpha])$ , le présent  $\mathcal{W}_{\alpha}$  est le bord du passé, alors on peut reconstruire l'univers à l'aide les deux théorèmes suivants [8] et [9],

**Theorem 7.** *Si  $[\alpha, \beta]$  ne contient aucun événement critique alors la portion d'univers  $\lambda^{-1}([\alpha, \beta])$  est difféomorphe à  $\mathcal{W}_{\alpha} \times [\alpha, \beta]$ . Le passé détermine entièrement le futur. En particulier, le présent  $\mathcal{W}_{\alpha}$  est difféomorphe au présent  $\mathcal{W}_{\beta}$ .*

**Theorem 8.** *Si  $w$  est un événement critique d'indice  $\iota$ , et s'il existe une petite variation  $\varepsilon > 0$  pour laquelle*

$$\mathcal{W}_{\leq \lambda(w)+\varepsilon} \setminus \mathcal{W}_{\leq \lambda(w)-\varepsilon}$$

*ne contient que  $w$  comme événement critique, alors  $\mathcal{W}_{\leq \lambda(w)+\varepsilon}$  est obtenue par chirurgie de type  $(\iota, n - \iota)$  à partir du passé  $\mathcal{W}_{\leq \lambda(w)-\varepsilon}$ .*

Pour un couplage qui est donné par une fonction de Morse  $\lambda$ , on peut définir une "flèche du temps" qui permet de décrire l'univers mathématique, au temps non singulier  $\alpha$ , comme l'espace de dimension 3 noté  $\mathcal{W}_\alpha$  et de donner l'évolution de  $\mathcal{W}_\alpha$  en dehors des valeurs  $\alpha$  non singulières de la flèche du temps. L'existence de telles fonctions de Morse existent par le théorème de densité de Milnor pour la  $C^k$ -topologie fine de Whitney. On peut, donc toujours, approcher la fonction de couplage  $\lambda$  par une fonction de Morse pour donner une description partielle de  $\mathcal{W}$ .

## 8. CONCLUSION

La représentation d'un univers en corde est une approche d'une représentation de l'univers physique. L'intérêt mathématique d'une telle représentation est de construire à partir des cordes d'une variété  $\mathcal{W}$  de dimension 4, l'univers physique pour lequel chaque corde engendre un champ en corde local du complexifié du fibré tangent  $\xi_{\mathcal{C}}$ . En utilisant l'axiomatique de la physique quantique, on associe à chaque champ en corde local une observable locale de type  $LL$ . Sous l'hypothèse d'un univers physique quantifiable, l'observable de Dirac sur  $\mathcal{W}$  donne les couples possibles d'une représentation de notre univers en cordes par la formule 7.3.

Cette représentation n'est qu'une ébauche d'une théorie plus générale qui s'étend à des fibrés hilbertiens en dimension infinie, de base une variété connexe, de fibre un espace de Hilbert séparable. Une première ébauche de cette théorie a été développée dans l'article [5] et sera approfondie dans un article à venir....

## REFERENCES

- [1] Arai A. "A special class of infinite dimensional Dirac operators on the abstract Boson-Fermion Fock space." Hindawi Publishing Corporation, Journal of Mathematics. Vol 2014, Article ID 713690, (2014)
- [2] Arai A. "Supersymmetric extension of quantum scalar field theory." Quantum and Non-Commutative Analysis, H. Araki. Ed. pp73-90, Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. The Netherlands, (1993)
- [3] A. Arai, "A general class of infinite-dimensional Dirac operators and path integral representation of their index," Journal of Functional Analysis, vol. 105, no. 2, pp. 342–408, 1992.
- [4] Jonot J.L., "Structure spectrale dans les fibrés d'état" hal-03680298 (2022)
- [5] Jonot J.L., "Sur les champs physiques de divergence nulle et les champs en corde".hal-01072257 (2015)
- [6] Jonot J.L., "Sur quelques procédés de quantification. Applications aux jets et aux sections des fibrés hilbertiens" hal-01214215 (2015)
- [7] Maurey B. "Analyse Fonctionnelle et Théorie Spectrale" Cours Paris 7 (2001-2002)
- [8] Milnor J., "Morse Theory" Annals of Mathematics Studies Princeton University Press
- [9] Audin M., Damian M., "Théorie de Morse et homologie de Floer" CNRS Editions, 2010
- [10] Pederson S. "Anticommuting self-adjoint operators", J.Funct. Anal. 89 (1990)
- [11] Reed M. and Simon B. "Methods of Modern Mathematical Physics Vol.I: Functional Analysis", Academy Press, New York, (1975)
- [12] Vasilescu F.H "Anticommuting self-adjoint operators", Rev. Roum. Math. Pures Appl. 28 (1983)77-91

*Email address:* j.jonot@gmail.com