



HAL
open science

Répartition conjointe de trois nombres premiers et applications

Régis de La Bretèche

► **To cite this version:**

Régis de La Bretèche. Répartition conjointe de trois nombres premiers et applications. 2024. hal-04833768

HAL Id: hal-04833768

<https://cnrs.hal.science/hal-04833768v1>

Preprint submitted on 12 Dec 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Répartition conjointe de trois nombres premiers et applications

Régis de la Bretèche

4 octobre 2024

À la mémoire de Nicolas Bergeron

Abstract

We prove asymptotic results for the singular series associated to the distribution of three primes. Assuming a quantitative version of Hardy and Littlewood's conjecture on prime 3-tuples, we deduce an asymptotic formula related to the joint distribution of three primes. This improves recent results of Kuperberg and completes results by Montgomery and Soundararajan. Following the Montgomery and Soundararajan approach, we derive conjectural applications to the distribution of primes in short intervals.

1 Introduction

La conjecture des k -uplets de nombres premiers par Hardy et Littlewood [7] s'écrit

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \prod_{j=1}^k \Lambda(n + d_j) = (\mathfrak{S}(\mathcal{D}) + o(1))x \quad (x \rightarrow +\infty)$$

avec $\mathcal{D} := \{d_1, \dots, d_k\}$ un ensemble de k entiers distincts et $\mathfrak{S}(\mathcal{D})$ la série singulière définie par

$$\mathfrak{S}(\mathcal{D}) := \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-k} \left(1 - \frac{\nu_p(\mathcal{D})}{p}\right),$$

avec $\nu_p(\mathcal{D})$ est le nombre de classes de résidu modulo p parmi les éléments de \mathcal{D} . Ce produit eulérien est bien convergent puisque pour les grandes valeurs de nombre premier p nous avons $\nu_p(\mathcal{D}) = k$. De plus, $\mathfrak{S}(\mathcal{D})$ est nul s'il existe un nombre premier $p \leq k$ tel que $\nu_p(\mathcal{D}) = p$. Nous renvoyons à [1] pour la pertinence de ce modèle et les implications de cette conjecture.

D'après [14, eq. (2)], la série singulière vérifie aussi la relation

$$\mathfrak{S}(\mathcal{D}) = \sum_{\substack{q_1, \dots, q_k \\ q_j \geq 1}} \left(\prod_{j=1}^k \frac{\mu(q_j)}{\varphi(q_j)} \right) \sum_{\substack{a_1, \dots, a_k \\ 1 \leq a_j \leq q_j \\ (a_j, q_j) = 1 \\ \sum_j a_j / q_j \in \mathbb{Z}}} e\left(\sum_{j=1}^k \frac{a_j d_j}{q_j} \right),$$

avec $e(t) := e^{2\pi it}$. Nous notons $\Lambda_0 = \Lambda - 1$ la fonction arithmétique de moyenne asymptotiquement nulle construite à partir de la fonction de von Mangoldt Λ . La conjecture de Hardy et Littlewood s'écrit alors

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \prod_{j=1}^k \Lambda_0(n + d_j) = (\mathfrak{S}_0(\mathcal{D}) + o(1))x \quad (x \rightarrow +\infty)$$

avec $\mathfrak{S}_0(\mathcal{D})$ définie (voir [14, eq. (9)]) par

$$\mathfrak{S}_0(\mathcal{D}) = \sum_{\substack{q_1, \dots, q_k \\ q_j \geq 2}} \left(\prod_{j=1}^k \frac{\mu(q_j)}{\varphi(q_j)} \right) \sum_{\substack{a_1, \dots, a_k \\ 1 \leq a_j \leq q_j \\ (a_j, q_j) = 1 \\ \sum_j a_j / q_j \in \mathbb{Z}}} e\left(\sum_{j=1}^k \frac{a_j d_j}{q_j} \right).$$

Le théorème des nombres premiers fournit $\mathfrak{S}_0(\{d\}) = 0$ pour tout $d \geq 1$.

Considérons

$$R_k(h) := \sum_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ 1 \leq d_j \leq h \\ d_j \text{ distincts}}} \mathfrak{S}_0(\{d_1, \dots, d_k\}),$$

Montgomery et Soundararajan [14] ont établi pour tout $k \geq 1$ fixé et $h \geq 1$ l'estimation asymptotique

$$R_k(h) = \mu_k(-h \log h + Ah)^{k/2} + O_k(h^{k/2-1/(7k)+\varepsilon}), \quad (1.1)$$

où $A := 2 - \gamma - \log(2\pi)$ et $\mu_k = (2k')!/2^{k'}k!$ si $k = 2k'$ est pair et 0 si k est impair. Pour cela, ils utilisent l'article important de Montgomery et Vaughan [15]. Rappelons aussi que, d'après [5], la somme relative à \mathfrak{S} et non \mathfrak{S}_0 est équivalente à h^k pour tout $k \geq 1$. Cela s'explique notamment dans le fait que $\mathfrak{S}(\mathcal{D})$ est toujours positif ou nul.

Lorsque k est impair, la relation (1.1) ne fournit pas d'équivalent asymptotique. Lemke Oliver et Soundararajan [13] et Kuperberg [9] conjecturent lorsque k est impair fixé et $h \geq 2$ la relation

$$R_k(h) \asymp h^{(k-1)/2} (\log h)^{(k+1)/2} \quad (1.2)$$

et Kuperberg [9] montre la majoration $R_3(h) \ll h(\log h)^5$. De plus, Bloom et Kuperberg [2] montrent pour tout $k \geq 3$ impair fixé, $h \geq 2$, la majoration

$$R_k(h) \ll h^{(k-1)/2} (\log h)^{O_k(1)}.$$

Le but de cet article est de déterminer une évaluation asymptotique de $R_3(h)$. Nous notons $\log \log = \log_2$. Nous obtenons l'estimation suivante pour laquelle nous n'avons pas cherché à obtenir dans le terme d'erreur le meilleur exposant possible de $\log_2 h$.

Théorème 1.1. *Lorsque $h \geq 3$, nous avons*

$$R_3(h) = \frac{9}{2} h (\log h)^2 \left(1 + O\left(\frac{(\log_2 h)^{14}}{\log h} \right) \right).$$

Récemment, Leung [12] a étudié des généralisations de $R_k(h)$ où les conditions $d_j \equiv a \pmod r$ sont rajoutées à la somme définissant $R_k(h)$. Il est clair que nos méthodes fonctionnent dans ce cadre.

Déterminer un équivalent asymptotique de $R_3(h)$ est la première étape cruciale pour estimer asymptotiquement $R_{2k+1}(h)$ pour tout $k \geq 1$. L'estimation de $R_3(h)$ du Théorème 1.1 permet de conjecturer l'ordre asymptotique des moments d'ordre impair. Nous retrouvons la conjecture (1.2) et nous la précisons.

Conjecture 1.2. *Soit $k \geq 1$. Lorsque h tend vers l'infini, nous avons*

$$R_{2k+1}(h) \sim (-1)^{k-1} r_{2k+1} h^k (\log h)^{k+1},$$

avec

$$r_{2k+1} := \frac{3}{2}(2k+1)k\mu_{2k}.$$

Expliquons maintenant l'intuition qui nous permet d'énoncer cette conjecture. Dans le cas pair d'après [14], les cas dominants correspondent aux deux $2k$ -uplets (a_1, \dots, a_{2k}) et (q_1, \dots, q_{2k}) tels que $q_i = q_{i+k}$ et $a_{i+k} = q_i - a_i$ pour tout $1 \leq i \leq k$ et tous les autres cas obtenus par permutation des indices. Dans [14], cela permet d'obtenir lorsque h tend vers l'infini l'équivalent

$$R_{2k}(h) \sim \mu_{2k} R_2(h)^k \sim \mu_{2k} (-h \log h)^k.$$

Pour une estimation de R_2 établie dans [14], on pourra voir *infra* (5.2). Dans le cas impair, les cas dominants devraient correspondre aux deux $(2k+1)$ -uplets (a_1, \dots, a_{2k+1}) et (q_1, \dots, q_{2k+1}) tels que $a_{2k-1}/q_{2k-1} + a_{2k}/q_{2k} + a_{2k+1}/q_{2k+1} \in \mathbb{Z}$ et $q_i = q_{i+k-1}$ et $a_{i+k-1} = q_i - a_i$ pour tout $1 \leq i \leq k-1$ et tous les autres cas obtenus par permutation des indices. Cela permet d'espérer lorsque h tend vers l'infini l'équivalent asymptotique

$$R_{2k+1}(h) \sim \binom{2k+1}{3} \mu_{2k-2} R_3(h) R_2(h)^{k-1}.$$

Notre Théorème 1.1 et l'estimation (5.2) permettent de formuler notre conjecture.

Notons enfin qu'il n'y a pas d'obstacle conceptuel pour que la méthode de la preuve du Théorème 1.1 ne fonctionne pas pour estimer $R_{2k+1}(h)$ lorsque $k \geq 2$. En revanche, le nombre $2^{2k+1} - 2k - 2$ de variables qui paramètrent les dénominateurs q_j devient vite trop grand pour être facilement appréhendé.

Nous développons maintenant une conséquence importante du Théorème 1.1. Nous estimons lorsque $k = 3$ le moment

$$M_k(X, h) := \frac{1}{X} \sum_{1 \leq n \leq X} (\psi(n+h) - \psi(n) - h)^k$$

où

$$\psi(x) := \sum_{1 \leq n \leq x} \Lambda(n).$$

Conditionnellement à une forme quantitative de la conjecture de Hardy et Littlewood, Montgomery et Soundararajan [14] établissent une estimation asymptotique de $M_k(X, h)$ lorsque k est pair. Lorsque k est impair, ils n'obtiennent qu'une majoration. Nous reprenons les hypothèses de [14].

Théorème 1.3. Soit $E_k(x; \mathcal{D})$ défini par la relation

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \prod_{j=1}^k \Lambda(n + d_j) = \mathfrak{S}(\mathcal{D})x + E_k(x; \mathcal{D}), \quad (1.3)$$

lorsque $\mathcal{D} = \{d_1, \dots, d_k\}$ avec les d_j distincts. Supposons qu'uniformément lorsque $1 \leq k \leq K$, $0 \leq x \leq X$ et \mathcal{D} un ensemble de k entiers d_j distincts tous $\leq h$ nous ayons $|E_k(x; \mathcal{D})| \leq E_K(X, h)$ avec $E_K(X, h) \geq \sqrt{X}$. Alors, avec $B := 1 - \gamma - \log(2\pi)$ où γ est la constante d'Euler, pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons lorsque $h \leq X^{1/3}$

$$M_3(X, h) = h \left(\frac{9}{2} (\log h)^2 - 3(\log h - B)(\log X) + (\log X)^2 \right) + O(h(\log h)(\log_2 h)^{14} + h(h + \log X)^2 E_3(X, h)/X + h^{1/2+\varepsilon} \log X). \quad (1.4)$$

Le Théorème 1.3 fournit un équivalent asymptotique de $M_3(X, h)$ lorsque, par exemple, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(h + \log X)^2 E_3(X, h) \ll X(\log X)^{2-\varepsilon}$. L'hypothèse (1.3) avec la majoration $E_3(X, h) \ll_\varepsilon X^{1/2+\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$ implique l'hypothèse de Riemann.

Sous l'hypothèse de Riemann, il est établi dans [4] une minoration d'une forme pondérée de $(-1)^k M_k(X, h)$ mais pour des valeurs de h très proche de X (par exemple dans l'intervalle $X/(\log X)^{k/2-1-\varepsilon} < h \leq X$). Les deux résultats n'ont donc pas d'intersection de domaine de validité.

Sous l'hypothèse de Hardy et Littlewood avec $E_{2K}(X, h) \ll X^{1/2+\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$, Montgomery et Soundararajan [14] établissent l'estimation valable dans le domaine $\log X \leq h \leq X^{1/2K}$

$$M_{2K}(X, h) = \mu_{2K} \frac{h^K}{X} \int_0^X (\log x/h + B)^K dx + O\left((\log X)^K H^K \left(\frac{H}{\log X} \right)^{-1/16K} + H^K X^{-1/2+\varepsilon} \right).$$

La conjecture 1.2 et celle de Hardy et Littlewood nous permettent d'obtenir une expression conjecturale de $M_K(X, h)$ pour tout K impair. Dans le cas $K = 3$, nous retrouvons une forme affaiblie du Théorème 1.3.

Théorème 1.4. Soit $K \geq 1$. Sous la conjecture 1.2 et celle de Hardy et Littlewood énoncée au Théorème 1.3, lorsque h et X tendent vers l'infini avec $\log X \leq h \leq X^{1/(2K+1)}$, nous avons

$$M_{2K+1}(X, h) = \left(\frac{1}{3} + o(1) \right) \mu_{2K+2} K h^K (\log(X/h))^{K-1} \left(\frac{9}{2} (\log h)^2 - 3(\log h)(\log X) + (\log X)^2 \right) + O(h^{2K+1} E_{2K+1}(X, h)/X). \quad (1.5)$$

Nous détaillons maintenant notre méthode pour établir le Théorème 1.1 en essayant de mettre en valeur les idées de nos preuves.

Dans toute la suite, h sera un entier ≥ 2 . Nous considérons

$$E_h(\alpha) := \sum_{1 \leq d \leq h} e(d\alpha) = e(\alpha) \frac{e(h\alpha) - 1}{e(\alpha) - 1} \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}).$$

Nous introduisons la somme $V_3(h)$ définie par

$$V_3(h) = \sum_{\substack{P(q_1 q_2 q_3) \leq h^3 \\ q_j \geq 2}} \prod_{j=1}^3 \frac{\mu(q_j)}{\varphi(q_j)} \sum_{\substack{a_1, a_2, a_3 \\ 1 \leq a_j \leq q_j \\ (a_j, q_j) = 1 \\ \sum_j a_j / q_j \in \mathbb{Z}}} \prod_{j=1}^3 E_h\left(\frac{a_j}{q_j}\right) \quad (1.6)$$

qui correspond à la somme $R_3(h)$ avec la restriction supplémentaire $P(q_1 q_2 q_3) \leq h^3$ mais sans la condition d_j distincts. Ici, et dans la suite, $P(n)$ désigne le plus grand facteur premier d'un entier n avec la convention $P(1) = 1$. Nous posons $q := \prod_{p \leq h^3} p$. Suivant [9, lemmes 2.4 et 2.5], pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons

$$R_3(h) = V_3(h) - h \left(\frac{q}{\varphi(q)} \right)^2 + 3h(\log h - B) \frac{q}{\varphi(q)} + h(-6 \log h + 6B + 4) + O(h^{1/2+\varepsilon}). \quad (1.7)$$

L'estimation de $R_3(h)$ se réduit donc à celle de $V_3(h)$.

Comme dans [9], pour les entiers q_j de la somme (1.6), nous utilisons la décomposition

$$q_1 = gyz, \quad q_2 = gxz, \quad q_3 = gxy, \quad (1.8)$$

avec g, x, y, z des entiers naturels premiers entre eux. La condition $\sum_j a_j / q_j \in \mathbb{Z}$ est alors équivalente à

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z \equiv 0 \pmod{gxyz}. \quad (1.9)$$

Nous pouvons donc écrire

$$V_3(h) = \sum_{\substack{P(gxyz) \leq h^3 \\ gyz, gxz, gxy \geq 2}} \frac{\mu(g)\mu(gxyz)^2}{\varphi(g)\varphi(gxyz)^2} V(g, x, y, z; h), \quad (1.10)$$

avec

$$V(g, x, y, z; h) := \sum_{\substack{a_1, a_2, a_3 \\ 1 \leq a_j \leq q_j \\ (a_j, q_j) = 1 \\ \sum_j a_j / q_j \in \mathbb{Z}}} \prod_{j=1}^3 E_h\left(\frac{a_j}{q_j}\right). \quad (1.11)$$

Comme cela a été remarqué par Bloom et Kuperberg [2], la condition $\sum_j a_j / q_j \in \mathbb{Z}$ intervient dans de nombreux problèmes importants. Nous renvoyons à [2] pour une bibliographie complète. La difficulté principale de l'estimation de la somme $V_3(h)$ provient du caractère oscillant du facteur $\mu(g)$. Dans [9] et [2], ce terme est majoré en valeur absolue ce qui empêche d'obtenir un majorant meilleur que $h(\log h)^4$.

La première étape de la démonstration du Théorème 1.1 consiste à utiliser les symétries du problème afin de se placer dans un ensemble de comptage tel que $x \gg y \gg z$. Pour cela, nous introduisons les quantités

$$X = 2^j, \quad Y = 2^k, \quad Z = 2^\ell, \quad (1.12)$$

et nous scindons alors le domaine de la sommation en des sous-domaines définis par

$$X \leq x < 2X, \quad Y \leq y < 2Y, \quad Z \leq z < 2Z. \quad (1.13)$$

Ainsi lorsque (x, y, z) est fixé, nous avons (1.12) avec

$$j = \left\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \right\rfloor, \quad k = \left\lfloor \frac{\log y}{\log 2} \right\rfloor, \quad \ell = \left\lfloor \frac{\log z}{\log 2} \right\rfloor.$$

Nous écrivons aussi

$$Q_1 = gYZ, \quad Q_2 = gXZ, \quad Q_3 = gXY$$

de sorte que

$$Q_1 \leq q_1 < 4Q_1, \quad Q_2 \leq q_2 < 4Q_2, \quad Q_3 \leq q_3 < 4Q_3.$$

Au Lemme 3.1, pour des raisons de symétries, nous pourrions alors nous placer dans le cas où $X \geq Y \geq Z$. La partition du domaine en (x, y, z) en des cubes dyadiques est un des points importants de notre méthode.

Pour pouvoir estimer précisément $V_3(h)$, il est donc important d'estimer asymptotiquement la somme intérieure $V(g, x, y, z; h)$ apparaissant dans le membre de droite de (1.6). Si on somme selon les variables a_1 et a_2 , la congruence (1.9) devient $a_1x + a_2y \equiv 0 \pmod{z}$. Les entiers a_j contribuant principalement à la somme vérifient $a_j \approx q_j/h \approx Q_j/h$. Ainsi si on fixe a_1 et on considère la congruence modulo z vérifiée par a_2 , on obtient une estimation précise lorsque $Q_2/hz > T$ et $Q_1/h > T$ où T est un paramètre suffisamment grand (T sera pris à la fin de la démonstration égal à $\exp\{150(\log_2 h)^2\}$). Cela sera fait au Lemme 3.2 en utilisant une sommation d'Abel de dimension 2 (voir Lemme 2.1).

De même lorsque $Q_1/h \leq 1/T$, la contribution attendue est petite puisque heuristique-ment $a_1 \approx Q_1/h$. Cela sera montré au Lemme 3.3.

Lorsque a_1 et a_2 ne varient pas dans des intervalles suffisamment grands, nous sommes par rapport aux variables x et y satisfaisant à la congruence $a_1x + a_2y \equiv 0 \pmod{z}$. Si $X \geq ZT^4$ par exemple, cela devrait être suffisant. Ici apparaît un des apports les plus importants de l'article. On ne doit pas sommer la fonction constante mais une fonction arithmétique proche de μ^2 la fonction indicatrice des entiers sans facteur carré. Or l'estimation de Hooley [8] qui s'écrit

$$\sum_{\substack{1 \leq n \leq X \\ n \equiv a \pmod{z}}} \mu(n)^2 = \frac{6X}{\pi^2} \prod_{p|z} (1 - 1/p^2)^{-1} + O\left(\left(\frac{X}{Z}\right)^{1/2} + Z^{1/2+\varepsilon}\right) \quad (1.14)$$

ne fournit une estimation non triviale que lorsque $Z \leq X^{2/3-\varepsilon}$. Notons que l'estimation (1.14) précise le résultat de [18] et qu'un plus grand domaine défini par $Z \leq X^{25/36-\varepsilon}$ a été obtenu dans [17]. Heureusement, des résultats en moyenne obtenus par Le Boudec [11] rendus explicites pour l'occasion (voir Lemme 2.8, puis les Lemmes 2.9, 2.11, 2.12) permettent de surmonter cette difficulté pour obtenir des estimations lorsque $X \geq ZT^4$ avec, là encore, T un paramètre suffisamment grand.

Les oscillations de $\mu(g)$ permettent de se placer dans le cas où g est petit disons $g \leq T$ (voir Lemme 4.4). Le reste du domaine à couvrir est alors suffisamment petit pour conclure. Nous renvoyons aux Lemmes 4.5 et 4.6 où sont établis des majorations suffisantes.

La deuxième section est consacrée à l'énoncé et à la démonstration de résultats techniques nécessaires à l'estimation de $V_3(h)$. On pourra l'omettre en première lecture. Ces résultats sont soit obtenus par des méthodes classiques, soit conséquences des travaux de Le Boudec sur l'équirépartition des entiers sans facteur carré dans les progressions arithmétiques. Notons aussi le Lemme 2.17 qui permet d'estimer des sommes nouvelles dans ce contexte.

2 Lemmes techniques

2.1 Sommation d'Abel en deux variables et majorations d'intégrales

Lorsque f est une fonction arithmétique en deux variables, notons

$$S(x_1, x_2; f) := \sum_{\substack{1 \leq n_1 \leq x_1 \\ 1 \leq n_2 \leq x_2}} f(n_1, n_2).$$

Nous énonçons une formule de sommation d'Abel de dimension 2.

Lemme 2.1. *Soient f une fonction arithmétique en deux variables et g une fonction C^1 sur $[0, +\infty[^2$. Alors pour tout $x_1, x_2 \geq 1$, on a la formule*

$$\begin{aligned} S(x_1, x_2; fg) &= g(x_1, x_2)S(x_1, x_2; f) - \int_0^{x_1} S(t_1, x_2; f) \partial_1 g(t_1, x_2) dt_1 \\ &\quad - \int_0^{x_2} S(x_1, t_2; f) \partial_2 g(x_1, t_2) dt_2 + \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} S(t_1, t_2; f) \partial_{1,2}^2 g(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

De plus lorsque M est de classe C^1 sur $[0, +\infty[^2$ satisfaisant $M(t_1, 0) = M(0, t_2) = 0$ pour tout $t_1, t_2 \geq 0$, nous avons

$$\begin{aligned} (gM)(x_1, x_2) &- \int_0^{x_1} (M \partial_1 g)(t_1, x_2) dt_1 - \int_0^{x_2} (M \partial_2 g)(x_1, t_2) dt_2 \\ &+ \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} (M \partial_{1,2}^2 g)(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} (g \partial_{1,2}^2 M)(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Remarque 2.2. *Ce résultat vaut aussi pour les sommes de la forme*

$$\sum_{\substack{1 \leq n_1 < x_1 \\ 1 \leq n_2 < x_2}} f(n_1, n_2).$$

Démonstration. En appliquant successivement deux fois une sommation d'Abel, nous obtenons

$$\begin{aligned} S(x_1, x_2; fg) &= \sum_{1 \leq n_1 \leq x_1} \left(f(n_1, x_2)g(n_1, x_2) - \int_1^{x_2} \sum_{1 \leq n_2 \leq t_2} f(n_1, n_2) \partial_2 g(n_1, t_2) dt_2 \right) \\ &= g(x_1, x_2)S(x_1, x_2; f) - \int_1^{x_1} S(t_1, x_2; f) \partial_1 g(t_1, x_2) dt_1 \\ &\quad - \int_1^{x_2} S(x_1, t_2; f) \partial_2 g(x_1, t_2) dt_2 + \int_1^{x_1} \int_1^{x_2} S(t_1, t_2; f) \partial_{1,2}^2 g(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Nous déduisons la formule (2.1) en remarquant que les sommes $S(t_1, t_2; f)$ sont nulles lorsque $t_1 \in [0, 1[$ ou $t_1 \in [0, 1[$. Nous ne détaillons pas la preuve de (2.2) qui consiste à faire deux intégrations par parties. \square

Nous introduisons la quantité

$$E_h^+(t) = \frac{1}{1/h + ||t||}. \quad (2.3)$$

Lemme 2.3. *Lorsque $h \geq 2$, nous avons*

$$\int_{-1/2}^{1/2} E_h^+(t) dt \ll \log h, \quad \int_{-1/2}^{1/2} E_h^+(t_2) E_h^+(t_2 + t_1) dt_2 \ll E_h^+(t_1) \log h$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} E_h^+(t_1) E_h^+(t_2) E_h^+(t_2 + t_1) dt_1 dt_2 \ll h, \\ & \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} t_1 E_h^+(t_1) E_h^+(t_2) E_h^+(t_2 + t_1) dt_1 dt_2 \ll (\log h)^2, \\ & \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} t_1 t_2 E_h^+(t_1) E_h^+(t_2) E_h^+(t_2 + t_1) dt_1 dt_2 \ll \log h. \end{aligned}$$

Démonstration. Pour démontrer la deuxième majoration, nous distinguons le cas $|t_2| \leq \frac{1}{2} ||t_1||$ du cas $|t_2| > \frac{1}{2} ||t_1||$ et nous utilisons $\int_{-1/2}^{1/2} E_h^+(t) dt \ll \log h$. Nous n'indiquons pas plus de détails. \square

2.2 Estimations de sommes de fonctions arithmétiques

Posons

$$\sigma(X, q) := \min \left\{ \frac{X}{q} + (\log 3X)^2, \left(\frac{X}{q} + 1 \right) (\log_2 3X)^2 \right\}.$$

Nous considérons

$$S(X; q, a, m) := \sum_{\substack{1 \leq n \leq X \\ n \equiv a \pmod{q} \\ (n, m) = 1}} \frac{\mu(n)^2 n^2}{\varphi(n)^2}, \quad S_{\mu^2}(X; q, a, m) := \sum_{\substack{1 \leq n \leq X \\ n \equiv a \pmod{q} \\ (n, m) = 1}} \mu(n)^2, \quad (2.4)$$

$$S(X; q) := \sum_{\substack{1 \leq n \leq X \\ (n, q) = 1}} \frac{\mu(n)^2 n^2}{\varphi(n)^2}, \quad S_{\mu^2}(X; q) := \sum_{\substack{1 \leq n \leq X \\ (n, q) = 1}} \mu(n)^2. \quad (2.5)$$

Lemme 2.4. *Soient $a, q, m \in \mathbb{N}$ tels que $(a, qm) = 1$, $(q, m) = 1$ et $X \geq 1$. Nous avons*

$$S(X; q, a, m) \ll \sigma(X, q). \quad (2.6)$$

Démonstration du Lemme 2.4. La majoration par le second terme du maximum découle de la majoration $n/\varphi(n) \ll \log_2(3n)$.

Pour établir la majoration par le premier terme, nous écrivons

$$\frac{n^2}{\varphi(n)^2} \ll \sum_{k|n} \frac{\mu^2(k)2^{\omega(k)}}{k}.$$

La somme à majorer est donc

$$\ll \sum_{\substack{k \leq X \\ (k,q)=1}} \frac{\mu^2(k)2^{\omega(k)}}{k} \sum_{\substack{n \equiv a \pmod q \\ k|n \\ 1 \leq n \leq X}} 1 \ll \sum_{\substack{k \leq X \\ (k,q)=1}} \frac{\mu^2(k)2^{\omega(k)}}{k} \left(\frac{X}{qk} + 1 \right),$$

ce qui fournit aisément la majoration annoncée. \square

Nous rappelons aussi le résultat suivant dont nous n'indiquons pas la preuve.

Lemme 2.5. *Soient ξ une fonction arithmétique et $M_\xi \geq 0$ tels que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\xi(n)|}{n^{1/2}} \leq M_\xi.$$

Lorsque $T \geq 1$, nous avons

$$\sum_{T \leq n < 2T} \frac{(1 * \xi)(n)}{n} = \log 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi(n)}{n} + O\left(\frac{M_\xi}{T^{1/2}}\right)$$

et

$$\sum_{1 \leq n \leq T} (1 * \xi)(n) = T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi(n)}{n} + O(M_\xi T^{1/2}).$$

Nous posons

$$\psi_\alpha(m) := \prod_{p|m} \left(1 + \frac{1}{p^\alpha}\right), \quad \varphi_\alpha(m) := \prod_{p|m} \left(1 - \frac{\alpha}{p}\right) \quad (\alpha \in \mathbb{R}). \quad (2.7)$$

Nous notons

$$\mathcal{L}(X) := \exp \sqrt{\log X},$$

et rappelons la notation (2.5).

Lemme 2.6. *Lorsque $m \in \mathbb{N}$ et $X \geq 1$, nous avons*

$$S_{\mu^2}(X; m) = \frac{6X}{\pi^2 \varphi_{-1}(m)} + O(\psi_{1/3}(m)^2 X^{1/2} \mathcal{L}(X)^{-1}). \quad (2.8)$$

Remarque 2.7. *Le facteur supplémentaire $\mathcal{L}(X)^{-1}$ dans le terme d'erreur est crucial pour notre application. La valeur $\frac{1}{3}$ dans le terme d'erreur peut être aisément remplacée par tout réel $< \frac{1}{2}$.*

Démonstration. Par souci de complétude, nous indiquons les idées de la preuve qui sont très classiques. Lorsque $m = 1$, ce résultat est bien connu et peut être obtenu à partir d'une application de la méthode de l'hyperbole compte-tenu de la relation de convolution $\mu^2(n) = \sum_{d^2|n} \mu(d)$ et d'une conséquence du *Théorème des nombres premiers* qui s'écrit

$$\sum_{n \leq X} \mu(n) \ll X \mathcal{L}(X)^{-3}.$$

Soit λ la fonction de Liouville. La relation de convolution

$$\mu^2(n) 1_{(n,m)=1} = \sum_{d|(n,m^\infty)} \lambda(d) \mu^2(n/d), \quad (2.9)$$

fournit

$$S_{\mu^2}(X; m) = \sum_{d|m^\infty} \lambda(d) S_{\mu^2}(X/d; 1).$$

Nous utilisons alors le résultat obtenu lorsque $d \leq \sqrt{X}$ alors que lorsque $\sqrt{X} < d \leq X$ la majoration triviale $\leq X/d$ suffit. Nous avons

$$\sum_{d|m^\infty} \frac{1}{d^{1/2}} \ll \psi_{1/2}(m)^2, \quad \sum_{d|m^\infty} \frac{1}{d^{1/3}} \ll \psi_{1/3}(m) \psi_{2/3}(m) \ll \psi_{1/3}(m)^2. \quad (2.10)$$

La seconde majoration de (2.10) et l'astuce de Rankin fournissent alors le résultat recherché. Nous n'indiquons pas plus de détails. \square

2.3 Majoration de Le Boudec rendue explicite et ses conséquences

Nous rappelons les notations (2.4) de S_{μ^2} et S . Notons

$$\begin{aligned} E_{\mu^2}(X; q, a, m) &:= S_{\mu^2}(X; q, a, m) - \frac{6X}{\pi^2 \varphi(q) \varphi_{-1}(mq)}, \\ E(X; q, a, m) &:= S(X; q, a, m) - \frac{6X}{\pi^2 \varphi(q) \varphi_{-1}(mq)} \prod_{p|mq} \left(1 + \frac{2 - 1/p}{(p-1)^2(1+1/p)} \right), \end{aligned} \quad (2.11)$$

et

$$\mathcal{M}_{2,\mu^2}(X, q, m) := \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a,q)=1}} E_{\mu^2}(X; q, a, m)^2, \quad \mathcal{M}_2(X, q, m) := \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a,q)=1}} E(X; q, a, m)^2. \quad (2.12)$$

Notons que lorsque q un nombre premier vérifie $X^{5/11+\varepsilon} \leq q \leq X$ et X/q tend vers l'infini, il existe des estimations asymptotiques de $E_{\mu^2}(X; q, 1, 1)$ (cf. [6]). Nous rendons explicite la majoration du théorème 1 de Le Boudec [11] valable pour tout entier q qui est une amélioration de celles de Blomer [3] et de Nunes [16].

Lemme 2.8 ([11]). *Lorsque $1 \leq q \leq X$ tel que $\mu(q)^2 = 1$, nous avons uniformément*

$$\mathcal{M}_{2,\mu^2}(X, q, 1) \ll (\log X)^5 \left(2^{\omega(q)} X^{1/2} q^{1/2} + 4^{\omega(q)} \frac{X}{q^{1/2}} \right) \ll X (\log 2X)^5 2^{\omega(q)}. \quad (2.13)$$

En première lecture, la preuve de ce lemme pourra être omise.

Démonstration. Nous nous contentons d'indiquer les changements à faire par rapport à la démonstration de la proposition 1 de [11]. Les notations utilisées ici sont celles de [11]. Les lemmes 2 et 3 de [11] ont une version explicite établie dans [10]. Comme nous l'a indiqué Shuntaro Yamagishi, il faut rajouter au lemme 2 de [10] un facteur $\tau(q)\varphi(q)/q$ à $E_1(q)$ alors que le lemme 9 de [10] est juste sous la forme publiée. D'après le lemme 2 de [10] ainsi corrigé, on peut remplacer le majorant $q^\varepsilon M(q, a_1, a_2)$ dans le lemme 2 de [11] par $M(q, a_1, a_2) + (q/\varphi(q))^2(\log 2q)^2\tau(q)$. D'après le lemme 9 de [10], on peut remplacer le majorant $q^\varepsilon(F_1F_2+q)$ dans le lemme 3 de [11] par

$$2^{\omega(q)}(q/\varphi(q))^3(\log 2q)^2(\tau(q)F_1F_2 + q).$$

La modification de l'énoncé du lemme 2 de [11] n'influe pas sur le résultat. Il suffit alors de suivre la démonstration de la proposition 1 de [11] en choisissant la même valeur du paramètre y et en utilisant la majoration

$$\text{card}\{1 \leq \rho \leq q : \rho^2 \equiv a \pmod{q}\} \ll 2^{\omega(q)}$$

uniforme pour $(a, q) = 1$ et la borne $(q/\varphi(q))^3(\log 2q)^2 \ll (\log 2X)^3$. Nous ne fournissons pas plus de détails. \square

Nous montrons le même type de majoration pour tous les $\mathcal{M}_{2,\mu^2}(X, q, m)$ puis pour $\mathcal{M}_2(X, q, m)$. Nous rappelons la définition (2.7) de ψ_α .

Lemme 2.9. *Lorsque $(q, m) = 1$ et $1 \leq q \leq X$ tel que $\mu(q)^2 = 1$, nous avons*

$$\mathcal{M}_{2,\mu^2}(X, q, m) \ll \psi_{1/2}(m)^4 X (\log 2X)^5 2^{\omega(q)} \quad (2.14)$$

et

$$\mathcal{M}_2(X, q, m) \ll \psi_{1/2}(m)^4 X (\log 2X)^5 2^{\omega(q)}. \quad (2.15)$$

Remarque 2.10. *La borne triviale est en $O(X^2/q+q)$. Donc nous obtenons ici une amélioration de la borne triviale dès que $q \leq X/T$ avec T plus grand qu'une puissance de $\log X$.*

Démonstration. En utilisant l'identité de convolution (2.9), nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{2,\mu^2}(X, q, m) &= \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a,q)=1}} \left| \sum_{\substack{d|m^\infty \\ (d,q)=1}} \lambda(d) \left(\sum_{\substack{1 \leq n \leq X/d \\ dn \equiv a \pmod{q}}} \mu(n)^2 - \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \frac{X}{dq} \right) \right|^2 \\ &\leq 2 \left(\sum_{\substack{d|m^\infty \\ 1 \leq d \leq X}} d^{-1/2} \right) \sum_{\substack{d|m^\infty \\ 1 \leq d \leq X}} d^{1/2} \mathcal{M}_{2,\mu^2}(X/d, q, 1) + 2 \left(\sum_{\substack{d|m^\infty \\ d > X}} \frac{\lambda(d)}{d} \right)^2 \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^2 \frac{X^2 \varphi(q)}{q^2}. \end{aligned}$$

Avec la majoration (2.10), la méthode de Rankin fournit

$$\left| \sum_{\substack{d|m^\infty \\ d > X}} \frac{\lambda(d)}{d} \right| \leq \sum_{d|m^\infty} \frac{1}{d^{1/2}\sqrt{X}} \ll \frac{\psi_{1/2}(m)^2}{\sqrt{X}}.$$

En utilisant (2.13), nous obtenons finalement

$$\mathcal{M}_{2,\mu^2}(X, q, m) \ll \psi_{1/2}(m)^4 X (\log 2X)^5 2^{\omega(q)}.$$

Estimons maintenant $\mathcal{M}_2(X, q, m)$. Lorsque $\Re(s) > 1$, un simple calcul fournit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)^2 n^2}{\varphi(n)^2 n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{(1-1/p)^2 p^s} \right) = \prod_p \left(1 + \frac{2-1/p}{(1-1/p)^2 p(p^s+1)} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)^2}{n^s}.$$

Nous notons f_1 la fonction arithmétique dont la série de Dirichlet correspond au produit eulérien ci-dessus de sorte que

$$\frac{\mu(n)^2 n^2}{\varphi(n)^2} = (\mu^2 * f_1)(n). \quad (2.16)$$

De (2.16) puis (2.14), nous déduisons

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2(X, q, m) &= \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a,q)=1}} \left| \sum_{\substack{1 \leq d \leq X \\ (d,mq)=1}} f_1(d) \left(\sum_{\substack{1 \leq n \leq X/d \\ dn \equiv a \pmod{q} \\ (n,m)=1}} \mu(n)^2 - \frac{6X}{\pi^2 d \varphi(q) \varphi_{-1}(mq)} \right) \right|^2 \\ &\leq 2 \left(\sum_{\substack{1 \leq d \leq X \\ (d,mq)=1}} \frac{1}{d^{1+\varepsilon}} \right) \sum_{\substack{1 \leq d \leq X \\ (d,mq)=1}} |f_1(d)|^2 d^{1+\varepsilon} \mathcal{M}_{2,\mu^2}(X/d, q, m) \\ &\quad + 2\varphi(q) \left(\sum_{\substack{d > X \\ (d,mq)=1}} \frac{f_1(d)}{d} \right)^2 \frac{36X^2}{\pi^4 \varphi(q)^2 \varphi_{-1}(mq)^2}. \end{aligned}$$

En raisonnant de la manière que pour $\mathcal{M}_{2,\mu^2}(X, q, m)$, nous obtenons aisément le résultat annoncé. \square

Nous considérons la fonction arithmétique en deux variables f_2 définie par la relation de convolution

$$\delta((x, y)) \frac{\mu(x)^2 x^2}{\varphi(x)^2} \frac{\mu(y)^2 y^2}{\varphi(y)^2} = \sum_{\substack{d_1 x' = x \\ d_2 y' = y}} f_2(d_1, d_2) \mu(x')^2 \mu(y')^2, \quad (2.17)$$

où δ est l'élément neutre de la convolution valant 1 en 1 et 0 ailleurs. Lorsque $\Re(s_1) > 1$ et $\Re(s_2) > 1$, il vient

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x, y \geq 1 \\ (x, y) = 1}} \frac{\mu(x)^2 x^2}{\varphi(x)^2 x^{s_1}} \frac{\mu(y)^2 y^2}{\varphi(y)^2 y^{s_2}} &= \prod_p \left(1 + \frac{1}{(1-1/p)^2 p^{s_1}} + \frac{1}{(1-1/p)^2 p^{s_2}} \right) \\ &= \left(\sum_{x=1}^{\infty} \frac{\mu(x)^2}{x^{s_1}} \sum_{y=1}^{\infty} \frac{\mu(y)^2}{y^{s_2}} \right) \sum_{d_1, d_2 \geq 1} \frac{f_2(d_1, d_2)}{d_1^{s_1} d_2^{s_2}}, \end{aligned}$$

avec

$$\sum_{d_1, d_2 \geq 1} \frac{f_2(d_1, d_2)}{d_1^{s_1} d_2^{s_2}} = \prod_p \left(1 + \frac{(2 - 1/p)(1/p^{s_1} + 1/p^{s_2})}{(1 - 1/p)^2 p(1 + 1/p^{s_1})(1 + 1/p^{s_2})} - \frac{1}{(p^{s_2} + 1)(p^{s_1} + 1)} \right).$$

Nous notons aussi le calcul

$$\sum_{d_1, d_2 \geq 1} \frac{f_2(d_1, d_2)}{d_1 d_2} = \prod_p \left(\frac{1 + 1/p^2}{(1 - 1/p)^2 (1 + 1/p)^2} \right) = \frac{\zeta(2)^3}{\zeta(4)}. \quad (2.18)$$

Nous énonçons une conséquence directe du Lemme 2.9 (voir aussi [11]) et du Lemme 2.6.

Lemme 2.11. *Lorsque $X, Y \geq 1$, $q \geq 1$ tel que $\mu(q)^2 = 1$ et $(u, q) = 1$, alors*

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a, q) = 1}} S_{\mu^2}(X; q, a, 1) S_{\mu^2}(Y; q, au, 1) - \frac{36XY}{\pi^4 \varphi(q) \varphi_{-1}(q)^2} \\ & \ll (XY)^{1/2} (\log 2X)^{5/2} (\log 2Y)^{5/2} 2^{\omega(q)} \left(1 + \frac{X^{1/2} \mathcal{L}(Y)^{-1} + Y^{1/2} \mathcal{L}(X)^{-1}}{q} \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Démonstration. Nous pouvons supposer $X \geq Y$. Le terme à estimer s'écrit

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a, q) = 1}} S_{\mu^2}(X; q, a, 1) S_{\mu^2}(Y; q, au, 1) - \frac{36XY}{\pi^4 \varphi(q) \varphi_{-1}(q)^2} \\ & = \frac{6X}{\pi^2 \varphi(q) \varphi_{-1}(q)} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a, q) = 1}} E_{\mu^2}(Y; q, au, 1) + \frac{6Y}{\pi^2 \varphi(q) \varphi_{-1}(q)} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a, q) = 1}} E_{\mu^2}(X; q, a, 1) \\ & + \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a, q) = 1}} E_{\mu^2}(X; q, a, 1) E_{\mu^2}(Y; q, au, 1). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Or d'après le Lemme 2.6, nous avons

$$\sum_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a, q) = 1}} E_{\mu^2}(X; q, a, 1) = S_{\mu^2}(X; q) - \frac{6X}{\pi^2 \varphi_{-1}(q)} \ll \psi_{1/3}(q)^2 X^{1/2} \mathcal{L}(X)^{-1}.$$

Pour majorer le dernier terme du membre de droite de (2.20), nous appliquons la borne de Le Boudec (2.14) via l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Le terme d'erreur est donc bien

$$\begin{aligned} & \ll \psi_{1/3}(q)^2 \frac{XY^{1/2} \mathcal{L}(Y)^{-1}}{q} + (XY)^{1/2} (\log 2X)^{5/2} (\log 2Y)^{5/2} 2^{\omega(q)} \\ & \ll (XY)^{1/2} (\log 2X)^{5/2} (\log 2Y)^{5/2} 2^{\omega(q)} \left(1 + \frac{X^{1/2} \mathcal{L}(Y)^{-1}}{q} \right). \end{aligned}$$

□

Lorsque $(a_1 a_2, gq) = 1$, $(g, q) = 1$, nous introduisons la somme

$$W(X, Y; g, q, a_1, a_2) := \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a, q) = 1}} \sum_{\substack{1 \leq x \leq X \\ agx \equiv a_2 \pmod{q} \\ (x, a_2 g) = 1}} \frac{\mu(x)^2 x^2}{\varphi(x)^2} \sum_{\substack{1 \leq y \leq Y \\ agy \equiv -a_1 \pmod{q} \\ (y, a_1 g x) = 1}} \frac{\mu(y)^2 y^2}{\varphi(y)^2}.$$

Nous observons

$$W(X, Y; g, q, a_1, a_2) = \sum_{\substack{1 \leq x \leq X, 1 \leq y \leq Y \\ a_1 x + a_2 y \equiv 0 \pmod{q} \\ (y, a_1 g q x) = 1, (x, a_2 g q) = 1}} \frac{\mu(x)^2 x^2}{\varphi(x)^2} \frac{\mu(y)^2 y^2}{\varphi(y)^2}.$$

Nous aurons aussi besoin d'estimer la somme

$$W^*(X, Y; g, q, a_1, a_2) := \sum_{\substack{1 \leq x \leq X, 1 \leq y \leq Y \\ a_1 x + a_2 y \equiv 0 \pmod{q} \\ (y, a_1 g q x) = 1, (x, a_2 g q) = 1 \\ (a_1 x + a_2 y, g) = 1}} \frac{\mu(x)^2 x^2}{\varphi(x)^2} \frac{\mu(y)^2 y^2}{\varphi(y)^2}.$$

Nous introduisons les fonctions arithmétiques w et w^* définies par

$$w(q, a_1, a_2) := \prod_{p|q(a_1, a_2)} \left(\frac{(1 - 1/p)^2}{1 + 1/p^2} \right) \prod_{\substack{p|a_1 a_2 \\ p \nmid (a_1, a_2)}} \left(\frac{1 - 1/p + 1/p^2}{1 + 1/p^2} \right), \quad (2.21)$$

et

$$w^*(g, q, a_1, a_2) := w(gq, a_1, a_2) \prod_{p|g} \left(\frac{1 - 2/p}{1 - 1/p} \right) = w(gq, a_1, a_2) \frac{\varphi_2(g)}{\varphi_1(g)}. \quad (2.22)$$

Le lemme suivant sera utilisé pour démontrer le Lemme 4.2.

Lemme 2.12. *Lorsque $X, Y \geq 1$, $q \geq 1$ tel que $\mu(q)^2 = 1$ et $(a_1 a_2, gq) = (g, q) = 1$, nous avons alors*

$$W(X, Y; g, q, a_1, a_2) - \frac{\zeta(2)}{\zeta(4)} XY \frac{w(gq, a_1, a_2)}{\varphi(q)} \ll \psi_{1/3}(a_1 g)^2 \psi_{1/3}(a_2 g)^2 (XY)^{1/2} (\log(2XY))^6 2^{\omega(q)} \left(1 + \frac{X^{1/2} \mathcal{L}(Y)^{-1} + Y^{1/2} \mathcal{L}(X)^{-1}}{q} \right),$$

et

$$W^*(X, Y; g, q, a_1, a_2) - \frac{\zeta(2)}{\zeta(4)} XY \frac{w^*(g, q, a_1, a_2)}{\varphi(q)} \ll 2^{\omega(g)} \psi_{1/3}(a_1 g)^2 \psi_{1/3}(a_2 g)^2 (XY)^{1/2} (\log(2XY))^6 2^{\omega(q)} \left(1 + \frac{X^{1/2} \mathcal{L}(Y)^{-1} + Y^{1/2} \mathcal{L}(X)^{-1}}{q} \right).$$

Démonstration. La seconde estimation se déduit de la première par une simple interversion de Möbius puisque

$$W^*(X, Y; g, q, a_1, a_2) = \sum_{k|g} \mu(k) W(X, Y; g/k, kq, a_1, a_2).$$

Estimons donc la première. Nous avons

$$W(X, Y; g, q, a_1, a_2) = \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a, q) = 1}} \sum_{\substack{1 \leq x \leq X \\ x \equiv aa_2 \pmod{q} \\ (x, a_2g) = 1}} \frac{\mu(x)^2 x^2}{\varphi(x)^2} \sum_{\substack{1 \leq y \leq Y \\ y \equiv -aa_1 \pmod{q} \\ (y, a_1gx) = 1}} \frac{\mu(y)^2 y^2}{\varphi(y)^2}.$$

En utilisant la relation (2.17) et deux fois l'identité de convolution (2.9), nous obtenons alors

$$\begin{aligned} W(X, Y; g, q, a_1, a_2) &= \sum_{\substack{d_1, d_2 \geq 1 \\ (d_1, a_2gq) = 1 \\ (d_2, a_1gq) = 1}} f_2(d_1, d_2) \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a, q) = 1}} \sum_{\substack{x' \leq X/d_1 \\ d_1 x' \equiv aa_2 \pmod{q} \\ (x', a_2g) = 1}} \mu(x')^2 \sum_{\substack{y' \leq Y/d_2 \\ d_2 y' \equiv -aa_1 \pmod{q} \\ (y', a_1g) = 1}} \mu(y')^2 \\ &= \sum_{\substack{d_1, d_2 \geq 1 \\ (d_1, a_2gq) = 1 \\ (d_2, a_1gq) = 1}} f_2(d_1, d_2) \sum_{\substack{\ell_1 | (a_2g)^\infty \\ \ell_2 | (a_1g)^\infty}} \lambda(\ell_1) \lambda(\ell_2) \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a, q) = 1}} \sum_{\substack{x'' \leq X/d_1 \ell_1 \\ d_1 \ell_1 x'' \equiv aa_2 \pmod{q}}} \mu(x'')^2 \sum_{\substack{y'' \leq Y/d_2 \ell_2 \\ d_2 \ell_2 y'' \equiv -aa_1 \pmod{q}}} \mu(y'')^2. \end{aligned}$$

Nous reconnaissons que la triple somme intérieure est la somme estimée au Lemme 2.11 avec u défini par la congruence $u \equiv -(d_2 \ell_2 a_2)^{-1} d_1 \ell_1 a_1 \pmod{q}$. Nous l'estimons grâce à (2.19) en utilisant (2.10) et la borne

$$\sum_{d_1, d_2 \geq 1} \frac{|f_2(d_1, d_2)|}{d_1^{1/2+1/(\log 2X)} d_2^{1/2+1/(\log 2Y)}} \ll \log(2XY).$$

Le terme d'erreur est alors

$$\begin{aligned} &\ll \psi_{1/2}(a_1g)^2 \psi_{1/2}(a_2g)^2 (XY)^{1/2} (\log(2XY))^{52\omega(q)} \left(1 + \frac{X^{1/2} \mathcal{L}(Y)^{-1} + Y^{1/2} \mathcal{L}(X)^{-1}}{q} \right) \\ &\quad \sum_{\substack{d_1, d_2 \geq 1 \\ (d_1, a_2gq) = 1 \\ (d_2, a_1gq) = 1}} \frac{|f_2(d_1, d_2)|}{d_1^{1/2+1/(\log 2X)} d_2^{1/2+1/(\log 2Y)}} \\ &\ll \psi_{1/2}(a_1g)^2 \psi_{1/2}(a_2g)^2 (XY)^{1/2} (\log(2XY))^{62\omega(q)} \left(1 + \frac{X^{1/2} \mathcal{L}(Y)^{-1} + Y^{1/2} \mathcal{L}(X)^{-1}}{q} \right). \end{aligned}$$

Compte-tenu de (2.19), le terme principal est égal à

$$= \frac{36XY}{\pi^4 \varphi(q) \varphi_{-1}(q)^2} \sum_{\substack{d_1, d_2 \geq 1 \\ (d_1, a_2gq) = 1 \\ (d_2, a_1gq) = 1}} \frac{f_2(d_1, d_2)}{d_1 d_2} \sum_{\substack{\ell_1 | (a_2g)^\infty \\ \ell_2 | (a_1g)^\infty \\ d_1 \ell_1 \leq X, d_2 \ell_2 \leq Y}} \frac{\lambda(\ell_1) \lambda(\ell_2)}{\ell_1 \ell_2}.$$

Nous complétons la somme en otant les conditions $d_1\ell_1 \leq X$ et $d_2\ell_2 \leq Y$. D'après (2.10), l'erreur faite est

$$\begin{aligned} &\ll \frac{XY}{\varphi(q)\varphi_{-1}(q)^2} \sum_{\substack{d_1, d_2 \geq 1 \\ (d_1, a_2 g q) = 1 \\ (d_2, a_1 g q) = 1}} \frac{|f_2(d_1, d_2)|((d_1/X)^{2/3} + (d_2/Y)^{2/3})}{d_1 d_2} \sum_{\substack{\ell_1 | (a_2 g)^\infty \\ \ell_2 | (a_1 g)^\infty}} \frac{1}{(\ell_1 \ell_2)^{1/3}} \\ &\ll 2^{\omega(q)} \frac{XY^{1/3} + YX^{1/3}}{q} \psi_{1/3}(a_1 g)^2 \psi_{1/3}(a_2 g)^2, \end{aligned}$$

ce qui est englobé dans le terme d'erreur.

D'après (2.18), le terme principal est donc

$$\begin{aligned} &= \frac{36XY}{\pi^4 \varphi(q)\varphi_{-1}(q)^2} \sum_{\substack{d_1, d_2 \geq 1 \\ (d_1, a_2 g q) = 1 \\ (d_2, a_1 g q) = 1}} \frac{f_2(d_1, d_2)}{d_1 d_2} \sum_{\substack{\ell_1 | (a_2 g)^\infty \\ \ell_2 | (a_1 g)^\infty}} \frac{\lambda(\ell_1)\lambda(\ell_2)}{\ell_1 \ell_2} \\ &= \frac{XY}{\zeta(2)^2 \varphi(q)\varphi_{-1}(q)^2 \varphi_{-1}(a_1 g)\varphi_{-1}(a_2 g)} \sum_{\substack{d_1, d_2 \geq 1 \\ (d_1, a_2 g q) = 1 \\ (d_2, a_1 g q) = 1}} \frac{f_2(d_1, d_2)}{d_1 d_2} \\ &= \frac{\zeta(2)XY}{\zeta(4)\varphi(q)} \prod_{p|gq} \left(\frac{(1-1/p)^2}{1+1/p^2} \right) \prod_{\substack{p|a_1 a_2 \\ p \nmid (a_1, a_2)}} \left(\frac{1-1/p+1/p^2}{1+1/p^2} \right) \prod_{p|(a_1, a_2)} \left(\frac{(1-1/p)^2}{1+1/p^2} \right). \end{aligned}$$

Cela achève la démonstration. □

2.4 Estimations usuelles de certaines doubles sommes

Nous aurons aussi besoin de sommer la fonction w^* . Nous rappelons ici la définition (2.7) de φ_j .

Lemme 2.13. *Lorsque $q \geq 1$, $a_1, A_2 \geq 1$ nous avons*

$$\sum_{1 \leq a_2 \leq A_2} w^*(g, q, a_1, a_2) = \frac{\varphi_1(gq)^2 \varphi_2(g)}{\varphi_{-1}(gq)\varphi_1(g)} \frac{\zeta(4)}{\zeta(2)^2} A_2 + O(\psi_{1/2}(a_1 g q) A_2^{1/2}).$$

Démonstration. Lorsque $(a_1 a_2, gq) = 1$, nous écrivons

$$w^*(g, q, a_1, a_2) = \frac{\varphi_2(g)}{\varphi_1(g)} \prod_{p|gq} \left(\frac{(1-1/p)^2}{1+1/p^2} \right) w(1, a_1, a_2).$$

Lorsque $\Re(s) > 1$, un rapide calcul fournit

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{a_2=1 \\ (a_2, gq)=1}}^{\infty} \frac{w(1, a_1, a_2)}{a_2^s} &= \prod_{\substack{p \nmid gq \\ p \mid a_1}} \left(\frac{1 - 1/p + 1/p^2}{1 + 1/p^2} + \frac{(1 - 1/p)^2}{(p^s - 1)(1 + 1/p^2)} \right) \\ &\quad \prod_{\substack{p \nmid gq \\ p \nmid a_1}} \left(1 + \frac{1 - 1/p + 1/p^2}{(1 + 1/p^2)(p^s - 1)} \right) \\ &= \zeta(s) \prod_{p \nmid gq} \left(\frac{1 - 1/p^{s+1}}{1 + 1/p^2} \right) \prod_{p \mid gq} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right) \\ &\quad \prod_{p \mid a_1} \left(\frac{1 - 1/p + 1/p^2 + (1 - 1/p)^2/(p^s - 1)}{1 + 1/p^2 - 1/p^{1+s}} \right). \end{aligned}$$

Grâce au Lemme 2.5, nous en déduisons l'estimation

$$\sum_{\substack{a_2 \leq A_2 \\ (a_2, gq)=1}} w(1, a_1, a_2) = \frac{\zeta(4)}{\zeta(2)^2 \varphi_{-1}(gq)} \prod_{p \mid gq} \left(1 + \frac{1}{p^2} \right) A_2 + O(\psi_{1/2}(gqa_1)^2 A_2^{1/2}).$$

Cela fournit le résultat requis. □

Lemme 2.14. *Lorsque $q \geq 1$, nous avons lorsque $A_1, A_2 \geq 1$*

$$\sum_{\substack{1 \leq a_1 \leq A_1 \\ 1 \leq a_2 \leq A_2}} w^*(g, q, a_1, a_2) = \frac{\varphi_1(gq)^3 \varphi_2(g)}{\varphi_{-1}(gq) \varphi_1(g)} \frac{\zeta(4)}{\zeta(2)^2} A_1 A_2 + O(2^{\omega(gq)} (A_1 + A_2) \log(2A_1 A_2)).$$

Démonstration. La méthode est bien connue. Nous détaillons les calculs afin de déterminer le facteur de $A_1 A_2$ que nous obtenons. Lorsque $(a_1 a_2, gq) = 1$, nous écrivons

$$w^*(g, q, a_1, a_2) = \frac{\varphi_2(g)}{\varphi_1(g)} \prod_{p \mid gq} \left(\frac{(1 - 1/p)^2}{1 + 1/p^2} \right) w(1, a_1, a_2).$$

Lorsque $\Re(s_1) > 1$ et $\Re(s_2) > 1$, un rapide calcul fournit

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{a_1, a_2=1 \\ (a_1 a_2, gq)=1}}^{\infty} \frac{w(1, a_1, a_2)}{a_1^{s_1} a_2^{s_2}} \\ = \prod_{p \nmid gq} \left(1 + \left(\frac{1}{p^{s_1} - 1} + \frac{1}{p^{s_2} - 1} \right) \frac{1 - 1/p + 1/p^2}{1 + 1/p^2} + \frac{(1 - 1/p)^2}{(p^{s_1} - 1)(p^{s_2} - 1)(1 + 1/p^2)} \right). \end{aligned}$$

Nous avons donc la relation de convolution

$$1_{(a_1 a_2, gq)=1} w(1, a_1, a_2) = (1_{(a_1 a_2, gq)=1} * w')(a_1, a_2),$$

avec, lorsque $\Re(s_1) > 1$ et $\Re(s_2) > 1$,

$$\sum_{a_1, a_2=1}^{\infty} \frac{w'(q, a_1, a_2)}{a_1^{s_1} a_2^{s_2}} = \prod_{p \nmid gq} \left(1 - \left(\frac{1}{p^{s_1}} + \frac{1}{p^{s_2}} \right) \frac{1}{p(1+1/p^2)} \right).$$

Nous avons

$$\sum_{\substack{1 \leq a_1 \leq A_1 \\ 1 \leq a_2 \leq A_2}} 1_{(a_1 a_2, gq)=1} = \varphi_1(gq)^2 A_1 A_2 + O(2^{\omega(gq)}(A_1 + A_2))$$

et

$$\sum_{a_1, a_2=1}^{\infty} \frac{|w'(gq, a_1, a_2)|}{a_1^{1/\log(2A_1)} a_2^{1/\log(2A_2)}} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) \ll \log(2A_1 A_2)$$

ce qui fournit alors

$$\sum_{\substack{1 \leq a_1 \leq A_1 \\ 1 \leq a_2 \leq A_2 \\ (a_1 a_2, gq)=1}} w(1, a_1, a_2) - \varphi_1(gq)^2 A_1 A_2 \prod_{p \nmid gq} \left(\frac{1 - 1/p^2}{1 + 1/p^2} \right) \ll 2^{\omega(gq)}(A_1 + A_2) \log(2A_1 A_2).$$

L'estimation requise en découle. □

Nous introduisons la double somme suivante

$$N(A_1, A_2; g, x, y, z) := \sum_{\substack{1 \leq a_1 \leq A_1 \\ (a_1, q_1)=1}} \sum_{\substack{1 \leq a_2 \leq A_2 \\ a_2 \equiv -a_1 x y^{-1} \pmod{z} \\ (a_2, gx) = (a_1 x + a_2 y, g) = 1}} 1.$$

et rappelons la définition (2.7) de φ_j .

Lemme 2.15. *Lorsque $\mu^2(gxy z) = 1$ et $A_1, A_2 \geq 1$, nous avons uniformément l'estimation*

$$\begin{aligned} N(A_1, A_2; g, x, y, z) &= \varphi_1(q_1) \varphi_2(g) \varphi_1(x) \frac{A_1 A_2}{z} \\ &+ O\left(2^{\omega(q_1)} \frac{A_2}{z} + 2^{\omega(x)} 3^{\omega(g)} A_1 + 2^{\omega(q_1)} 2^{\omega(x)} 3^{\omega(g)} \right). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned} N(A_1, A_2; g, x, y, z) &= \sum_{\substack{1 \leq a_1 \leq A_1 \\ (a_1, q_1)=1}} \sum_{\substack{k_2 | gx \\ k_1 | g \\ (k_1, k_2)=1}} \mu(k_1) \mu(k_2) \sum_{\substack{a_2 \leq A_2/k_2 \\ k_2 a_2 \equiv -a_1 x y^{-1} \pmod{(k_1 z)}}} 1 \\ &= \sum_{\substack{1 \leq a_1 \leq A_1 \\ (a_1, q_1)=1}} \sum_{\substack{k_2 | gx \\ k_1 | g \\ (k_1, k_2)=1}} \mu(k_1) \mu(k_2) \left\{ \frac{A_2}{k_1 k_2 z} + O(1) \right\} \\ &= \left(\varphi_1(q_1) A_1 + O(2^{\omega(q_1)}) \right) \left(\varphi_2(g) \varphi_1(x) \frac{A_2}{z} + O(2^{\omega(x)} 3^{\omega(g)}) \right) \\ &= \varphi_1(q_1) \varphi_2(g) \varphi_1(x) \frac{A_1 A_2}{z} + O\left(2^{\omega(q_1)} \frac{A_2}{z} + 2^{\omega(x)} 3^{\omega(g)} A_1 + 2^{\omega(q_1)} 2^{\omega(x)} 3^{\omega(g)} \right). \end{aligned}$$

□

2.5 Estimations de certaines sommes friables

Lorsque $\delta \in \{(1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0)\}$, nous introduisons

$$\begin{aligned} D(1, 1) &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 : X \geq Y \geq Z \geq 1\}, \\ D(1, 0) &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 : X \geq Y > Z \geq 1\}, \\ D(0, 1) &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 : X > Y \geq Z \geq 1\}, \\ D(0, 0) &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 : X > Y > Z \geq 1\}, \end{aligned} \tag{2.24}$$

où, à chaque fois, X, Y, Z satisfont (1.12) et (1.13). Nous estimons

$$C(h, T) := C(h, T; (1, 1)) + 2C(h, T; (0, 1)) + 2C(h, T; (1, 0)) + C(h, T; (0, 0))$$

avec

$$C(h, T; \delta) := \sum_{\substack{P(gxyz) \leq h^3 \\ gY Z > hT, gX > hT \\ (x, y, z) \in D(\delta)}} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)\mu(gxyz)^2}{\varphi(g)\varphi_1(g)\varphi(xyz)}, \tag{2.25}$$

où nous rappelons la définition (2.7) de φ_j .

Lemme 2.16. *Lorsque $h \geq 2$, $q = \prod_{p \leq h^3} p$ et $T \geq 2$, nous avons*

$$C(h, T) = \left(\frac{q}{\varphi(q)}\right)^2 - 3\frac{q}{\varphi(q)}(\log h) + 3(\log h)^2 + O((\log T)^3 \log h + (\log h)^3 \mathcal{L}(T)^{-1}).$$

La preuve de cette estimation est longue mais élémentaire. Elle peut être omise en première lecture. Elle repose sur l'estimation de la somme suivante

$$s(T) := \sum_{1 \leq g \leq T} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)}{g\varphi_1(g)\varphi_{-2}(g)} \left\lfloor \frac{\log(T/g)}{\log 2} \right\rfloor. \tag{2.26}$$

où $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière de t . À notre connaissance, ce type de résultat est nouveau.

Lemme 2.17. *Lorsque $T \geq 2$, nous avons*

$$s(T) = \frac{1}{C \log 2} + O(\mathcal{L}(T)^{-1})$$

avec

$$C := \prod_p \left\{ \left(1 + \frac{2}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \right\}.$$

La méthode de la preuve permettrait d'obtenir le résultat lorsque l'on remplace la fonction $g \mapsto \mu(g)\varphi_2(g)/\varphi_1(g)\varphi_{-2}(g)$ par une fonction telle que sa série de Dirichlet soit proche de $1/\zeta(s)$. Nous observons aussi la formule

$$\sum_{g=1}^{\infty} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)\log g}{g\varphi_1(g)\varphi_{-2}(g)} = -\frac{1}{C}.$$

Une conséquence de ce résultat est la formule suivante

$$\sum_{g=1}^{\infty} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)}{g\varphi_1(g)\varphi_{-2}(g)} \left\langle \frac{\log g}{\log 2} \right\rangle = 0,$$

où $\langle t \rangle$ désigne la partie fractionnaire de t .

Démonstration du Lemme 2.17. Nous avons deux étapes distinctes pour estimer $s(T)$: la première est de montrer que cette quantité admet une limite quand T tend vers $+\infty$; l'autre est de déterminer la vitesse de convergence vers cette limite. La quantité $s(T)$ vérifie

$$s(T) = \sum_{\substack{g^{2^m} \leq T \\ m \geq 1}} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)}{g\varphi_1(g)\varphi_{-2}(g)},$$

c'est donc la fonction sommatoire associée à la série de Dirichlet

$$\begin{aligned} F(s) &:= \sum_{\substack{g \geq 1 \\ m \geq 1}} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)}{g^{1+s}\varphi_1(g)\varphi_{-2}(g)2^{ms}} \\ &= \frac{1}{2^s - 1} \sum_{g \geq 1} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)}{g^{1+s}\varphi_1(g)\varphi_{-2}(g)} = \frac{G(s)}{(2^s - 1)\zeta(s+1)} \end{aligned} \quad (\Re(s) > 0),$$

où G est un produit eulérien absolument convergent dans le domaine $\Re(s) > -\frac{1}{2}$. Le théorème II.1.6 de [19] permet de montrer que $\lim_{T \rightarrow +\infty} s(T) = G(0)/\log 2 = 1/(C \log 2)$. Nous remercions Gérald Tenenbaum de nous avoir indiqué ce résultat.

En prenant la notation $\vartheta_T = \langle \frac{\log T}{\log 2} \rangle \log 2$ où nous rappelons que $\langle t \rangle$ désigne la partie fractionnaire de t , nous avons

$$s(T) = \sum_{1 \leq g \leq T} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)}{g\varphi_1(g)\varphi_{-2}(g)} \left\lfloor \frac{\vartheta_T - \log(g)}{\log 2} \right\rfloor + O(\mathcal{L}(T)^{-1}).$$

Maintenant fixons $\vartheta \in [0, \log 2[$ et restreignons-nous au cas des T tels que $\vartheta_T = \vartheta$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} s(T) &= \sum_{1 \leq g \leq T} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)}{g\varphi_1(g)\varphi_{-2}(g)} \left\lfloor \frac{\vartheta - \log(g)}{\log 2} \right\rfloor + O(\mathcal{L}(T)^{-1}) \\ &= - \sum_{1 \leq m \leq (\log T)/\log 2} m \sum_{e^\vartheta 2^{m-1} \leq g < e^\vartheta 2^m} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)}{g\varphi_1(g)\varphi_{-2}(g)} + O(\mathcal{L}(T)^{-1}). \end{aligned}$$

La somme en m est une somme de terme général $O(e^{-2\sqrt{m}})$ donc absolument convergente. Elle converge vers une limite ℓ_ϑ et vérifie

$$s(T) = \ell_\vartheta + O(\mathcal{L}(T)^{-1}).$$

Par unicité de la limite et la première étape, nous avons $\ell_\vartheta = G(0)/\log 2$ ce qui fournit l'estimation requise. \square

Démonstration du Lemme 2.16. Le principe d'inclusion-exclusion permet d'éviter les conditions de h^3 -friabilité des variables à sommer. À l'aide du facteur oscillant $\mu(g)$, nous nous restreignons dès que possible au cas où g est petit. Dans tous les calculs qui suivent, nous détaillons le cas où $\delta = (0, 0)$. Les autres cas peuvent être traités de la même manière.

Nous avons

$$\begin{aligned} C(h, T; (0, 0)) &= \sum_{\substack{P(gxyz) \leq h^3 \\ X > Y > Z}} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)\mu(gxyz)^2}{\varphi(g)\varphi_1(g)\varphi(xyz)} - \sum_{\substack{P(gxyz) \leq h^3 \\ gYZ \leq hT \\ X > Y > Z}} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)\mu(gxyz)^2}{\varphi(g)\varphi_1(g)\varphi(xyz)} \\ &\quad - \sum_{\substack{gX \leq hT \\ X > Y > Z}} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)\mu(gxyz)^2}{\varphi(g)\varphi_1(g)\varphi(xyz)} + \sum_{\substack{gYZ \leq hT, gX \leq hT \\ X > Y > Z}} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)\mu(gxyz)^2}{\varphi(g)\varphi_1(g)\varphi(xyz)}. \end{aligned}$$

Les autres sommes $C(h, T; \delta)$ se décomposent de la même manière. Appelons $C_j(h, T; \delta)$ la j -ième somme et $C_j(h, T)$ la somme pondérée associée. Par symétrie

$$C_1(h, T) = \sum_{P(gxyz) \leq h^3} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)\mu(gxyz)^2}{\varphi(g)\varphi_1(g)\varphi(xyz)}.$$

Un calcul facile fournit

$$C_1(h, T) = \sum_{P(m) \leq h^3} \frac{\mu(m)^2}{\varphi(m)} \prod_{p|m} \left(3 - \frac{1 - 2/p}{1 - 1/p}\right) = \left(\frac{q}{\varphi(q)}\right)^2. \quad (2.27)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} C_2(h, T; (0, 0)) &= \sum_{\substack{P(gxyz) \leq h^3 \\ gYZ \leq hT \\ X > Y > Z}} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)\mu(gxyz)^2}{\varphi(g)\varphi_1(g)\varphi(xyz)} \\ &= \sum_{\substack{P(gxyz) \leq h^3 \\ gYZ \leq hT \\ Y > Z}} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)\mu(gxyz)^2}{\varphi(g)\varphi_1(g)\varphi(xyz)} - \sum_{\substack{P(gxyz) \leq h^3 \\ gYZ \leq hT \\ Y > Z, Y \geq X}} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)\mu(gxyz)^2}{\varphi(g)\varphi_1(g)\varphi(xyz)}. \end{aligned}$$

Notons $C_{21}(h, T; (0, 0))$ et $C_{22}(h, T; (0, 0))$ ces deux sommes. La somme sur x dans la première somme est complète de sorte que

$$C_{21}(h, T) = \frac{3q}{\varphi(q)} c_{21}(h, T), \quad (2.28)$$

avec

$$c_{21}(h, T) := \sum_{\substack{(g,y,z) \\ gYZ \leq hT}} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)\mu(gyz)^2}{g\varphi_1(g)yz}.$$

Quitte à écarter les cas $YZ \leq h$, puis $g > T$ et les $Y, Z \leq T$, nous avons

$$c_{21}(h, T) := \sum_{\substack{(g,y,z) \\ h < YZ \leq hT/g, g \leq T \\ Y, Z > T}} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)\mu(gyz)^2}{g\varphi_1(g)yz} + O((\log T)^3 + (\log h)^2 \mathcal{L}(T)^{-1}).$$

De plus, pour tout Y, Z satisfaisant à $Y, Z > T$, une double application du Lemme 2.5 fournit

$$\sum_{\substack{Y \leq y < 2Y \\ Z \leq z < 2Z}} \frac{\mu(gyz)^2}{yz} = \frac{C(\log 2)^2 \mu(g)^2}{\varphi_{-2}(g)} + O\left(\frac{\psi_{1/2}(g)^2}{T^{1/2}}\right).$$

Nous utilisons aussi l'estimation

$$\begin{aligned} \text{card}\{(Y, Z) : h < YZ \leq hT/g, Y, Z > T\} &= \left(\frac{\log h}{\log 2} + O(\log T)\right) \left(\left\lfloor \frac{\log(hT/g)}{\log 2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\log h}{\log 2} \right\rfloor\right) \\ &= \left(\frac{\log h}{\log 2} + O(\log T)\right) \left\lfloor \frac{\vartheta_h + \log(T/g)}{\log 2} \right\rfloor, \end{aligned}$$

où $\vartheta_h = \langle \frac{\log h}{\log 2} \rangle \log 2$. En rappelant la définition (2.26), nous obtenons

$$c_{21}(h, T) = C(\log 2)(\log h)s(e^{\vartheta_h}T) + O((\log T)^3 + (\log h)^2 \mathcal{L}(T)^{-1}).$$

Ici, la contribution des $g \in]T, e^{\vartheta}T]$ dans $s(e^{\vartheta}T)$ est nulle puisque le facteur $\left\lfloor \frac{\vartheta_h + \log(T/g)}{\log 2} \right\rfloor$ vaut 0.

Le Lemme 2.17 fournit alors l'estimation

$$c_{21}(h, T) = \log h + O((\log T)^3 + (\log h)^2 \mathcal{L}(T)^{-1})$$

et, puis en reportant dans (2.28),

$$C_{21}(h, T) = \frac{3q}{\varphi(q)} \log h + O((\log h)(\log T)^3 + (\log h)^3 \mathcal{L}(T)^{-1}). \quad (2.29)$$

Nous estimons maintenant la seconde somme $C_{22}(h, T; (0, 0))$ définie par

$$C_{22}(h, T; (0, 0)) := \sum_{\substack{(g,x,y,z) \\ gYZ \leq hT \\ Y > Z, Y \geq X}} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)\mu(gxyz)^2}{\varphi(g)\varphi_1(g)\varphi(xyz)}.$$

Nous pouvons nous restreindre au cas $YZ > h$ puisque il est aisé d'obtenir

$$\sum_{g \leq G} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)\mu(gxyz)^2}{\varphi(g)\varphi_1(g)} \ll \psi_{1/2}(xyz) \mathcal{L}(G)^{-1}. \quad (2.30)$$

Cette première réduction permet de se restreindre au cas $g \leq T$, puis $X, Y, Z > T$. Nous obtenons

$$C_{22}(h, T; (0, 0)) = \sum_{\substack{(g,x,y,z) \\ h < YZ \leq hT/g \\ g \leq T \\ T < X \leq Y, T < Z < Y}} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)\mu(gxyz)^2}{\varphi(g)\varphi_1(g)\varphi(xyz)} + O((\log h)(\log T)^3 + (\log h)^2 \mathcal{L}(T)^{-1}).$$

De la même manière que pour $C_{21}(h, T)$, une triple application du Lemme 2.5 fournit

$$C_{22}(h, T; (0, 0)) = C(\log 2)^3 \sum_{\substack{h < YZ \leq hT/g \\ g \leq T \\ X \leq Y, Z < Y}} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)}{g\varphi_1(g)\varphi_{-2}(g)} + O((\log h)(\log T)^3 + (\log h)^2\mathcal{L}(T)^{-1}).$$

Nous avons enlevé ici les conditions $X, Y, Z > T$. Nous utilisons les notations (1.12). Nous fixons $m = k + \ell$ et nous avons $0 \leq \ell < m/2$, $0 \leq j \leq m - \ell$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} C_{22}(h, T; (0, 0)) &= \frac{3C(\log 2)^3}{8} \sum_{\substack{h < 2^m \leq hT/g \\ g \leq T}} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)}{g\varphi_1(g)\varphi_{-2}(g)} (m^2 + O(m)) \\ &\quad + O((\log h)(\log T)^3 + (\log h)^2\mathcal{L}(T)^{-1}). \\ &= \frac{3C \log 2}{8} (\log h)^2 \sum_{\substack{h < 2^m \leq hT/g \\ g \leq T}} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)}{g\varphi_1(g)\varphi_{-2}(g)} + O((\log h)(\log T)^3 + (\log h)^2\mathcal{L}(T)^{-1}) \\ &= \frac{3C \log 2}{8} (\log h)^2 \sum_{g \leq T} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)}{g\varphi_1(g)\varphi_{-2}(g)} \left\lfloor \frac{\vartheta_h + \log(T/g)}{\log 2} \right\rfloor + O((\log h)(\log T)^3 + (\log h)^2\mathcal{L}(T)^{-1}) \\ &= \frac{3C \log 2}{8} (\log h)^2 s(Te^{\vartheta_h}) + O((\log h)(\log T)^3 + (\log h)^2\mathcal{L}(T)^{-1}). \end{aligned}$$

Le Lemme 2.17 fournit alors

$$C_{22}(h, T; \delta) = \frac{3}{8} (\log h)^2 + O((\log h)(\log T)^3 + (\log h)^2\mathcal{L}(T)^{-1}). \quad (2.31)$$

Ici, nous ne fournissons pas plus de détails dans les cas $\delta \neq (0, 0)$ pour lesquels nous obtenons la même estimation. En rassemblant (2.29) et (2.31), nous obtenons

$$C_2(h, T) = \frac{3q}{\varphi(q)} \log h - \frac{9}{4} (\log h)^2 + O((\log h)(\log T)^3 + (\log h)^3\mathcal{L}(T)^{-1}). \quad (2.32)$$

Nous estimons $C_3(h, T)$ en suivant les mêmes étapes que pour $C_{22}(h, T)$. Nous commençons par restreindre le comptage au domaine $X > h$, $g \leq T$, $Z > T$, puis estimons les sommes en x, y, z grâce à une triple application du Lemme 2.5. Il vient

$$\begin{aligned} C_3(h, T; (0, 0)) &= \sum_{\substack{(g, x, y, z) \\ gX \leq hT \\ X > Y > Z}} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)\mu(gxyz)^2}{\varphi(g)\varphi_1(g)\varphi(xyz)} \\ &= C(\log 2)^3 \sum_{\substack{h < X \leq hT/g \\ g \leq T \\ X > Y > Z}} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)}{g\varphi_1(g)\varphi_{-2}(g)} + O((\log h)(\log T)^3 + (\log h)^2\mathcal{L}(T)^{-1}) \end{aligned}$$

Pour $X = 2^j$ fixé, le nombre de couples (k, ℓ) est égal à

$$= \frac{j^2}{2} + O(j) = \frac{(\log h)^2}{2(\log 2)^2} + O((\log h)(\log T)).$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned} C_3(h, T; (0, 0)) &= \frac{C \log 2}{2} (\log h)^2 s(e^{\vartheta} T) + O((\log h)(\log T)^3 + (\log h)^2 \mathcal{L}(T)^{-1}) \\ &= \frac{1}{2} (\log h)^2 + O((\log h)(\log T)^3 + (\log h)^2 \mathcal{L}(T)^{-1}), \end{aligned}$$

où la dernière égalité découle du Lemme 2.17. Comme les sommes des cas $\delta \neq (0, 0)$ vérifient la même estimation, nous obtenons

$$C_3(q, T) = 3(\log h)^2 + O((\log h)(\log T)^3 + (\log h)^2 \mathcal{L}(T)^{-1}). \quad (2.33)$$

De même, sans indiquer les détails, nous obtenons

$$\begin{aligned} C_4(h, T; (0, 0)) &= \sum_{\substack{(g,x,y,z) \\ gYZ \leq hT, gX \leq hT \\ X > Y > Z}} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)\mu(gxyz)^2}{\varphi(g)\varphi_1(g)\varphi(xyz)} \\ &= \sum_{\substack{(g,x,y,z) \\ h < YZ \leq hT/g \\ X \leq h, g \leq T \\ X > Y > Z}} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)\mu(gxyz)^2}{\varphi(g)\varphi_1(g)\varphi(xyz)} + \sum_{\substack{(g,x,y,z) \\ h < X \leq hT/g \\ YZ \leq h, g \leq T \\ X > Y > Z}} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)\mu(gxyz)^2}{\varphi(g)\varphi_1(g)\varphi(xyz)} \\ &\quad + O((\log h)(\log T)^3 + (\log h)^2 \mathcal{L}(T)^{-1}) \\ &= \frac{5}{8} (\log h)^2 + O((\log h)(\log T)^3 + (\log h)^2 \mathcal{L}(T)^{-1}). \end{aligned}$$

Il en découle donc

$$C_4(h, T) = \frac{15}{4} (\log h)^2 + O((\log h)(\log T)^3 + (\log h)^2 \mathcal{L}(T)^{-1}). \quad (2.34)$$

En rassemblant les estimations (2.27), (2.32), (2.33), (2.34), nous obtenons le Lemme 2.16. \square

3 Première méthode de comptage

3.1 Préliminaires

Nous rappelons la définition (1.6) de $V_3(h)$. Nous utilisons la décomposition (1.8) et la condition (1.9). Grâce à des raisons de symétrie, nous pouvons ordonner les variables X, Y, Z . Nous considérons

$$V_3(h; \delta) := \sum_{\substack{P(gxyz) \leq h^3 \\ (x,y,z) \in D(\delta) \\ gyz, gxz, gxy \geq 2}} \frac{\mu(g)\mu(gxyz)^2}{\varphi(g)\varphi(gxyz)^2} V(g, x, y, z; h), \quad (3.1)$$

lorsque $\delta \in \{(1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0)\}$ où les $D(\delta)$ ont été introduits en (2.24) et V a été défini en (1.11).

Le lemme suivant permet de toujours se placer dans le cas $X \geq Y \geq Z \geq 1$.

Lemme 3.1. *Lorsque $h \geq 2$, nous avons*

$$V_3(h) = V_3(h; (1, 1)) + 2V_3(h; (1, 0)) + 2V_3(h; (0, 1)) + V_3(h; (0, 0)).$$

Démonstration. Nous notons D^* l'ensemble des triplés de puissance de 2 définissant le triplé (X, Y, Z) . Nous avons

$$\begin{aligned} D^* = & \{(X, Y, Z) \in D^* : X > Y \geq Z\} \cup \{(X, Y, Z) \in D^* : X > Z > Y\} \\ & \cup \{(X, Y, Z) \in D^* : Y \geq X \geq Z\} \cup \{(X, Y, Z) \in D^* : Y \geq Z > X\} \\ & \cup \{(X, Y, Z) \in D^* : Z \geq X > Y\} \cup \{(X, Y, Z) \in D^* : Z > Y \geq X\}. \end{aligned}$$

En exploitant la symétrie et en renommant les variables, nous obtenons le résultat annoncé. \square

Compte-tenu de la notation (2.3), nous avons

$$E_h(\alpha) \ll E_h^+(\alpha), \quad E'_h(\alpha) \ll hE_h^+(\alpha). \quad (3.2)$$

Pour estimer $V_3(h; \delta)$, nous scindons la somme en plusieurs parties S_j définies par des inégalités. Nous choisirons la notation S_j^+ lorsque l'on remplacera $\mu(g)$ par $\mu^2(g)$ et les E_h par des E_h^+ de sorte que $|S_j| \ll S_j^+$.

De plus, nous introduisons un paramètre T qui, à la fin, vérifiera $T = \exp\{150(\log_2 h)^2\}$.

3.2 Premier cas : $gYZ = Q_1 > hT$ et $gX = Q_2/Z > hT$.

Soit $S_1(\delta)$ la contribution à la somme $V_3(h; \delta)$ du cas où $Q_1 > hT$ et $gX > hT$. Nous rappelons la définition (2.25) et l'estimation du Lemme 2.16 de $C(h, T; \delta)$. Nous montrons dans cette sous-section le résultat suivant.

Lemme 3.2. *Soit $\delta \in \{(1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0)\}$. Lorsque $h \geq 2$ et $T \geq 1$, nous avons l'estimation*

$$S_1(\delta) = hC(h, T; \delta) + O\left(\frac{h}{T}(\log h)^{14}\right). \quad (3.3)$$

Démonstration. Pour estimer $V(g, x, y, z; h)$, nous utilisons une sommation d'Abel par rapport aux deux variables a_1 et a_2 (voir Lemme 2.1). Nous prenons les a_j tels que $|a_j| \leq q_j/2$. Le terme principal issu de l'utilisation de l'estimation (2.23) du Lemme 2.15 est traité à l'aide de (2.2). Les termes d'erreur sont contrôlés grâce aux calculs décrits au Lemme 2.3 et aux majorations (3.2). Nous obtenons

$$\begin{aligned} V(g, x, y, z; h) &= \sum_{\substack{1 \leq |a_1| \leq q_1/2 \\ (a_1, q_1) = 1}} \sum_{\substack{1 \leq |a_2| \leq q_2/2 \\ a_2 \equiv -a_1xy^{-1} \pmod{z} \\ (a_2, gx) = (a_1x + a_2y, g) = 1}} E_h\left(\frac{a_1}{q_1}\right) E_h\left(\frac{a_2}{q_2}\right) E_h\left(-\frac{a_1}{q_1} - \frac{a_2}{q_2}\right) \\ &= \frac{\varphi_1(q_1)\varphi_2(g)\varphi_1(x)}{z} I(q_1, q_2; h) \\ &\quad + O\left((\log h)^2 \left\{ 2^{\omega(x)} 3^{\omega(g)} Q_1 h^2 + 2^{\omega(q_1)} h^2 \frac{Q_2}{Z} + h^3 2^{\omega(q_1)} 2^{\omega(x)} 3^{\omega(g)} \right\}\right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

avec

$$\begin{aligned} I(q_1, q_2; h) &:= \sum_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{\pm 1\}^2} \int_0^{q_1/2} \int_0^{q_2/2} E_h\left(\frac{\varepsilon_1 \alpha_1}{q_1}\right) E_h\left(\frac{\varepsilon_2 \alpha_2}{q_2}\right) E_h\left(-\frac{\varepsilon_1 \alpha_1}{q_1} - \frac{\varepsilon_2 \alpha_2}{q_2}\right) d\alpha_2 d\alpha_1 \\ &= \int_{-q_1/2}^{q_1/2} \int_{-q_2/2}^{q_2/2} E_h\left(\frac{\alpha_1}{q_1}\right) E_h\left(\frac{\alpha_2}{q_2}\right) E_h\left(-\frac{\alpha_1}{q_1} - \frac{\alpha_2}{q_2}\right) d\alpha_2 d\alpha_1 = hq_1q_2. \end{aligned}$$

En effet, comme le membre de droite de (2.1), le terme d'erreur issu de l'application du Lemme 2.1 comprend quatre termes. Détaillons le terme correspondant au dernier terme de (2.1). D'après les majorations du Lemme 2.3, il est

$$\begin{aligned} &\int_{-q_1/2}^{q_1/2} \int_{-q_2/2}^{q_2/2} \frac{(2^{\omega(q_1)}t_2/Z + 2^{\omega(x)}3^{\omega(g)}t_1 + 2^{\omega(q_1)}2^{\omega(x)}3^{\omega(g)})h^2 dt_1 dt_2}{(|t_1/q_1| + 1/h)(|t_2/q_2| + 1/h)(||t_1/q_1 + t_2/q_2|| + 1/h)} \\ &\ll q_1q_2 \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{(2^{\omega(q_1)}q_2t_2/Z + 2^{\omega(x)}3^{\omega(g)}Q_1t_1 + 2^{\omega(q_1)}2^{\omega(x)}3^{\omega(g)})h^2 dt_1 dt_2}{(|t_1| + 1/h)(|t_2| + 1/h)(||t_1 + t_2|| + 1/h)} \\ &\ll (\log h)^2 \left\{ 2^{\omega(x)}3^{\omega(g)}Q_1h^2 + 2^{\omega(q_1)}h^2\frac{Q_2}{Z} + h^32^{\omega(q_1)}2^{\omega(x)}3^{\omega(g)} \right\}. \end{aligned}$$

Nous ne fournissons pas les détails pour les trois autres termes.

Lorsque $gYZ > hT \geq 2$, $gX > hT \geq 2$, nous avons toujours $gyz, gxz, gxy \geq 2$. Avec les restrictions $gYZ > hT$, $gX > hT$, la contribution du terme principal est donc

$$\sum_{\substack{P(gxyz) \leq h^3 \\ gYZ > hT, gX > hT \\ (x, y, z) \in D(\delta)}} \frac{\mu(g)\mu(gxyz)^2}{\varphi(g)\varphi(gxyz)^2} \varphi_1(q_1)\varphi_2(g)\varphi_1(x) \frac{hq_1q_2}{z} = hC(h, T; \delta),$$

avec $C(h, T; \delta)$ défini en (2.25). La contribution du terme d'erreur dans la somme $S_1(\delta)$ est

$$\ll \frac{h}{T} (\log h)^2 \sum_{\substack{P(gxyz) \leq h^3 \\ gX > hT \\ gYZ > hT}} 2^{\omega(xyz)} 6^{\omega(g)} \frac{\mu(gxyz)^2 g^2 xyz}{\varphi(g)\varphi(gxyz)^2} \ll \frac{h}{T} (\log h)^{14}.$$

Cela achève la preuve du Lemme 3.2. □

3.3 Deuxième cas : $gYZ = Q_1 \leq h/T$ et $gX = Q_2/Z > h$.

Soit $S_2^+(\delta)$ la somme des termes pris en module dans le cas $gYZ = Q_1 \leq h/T$ et $gX = Q_2/Z > hT$. Nous montrons dans cette sous-section le résultat suivant.

Lemme 3.3. *Soit $\delta \in \{(1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0)\}$. Lorsque $h \geq 2$ et $T \geq 1$, nous avons l'estimation*

$$S_2^+(\delta) \ll \frac{h}{T} (\log h)^6. \quad (3.5)$$

Démonstration. Nous adaptons l'argument précédent au cas où Q_1 est petit en majorant

$$V^+(g, x, y, z; h) = \sum_{1 \leq |a_1| \leq q_1/2} \sum_{\substack{1 \leq |a_2| \leq q_2/2 \\ a_2 \equiv -a_1 xy^{-1} \pmod{z}}} E_h^+\left(\frac{a_1}{q_1}\right) E_h^+\left(\frac{a_2}{q_2}\right) E_h^+\left(-\frac{a_1}{q_1} - \frac{a_2}{q_2}\right).$$

Une sommation d'Abel et la majoration

$$\sum_{\substack{1 \leq \varepsilon_2 a_2 \leq A_2 \\ a_2 \equiv -a_1 xy^{-1} \pmod{z}}} 1 \ll \frac{A_2}{z} + 1$$

lorsque $\varepsilon_2 \in \{\pm 1\}$ fournissent

$$V^+(g, x, y, z; h) \ll \sum_{\substack{1 \leq |a_1| \leq q_1/2 \\ (a_1, q_1)=1}} \left\{ \frac{1}{z} I_2^+(a_1, q_1, q_2; h) + R(a_1) \right\}, \quad (3.6)$$

avec

$$I_2^+(a_1, q_1, q_2; h) := \sum_{\varepsilon_2 \in \{\pm 1\}} \int_0^{q_2/2} E_h^+\left(\frac{a_1}{q_1}\right) E_h^+\left(\frac{\varepsilon_2 \alpha_2}{q_2}\right) E_h^+\left(-\frac{a_1}{q_1} - \frac{\varepsilon_2 \alpha_2}{q_2}\right) d\alpha_2$$

et $R(a_1)$ le terme d'erreur vérifiant

$$\begin{aligned} R(a_1) &\ll \frac{1}{q_2} E_h^+\left(\frac{a_1}{q_1}\right) \int_{-q_2/2}^{q_2/2} \left| E_h^{+\prime}\left(\frac{\alpha_2}{q_2}\right) E_h^+\left(-\frac{a_1}{q_1} - \frac{\alpha_2}{q_2}\right) - E_h^+\left(\frac{\alpha_2}{q_2}\right) E_h^{+\prime}\left(-\frac{a_1}{q_1} - \frac{\alpha_2}{q_2}\right) \right| d\alpha_2 \\ &\quad + E_h^+\left(\frac{a_1}{q_1}\right) \left(E_h^+\left(\frac{a_1}{q_1}\right) + E_h^+\left(\frac{1}{2} + \frac{a_1}{q_1}\right) \right). \end{aligned}$$

Nous utilisons (3.2) et la deuxième majoration du Lemme 2.3 de sorte que le premier terme du majorant $R_1(a_1)$ vérifie

$$R_1(a_1) \ll \frac{h}{\|a_1/q_1\|} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{d\alpha_2}{(\|\alpha_2\| + 1/h)(\|\alpha_2 + a_1/q_1\| + 1/h)} \ll \frac{h(\log h)}{\|a_1/q_1\|^2}.$$

Nous obtenons

$$R(a_1) \ll h(\log h) \left(\frac{1}{\|a_1/q_1\|^2} + \frac{q_1}{\|a_1/q_1\|} \right) \ll h(\log h) \frac{q_1}{\|a_1/q_1\|}$$

et

$$\sum_{\substack{1 \leq |a_1| \leq q_1/2 \\ (a_1, q_1)=1}} R(a_1) \ll h q_1^2 (\log h) (\log q_1).$$

Nous avons aussi

$$I_2^+(a_1, q_1, q_2; h) \ll \frac{q_2(\log h)}{\|a_1/q_1\|^2}.$$

En utilisant $h < gX$, $Q_1 \leq h/T$, nous obtenons

$$V_h^+(g, x, y, z) \ll \frac{Q_1^2 Q_2 (\log h)}{z} + h Q_1^2 (\log h) (\log Q_1) \ll \frac{Q_1^2 Q_2 (\log h)^2}{z} \ll \frac{h Q_1 Q_2 (\log h)^2}{ZT}.$$

Il en découle

$$\sum_{\substack{P(gxyz) \leq h^3 \\ gYZ \leq h/T, gX > hT \\ (x, y, z) \in D(\delta)}} \frac{\mu(gxyz)^2 V^+(g, x, y, z; h)}{\varphi(g) \varphi(gxyz)^2} \ll \frac{h (\log h)^2}{T} \sum_{P(gxyz) \leq h^3} \frac{\mu(gxyz)^2 g^2 xyz}{\varphi(g)^3 \varphi(gxyz)^2} \ll \frac{h}{T} (\log h)^6.$$

□

4 Deuxième méthode de comptage

4.1 Réduction du domaine pour les valeurs de a_1 et a_2 .

Il reste donc à considérer le cas $h/T < gYZ \leq hT$ et $gX > hT$ et le cas $gX \leq hT$. Soit \mathcal{E} un ensemble pour lesquels une des quatre inégalités suivantes est vérifiée

$$|a_1| > TQ_1/h, \quad |a_2| > TQ_2/h, \quad |a_1| \leq Q_1/hT, \quad |a_2| \leq Q_2/hT.$$

Nous notons Σ la somme des modules des termes sommés sur un tel ensemble.

Lemme 4.1. *Nous avons*

$$\Sigma \ll \frac{h (\log h)^8}{T}.$$

Démonstration. Nous écrirons $x \sim X$ pour indiquer la relation $x \in [X, 2X[$. Nous nous restreindrons au cas $x \sim X$, $y \sim Y$, $\|a_1/q_1\| \sim A_1/q_1$, $\|a_2/q_2\| \sim A_2/q_2$, avant de sommer en X, Y et A_1, A_2 où A_1, A_2 sont des puissances de 2.

Nous devons majorer la somme suivante prise sur \mathcal{E}

$$\begin{aligned} \Sigma(A_1, A_2, X, Y) &= \sum_{\substack{g, z | q \\ X \geq Y \geq Z}} \frac{\mu(gz)^2}{\varphi(g)^3 \varphi(z)^2} \sum_{\substack{|a_2| \sim A_2 \\ |a_1| \sim A_1 \\ (a_2 a_1, gz) = 1}} \sum_{\substack{Y \leq y < 2Y \\ (y, a_1 gz) = 1}} \frac{\mu(y)^2}{\varphi(y)^2} \sum_{\substack{X \leq x < 2X \\ P(x) \leq h^3 \\ a_1 x \equiv -a_2 y \pmod{z} \\ (x, a_2 gy) = 1 \\ (a_1 x + a_2 y, g) = 1}} \frac{\mu(x)^2}{\varphi(x)^2} \\ &\times \left| E_h \left(-\frac{a_2}{gzx} - \frac{a_1}{gzy} \right) E_h \left(\frac{a_2}{gzx} \right) E_h \left(\frac{a_1}{gzy} \right) \right|. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Pour l'estimer, nous introduisons la quantité

$$\sigma^+(g, z, a_1, a_2) := \sum_{\substack{Y \leq y < 2Y \\ (y, a_1 gz) = 1}} \frac{\mu(y)^2 y^2}{\varphi(y)^2} \sum_{\substack{X \leq x < 2X \\ P(x) \leq h^3 \\ a_1 x \equiv -a_2 y \pmod{z} \\ (x, a_2 gy) = 1 \\ (a_1 x + a_2 y, g) = 1}} \frac{\mu(x)^2 x^2}{\varphi(x)^2} |F(x, y, gz, a_1, a_2)|, \quad (4.2)$$

avec

$$F(x, y, z, a_1, a_2) := \frac{1}{x^2 y^2} E_h \left(-\frac{a_2}{xz} - \frac{a_1}{yz} \right) E_h \left(\frac{a_2}{xz} \right) E_h \left(\frac{a_1}{yz} \right). \quad (4.3)$$

Grâce à (3.2), nous avons les majorations suivantes

$$\begin{aligned} F(x, y, gz, a_1, a_2) &\ll \frac{h^3}{X^2 Y^2 (1 + h|a_1/q_1|)(1 + h|a_2/q_2|)(1 + h|a_1/q_1 + a_2/q_2|)}, \\ \partial_1 F(x, y, gz, a_1, a_2) &\ll \frac{h^3}{X^3 Y^2 (1 + h|a_1/q_1|)(1 + h|a_1/q_1 + a_2/q_2|)}, \\ \partial_2 F(x, y, gz, a_1, a_2) &\ll \frac{h^3}{X^2 Y^3 (1 + h|a_2/q_2|)(1 + h|a_1/q_1 + a_2/q_2|)}, \\ \partial_1 \partial_2 F(x, y, gz, a_1, a_2) &\ll \frac{h^3}{X^3 Y^3 (1 + h|a_1/q_1 + a_2/q_2|)} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Nous pouvons aisément écarter les cas où $A_1 > TQ_1/h$ ou $A_2 > TQ_2/h$. Prenons comme exemple le cas où $A_2/Q_2 \notin [A_1/4Q_1, 4A_1/Q_1]$ de sorte que $1 + h|a_1/q_1 + a_2/q_2| \asymp 1 + hA_1/Q_1 + hA_2/Q_2$. Alors grâce à la majoration de F , nous avons

$$\begin{aligned} \sigma^+(g, z, a_1, a_2) &\ll \frac{h^3}{X^2 Y^2 (1 + hA_1/Q_1)(1 + hA_2/Q_2)(1 + hA_1/Q_1 + hA_2/Q_2)} \\ &\quad \times \sum_{\substack{X \leq x < 2X \\ P(x) \leq h^3 \\ (x, a_2 g) = 1}} \frac{\mu(x)^2 x^2}{\varphi(x)^2} \sum_{\substack{Y \leq y < 2Y \\ a_2 y \equiv -a_1 x \pmod{z} \\ (y, a_1 g z x) = 1}} \frac{\mu(y)^2 y^2}{\varphi(y)^2} \\ &\ll \frac{h^3 (\log h)^2}{XYZ (1 + hA_1/Q_1)(1 + hA_2/Q_2)(1 + hA_1/Q_1 + hA_2/Q_2)} \sum_{\substack{X \leq x < 2X \\ P(x) \leq h^3}} \frac{\mu(x)^2}{x}, \end{aligned}$$

où pour passer à la dernière ligne nous avons utilisé la majoration

$$\frac{x^2}{\varphi(x)^2} \frac{y^2}{\varphi(y)^2} = \frac{(xy)^2}{\varphi(xy)^2} \ll (\log h)^2.$$

En sommant sur $a_1 \sim A_1$ et $a_2 \sim A_2$, et en utilisant $1 + hA_1/Q_1 + hA_2/Q_2 > T$, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{|a_1| \sim A_1 \\ |a_2| \sim A_2 \\ (a_1 a_2, gz) = 1}} \sigma^+(g, z, a_1, a_2) \\ &\ll \frac{h^3 (\log h)^2 A_1 A_2}{XYZ (1 + hA_1/Q_1)(1 + hA_2/Q_2)(1 + hA_1/Q_1 + hA_2/Q_2)} \sum_{\substack{X \leq x < 2X \\ P(x) \leq h^3}} \frac{\mu(x)^2}{x}. \end{aligned}$$

Puis nous sommes par rapport à A_1, A_2, g, z, X, Y , nous obtenons une contribution

$$\ll \sum_{X, Y, g, z} \frac{h (\log h)^4}{T} \frac{\mu(gz)^2 g^2 z}{\varphi(g)^3 \varphi(z)^2} \ll \frac{h (\log h)^8}{T}.$$

L'intérêt d'avoir gardé la somme

$$\sum_{\substack{X \leq x < 2X \\ P(x) \leq h^3}} \frac{\mu(x)^2}{x}$$

en x provient du fait que le nombre de valeurs possibles de X n'est pas forcément un $O(\log h)$ dans le cas où $gX > hT$ alors que

$$\sum_X \sum_{\substack{X \leq x < 2X \\ P(x) \leq h^3}} \frac{\mu(x)^2}{x} \leq \sum_{P(x) \leq h^3} \frac{\mu(x)^2}{x} \ll \log h.$$

Majorons maintenant le cas où $A_2/Q_2 \in [A_1/4Q_1, 4A_1/Q_1]$, $A_1/Q_1 \gg T/h$ et $A_2/Q_2 \gg T/h$. Dans un premier temps, nous traitons le cas $Q_2 \leq h$ en particulier le nombre de X sur lesquels sommer est $O(\log h)$. Nous majorons

$$\begin{aligned} \Sigma'(A_1, A_3, X, Z) &= \sum_{\substack{g, y | q \\ X, Y \geq Z}} \frac{\mu(gy)^2}{\varphi(g)^3 \varphi(y)^2} \sum_{\substack{|a_3| \sim A_3 \\ |a_1| \sim A_1 \\ (a_3 a_1, gy) = 1}} \sum_{\substack{Z \leq z < 2Z \\ (z, a_1 gy) = 1}} \frac{\mu(z)^2}{\varphi(z)^2} \sum_{\substack{X \leq x < 2X \\ a_1 x \equiv -a_3 z \pmod{y} \\ (x, a_3 gz) = 1 \\ (a_1 x + a_3 z, g) = 1}} \frac{\mu(x)^2}{\varphi(x)^2} \\ &\times E_h^+ \left(\frac{a_1}{gyz} + \frac{a_3}{gxy} \right) E_h^+ \left(\frac{a_1}{gyz} \right) E_h^+ \left(\frac{a_3}{gxy} \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Nous notons $\sigma'(g, y, a_1, a_3)$ la double somme intérieure. Nous imposons $|a_3| \sim A_3$. Puisque $Y \leq X$, nous avons alors

$$\begin{aligned} \sigma'(g, y, a_1, a_3) &\ll \frac{h^3}{X^2 Z^2 (1 + hA_1/Q_1)^2 (1 + hA_3/Q_3)} \sum_{\substack{Z \leq z < 2Z \\ (z, a_1 gy) = 1}} \frac{\mu(z)^2 z^2}{\varphi(z)^2} \sum_{\substack{X \leq x < 2X \\ a_1 x \equiv -a_3 z \pmod{y} \\ (x, a_3 gz) = 1 \\ (a_1 x + a_3 z, g) = 1}} \frac{\mu(x)^2 x^2}{\varphi(x)^2} \\ &\ll \frac{h^3 (\log h)^2}{XYZ (1 + hA_1/Q_1)^2 (1 + hA_3/Q_3)}. \end{aligned}$$

La suite de la preuve est semblable à l'obtention de la majoration précédente. Ici comme $X \leq Q_2 \leq h$, le nombre de valeurs possibles de X est un $O(\log h)$. La contribution totale de ce cas-là est encore $\ll h(\log h)^8/T$.

Nous traitons le cas $Q_2 > h$. Nous répartissons dans des intervalles dyadiques l'ensemble des valeurs possibles de $\|a_1/q_1 + a_2/q_2\|$ de sorte que $\|a_1/q_1 + a_2/q_2\| \sim A_3/Q_3$ avec $Q_3 = gXY$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \sigma^+(g, z, a_1, a_2) &\ll \frac{h^3}{X^2 Y^2 (1 + hA_1/Q_1)^2 (1 + hA_3/Q_3)} \sum_{\substack{X \leq x < 2X \\ P(x) \leq h^3 \\ (x, a_2 gz) = 1}} \frac{\mu(x)^2 x^2}{\varphi(x)^2} \sum_{\substack{Y \leq y < 2Y \\ a_2 y \equiv -a_1 x \pmod{z} \\ (y, a_1 gx) = 1}} \frac{\mu(y)^2 y^2}{\varphi(y)^2} \\ &\ll \frac{h^3 (\log h)^2}{XYZ (1 + hA_1/Q_1)^2 (1 + hA_3/Q_3)} \sum_{\substack{X \leq x < 2X \\ P(x) \leq h^3}} \frac{\mu(x)^2 x}{\varphi(x)^2}. \end{aligned}$$

L'intervalle de variation de a_2 lorsque a_1 est fixé est d'une taille $\ll A_3 Q_2 / Q_3$ de sorte que la contribution de la somme $\sigma^+(g, z, a_1, a_2)$ sur a_1 et a_2 soit

$$\begin{aligned} &\ll \frac{h^3(\log h)^2 A_1 (A_3 Q_2 / Q_3 + 1)}{XYZ(1 + hA_1/Q_1)^2(1 + hA_3/Q_3)} \sum_{X \leq x < 2X} \frac{\mu(x)^2 x}{\varphi(x)^2} \\ &\ll \frac{h(\log h)^2 Q_1 Q_2}{XYZT} \left(1 + \frac{h}{Q_2}\right) \sum_{\substack{X \leq x < 2X \\ P(x) \leq h^3}} \frac{\mu(x)^2 x}{\varphi(x)^2} \ll \frac{h(\log h)^4 g^2 z}{T} \sum_{\substack{X \leq x < 2X \\ P(x) \leq h^3}} \frac{\mu(x)^2 x}{\varphi(x)^2} \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure d'après les calculs précédents.

Ensuite de la même manière, nous pouvons également écarter les cas où $A_1 \leq Q_1/hT$ ou $A_2 \leq Q_2/hT$. Prenons le cas $A_1 \leq Q_1/hT$. Les mêmes majorations fournissent une contribution globale de

$$\begin{aligned} &\ll \sum_{\substack{P(gz) \leq h^3 \\ X, Y \geq Z \\ A_2 \leq Q_2/2, A_1 \leq Q_1/Th}} \frac{\mu(gz)^2}{\varphi(g)^3 \varphi(z)^2} \frac{A_1 Q_2 h^2 (\log h)^2}{XYZ} \sum_{\substack{X \leq x < 2X \\ P(x) \leq h^3}} \frac{\mu(x)^2 x}{\varphi(x)^2} \\ &\ll \sum_{\substack{P(gz) \leq h^3 \\ X, Y \geq Z}} \frac{\mu(gz)^2}{\varphi(g)^3 \varphi(z)^2} \frac{Q_1 Q_2 h (\log h)^3}{TXYZ} \sum_{\substack{X \leq x < 2X \\ P(x) \leq h^3}} \frac{\mu(x)^2 x}{\varphi(x)^2} \ll \frac{h(\log h)^7}{T}. \end{aligned}$$

□

4.2 Troisième cas : $gYZ > hT$, $gX \leq hT$, $X > ZT^4$.

Soit $S_3(\delta)$ la contribution du cas où $gYZ > hT$, $gX \leq hT$, $X > ZT^4$. Nous montrons dans cette sous-section le résultat suivant.

Lemme 4.2. *Soit $\delta \in \{(1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0)\}$. Lorsque $h \geq 2$ et $T \geq 1$, nous avons l'estimation*

$$S_3(\delta) = \frac{1}{4} h(\log h)^2 + O\left(h(\log T)^2 \log h + \frac{h(\log h)^{10}}{\mathcal{L}(T)} + \frac{h(\log h)^{12}}{T}\right). \quad (4.6)$$

Démonstration. Dans le début de la démonstration, la condition $Q_1 > hT$ n'est pas nécessaire. À la section précédente, nous avons montré que nous pouvions nous restreindre au cas

$$Q_1/Th < |a_1| \leq Q_1 T/h, \quad Q_2/Th < |a_2| \leq Q_2 T/h.$$

L'inégalité $Q_1 \geq h/T$ découle de ces inégalités.

Dans la suite de la démonstration, nous nous restreignons au cas $\delta = (1, 1)$, les autres cas pouvant être obtenus de la même manière. Nous considérons la valeur de la contribution du cas où $hT/g \geq X \geq Y \geq Z$, $X \geq ZT^4$, $Q_1/Th < |a_1| \leq Q_1 T/h$, $Q_2/Th < |a_2| \leq Q_2 T/h$. La condition $hT/g \geq X$ implique que la condition de h^3 -friabilité sur x et y est automatiquement vérifiée.

Pour estimer cette somme, nous introduisons la quantité

$$\sigma(g, z, a_1, a_2) := \sum_{\substack{X \leq x < 2X, Y \leq y < 2Y \\ a_1x + a_2y \equiv 0 \pmod{z} \\ (y, a_1gzx) = 1, (x, a_2gz) = 1 \\ (a_1x + a_2y, g) = 1}} \frac{\mu(x)^2 x^2}{\varphi(x)^2} \frac{\mu(y)^2 y^2}{\varphi(y)^2} F(x, y, gz, a_1, a_2), \quad (4.7)$$

avec F définie en (4.3).

Nous aurons aussi besoin de la somme

$$W_{X,Y}^*(X', Y'; g, z, a_1, a_2) := \sum_{\substack{X \leq x < X', Y \leq y < Y' \\ a_1x + a_2y \equiv 0 \pmod{z} \\ (y, a_1gzx) = 1, (x, a_2gz) = 1 \\ (a_1x + a_2y, g) = 1}} \frac{\mu(x)^2 x^2}{\varphi(x)^2} \frac{\mu(y)^2 y^2}{\varphi(y)^2}.$$

Du Lemme 2.12, nous déduisons lorsque $X' \leq 2X$ et $Y' \leq 2Y$, $Y \leq X$ l'estimation

$$\begin{aligned} W_{X,Y}^*(X', Y'; g, z, a_1, a_2) &= \frac{\zeta(2)}{\zeta(4)} (X' - X)(Y' - Y) \frac{w^*(g, z, a_1, a_2)}{\varphi(z)} \\ &+ O\left(2^{\omega(g)} \psi_{1/3}(a_1g)^2 \psi_{1/3}(a_2g)^2 (XY)^{1/2} (\log(XY))^{6\omega(z)} \left(1 + \frac{X^{1/2} \mathcal{L}(X)^{-1}}{z}\right)\right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Une double sommation d'Abel fournit la formule

$$\begin{aligned} \sigma(g, z, a_1, a_2) &= F(2X, 2Y) W_{X,Y}^*(2X, 2Y) - \int_X^{2X} W_{X,Y}^*(t_1, 2Y) \partial_1 F(t_1, 2Y) dt_1 \\ &- \int_Y^{2Y} W_{X,Y}^*(X, t_2) \partial_2 F(2X, t_2) dt_2 + \int_X^{2X} \int_Y^{2Y} W_{X,Y}^*(t_1, t_2) \partial_{1,2}^2 F(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \end{aligned}$$

où, pour simplifier la formule, nous n'avons pas indiqué la dépendance en (g, z, a_1, a_2) de $F(x, y, gz, a_1, a_2)$ et de $W_{X,Y}^*(t_1, t_2; g, z, a_1, a_2)$. Nous avons ici utilisé la remarque 2.2 afin de sommer sur les x tels que $X \leq x < 2X$ et non $X < x \leq 2X$.

Nous pouvons donc appliquer (4.8) en utilisant les majorations (4.4). La contribution du terme d'erreur du Lemme 2.12 dans l'estimation de $\sigma(g, z, a_1, a_2)$ est

$$\begin{aligned} &\ll \frac{2^{\omega(g)} \psi_{1/3}(a_1g)^2 \psi_{1/3}(a_2g)^2 2^{\omega(z)} (\log h)^6 h^3 (1 + X^{1/2} \mathcal{L}(X)^{-1}/z)}{X^{3/2} Y^{3/2} (1 + hA_1/Q_1)(1 + hA_2/Q_2)} \\ &\ll \frac{2^{\omega(g)} \psi_{1/3}(g)^4 2^{\omega(z)} (\log h)^6 h Q_1 Q_2 (1 + X^{1/2} \mathcal{L}(X)^{-1}/z)}{X^{3/2} Y^{3/2}} \frac{h^2}{Q_1 Q_2} \frac{\psi_{1/3}(a_1)^2 \psi_{1/3}(a_2)^2}{(1 + hA_1/Q_1)(1 + hA_2/Q_2)}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{A_1, A_2} \sum_{\substack{a_1 \sim A_1 \\ a_2 \sim A_2}} \frac{\psi_{1/3}(a_1)^2 \psi_{1/3}(a_2)^2}{(1 + hA_1/Q_1)(1 + hA_2/Q_2)} &\ll \sum_{A_1, A_2} \frac{A_1 A_2}{(1 + hA_1/Q_1)(1 + hA_2/Q_2)} \\ &\ll \frac{Q_1 Q_2}{h^2} (\log Q_1)(\log Q_2), \end{aligned} \quad (4.9)$$

donc en sommant sur a_1, a_2, A_1, A_2 , puis g, z, X, Y , nous obtenons un terme d'erreur global

$$\begin{aligned}
&\ll (\log h)^8 \sum_{\substack{P(gz) \leq h^3 \\ hT \geq X \geq Y \geq Z, X \geq ZT^4}} \frac{2^{\omega(g)} \mu(gz)^2 g^2 \psi_{1/3}(g)^4 2^{\omega(z)} z^2}{\varphi(g)^3 \varphi(z)^2} \left(1 + \frac{X^{1/2} \mathcal{L}(X)^{-1}}{z}\right) \frac{hT}{X^{1/2} Y^{1/2}} \\
&\ll h(\log h)^8 \sum_{P(gz) \leq h^3} \frac{2^{\omega(g)} \mu(gz)^2 g^2 \psi_{1/3}(g)^4 2^{\omega(z)} z}{\varphi(g)^3 \varphi(z)^2} \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{\mathcal{L}(T) z^{1/2}}\right) \\
&\ll \frac{h(\log h)^{12}}{T} + \frac{h(\log h)^{10}}{\mathcal{L}(T)}.
\end{aligned}$$

D'après l'identité issue de (2.2)

$$\begin{aligned}
\int_X^{2X} \int_Y^{2Y} F(x, y) dx dy &= F(2X, 2Y) XY - \int_X^{2X} (t_1 - X) Y \partial_1 F(t_1, 2Y) dt_1 \\
&\quad - \int_Y^{2Y} X (t_2 - Y) \partial_2 F(2X, t_2) dt_2 + \int_X^{2X} \int_Y^{2Y} (t_1 - X)(t_2 - Y) \partial_{1,2}^2 F(t_1, t_2) dt_1 dt_2,
\end{aligned}$$

le terme principal vaut

$$\begin{aligned}
\sigma_M(g, z, a_1, a_2) &:= \frac{\zeta(2)}{\zeta(4)} \frac{w^*(g, z, a_1, a_2)}{\varphi(z)} \int_X^{2X} \int_Y^{2Y} F(x, y, gz, a_1, a_2) dx dy \\
&= \frac{\zeta(2)}{\zeta(4)} \frac{w^*(g, z, a_1, a_2)}{\varphi(z) XY} \int_{1/2}^1 \int_{1/2}^1 E_h\left(-\frac{a_2 u_2}{gzX} - \frac{a_1 u_1}{gzY}\right) E_h\left(\frac{a_2 u_2}{gzX}\right) E_h\left(\frac{a_1 u_1}{gzY}\right) du_1 du_2
\end{aligned} \tag{4.10}$$

avec w^* défini en (2.21).

Nous sommes ensuite par rapport à a_1 et a_2 en appliquant le Lemme 2.14 et en faisant une sommation d'Abel double. Dorénavant, nous nous plaçons dans le cas $Q_1 > hT$. Le terme principal obtenu est

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\zeta(2)} \frac{\varphi_1(gz)^3 \varphi_2(g)}{\varphi_{-1}(gz) \varphi_1(g) \varphi(z) XY} \sum_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{\pm 1\}^2} \int_{Q_1/hT}^{Q_1T/h} \int_{Q_2/hT}^{Q_2T/h} \int_{1/2}^1 \int_{1/2}^1 \\
&\quad E_h\left(-\frac{\varepsilon_2 \alpha_2 u_2}{Q_2} - \frac{\varepsilon_1 \alpha_1 u_1}{Q_1}\right) E_h\left(\frac{\varepsilon_2 \alpha_2 u_2}{Q_2}\right) E_h\left(\frac{\varepsilon_1 \alpha_1 u_1}{Q_1}\right) du_1 du_2 d\alpha_2 d\alpha_1.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Le terme d'erreur obtenu est scindé en quatre parties. Celle correspondant au dernier terme de (2.1) est, après sommation sur A_1 et A_2 , majorée par

$$\begin{aligned}
&\ll \frac{2^{\omega(gz)}}{\varphi(z) XY} \frac{h^2}{Q_1 Q_2} \int_{1/2}^1 \int_{1/2}^1 \int_{-Q_1/2}^{Q_1/2} \int_{-Q_2/2}^{Q_2/2} (\alpha_1 + \alpha_2) (\log h) \\
&\quad E_h^+\left(-\frac{\varepsilon_2 \alpha_2 u_2}{Q_2} - \frac{\varepsilon_1 \alpha_1 u_1}{Q_1}\right) E_h^+\left(\frac{\varepsilon_2 \alpha_2 u_2}{Q_2}\right) E_h^+\left(\frac{\varepsilon_1 \alpha_1 u_1}{Q_1}\right) du_1 du_2 d\alpha_2 d\alpha_1 \\
&\ll \frac{2^{\omega(gz)}}{\varphi(z) XY} h^2 (Q_1 + Q_2) (\log h)^3 \ll \frac{2^{\omega(gz)}}{\varphi(z) XY} h Q_1 Q_2 \frac{(\log h)^3}{T} \ll \frac{2^{\omega(gz)} (gz)^2 h (\log h)^3}{\varphi(z) T}
\end{aligned}$$

où nous avons fait le changement de variables $t_1 = \alpha_1 u_1 / Q_1$ et $t_2 = \alpha_2 u_2 / Q_2$ et utilisé la quatrième majoration du Lemme 2.3.

La partie du terme d'erreur correspondant au deuxième terme de (2.1) est

$$\begin{aligned} &\ll \frac{2^{\omega(gz)}}{\varphi(z)XY} \frac{h}{Q_1} \int_{1/2}^1 \int_{1/2}^1 \int_{A_1}^{2A_1} (\alpha_1 + A_2)(\log h) \\ &\quad E_h^+ \left(-\frac{\varepsilon_2 A_2 u_2}{Q_2} - \frac{\varepsilon_1 \alpha_1 u_1}{Q_1} \right) E_h^+ \left(\frac{\varepsilon_2 A_2 u_2}{Q_2} \right) E_h^+ \left(\frac{\varepsilon_1 \alpha_1 u_1}{Q_1} \right) du_1 du_2 d\alpha_1 \\ &\ll \frac{2^{\omega(gz)}}{\varphi(z)XY} h E_h^+ \left(\frac{A_2}{Q_2} \right) (\log h) \int_{1/2}^1 \int_{1/2}^1 \int_{A_1/Q_1}^{2A_1/Q_1} (Q_1 t_1 + A_2) \\ &\quad E_h^+ \left(-\frac{\varepsilon_2 A_2 u_2}{Q_2} - \varepsilon_1 t_1 u_1 \right) E_h^+(t_1 u_1) du_1 du_2 dt_1. \end{aligned}$$

Après sommation sur A_1 , nous avons un majorant en

$$\ll \frac{2^{\omega(gz)}}{\varphi(z)XY} h E_h^+ \left(\frac{A_2}{Q_2} \right) (\log h) \int_{1/2}^1 \int_{-1/2}^{1/2} (Q_1 t_1 + A_2) E_h^+ \left(\frac{\varepsilon_2 A_2 u_2}{Q_2} + t_1 \right) E_h^+(t_1) du_2 dt_1.$$

où pour supprimer l'intégrale en u_1 nous avons fait un changement homothétique de variables. En distinguant les cas $|t_1| \leq 1/h$ et $|t_1| > 1/h$, nous obtenons

$$\begin{aligned} &h E_h^+ \left(\frac{A_2}{Q_2} \right) (\log h) \int_{1/2}^1 \int_{-1/2}^{1/2} (Q_1 t_1 + A_2) E_h^+ \left(\frac{A_2 u_2}{Q_2} + t_1 \right) E_h^+(t_1) dt_1 du_2 \\ &\ll h E_h^+ \left(\frac{A_2}{Q_2} \right) (\log h) \left\{ \frac{Q_1}{h} E_h^+ \left(\frac{A_2}{Q_2} \right) + Q_1 \log h + A_2 (\log h) E_h^+ \left(\frac{A_2}{Q_2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Après sommation sur A_2 , nous obtenons un terme d'erreur en

$$\ll \frac{2^{\omega(gz)}}{\varphi(z)XY} h^2 (\log h)^2 (Q_1 + Q_2) \ll \frac{2^{\omega(gz)} (gz)^2}{\varphi(z)} h \frac{(\log h)^2}{T}.$$

Nous ne détaillons pas la majoration de la contribution des autres termes.

Grâce à une interversion des sommations et à un changement de variables, le terme principal (4.11) devient

$$\begin{aligned} &= \frac{\varphi_1(gz)^2 \varphi_2(g) g^2 z}{\varphi_{-1}(gz) \zeta(2)} \\ &\quad \sum_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{\pm 1\}^2} \int_{1/2}^1 \int_{1/2}^1 \int_{u_1/hT}^{u_1 T/h} \int_{u_2/hT}^{u_2 T/h} E_h(-\varepsilon_2 \alpha_2 - \varepsilon_1 \alpha_1) E_h(\varepsilon_2 \alpha_2) E_h(\alpha_1) d\alpha_2 d\alpha_1 \frac{du_1 du_2}{u_1 u_2}. \end{aligned}$$

Lorsque $Q_1 > hT$ et $Q_2 > hT$, nous étendons alors les intégrales en α_j à l'intervalle $[0, 1/2]$ grâce au Lemme 2.3 et utilisons la formule issue de la méthode du cercle

$$\int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} E_h(-\alpha_2 - \alpha_1) E_h(\alpha_2) E_h(\alpha_1) d\alpha_2 d\alpha_1 = h.$$

Le terme principal (4.11) est donc

$$= \frac{h}{\zeta(2)} \frac{\varphi_1(gz)^2 \varphi_2(g) g^2 z}{\varphi_{-1}(gz)} \left\{ (\log 2)^2 + O\left(\frac{\log h}{T}\right) \right\}.$$

En appliquant le Lemme 2.5, nous obtenons

$$\frac{1}{\zeta(2)} \sum_{z \sim Z} \frac{\mu^2(gz)}{z \varphi_{-1}(gz)} = \frac{C \log 2}{\varphi_{-2}(g)} + O\left(\frac{\psi_{1/2}(g)}{Z^{1/2}}\right).$$

Nous obtenons une contribution

$$\begin{aligned} & S_3((1, 1)) \\ &= C(\log 2)^3 h \sum_{\substack{g \leq T \\ gYZ > hT \\ X \geq Y \geq Z \\ X \geq ZT^4, gX \leq hT}} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)}{g\varphi_1(g)\varphi_{-2}(g)} + O\left(h(\log T)^2 \log h + \frac{h(\log h)^{10}}{\mathcal{L}(T)} + \frac{h(\log h)^{12}}{T}\right) \\ &= C(\log 2)^3 h \sum_{\substack{g \leq T, h < X \leq hT/g \\ hT/g < YZ \\ X \geq Y \geq Z}} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)}{g\varphi_1(g)\varphi_{-2}(g)} + O\left(h(\log T)^2 \log h + \frac{h(\log h)^{10}}{\mathcal{L}(T)} + \frac{h(\log h)^{12}}{T}\right). \end{aligned}$$

Comme précédemment (cf. la démonstration du Lemme 2.16), nous fixons $X = 2^j$ tel que $h < X \leq hT/g$, le nombre de (k, ℓ) tels que $Y = 2^k, Z = 2^\ell$ est alors

$$= \sum_{(\log(hT/g))/2 \log 2 < k \leq j} \left(2k - \frac{\log(hT/g)}{\log 2}\right) + O((\log h) \log T) = \frac{(\log h)^2}{4(\log 2)^2} + O((\log h) \log T).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} S_3((1, 1)) &= \frac{C \log 2}{4} h(\log h)^2 \sum_{\substack{g \leq T \\ h < 2^j \leq hT/g}} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)}{g\varphi_1(g)\varphi_{-2}(g)} \\ &\quad + O\left(h(\log T)^2 \log h + \frac{h(\log h)^{10}}{\mathcal{L}(T)} + \frac{h(\log h)^{12}}{T}\right) \\ &= \frac{C \log 2}{4} h(\log h)^2 \sum_{g \leq T} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)}{g\varphi_1(g)\varphi_{-2}(g)} \left\lfloor \frac{\vartheta_h + \log(T/g)}{\log 2} \right\rfloor \\ &\quad + O\left(h(\log T)^2 \log h + \frac{h(\log h)^{10}}{\mathcal{L}(T)} + \frac{h(\log h)^{12}}{T}\right) \\ &= \frac{C \log 2}{4} h(\log h)^2 s(e^{\vartheta_h} T) + O\left(h(\log T)^2 \log h + \frac{h(\log h)^{10}}{\mathcal{L}(T)} + \frac{h(\log h)^{12}}{T}\right) \\ &= \frac{1}{4} h(\log h)^2 + O\left(h(\log T)^2 \log h + \frac{h(\log h)^{10}}{\mathcal{L}(T)} + \frac{h(\log h)^{12}}{T}\right), \end{aligned}$$

où la dernière égalité découle du Lemme 2.17. \square

4.3 Quatrième cas : $g \leq T$, $gX \leq hT$, $Z \leq Y \leq X \leq ZT^4$.

Majorons S_4^+ la somme des termes pris en module dans le cas $g \leq T$, $X \leq hT/2g$, $Z \leq Y \leq X \leq zT^4$, $Q_1/Th < A_1 \leq Q_1T/h$, $Q_2/Th < A_2 \leq Q_2T/h$.

Lemme 4.3. *Soit $\delta \in \{(1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0)\}$. Lorsque $h \geq 2$ et $T \geq 1$, nous avons l'estimation*

$$S_4^+(\delta) \ll h(\log h)(\log_2 h)^2(\log T)^6. \quad (4.12)$$

Démonstration. Nous utilisons la majoration

$$F(x, y, gz, a_1, a_2) \ll \frac{h^3}{X^2Y^2(1 + hA_1/Q_1)(1 + hA_2/Q_2)}.$$

Grâce au Lemme 2.4, nous obtenons la majoration

$$\begin{aligned} \sigma^+(g, z, a_1, a_2) &\ll \sum_{\substack{Y \leq y < 2Y \\ (y, a_1gz)=1}} \frac{\mu(y)^2 y^2}{\varphi(y)^2} \sum_{\substack{X \leq x < 2X \\ a_1x \equiv -a_2y \pmod{z} \\ (x, a_2gy)=1 \\ (a_1x + a_2y, g)=1}} \frac{\mu(x)^2 x^2}{\varphi(x)^2} \frac{h^3}{X^2Y^2(1 + hA_1/Q_1)(1 + hA_2/Q_2)} \\ &\ll \frac{(\log_2 h)^2 h^3}{XYZ(1 + hA_1/Q_1)(1 + hA_2/Q_2)}, \end{aligned}$$

De plus, nous avons

$$\sum_{\substack{A_1, A_2 \\ Q_1/Th < A_1 \leq Q_1T/h \\ Q_2/Th < A_2 \leq Q_2T/h}} \frac{A_1 A_2 h^3}{(1 + hA_1/Q_1)(1 + hA_2/Q_2)} \ll hQ_1Q_2(\log T)^2,$$

où les A_j sont des puissances de 2. Nous obtenons alors une contribution

$$\begin{aligned} S_4^+ &\ll h(\log_2 h)^2(\log T)^2 \sum_{\substack{g \leq T, z \sim Z \\ Z < X, Y \leq ZT^4 \\ Z \leq hT}} \frac{\mu(gz)^2 z Q_1 Q_2}{\varphi(g)^3 \varphi(z)^2 XY Z^2} \\ &\ll h(\log_2 h)^2(\log T)^4 \sum_{\substack{g \leq T \\ z \leq 2hT}} \frac{\mu(gz)^2 g^2 z}{\varphi(g)^3 \varphi(z)^2} \ll h(\log h)(\log_2 h)^2(\log T)^6. \end{aligned}$$

□

4.4 Cinquième cas : $g > T$.

Nous montrons que la contribution des $g > T$ est négligeable grâce aux oscillations de la fonction de Möbius.

Nous fixons X, Y, Z des puissances de 2. Nous considérons que (x, y, z) appartient à un ensemble E inclus dans $D(\delta)$ et $g \in I_G(X, Y, Z)$ avec $I_G(X, Y, Z)$ un intervalle inclus dans $[G, 2G]$ avec $T < G \leq hT$. Nous notons $S_5(X, Y, Z)$ la contribution. Nous notons $S_5(h)$ la somme des $|S_5(X, Y, Z)|$ lorsque (X, Y, Z) vérifie $YZ \leq hT$.

Lemme 4.4. Lorsque $h \geq 2$, $T \geq 1$, nous avons l'estimation

$$S_5(h) \ll \frac{h(\log h)^4}{\mathcal{L}(T)} + \frac{h(\log h)^8}{T}. \quad (4.13)$$

Démonstration. Quitte à multiplier par un facteur $\log h$, nous pouvons supposer $G \leq g < 2G$ avec $T \leq G \leq hT$. Sans changer les termes d'erreur, grâce au Lemme 4.1,@ nous pouvons remplacer les conditions $gYZ/Th < A_1 \leq gYZT/h$, $gXZ/Th < A_2 \leq gXZT/h$ en $GYZ/Th < A_1 \leq 2GYZT/h$, $GXZ/Th < A_2 \leq 2GXZT/h$. Nous faisons une sommation d'Abel par rapport à g en utilisant la majoration

$$M_m(G) := \sum_{\substack{g < G \\ (g,m)=1}} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)\mu(g)^2g^3}{\varphi(g)^3} \ll \psi_{1/2}(m)G\mathcal{L}(G)^{-2}. \quad (4.14)$$

Cette majoration s'obtient de manière classique par la méthode d'analyse complexe. Nous avons la relation

$$\begin{aligned} & x^2y^2 \frac{\partial F}{\partial g}(x, y, gz, a_1, a_2) \\ &= -\frac{a_2}{g^2xz} \left\{ E_h\left(-\frac{a_2}{gxz} - \frac{a_1}{gyz}\right) E_h'\left(\frac{a_2}{gxz}\right) E_h\left(\frac{a_1}{gyz}\right) - E_h'\left(-\frac{a_2}{gxz} - \frac{a_1}{gyz}\right) E_h\left(\frac{a_2}{gxz}\right) E_h\left(\frac{a_1}{gyz}\right) \right\} \\ & \quad - \frac{a_1}{g^2yz} \left\{ E_h\left(-\frac{a_2}{gxz} - \frac{a_1}{gyz}\right) E_h\left(\frac{a_2}{gxz}\right) E_h'\left(\frac{a_1}{gyz}\right) - E_h'\left(-\frac{a_2}{gxz} - \frac{a_1}{gyz}\right) E_h\left(\frac{a_2}{gxz}\right) E_h\left(\frac{a_1}{gyz}\right) \right\} \\ &= -\frac{a_2}{g^2xz} E_h\left(-\frac{a_2}{gxz} - \frac{a_1}{gyz}\right) E_h'\left(\frac{a_2}{gxz}\right) E_h\left(\frac{a_1}{gyz}\right) - \frac{a_1}{g^2yz} E_h\left(-\frac{a_2}{gxz} - \frac{a_1}{gyz}\right) E_h\left(\frac{a_2}{gxz}\right) E_h'\left(\frac{a_1}{gyz}\right) \\ & \quad + \left(\frac{a_2}{g^2xz} + \frac{a_1}{g^2yz}\right) E_h'\left(-\frac{a_2}{gxz} - \frac{a_1}{gyz}\right) E_h\left(\frac{a_2}{gxz}\right) E_h\left(\frac{a_1}{gyz}\right) \end{aligned}$$

qui fournit, à l'aide de (3.2), la majoration

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial g} \left(\frac{F(x, y, gz, a_1, a_2)}{g^3} \right) &\ll \frac{h^3}{G^4(XY)^2} \left(\frac{1}{(1+h/g||a_1/yz||)(1+h/g||a_1/yz+a_2/xz||)} \right. \\ & \quad + \frac{1}{(1+h/g||a_2/xz||)(1+h/g||a_1/yz+a_2/xz||)} \\ & \quad \left. + \frac{1}{(1+h/g||a_2/xz||)(1+h/g||a_1/yz||)} \right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Nous avons $S_5(X, Y, Z) = \sum_{T \leq G \leq hT} S_5(G, X, Y, Z)$ avec

$$\begin{aligned} S_5(G, X, Y, Z) &= \sum_{z \sim Z} \frac{\mu(z)^2}{\varphi(z)^2} \sum_{\substack{|a_2| \sim A_2 \\ |a_1| \sim A_1 \\ (a_2 a_1, z) = 1}} \sum_{\substack{X \leq x < 2X \\ (x, y, z) \in E \\ (x, a_2) = 1}} \frac{\mu(x)^2 x^2}{\varphi(x)^2} \\ & \quad \sum_{\substack{Y \leq y < 2Y \\ a_2 y \equiv -a_1 x \pmod{z} \\ (y, a_1 z x) = 1}} \frac{\mu(y)^2 y^2}{\varphi(y)^2} \sum_{\substack{g \in I_G(x, y, z) \cap [G, 2G[\\ (g, a_2 a_1 x y z (a_1 x + a_2 y)) = 1}} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)\mu(g)^2g^3}{\varphi(g)^3} \frac{F(x, y, gz, a_1, a_2)}{g^3}. \end{aligned}$$

Nous écrivons $I_G(x, y, z) \cap [G, 2G[= [G', G''[$ (Le cas d'intervalle fermé ou ouvert se traite de la même manière). Posant $m = a_2 a_1 x y z (a_1 x + a_2 y)$, la somme intérieure vaut

$$\frac{M_m(G'')F(x, y, G''z, a_1, a_2)}{G''^3} - \frac{M_m(G')F(x, y, G'z, a_1, a_2)}{G'^3} - \int_{G'}^{G''} M_m(g) \frac{\partial}{\partial g} \left(\frac{F(x, y, gz, a_1, a_2)}{g^3} \right) dg.$$

D'après (4.14) et (3.2), les deux premiers termes sont majorés par

$$\ll \frac{\psi_{1/2}(m)h^3\mathcal{L}(G)^{-2}}{X^2Y^2G^2(1+hA_1/GYZ)(1+hA_2/GXZ)} \ll \frac{\psi_{1/2}(m)hZ^2\mathcal{L}(G)^{-2}}{XYA_1A_2}.$$

Après sommation sur $y \sim Y$ satisfaisant $a_2 y \equiv -a_1 x \pmod{z}$, puis sur $a_1 \sim A_1$, $a_2 \sim A_2$, leur contribution est alors facilement majorée par

$$\ll h\mathcal{L}(G)^{-2} \sum_{z \sim Z} \frac{\psi_{1/2}(z)\mu(z)^2 Z}{\varphi(z)^2} \sum_{\substack{P(x) \leq h^3 \\ (x, a_2) = 1}} \frac{\psi_{1/2}(x)\mu(x)^2 x}{\varphi(x)^2} \ll h(\log h)\mathcal{L}(G)^{-2}.$$

Le nombre de (A_1, A_2) est majoré par $O((\log T)^2)$ de sorte que la contribution à la somme des $|S_5(G, X, Y, Z)|$ de ces termes est

$$\ll h(\log h)^3 \mathcal{L}(G)^{-2} (\log T)^2.$$

Un majorant de l'intégrale issu de la majoration de la dérivée par (4.15) peut être scindé en trois parties. La troisième correspond au troisième terme du majorant de (4.15) et fournit un majorant de la forme

$$= O\left(\frac{\psi_{1/2}(m)h^3\mathcal{L}(G)^{-1}}{X^2Y^2G^2(1+hA_1/GYZ)(1+hA_2/GXZ)} \right)$$

comme précédemment. La première et la deuxième nécessitent de faire un changement d'indice de sommations en prenant a_3 défini par $a_3 z = -a_1 x - a_2 y$ et de sommer sous la condition supplémentaire $|a_3| \sim A_3$. Le reste des calculs est semblable au cas précédent. Nous obtenons ainsi une contribution à la somme des $|S_5(G, X, Y, Z)|$

$$\ll h(\log h)^3 (\log T)^3 \mathcal{L}(T)^{-2}$$

où les puissances supplémentaires de $\log h$ correspondent à la fixation de A_1, A_2 mais aussi éventuellement de A_3 . Il reste à multiplier par $O(\log h)$ le majorant du nombre de valeurs possibles de valeurs de G pour obtenir la majoration du lemme. \square

4.5 Sixième cas : $h/T < gYZ \leq hT$, $gX \leq hT$.

Le sixième cas correspond au cas $h/T < gYZ \leq hT$, $gX \leq hT$, $(x, y, z) \in D(\delta)$.

Lemme 4.5. Soit $\delta \in \{(1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0)\}$. Lorsque $h \geq 2$ et $T \geq 1$, nous avons l'estimation

$$S_6(\delta) \ll \frac{h(\log h)^4}{\mathcal{L}(T)} + h(\log h)(\log_2 h)^2(\log T)^6 + \frac{h(\log h)^8}{T}. \quad (4.16)$$

Démonstration. Nous modifions le domaine de sommation. Tout d'abord, grâce au cinquième cas, nous nous restreignons au cas où $g \leq T$, puis grâce au quatrième cas nous excluons le cas $X \leq ZT^4$. Nous pouvons donc nous placer dans le cas

$$h/T < gYZ \leq hT, \quad gX \leq hT, X > ZT^4.$$

Enfin, d'après le Lemme 4.1, nous pouvons nous placer dans le cas où

$$Q_1/hT < A_1 \leq TQ_1/h, \quad Q_2/hT < A_2 \leq TQ_2/h.$$

La somme $\sigma(g, z, a_1, a_2)$ en x et y est approchée de manière satisfaisante par la quantité $\sigma_M(g, z, a_1, a_2)$ définie en (4.10). Nous avons aussi $gXZ > h/T$. Il est alors possible de la même manière qu'au quatrième cas de majorer la contribution du sous-cas $h/T < gXZ \leq hT$. Nous pouvons donc nous placer dans le cas $Q_2 = gXZ > hT$.

À partir du Lemme 2.13, une sommation d'Abel permet d'estimer

$$\sum_{Q_2/hT < |a_2| \leq Q_2T/h} \sigma_M(g, z, a_1, a_2).$$

Le terme principal obtenu correspond au terme principal du Lemme 2.13 est

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\zeta(2)} \frac{\varphi_2(g)\varphi_1(gz)}{\varphi_{-1}(gz)} \frac{1}{zXY} \left(\int_{Q_2/hT}^{Q_2T/h} + \int_{-Q_2T/h}^{-Q_2/hT} \right) \\ &\quad \int_{1/2}^1 \int_{1/2}^1 E_h \left(-\frac{\alpha_2 u_2}{gzX} - \frac{a_1 u_1}{gzY} \right) E_h \left(\frac{\alpha_2 u_2}{gzX} \right) E_h \left(\frac{a_1 u_1}{gzY} \right) du_1 du_2 d\alpha_2. \end{aligned}$$

Afin de compléter l'intégrale en α_2 , nous utilisons le résultat suivant. Posant

$$R(\alpha_1, T) := E_h^+(\alpha_1)^2/T + E_h^+(\alpha_1)E_h^+(T/h + \alpha_1),$$

lorsque $1/hT < |\alpha_1| \leq T/h$, nous expliquons comment montrer

$$\left(\int_0^{1/hT} + \int_{T/h}^{1/2} \right) |E_h(\alpha_1)E_h(\alpha_2)E_h(-\alpha_1 - \alpha_2)| d\alpha_2 \ll R(\alpha_1, T). \quad (4.17)$$

Lorsque $0 \leq \alpha_2 \leq 1/2hT$, nous avons alors $|\alpha_1 + \alpha_2| \geq |\alpha_1| - |\alpha_2| \geq \frac{1}{2}|\alpha_1|$. Nous utilisons alors $E_h(-\alpha_1 - \alpha_2) \ll |E_h^+(\alpha_1)|$ et $E_h(\alpha_2) \ll h$ ce qui fournit

$$\int_0^{1/2hT} |E_h(\alpha_1)E_h(\alpha_2)E_h(-\alpha_1 - \alpha_2)| d\alpha_2 \ll E_h^+(\alpha_1)^2/T.$$

Lorsque $1/2hT < \alpha_2 \leq 1/hT$ et $\alpha_2/2 < -\alpha_1 < 2\alpha_2$, nous utilisons $E_h(-\alpha_1 - \alpha_2) \ll h$ et $E_h(\alpha_2) \ll E_h^+(-\alpha_1)$ ce qui suffit encore

$$\int_{1/2hT}^{1/hT} |E_h(\alpha_1)E_h(\alpha_2)E_h(-\alpha_1 - \alpha_2)| d\alpha_2 \ll |E_h^+(\alpha_1)|^2/T.$$

La contribution des $\alpha_2 \in]\max\{T/h, -2\alpha_1\}, 1/2]$ est facilement majorée puisqu'alors nous avons $E_h(\alpha_1)E_h(-\alpha_1 - \alpha_2) \ll E_h^+(\alpha_1)^2$ et $E_h(\alpha_2) \ll h/T$. Reste le cas $\alpha_2 \in]T/h, 2T/h]$ et $-\alpha_1 \in]T/2h, T/h]$. Nous avons

$$|E_h(\alpha_1)E_h(\alpha_2)| \ll E_h^+(\alpha_1)h/T.$$

et $|E_h(-\alpha_1 - \alpha_2)| \ll E_h^+(T/h + \alpha_1)$. Nous avons donc bien (4.17).

En utilisant (4.17) pour compléter l'intégrale, nous obtenons un terme principal égal à

$$\begin{aligned} &= \frac{g\varphi_1(gz)\varphi_2(g)}{\zeta(2)\varphi_{-1}(gz)Y} \int_{-1/2}^{1/2} \int_{1/2}^1 \int_{1/2}^1 E_h\left(-\alpha_2 - \frac{a_1u_1}{gzY}\right) E_h(\alpha_2) E_h\left(\frac{a_1u_1}{gzY}\right) du_1 \frac{du_2}{u_2} d\alpha_2 \\ &= \frac{(\log 2)g\varphi_1(gz)\varphi_2(g)}{\zeta(2)\varphi_{-1}(gz)Y} \int_{1/2}^1 \left|E_h\left(\frac{a_1u_1}{gzY}\right)\right|^2 du_1. \end{aligned} \quad (4.18)$$

La contribution du terme d'erreur est clairement $\ll h(\log h)^4/T^{1/2}$. Nous n'indiquons pas les détails.

Sommons maintenant le terme principal (4.18) lorsque $z \sim Z$. Nous pouvons supposer $Z > T$. Lorsque $\Re(s) > 1$, nous avons

$$\sum_{\substack{z=1 \\ (z, a_1g)=1}}^{\infty} \frac{\mu^2(z)}{\varphi_{-1}(z)\varphi_1(z)z^s} = \zeta(s) \prod_{p|a_1g} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \prod_{p \nmid a_1g} \left(1 + \frac{1}{p^{2+s}(1-1/p^2)} - \frac{1}{p^{2s}(1-1/p^2)}\right).$$

Soit $\tilde{\varphi}$ la fonction arithmétique fortement additive définie par

$$\tilde{\varphi}(p) = 1 + 1/p - 1/p^2.$$

Grâce au Lemme 2.5, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq z \leq Z \\ (z, a_1g)=1}} \frac{\mu^2(z)}{\varphi_{-1}(z)\varphi_1(z)} &= \varphi_1(a_1g) \prod_{p|a_1g} \left(1 - \frac{1}{p^2(1+1/p)}\right) Z + O(\psi_{1/2}(a_1g)^2 Z^{1/2}) \\ &= C_2 \varphi_1(a_1g) \frac{\varphi_{-1}(a_1g)}{\tilde{\varphi}(a_1g)} Z + O(\psi_{1/2}(a_1g)^2 Z^{1/2}), \end{aligned}$$

avec

$$C_2 := \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2(1+1/p)}\right).$$

Après sommation d'Abel, nous obtenons pour la quantité (4.18) un terme principal égal à

$$\begin{aligned} &= C_2 \varphi_1(a_1g) \frac{\varphi_{-1}(a_1g)}{\tilde{\varphi}(a_1g)Y} \int_Z^{2Z} \frac{1}{t^2} \int_{1/2}^1 \left|E_h\left(\frac{a_1u_1}{gtY}\right)\right|^2 du_1 dt \\ &= C_2 \varphi_1(a_1g) \frac{g\varphi_{-1}(a_1g)}{\tilde{\varphi}(a_1g)} \int_{1/2gZY}^{1/gZY} \int_{1/2}^1 |E_h(a_1u_1u_3)|^2 du_1 du_3. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Nous rappelons que la somme sur les a_1 porte sur l'intervalle $[A_1, 2A_1[$ avec $Q_1/hT \leq A_1 \leq Q_1T/h$ ce qui implique $1 \leq A_1 \leq T^2$. Cette somme peut être vue une somme courte (lorsque $Q_1 = h/T$, nous avons $A_1 = 1$) ce qui empêche d'estimer asymptotiquement cette somme.

Nous devons estimer

$$C_2 \sum_{g \leq T} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)}{\varphi(g)\tilde{\varphi}(g)} \sum_{(X,Y,Z)} \int_{1/2gZY}^{1/gZY} \int_{1/2}^1 \sum_{\substack{1 \leq a_1 \leq gYZT/h \\ (a_1, g)=1}} \varphi_1(a_1) \frac{\varphi_{-1}(a_1)}{\tilde{\varphi}(a_1)} |E_h(a_1 u_1 u_3)|^2 du_1 du_3,$$

où (X, Y, Z) vérifie

$$h/T < gYZ \leq hT, \quad gX \leq hT, \quad X > ZT^4, \quad Z \geq Y. \quad (4.20)$$

Montrons que la double intégrale ci-dessus est $O(h)$. En effet, la somme intérieure est $\ll h/u_1 u_3$. Lorsque $u_3 \leq 1/a_1 u_1 h$, la majoration triviale $|E_h(a_1 u_1 u_3)|^2 \leq h^2$ fournit le résultat. Lorsque $u_3 > 1/a_1 u_1 h$, la majoration $|E_h(a_1 u_1 u_3)|^2 \leq 1/(a_1 u_1 u_3)^3$ fournit aussi cette majoration après sommation sur $a_1 > 1/u_1 u_3 h$.

Nous pouvons donc changer les inégalités (4.20) en

$$h/T < gYZ \leq hT, \quad X \leq h, \quad h^{1/2} < Y \leq X \leq h, \quad (4.21)$$

quitte à négliger un terme en $O(h(\log h)(\log T)^2)$. Ensuite nous observons que nous pouvons sommer a_1 jusqu'à T^2 au lieu de $gYZT/h$ quitte à négliger un terme en $O(h(\log h)^2(\log T)/T)$. En effet, la somme sur les $gYZT/h < a_1 \leq T^2$ vérifie $|E_h(a_1 u_1 u_3)| \ll h/T$.

Enfin, nous sommes par rapport à la variable Z , puis les variables X et Y , pour obtenir un terme principal

$$\begin{aligned} &= C_2 \sum_{g \leq T} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)}{\varphi(g)\tilde{\varphi}(g)} \sum_{\substack{(X,Y) \\ h^{1/2} < Y \leq X \leq h}} \int_{1/2hT}^{T/h} \int_{1/2}^1 \sum_{\substack{1 \leq a_1 \leq T^2 \\ (a_1, g)=1}} \varphi_1(a_1) \frac{\varphi_{-1}(a_1)}{\tilde{\varphi}(a_1)} |E_h(a_1 u_1 u_3)|^2 du_1 du_3 \\ &= \frac{C_2}{8} (\log h)^2 \sum_{g \leq T} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)}{\varphi(g)\tilde{\varphi}(g)} \int_{1/2hT}^{T/h} \int_{1/2}^1 \sum_{\substack{1 \leq a_1 \leq T^2 \\ (a_1, g)=1}} \varphi_1(a_1) \frac{\varphi_{-1}(a_1)}{\tilde{\varphi}(a_1)} |E_h(a_1 u_1 u_3)|^2 du_1 du_3 \\ &\quad + O(h(\log h)(\log T)). \end{aligned}$$

Ces modifications des domaines de comptage et ses sommations permettent d'invertir les sommations en a_1 et en g pour utiliser

$$\sum_{\substack{1 \leq g \leq T \\ (a_1, g)=1}} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)}{\varphi(g)\tilde{\varphi}(g)} = - \sum_{\substack{g > T \\ (a_1, g)=1}} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)}{\varphi(g)\tilde{\varphi}(g)} \ll \psi_{1/2}(a_1)^2 \mathcal{L}(T)^{-2},$$

ce qui fournit une contribution

$$\ll h(\log h)^2 (\log T) \mathcal{L}(T)^{-2}.$$

En rassemblant ces résultats, nous obtenons bien la majoration (4.16). \square

4.6 Septième cas : $h/T < gYZ \leq hT$ et $gX = Q_2/Z > hT$.

Soit $S_7(\delta)$ la contribution du cas $h/T < gYZ \leq hT$ et $gX = Q_2/Z > hT$. Nous montrons dans cette sous-section le résultat suivant.

Lemme 4.6. *Soit $\delta \in \{(1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0)\}$. Lorsque $T \geq 1$, nous avons l'estimation*

$$S_7(\delta) \ll \frac{h(\log h)^4}{\mathcal{L}(T)} + h(\log h)(\log T)^2 + \frac{h(\log h)^8}{T}. \quad (4.22)$$

Démonstration. Nous nous procédons comme dans le sixième cas sauf qu'ici la sommation longue correspond à la variable a_2 puisque $Q_2/Z > hT$. Nous nous plaçons dans le cas $\delta = (1, 1)$, les autres étant semblables. Nous n'indiquons que les étapes sans détailler tous les calculs.

Quitte à négliger un terme d'erreur de taille acceptable, nous pouvons nous placer dans le cas où

$$g \leq T, \quad h/T < gYZ \leq hT, \quad gX > hT, \quad Y \geq Z, \quad Q_1/hT < A_1 \leq TQ_1/h,$$

l'encadrement $Q_2/hT < A_2 \leq TQ_2/h$ étant inutile et l'inégalité $X \geq Y$ étant une conséquence de celles ci-dessus.

Lorsque $(a_1, q_1) = 1$, nous avons

$$\begin{aligned} N(A_2) &:= \sum_{\substack{a_2 \leq A_2 \\ a_2 \equiv -a_1xy^{-1} \pmod{z} \\ (a_2, gx) = (a_1x + a_2y, g) = 1}} 1 = \sum_{\substack{k_2 | gx \\ k_1 | g \\ (k_1, k_2) = 1}} \mu(k_1)\mu(k_2) \sum_{\substack{a_2 \leq A_2/k_2 \\ k_2 a_2 \equiv -a_1xy^{-1} \pmod{(k_1z)}}} 1 \\ &= \varphi_2(g)\varphi_1(x) \frac{A_2}{z} + O(2^{\omega(x)} 3^{\omega(g)}). \end{aligned}$$

Nous rappelons la quantité V définie en (1.11). Une sommation d'Abel fournit

$$\begin{aligned} V(g, x, y, z; h) &= \sum_{\substack{1 \leq |a_1| \leq TQ_1/h \\ (a_1, q_1) = 1}} \sum_{\substack{1 \leq |a_2| \leq q_2/2 \\ a_2 \equiv -a_1xy^{-1} \pmod{z} \\ (a_2, gx) = (a_1x + a_2y, g) = 1}} E_h\left(\frac{a_1}{q_1}\right) E_h\left(\frac{a_2}{q_2}\right) E_h\left(-\frac{a_1}{q_1} - \frac{a_2}{q_2}\right) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq |a_1| \leq TQ_1/h \\ (a_1, q_1) = 1}} \left\{ \frac{\varphi_2(g)\varphi_1(x)}{z} I_7(a_1, q_1, q_2; h) + O(R_7(a_1)) \right\}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

avec

$$\begin{aligned} I_7(a_1, q_1, q_2; h) &:= \sum_{\varepsilon_2 \in \{\pm 1\}} \int_0^{q_2/2} E_h\left(\frac{a_1}{q_1}\right) E_h\left(\frac{\varepsilon_2 \alpha_2}{q_2}\right) E_h\left(-\frac{a_1}{q_1} - \frac{\varepsilon_2 \alpha_2}{q_2}\right) d\alpha_2 \\ &= q_2 \int_{-1/2}^{1/2} E_h\left(\frac{a_1}{q_1}\right) E_h(\alpha_2) E_h\left(-\frac{a_1}{q_1} - \alpha_2\right) d\alpha_2 = q_2 \left| E_h\left(\frac{a_1}{q_1}\right) \right|^2 \end{aligned}$$

et $R_7(a_1)$ le terme d'erreur vérifiant

$$R_7(a_1) \ll \frac{2^{\omega(x)} 3^{\omega(g)}}{q_2} \left| E_h \left(\frac{a_1}{q_1} \right) \right| \int_{-q_2/2}^{q_2/2} \left| E'_h \left(\frac{\alpha_2}{q_2} \right) E_h \left(-\frac{a_1}{q_1} - \frac{\alpha_2}{q_2} \right) - E_h \left(\frac{\alpha_2}{q_2} \right) E'_h \left(-\frac{a_1}{q_1} - \frac{\alpha_2}{q_2} \right) \right| d\alpha_2 \\ + 2^{\omega(x)} 3^{\omega(g)} \left| E_h \left(\frac{a_1}{q_1} \right) \right| \left(\left| E_h \left(\frac{a_1}{q_1} \right) \right| + \left| E_h \left(\frac{1}{2} + \frac{a_1}{q_1} \right) \right| \right).$$

Nous utilisons (3.2) et le Lemme 2.3 de sorte que le premier terme du majorant $R_{71}(a_1)$ vérifie

$$R_{71}(a_1) \ll \frac{2^{\omega(x)} 3^{\omega(g)} h}{\left| \frac{a_1}{q_1} \right| + 1/h} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{d\alpha_2}{\left(\left| \alpha_2 \right| + 1/h \right) \left(\left| \alpha_2 + \frac{a_1}{q_1} \right| + 1/h \right)} \ll \frac{2^{\omega(x)} 3^{\omega(g)} h}{\left(\left| \frac{a_1}{q_1} \right| + 1/h \right)^2}.$$

Il vient

$$\sum_{\substack{1 \leq |a_1| \leq q_1/2 \\ (a_1, q_1) = 1}} R_7(a_1) \ll 2^{\omega(x)} 3^{\omega(g)} h^2 q_1 (\log q_1) \ll 2^{\omega(x)} 3^{\omega(g)} (\log q_1) \frac{h q_1 q_2}{zT}.$$

La contribution de ce terme d'erreur est clairement $O(h(\log h)^8/T)$.

Il s'agit donc d'estimer la somme

$$\sum_{\substack{P(gxyz) \leq h^3 \\ (x, y, z) \in D(\delta) \\ g \leq T, h/T < gYZ \leq hT \\ gX > hT}} \frac{\mu(g) \mu(gxyz)^2 \varphi_2(g)}{\varphi(g)^2 \varphi_1(g) \varphi(yz)^2 \varphi(x)} \sum_{\substack{1 \leq |a_1| \leq TQ_1/h \\ (a_1, q_1) = 1}} \left| E_h \left(\frac{a_1}{q_1} \right) \right|^2.$$

Une sommation sur x et X fournit un terme

$$\left(\frac{q}{\varphi(q)} - \log h \right) \sum_{\substack{g \leq T \\ y \sim Y, z \sim Z \\ h/T < gYZ \leq hT, Y \geq Z}} \frac{\mu(g) \mu(gyz)^2 \varphi_2(g)}{\varphi(g)^2 yz \varphi(yz)} \sum_{\substack{1 \leq |a_1| \leq TQ_1/h \\ (a_1, gyz) = 1}} \left| E_h \left(\frac{a_1}{q_1} \right) \right|^2 + O(h(\log h)(\log T)^2).$$

Puis nous intervertissons les sommes en y et z et celle de a_1 et sommons en y et z . Un simple calcul fournit un terme principal

$$\frac{1}{\zeta(2)} \left(\frac{q}{\varphi(q)} - \log h \right) \sum_{\substack{g \leq T \\ h/T < gYZ \leq hT, Y \geq Z}} \frac{\mu(g) \varphi_2(g)}{g \varphi(g) \varphi_{-1}(g)} \sum_{\substack{1 \leq |a_1| \leq TQ_1/h \\ (a_1, g) = 1}} \frac{\varphi_1(a_1)}{\varphi_{-1}(a_1)} \int_Y^{2Y} \int_Z^{2Z} \left| E_h \left(\frac{a_1}{gt_2 t_3} \right) \right|^2 \frac{dt_3 dt_2}{t_2^2 t_3^2} \\ = \frac{1}{\zeta(2)} \left(\frac{q}{\varphi(q)} - \log h \right) \sum_{\substack{g \leq T \\ h/T < gYZ \leq hT, Y \geq Z}} \frac{\mu(g) \varphi_2(g)}{\varphi(g) \varphi_{-1}(g)} \\ \sum_{\substack{1 \leq |a_1| \leq TQ_1/h \\ (a_1, g) = 1}} \frac{\varphi_1(a_1)}{\varphi_{-1}(a_1)} \int_{1/2}^1 \int_{1/2gYZ}^{1/gYZ} |E_h(a_1 u_2 u_3)|^2 du_3 du_2.$$

Des manipulations semblables à celles du sixième cas permettent de se restreindre à $h/T < gYZ \leq hT$, et $h^{1/2} \leq Y \leq h$, puis à $|a_1| \leq T^2$.

Nous obtenons alors un terme principal égal à

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\zeta(2)} \left(\frac{q}{\varphi(q)} - \log h \right) \sum_{\substack{g \leq T \\ h^{1/2} \leq Y \leq h}} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)}{\varphi(g)\varphi_{-1}(g)} \sum_{\substack{1 \leq |a_1| \leq T^2 \\ (a_1, g) = 1}} \frac{\varphi_1(a_1)}{\varphi_{-1}(a_1)} \int_{1/2}^1 \int_{1/2hT}^{T/h} |E_h(a_1 u_2 u_3)|^2 du_3 du_2 \\ &= \frac{1}{\zeta(2)} \left(\frac{q}{\varphi(q)} - \log h \right) \sum_{\substack{1 \leq |a_1| \leq T^2 \\ h^{1/2} \leq Y \leq h}} \frac{\varphi_1(a_1)}{\varphi_{-1}(a_1)} \sum_{\substack{g \leq T \\ (g, a_1) = 1}} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)}{\varphi(g)\varphi_{-1}(g)} \int_{1/2}^1 \int_{1/2hT}^{T/h} |E_h(a_1 u_2 u_3)|^2 du_3 du_2. \end{aligned}$$

Nous utilisons alors

$$\sum_{\substack{1 \leq g \leq T \\ (a_1, g) = 1}} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)}{\varphi(g)\varphi_{-1}(g)} = - \sum_{\substack{g > T \\ (a_1, g) = 1}} \frac{\mu(g)\varphi_2(g)}{\varphi(g)\tilde{\varphi}(g)} \ll \psi_{1/2}(a_1)^2 \mathcal{L}(T)^{-2}.$$

ce qui fournit une contribution

$$\ll h(\log h)^2 (\log T) \mathcal{L}(T)^{-2}.$$

En rassemblant ces résultats, nous obtenons bien

$$S_7(\delta) \ll h(\log h)^4 \mathcal{L}(T)^{-1} + h(\log h)(\log T)^2.$$

□

4.7 Conclusion de la démonstration du Théorème 1.1.

Nous partons de la formule (1.7). Nous devons donc estimer $V_3(h)$. Le Lemme 3.2 couplé avec le Lemme 2.16 permet de traiter le cas où $gYZ = Q_1 > hT$ et $gX = Q_2/Z > hT$. Le Lemme 3.3 permet de négliger la contribution du cas où $gYZ = Q_1 \leq h/T$ et $gX = Q_2/Z > hT$. Le Lemme 4.6 le complète en majorant la contribution du cas où $h/T < gYZ = Q_1 \leq hT$ et $gX = Q_2/Z > hT$.

Nous pouvons donc considérer le cas restant $gX \leq hT$. Le Lemme 4.2 estime la contribution du cas $gYZ = Q_1 > hT$, $X > ZT^4$ sachant que grâce au Lemme 4.3 le cas $X \leq ZT^4$ est négligeable. Le Lemme 4.5 qui traite du cas $h/T < gYZ \leq hT$, $gX \leq hT$ permet de conclure.

La somme des termes d'erreur apparaissant dans ces lemmes est majorée par

$$\ll h(\log h)(\log_2 h)^2 (\log T)^6 + \frac{h(\log h)^{12}}{\mathcal{L}(T)} + \frac{h(\log h)^{14}}{T}.$$

En choisissant $T = \exp\{150(\log_2 h)^2\}$, nous obtenons alors le terme d'erreur annoncé au Théorème 1.1.

5 Démonstration du Théorème 1.3

L'hypothèse 1.3 fournit lorsque $1 \leq k \leq 3$ et $1 \leq x \leq X$ l'estimation

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \prod_{j=1}^k \Lambda_0(n + d_j) = \mathfrak{S}_0(\mathcal{D})x + O(E_3(X; h)). \quad (5.1)$$

Nous avons

$$M_3(X, h) := \frac{1}{X} \sum_{1 \leq n \leq X} \left(\sum_{1 \leq d \leq h} \Lambda_0(n + d) \right)^3.$$

En développant le cube, nous obtenons

$$\begin{aligned} M_3(X, h) &= \sum_{\substack{1 \leq d_1, d_2, d_3 \leq h \\ d_j \text{ distincts}}} \frac{1}{X} \sum_{1 \leq n \leq X} \Lambda_0(n + d_1) \Lambda_0(n + d_2) \Lambda_0(n + d_3) \\ &+ \sum_{\substack{1 \leq d_1, d_2 \leq h \\ d_1 \neq d_2}} \frac{3}{X} \sum_{1 \leq n \leq X} \Lambda_0(n + d_1)^2 \Lambda_0(n + d_2) + \sum_{1 \leq d \leq h} \frac{1}{X} \sum_{1 \leq n \leq X} \Lambda_0(n + d)^3. \end{aligned}$$

Nous notons $M_{3,j}$ la j -ième double somme apparaissant dans le développement de $M_3(X, h)$. D'après l'hypothèse (1.3) et le Théorème 1.1,

$$\begin{aligned} M_{3,1} &= R_3(h) + O(h^3 E_3(X, h)/X) \\ &= \frac{9}{2} h (\log h)^2 \left(1 + O\left(\frac{(\log_2 h)^{14}}{\log h}\right) \right) + O(h^3 E_3(X, h)/X). \end{aligned}$$

Nous suivons [14] pour estimer $M_{3,2}$, puis $M_{3,3}$. Nous observons que

$$\begin{aligned} \Lambda_0(n + d_1)^2 &= \Lambda(n + d_1) \Lambda_0(n + d_1) - \Lambda_0(n + d_1) \\ &= \Lambda(n + d_1) (\log(n + d_1) - 1) - \Lambda_0(n + d_1) + O(\Lambda(n + d_1) 1_{n+d_1 \notin \mathcal{P}} \log X) \\ &= \Lambda_0(n + d_1) (\log(n + d_1) - 2) + \log(n + d_1) - 1 + O(\Lambda(n + d_1) 1_{n+d_1 \notin \mathcal{P}} \log X). \end{aligned}$$

La contribution à $M_{3,2}$ du dernier terme est $\ll h^2 (\log X)^2 / \sqrt{X}$. Comme $\mathfrak{S}_0(\{d_2\}) = 0$, une sommation d'Abel permet de montrer que la contribution à $M_{3,2}$ du terme $\log(n + d_1) - 1$ est $\ll h (\log X) E_3(X, h)/X$. La contribution à $M_{3,2}$ du premier terme est

$$= \frac{R_2(h)}{X} \int_0^X (\log x - 2) dx + O(h^2 (\log X) E_3(X, h)/X).$$

D'après (16) de [14], lorsque B est la constante définie dans l'énoncé, pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons

$$R_2(h) = -h(\log h - B - 1) + O(h^{1/2+\varepsilon}). \quad (5.2)$$

Il vient

$$M_{3,2} = -\frac{h}{X} (\log h - B - 1) \int_0^X (\log x - 2) dx + O(h^2 (\log X) E_3(X, h)/X + h^{1/2+\varepsilon} \log X).$$

De même, nous observons que

$$\begin{aligned}
\Lambda_0(n+d)^3 &= \Lambda(n+d)(\Lambda_0(n+d)^2 - \Lambda_0(n+d)) + \Lambda_0(n+d) \\
&= \Lambda(n+d)(\log(n+d) - 1)(\log(n+d) - 2) + \Lambda_0(n+d) \\
&\quad + O(\Lambda(n+d)1_{n+d \notin \mathcal{P}}(\log X)^2) \\
&= \Lambda_0(n+d)((\log(n+d) - 1)(\log(n+d) - 2) + 1) \\
&\quad + (\log(n+d) - 1)(\log(n+d) - 2) + O(\Lambda(n+d)1_{n+d \notin \mathcal{P}}(\log X)^2).
\end{aligned}$$

La contribution à $M_{3,3}$ du dernier terme est $\ll h^2(\log X)^2/\sqrt{X}$. Comme $\mathfrak{S}(\{d\}) = 0$, la contribution à $M_{3,3}$ du premier terme est $\ll h(\log X)^2 E_3(X, h)/X$. Ainsi

$$M_{3,3} = \frac{h}{X} \int_0^X (\log x - 1)(\log x - 2) dx + O(h(\log X)^2 E_3(X, h)/X + h^2(\log X)^2/X).$$

Cela implique bien

$$\begin{aligned}
M_3(X, h) &= \frac{h}{X} \int_0^X \left(\frac{9}{2}(\log h)^2 - 3(\log h - B)(\log x) + (\log x)^2 \right) dx \\
&\quad + O(h(\log h)(\log_2 h)^{14} + h(h + \log X)^2 E_3(X, h)/X + h^{1/2+\varepsilon} \log X) \\
&= h \left(\frac{9}{2}(\log h)^2 - 3(\log h - B)(\log X) + (\log X)^2 \right) \\
&\quad + O(h(\log h)(\log_2 h)^{14} + h(h + \log X)^2 E_3(X, h)/X + h^{1/2+\varepsilon} \log X).
\end{aligned}$$

6 Démonstration du Théorème 1.4

Nous suivons la méthode de Montgomery et Soundararajan [14] en nous concentrant sur les moments d'ordre impair $K = 2K' + 1$ avec $K' \geq 1$. À chaque étape, nous reprenons leurs notations sauf que leur H est noté h , et leur h sera noté i . Nous n'indiquons pas la dépendance en K des estimations.

Suivant [14, eq. (61)], nous avons

$$M_K(X, h) = \frac{1}{X} \sum_{k=1}^K \sum_{\substack{M_1, \dots, M_k \\ M_j \geq 1 \\ \sum_j M_j = K}} \binom{K}{M_1, \dots, M_k} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ 1 \leq d_j \leq h \\ d_j \text{ distincts}}} \sum_{1 \leq n \leq X} \prod_{j=1}^k \Lambda_0(n + d_j)^{M_j}, \quad (6.1)$$

avec

$$\binom{K}{M_1, \dots, M_k} := \frac{K!}{M_1! \cdots M_k!}.$$

Lorsque $m \geq 1$, nous notons $\Lambda_m(n) = \Lambda(n)^m \Lambda_0(n)$. Ainsi lorsque $M \geq 1$, nous avons

$$\Lambda_0(n)^M = \Lambda_0(n)(\Lambda(n) - 1)^{M-1} = \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^{M-m-1} \binom{M-1}{m} \Lambda_m(n).$$

En reportant dans (6.1), nous obtenons

$$\begin{aligned}
M_K(X, h) &= \sum_{k=1}^K \frac{1}{k!} \sum_{\substack{M_1, \dots, M_k \\ M_j \geq 1 \\ \sum_j M_j = K}} \binom{K}{M_1, \dots, M_k} \\
&\times \sum_{\substack{m_1, \dots, m_k \\ 0 \leq m_j \leq M_j - 1}} \prod_{j=1}^k (-1)^{M_j - m_j - 1} \binom{M_j - 1}{m_j} L_k(\mathbf{m}),
\end{aligned} \tag{6.2}$$

où

$$L_k(\mathbf{m}) := \frac{1}{X} \sum_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ 1 \leq d_j \leq h \\ d_j \text{ distincts}}} \sum_{1 \leq n \leq X} \prod_{j=1}^k \Lambda_{m_j}(n + d_j).$$

Pour chaque \mathbf{m} , nous introduisons quatre ensembles

$$\mathcal{K} = \{1, \dots, k\}, \quad \mathcal{H} = \{j \in \mathcal{K} : m_j \geq 1\}, \quad \mathcal{I} = \{i \in \mathcal{K} : m_i = 0\}, \quad \mathcal{J} \subset \mathcal{K}$$

et trois cardinaux associés $i = \mathcal{H}$, $k - i = \mathcal{I}$, $j = \mathcal{J}$. Ainsi

$$\prod_{j \in \mathcal{I}} \Lambda_0(n + d_j) \prod_{j \in \mathcal{H}} \Lambda(n + d_j) = \prod_{i \in \mathcal{I}} \Lambda_0(n + d_i) \prod_{j \in \mathcal{H}} (\Lambda_0(n + d_j) + 1) = \sum_{\mathcal{I} \subset \mathcal{J} \subset \mathcal{K}} \prod_{j \in \mathcal{J}} \Lambda_0(n + d_j).$$

L'hypothèse de Hardy et Littlewood fournit lorsque $1 \leq x \leq X$

$$\sum_{n \leq x} \prod_{j \in \mathcal{I}} \Lambda_0(n + d_j) \prod_{j \in \mathcal{H}} (\Lambda_0(n + d_j) + 1) = x \sum_{\mathcal{I} \subset \mathcal{J} \subset \mathcal{K}} \mathfrak{S}_0(\mathcal{D}_{\mathcal{J}}) + O(E_K(X, h))$$

avec $\mathcal{D}_{\mathcal{J}} := \{d_j \mid (j \in \mathcal{J})\}$. Lorsque $\Lambda(n + d_j)$ est non nul avec $j \in \mathcal{H}$ (c'est-à-dire $m_j \geq 1$), soit $n + d_j$ est premier et alors le facteur $\Lambda(n + d_j)^{m_j - 1} \Lambda_0(n + d_j) = \log(n + d_j)^{m_j - 1} (\log(n + d_j) - 1)$, soit $n + d_j$ est une puissance supérieure à 2 de nombre premier et alors la contribution de ce terme est négligeable puisque $E_K(X, h) \geq \sqrt{X}$. Nous avons

$$\sum_{j=1}^k m_j \leq \sum_{j=1}^k (M_j - 1) \leq K - k.$$

En faisant une intégration par parties et en approchant $\log(n + d_j)$ par $\log n$, Montgomery et Soundararajan obtiennent

$$\frac{1}{X} \sum_{1 \leq n \leq X} \prod_{j=1}^k \Lambda_{m_j}(n + d_j) = \sum_{\mathcal{I} \subset \mathcal{J} \subset \mathcal{K}} \mathfrak{S}_0(\mathcal{D}_{\mathcal{J}}) (I(X, \mathbf{m}) + O((\log X)^{K-k} (h + E_K(X, h))/X)),$$

où

$$I(X, \mathbf{m}) := \frac{1}{X} \int_0^X \prod_{j \in \mathcal{H}} ((\log x)^{m_j - 1} (\log x - 1)) dx.$$

Suivant [14], nous obtenons grâce à $h \leq X^{1/k}$

$$\begin{aligned} L_k(\mathbf{m}) &= I(X, \mathbf{m}) \sum_{\mathcal{I} \subset \mathcal{J} \subset \mathcal{K}} R_j(h) h^{k-j} (1 + O(1/h)) + O(h^k (\log X)^{K-k} E_K(X, h)/X) \\ &= I(X, \mathbf{m}) h^{i-1} (h R_{k-i}(h) (1 + O(1/h)) + i R_{k-i+1}(h)) + O(h^k (\log X)^{K-k} E_K(X, h)/X). \end{aligned}$$

Le facteur i devant $R_{k-i+1}(h)$ est le nombre de manière de choisir \mathcal{J} contenant \mathcal{I} avec un élément de \mathcal{H} en plus.

Nous supposons maintenant $h \geq \log X$. Nos hypothèses fournissent pour tout $k \geq 1$

$$R_k(h) \ll h^{\lfloor k/2 \rfloor} (\log h)^{\lceil k/2 \rceil}.$$

Puisque $\lfloor (k-i)/2 \rfloor + \lceil (k+i)/2 \rceil = k$, nous avons donc

$$\begin{aligned} L_k(\mathbf{m}) &\ll (\log X)^{K-k} h^{\lfloor (k-i)/2 \rfloor} (\log h)^{\lceil (k+i)/2 \rceil} + h^K E_K(X, h)/X \\ &\ll (\log X)^K \left(\frac{h}{\log X} \right)^{\lfloor (k+i)/2 \rfloor} \left(\frac{\log h}{\log X} \right)^{\lceil (k-i)/2 \rceil} + h^K E_K(X, h)/X \\ &\ll (\log X)^K \left(\frac{h}{\log X} \right)^{\lfloor (k+i)/2 \rfloor} + h^K E_K(X, h)/X. \end{aligned}$$

Comme dans [14], nous remarquons que $k+i \leq k-i + \sum_j (M_j - 1) \leq K$. Il est aisé de négliger la contribution des i tels que $k+i < K-1$. Le cas $k+i = K$ correspond au cas $M_j = 2$ pour tout $j \in \mathcal{H}$ tandis que le cas $k+i = K-1$ correspond au cas $M_j = 2$ pour tout $j \in \mathcal{H}$ sauf pour une valeur où $M_j = 3$.

Nous nous plaçons dans le cas où $k+i = K$, $M_j - 1 = m_j = 1$ pour tout $j \in \mathcal{H}$. Ainsi nous avons $2i = 2(K-k) \leq K$ autrement dit $\frac{1}{2}K \leq k \leq K$. Dans ce cas, nous avons aussi

$$I(X, \mathbf{m}) = \frac{1}{X} \int_0^X (\log x - 1)^{K-k} dx =: I_{K-k}(X) = (\log X)^{K-k} (1 + O(1/\log X)).$$

Notant $k' = k - K' - 1$, nous obtenons

$$\begin{aligned} L_k(\mathbf{m}) &= I_{K-k}(X) h^{K-k-1} (h R_{2k-K}(h) (1 + O(1/h)) + (K-k) R_{2k-K+1}(h)) \\ &\quad + O(h^k (\log X)^{K-k} E_K(X, h)) \\ &= (-1)^{k'+1} X h^{K'} (\log X)^{K'-k'} (\log h)^{k'+1} (r_{2k'+1} + (K' - k') \mu_{2k'+2} + o(1)) \\ &\quad + O(h^k (\log X)^{K-k} E_K(X, h)). \end{aligned}$$

Nous nous plaçons dans le cas où $k+i = K-1 = 2K'$, $M_j - 1 = m_j = 1$ pour tout $j \in \mathcal{H}$ sauf peut être un exception où $M_j = 3$. Nous avons $2i+1 = 2(K-k-1) + 1 \leq K$ et $k+2 \leq K$ autrement dit $\frac{1}{2}(K-1) \leq k \leq K-2$. Nous pouvons donc choisir $k = K' + k'$ avec $0 \leq k' \leq K' - 1$. Notons que cela implique $K' \geq 1$.

Dans ce cas-là, nous avons encore $I(X, \mathbf{m}) \sim (\log X)^{K-k}$ et

$$\begin{aligned} L_k(\mathbf{m}) &= I(X, \mathbf{m}) h^i R_{k-i}(h) (1 + O((\log h)/h)) + O(h^k (\log X)^{K-k} E_K(X, h)/X) \\ &= (-1)^{k'} \mu_{2k'} (\log X)^{K'+1-k'} h^{K'} (\log h)^{k'} (1 + o(1)) + O(h^k (\log X)^{K-k} E_K(X, h)/X). \end{aligned}$$

En reportant dans (6.2), nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \frac{M_K(X, h)}{h^{K'}} \\
&= -(\log h) \sum_{0 \leq k' \leq K'} (\log X)^{K'-k'} (-\log h)^{k'} \frac{(2K'+1)!}{(K'+1+k')! 2^{K'-k'}} \binom{K'+1+k'}{K'-k'} \\
&\quad \times (r_{2k'+1} + (K'-k')\mu_{2k'+2} + o(1)) \\
&\quad + (\log X) \sum_{0 \leq k' \leq K'-1} (\log X)^{K'-k'} (-\log h)^{k'} \frac{(2K'+1)!(\mu_{2k'} + o(1))}{3(K'+k')! 2^{K'-k'}} \binom{K'+k'}{K'-k'} (K'-k') \\
&\quad + O(h\{h^{K'} + (\log X)^{K'}\} E_K(X, h)/X).
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Ici le coefficient $\binom{k}{K-k} = \binom{K'+1+k'}{K'-k'}$ permet de compter le nombre de sous-ensembles \mathcal{I} de $\{1, \dots, k\}$ de cardinal $k-i = 2k-K = k-(K-k)$ tandis que le coefficient $\binom{k}{K-1-k} = \binom{K'+k'}{K'-k'}$ permet de compter le nombre de sous-ensembles \mathcal{I} de $\{1, \dots, k\}$ de cardinal $k-i = 2k+1-K = k-(K-1-k)$. Dans le second cas, il faut choisir l'élément $j \in \mathcal{H}$ tel que $M_j = 3$. Il y en a $i = K-k-1 = K'-k'$ manières possibles.

Nous observons facilement les formules

$$\frac{(2K'+1)!}{(K'+1+k')! 2^{K'-k'}} \binom{K'+1+k'}{K'-k'} (r_{2k'+1} + (K'-k')\mu_{2k'+2}) = \mu_{2K'+2} (K' + \frac{1}{2}k') \binom{K'}{k'}$$

et

$$\frac{\mu_{2k'}}{(K'+k')!} \binom{K}{M_1, \dots, M_k} \binom{K'+k'}{K'+1-k'} = \frac{(2K'+1)! \mu_{2k'}}{3(K'+k')! 2^{K'-k'}} \binom{K'+k'}{K'+1-k'} = \frac{1}{3} \mu_{2K'+2} \binom{K'}{k'}.$$

De plus

$$\sum_{0 \leq k' \leq K'} (K' + \frac{1}{2}k') \binom{K'}{k'} (\log X)^{K'-k'} (-\log h)^{k'} = K' (\log(X/h))^{K'-1} \log(X/h^{3/2})$$

et

$$\sum_{0 \leq k' \leq K'-1} (K'-k') \binom{K'}{k'} (\log X)^{K'-k'} (-\log h)^{k'} = K' (\log(X/h))^{K'-1} (\log X).$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}
& \frac{M_K(X, h)}{h^{K'}} \\
&= (\frac{1}{3} + o(1)) \mu_{2K'+2} K' (\log(X/h))^{K'-1} (\frac{9}{2} (\log h)^2 - 3(\log h)(\log X) + (\log X)^2) \\
&\quad + O(h\{h^{K'} + (\log X)^{K'}\} E_K(X, h)/X).
\end{aligned} \tag{6.4}$$

7 Remerciements

L’auteur a plaisir à remercier chaleureusement Vivian Kuperberg pour les discussions sur le sujet qu’il a eues avec elle, Daniel Fiorilli et Florent Jouve pour leurs remarques et encouragements, Gérald Tenenbaum pour sa relecture. L’auteur remercie l’Institut Mittag Leffler pour les excellentes conditions de travail lors de la fin de l’élaboration de ce travail et aussi les organisateurs pour leur invitation. Pendant cette période, l’auteur a été soutenu par une chaire senior de l’Institut Universitaire de France.

Références

- [1] W. BANKS, K. FORD, T. TAO, Large prime gaps and probabilistic models, *Invent. Math.* **233** (2023), 1471–1518.
- [2] T.F. BLOOM, V. KUPERBERG, Odd moments and adding fractions, <https://arxiv.org/abs/2312.09021>.
- [3] V. BLOMER, The average value of divisor sums in arithmetic progressions, *Q. J. Math.* **59** (2008), no. 3, 275–286.
- [4] R. DE LA BRETÈCHE, D. FIORILLI, On a conjecture of Montgomery and Soundararajan, *Math. Annalen*, **381**(1), (2021), 575–591.
- [5] P.X. GALLAGHER, On the distribution of primes in short intervals. *Mathematika* **23**, 4–9, (1976); Corrigendum, **28**, 86 (1981).
- [6] O. GORODETSKY, K. MATOMÄKI, M. RADZIWIŁŁ, B. RODGERS, On the variance of squarefree integers in short intervals and arithmetic progressions *Geom. Funct. Anal.* **31** (2021), no. 1, 111–149.
- [7] G.H. HARDY, J.E. LITTLEWOOD, Some problems of "Partitio numerorum" ; III : On the expression of a number as a sum of primes, *Acta Math.* **44** (1923), no. 1, 1–70.
- [8] C. HOOLEY, A note on square-free numbers in arithmetic progressions, *Bull. London Math. Soc.* **7** (1975), 133–138.
- [9] V. KUPERBERG, Odd moments in the distribution of primes. <https://arxiv.org/abs/2109.03767> à paraître à *Algebra and Number Theory* (2024).
- [10] P. LE BOUDEC, Affine congruences and rational points on a certain cubic surface, *Algebra Number Theory* **8** (2014), no. 5, 1259–1296.
- [11] P. LE BOUDEC, On the distribution of squarefree integers in arithmetic progressions *Math. Z.* **290** (2018), no. 1-2, 421–429.
- [12] S.-K. LEUNG, Moments of primes in progressions to a large modulus, <https://arxiv.org/pdf/2402.07941> (2024).
- [13] R.J. LEMKE OLIVER, K. SOUNDARARAJAN, Unexpected biases in the distribution of consecutive primes, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **113** (2016), no. 31, E4446–E4454.
- [14] H.L. MONTGOMERY, K. SOUNDARARAJAN, Primes in short intervals, *Comm. Math. Phys.* **252** (2004), no. 1-3, 589–617.
- [15] H.L. MONTGOMERY, R.C. VAUGHAN, On the distribution of reduced residues, *Ann. of Math. (2)* **123** (1986), no. 2, 311–333.
- [16] R. M. NUNES, Squarefree numbers in arithmetic progressions, *J. Number Theory*, **153** (2015), 1–36.
- [17] R. M. Nunes, On the least squarefree number in an arithmetic progression, *Mathematika*, **63** (2017), no. 2, 483–498.
- [18] K. PRACHAR, Über die kleinste quadratfreie Zahleiner arithmetischen Reihe, *Monatsh. Math.* **62** (1958), 173–176.
- [19] G. TENENBAUM, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, cinquième édition, Dunod, 2022.

Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche
Université Paris Cité, Sorbonne Université, CNRS UMR 7586
Case Postale 7012
F-75251 Paris CEDEX 13, France
regis.delabreteche@imj-prg.fr