



HAL
open science

Mouvement relativiste des particules chargées dans un champ électrique, partie 2 : application aux premiers accélérateurs linéaires de particules, Van de Graaff et Linac (1935-1950)

Jean-Marie Malherbe

► To cite this version:

Jean-Marie Malherbe. Mouvement relativiste des particules chargées dans un champ électrique, partie 2 : application aux premiers accélérateurs linéaires de particules, Van de Graaff et Linac (1935-1950). 2025. ⟨hal-05391895⟩

HAL Id: hal-05391895

<https://cnrs.hal.science/hal-05391895v1>

Submitted on 1 Dec 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC BY 4.0 - Attribution - International License

Mouvement relativiste des particules chargées dans un champ électrique, partie 2 : application aux premiers accélérateurs linéaires de particules, Van de Graaff et Linac (1935-1950)

Jean-Marie Malherbe

Astronome émérite, Observatoire de Paris, PSL Research University, France
Email: Jean-Marie.Malherbe@obspm.fr; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4180-3729>
18 Novembre 2025

RESUME

Nous avons présenté dans un précédent article (<https://cnrs.hal.science/hal-05329933v1>) quel fut l'usage des rayons (particules) cosmiques en tant qu'outil de physique nucléaire jusqu'en 1955, ayant permis d'étudier grâce aux chambres de Wilson plongées dans un champ magnétique, les particules produites par collision ou désintégration atmosphérique. Nous abordons dans cette seconde partie de niveau L2 les mouvements relativistes des particules chargées dans un champ électrique avec application aux premiers accélérateurs linéaires apparus au même moment (Van de Graaff, Linac), mais de moindre énergie que les cosmiques, développés avant la création des grandes installations internationales telles celles du CERN après 1955 (non abordées ici).

MOTS CLEF

Particules chargées, mouvement rectiligne, relativité, champ électrique, Van de Graaff, Linac

I - INTRODUCTION

Avant l'avènement vers 1960 des grands accélérateurs tels ceux du CERN à Genève, les chercheurs disposaient, comme outil collisionneur, des gerbes de particules cosmiques, de faible flux mais comprenant des particules de haute énergie (partie 1, <https://cnrs.hal.science/hal-05329933v1>); en parallèle, les premiers accélérateurs linéaires créant un champ électrique ont fait leur apparition dans les laboratoires. Nous allons commencer par quelques rappels issus de la première partie.

En mécanique relativiste, on définit pour une particule de masse m et de vitesse vectorielle \mathbf{v} l'impulsion $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$ où $\gamma = 1 / (1 - v^2/C^2)^{1/2}$ est le facteur de Lorentz, c'est une fonction dépendant de $\beta = v/C$, v étant le module de \mathbf{v} et C la vitesse de la lumière dans le vide ($C = 3 \cdot 10^8$ m/s). γ varie de 1 ($v = 0$) à l'infini lorsque v tend vers C . L'impulsion \mathbf{p} tend ainsi vers l'infini lorsque v tend vers C . L'énergie de la particule, somme de son énergie cinétique et de son énergie de repos mC^2 , est donnée par : $\mathcal{E} = \gamma m C^2$, variant de mC^2 (repos) à l'infini lorsque v tend vers C . L'énergie cinétique est $\mathcal{E}_c = (\gamma - 1) m C^2$, on montre également que $\mathcal{E}^2 = \mathbf{p}^2 C^2 + m^2 C^4$.

En mécanique classique, on a $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$ et $\mathcal{E}_c = 1/2 m v^2$ (énergie cinétique). L'erreur sur \mathbf{p} entre les deux approches n'excède pas 1% lorsque $v < 0.14 C$ et ne dépasse pas 10% lorsque $v < 0.44 C$. La mécanique classique donnera donc de bons résultats même pour une fraction appréciable de la vitesse de la lumière.

II – MOUVEMENT RECTILIGNE DANS UN CHAMP ELECTRIQUE CONSTANT

Nous supposons que le champ électrique \mathbf{E} uniforme et constant est orienté selon l'axe Ox , de module E . En $t = 0$, la particule est en $x = x_0$ avec une vitesse initiale \mathbf{v}_0 selon Ox . Le problème obéit à la relation fondamentale de la dynamique :

$$d\mathbf{p}/dt = q \mathbf{E}, \text{ d'où } \mathbf{p}(t) = q \mathbf{E} t + \mathbf{p}_0 \text{ avec } \mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} \text{ et } \mathbf{p}_0 = \gamma_0 m \mathbf{v}_0$$

On sait aussi que $\mathcal{E}^2 = p^2 C^2 + m^2 C^4$ et, en $t = 0$, que $\mathcal{E}_0^2 = p_0^2 C^2 + m^2 C^4$

D'où l'on tire l'énergie de la particule par soustraction des deux relations :

$$\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}_0^2 + (p^2 - p_0^2) C^2 = \mathcal{E}_0^2 + (q^2 E^2 t^2 + 2 p_0 q E t) C^2 = \gamma^2 m^2 C^4, \text{ énergie qui augmente indéfiniment ;}$$

on en déduit que $1/\gamma^2 = m^2 C^2 / [\gamma_0^2 m^2 C^2 + q^2 E^2 t^2 + 2 p_0 q E t]$

$$\text{Or, } p = \gamma m v = q E t + p_0$$

$$\text{D'où } v/C = (q E t + \gamma_0 m v_0) / [\gamma_0^2 m^2 C^2 + q^2 E^2 t^2 + 2 \gamma_0 m v_0 q E t]^{1/2}$$

En posant $\tau = m C / q E$ constante de temps, il vient :

$$v/C = (t/\tau + \gamma_0 v_0/C) / [\gamma_0^2 + (t/\tau)^2 + 2 \gamma_0 (v_0/C) (t/\tau)]^{1/2} \quad (\text{Figure 1})$$

Lorsque $t = 0$, $v = v_0$, et lorsque t tend vers l'infini, v tend vers C . Dans le cas classique, on aurait simplement $v = v_0 + (q E/m) t$, croissant indéfiniment, ou encore $v/C = t/\tau + v_0/C$. Le temps caractéristique τ , pour une même charge et un même champ, est dans le rapport des masses des particules. Ainsi, τ sera 1836 fois plus long pour le proton que pour l'électron. En partant d'une vitesse initiale nulle, on a $v/C = (t/\tau) / [1 + (t/\tau)^2]^{1/2}$. On atteint dans ce cas la moitié de la vitesse de la lumière pour $t = \tau/\sqrt{3} \approx 0.577 \tau$. Avec une vitesse initiale nulle, le proton mettra 1836 fois plus de temps que l'électron à atteindre $0.5 C$.

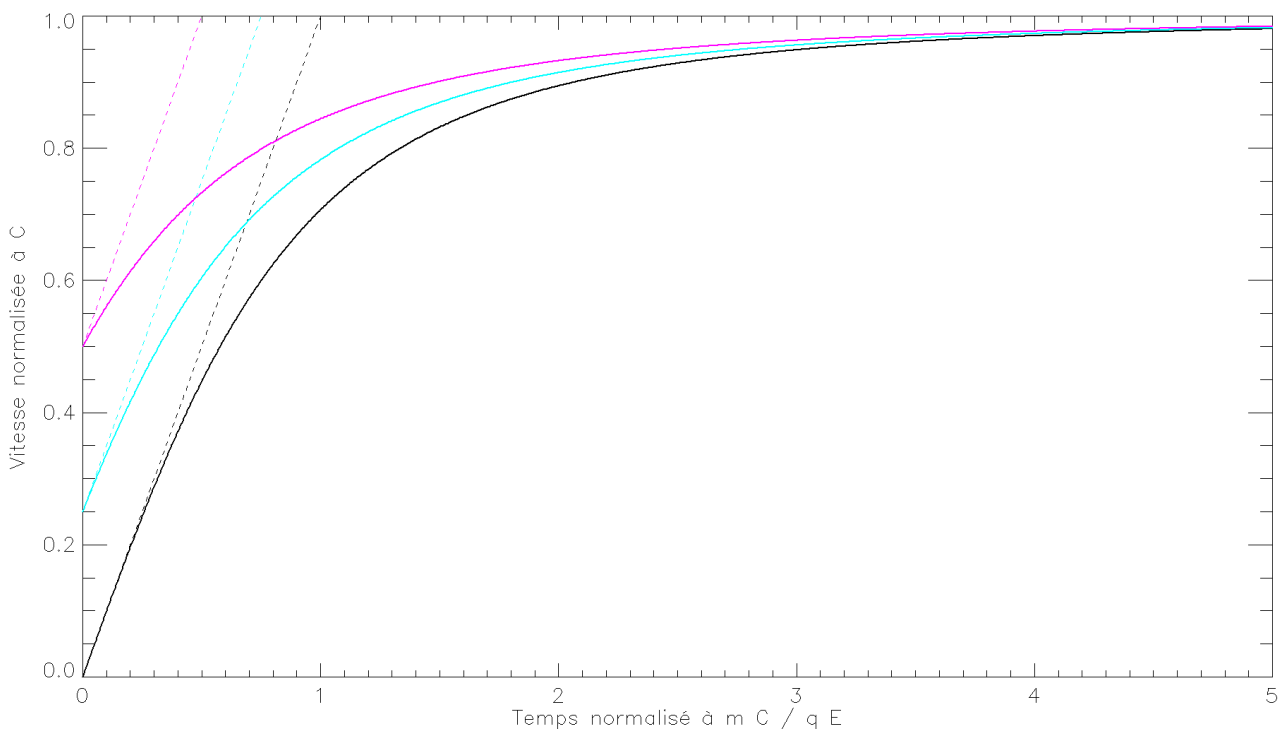


Figure 1 : vitesse normalisée v/C en fonction du temps normalisé t/τ pour $v_0/C = 0.0, 0.25, 0.5$ (en pointillé le résultat de la mécanique classique valable si $v/C \ll 1$)

$$\text{On peut écrire : } v(t) = (C / 2 q E) (2 q^2 E^2 t + 2 \gamma_0 m v_0 q E) / [\gamma_0^2 m^2 C^2 + q^2 E^2 t^2 + 2 \gamma_0 m v_0 q E t]^{1/2}$$

Cette équation (du type $u'/2\gamma u$) s'intègre aisément (en donnant γu) et l'on obtient :

$$x(t) = x_0 + (C / q E) [(\gamma_0^2 m^2 C^2 + q^2 E^2 t^2 + 2 \gamma_0 m v_0 q E t)^{1/2} - \gamma_0 m C]$$

$$\text{soit finalement } x(t) = x_0 + C [(\gamma_0^2 m^2 C^2 / q^2 E^2 + t^2 + 2 \gamma_0 m v_0 t / q E)^{1/2} - \gamma_0 m C / q E]$$

et en introduisant le temps caractéristique $\tau = m C / q E$, il vient :

$$x(t) = x_0 + C \tau [(\gamma_0^2 + (t/\tau)^2 + 2 \gamma_0 (v_0/C) (t/\tau))^{1/2} - \gamma_0] \quad (\text{Figure 2})$$

ou $L = C \tau$ apparaît comme une longueur caractéristique, 1836 fois plus longue pour le proton que pour l'électron à champ électrique égal.

En $t = 0$, $x = x_0$ et lorsque t tend vers l'infini, $x(t)$ tend vers une fonction affine asymptotique, soit :

$$x(t) \rightarrow x_0 + C t - \gamma_0 m C^2 / q E, \text{ qui s'écrit aussi en temps normalisé :}$$

$$x(t) \rightarrow x_0 + L (t/\tau - \gamma_0)$$

En mécanique classique, on aurait eu $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} (q E/m) t^2$, qui s'énonce aussi :

$$x(t) = x_0 + L [(v_0/C) (t/\tau) + \frac{1}{2} (t/\tau)^2]$$

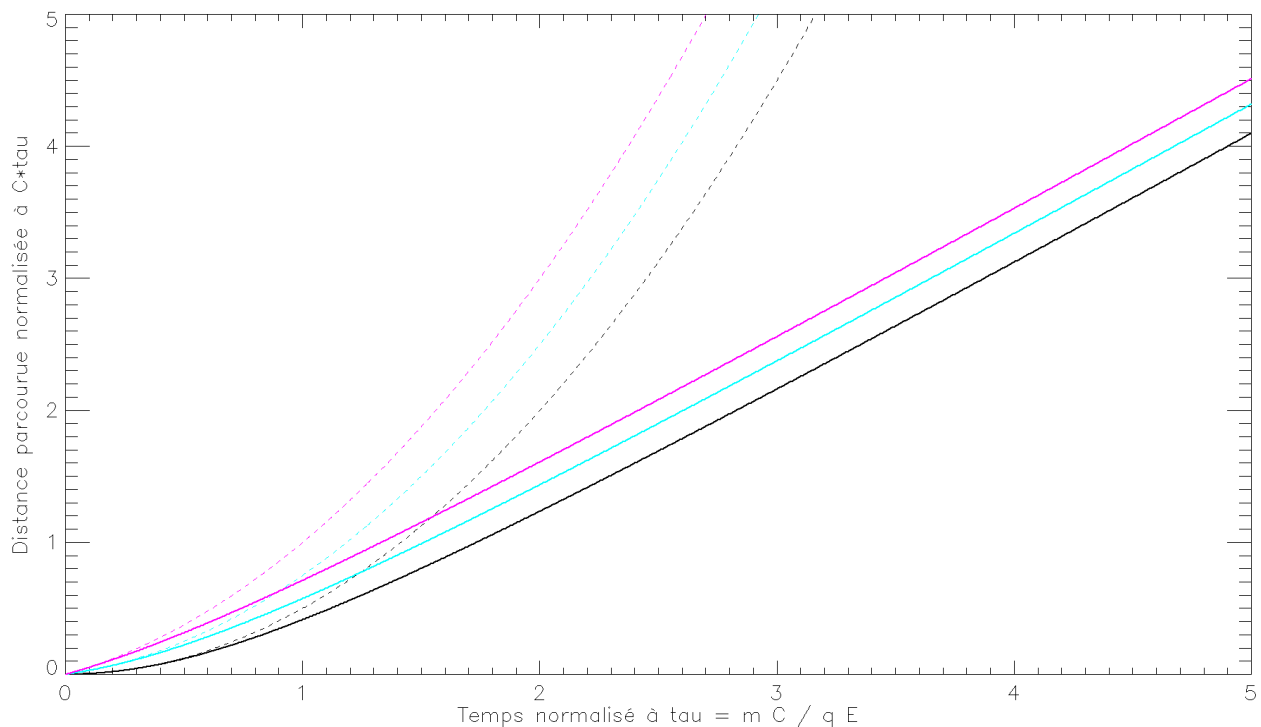


Figure 2 : distance normalisée à $L = C \tau$ en fonction du temps normalisé t/τ pour $v_0/C = 0.0, 0.25, 0.5$ (en pointillé le résultat de la mécanique classique valable tant que $v/C \ll 1$)

III – MOUVEMENT RECTILIGNE DANS UN CHAMP ELECTRIQUE VARIABLE

Nous supposons que le champ électrique \mathbf{E} est orienté selon l'axe Ox , de valeur algébrique $E = E_0 \sin(\omega t)$ pour t variant de 0 à $T/2$, $T = 2\pi/\omega$ étant la période des oscillations, de telle sorte que $\sin(\omega t)$ soit positif pour une accélération entre 0 et $T/2$ avec $E_0 > 0$ et $q > 0$. Le calcul serait similaire pour $q < 0$ en prenant $E_0 < 0$. Une variation sinusoïdale du temps modélise le champ électrique d'une onde stationnaire dans une cavité. En $t = 0$, la particule est en $x = x_0$ avec une vitesse initiale v_0 selon Ox . Le problème obéit à la relation fondamentale de la dynamique :

$$dp/dt = q E_0 \sin(\omega t)$$

$$d'où p(t) = (q E_0/\omega) [1 - \cos(\omega t)] + p_0 \quad où p_0 = \gamma_0 m v_0$$

Des relations $\mathcal{E}^2 = p^2 C^2 + m^2 C^4$ et, en $t = 0$, $\mathcal{E}_0^2 = p_0^2 C^2 + m^2 C^4$, on tire :

$$\gamma^2 m^2 C^4 = \gamma_0^2 m^2 C^4 + (q E_0/\omega)^2 C^2 [1 - \cos(\omega t)]^2 + 2 (q E_0/\omega) C^2 \gamma_0 m v_0 [1 - \cos(\omega t)], \text{ soit :}$$

$$\gamma^2 = \gamma_0^2 + (q E_0 / m C \omega)^2 [1 - \cos(\omega t)]^2 + 2 (q E_0 / m C \omega) \gamma_0 (v_0 / C) [1 - \cos(\omega t)] = 1 / (1 - v^2 / C^2)$$

Cette relation permet de déterminer $v(t)$. En posant $\tau = m C / q E$ constante de temps, on peut écrire :

$$\underline{q E_0 / m C \omega = T / (2\pi \tau) = \alpha} \text{ constante sans dimension, qui donne une expression simplifiée :}$$

$$\gamma^2 = \gamma_0^2 + \alpha^2 [1 - \cos(t / \alpha \tau)]^2 + 2 \alpha \gamma_0 (v_0 / C) [1 - \cos(t / \alpha \tau)], \text{ d'où } v/C(t) = (\gamma^2 - 1)^{1/2} / \gamma$$

On a tracé $v(t)$ sur la [figure 3](#) et l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c(t) = (\gamma - 1) m C^2$ sur la [figure 4](#) pour t/τ variant de 0 à $T / (2\tau)$.

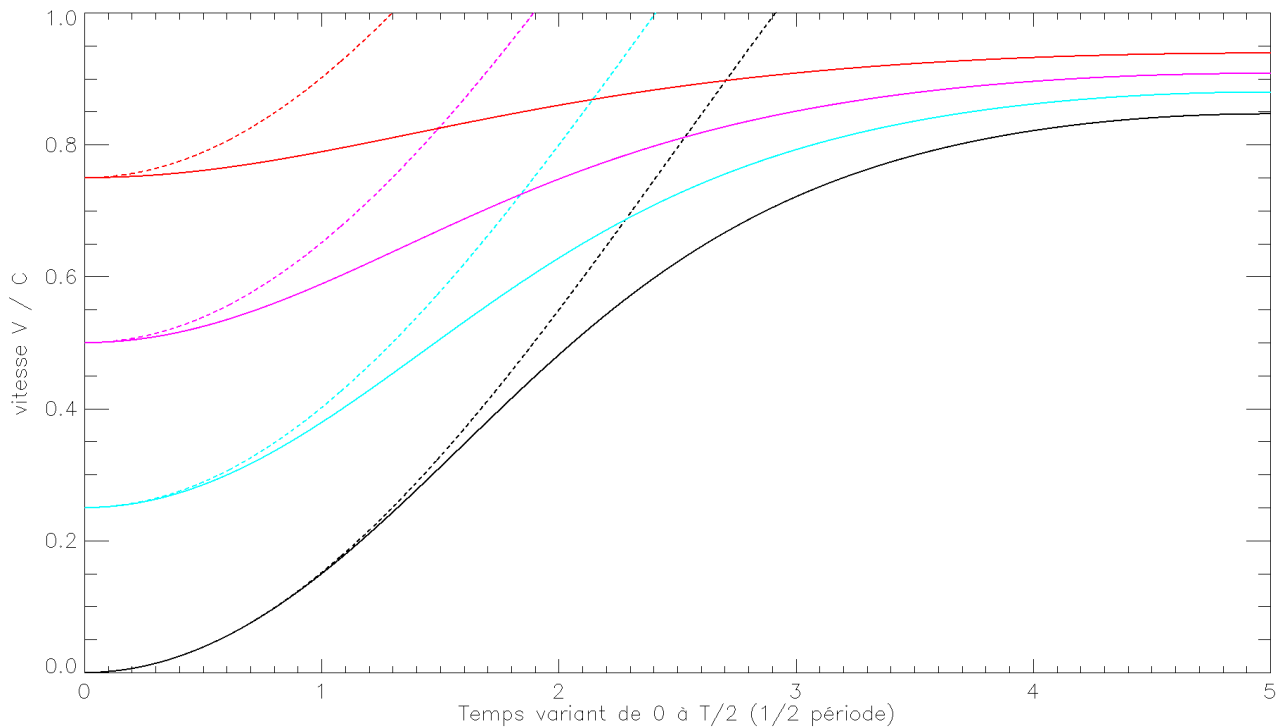


Figure 3 : vitesse normalisée v/C en fonction du temps normalisé t/τ pour $v_0/C = 0.0, 0.25, 0.5, 0.75$ pour t/τ variant de 0 à $T/2\tau$ (en pointillé le résultat de la mécanique classique valable si $v/C \ll 1$)

La distance parcourue $x(t)$ s'obtient par intégration numérique de l'équation :

$$dx/dt = v(t), \text{ ou en quantités normalisées, } d(x/L)/d(t/\tau) = v/C \text{ (figure 5)}$$

dans laquelle $L = C \tau$ est une longueur caractéristique. En mécanique classique, on aurait eu :

$$v(t) = (q E_0/m\omega) [1 - \cos(\omega t)] + v_0$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + (q E_0/m\omega) [t - \sin(\omega t)/\omega]$$

soit en quantités normalisées avec $\alpha = qE_0 / mC\omega = T / (2\pi\tau)$ et $L = C\tau$:

$$v/C = \alpha [1 - \cos(t / \alpha\tau)] + v_0/C \text{ et } (x(t) - x_0) / L = (v_0/C) (t/\tau) + \alpha [(t/\tau) - \alpha \sin(t / \alpha\tau)]$$

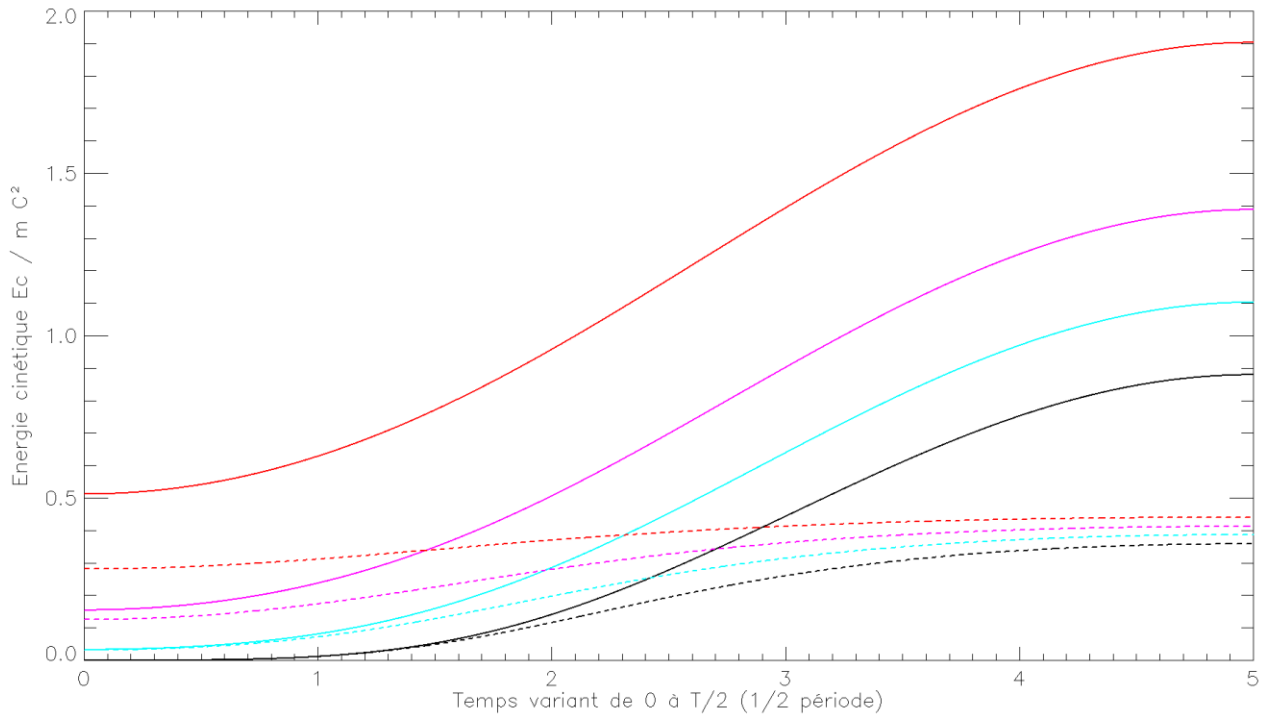


Figure 4 : énergie cinétique normalisée à mC^2 en fonction du temps normalisé t/τ pour $v_0/C = 0.0, 0.25, 0.5, 0.75$ et pour t/τ variant de 0 à $T/2\tau$ (en pointillé le résultat de la mécanique classique)

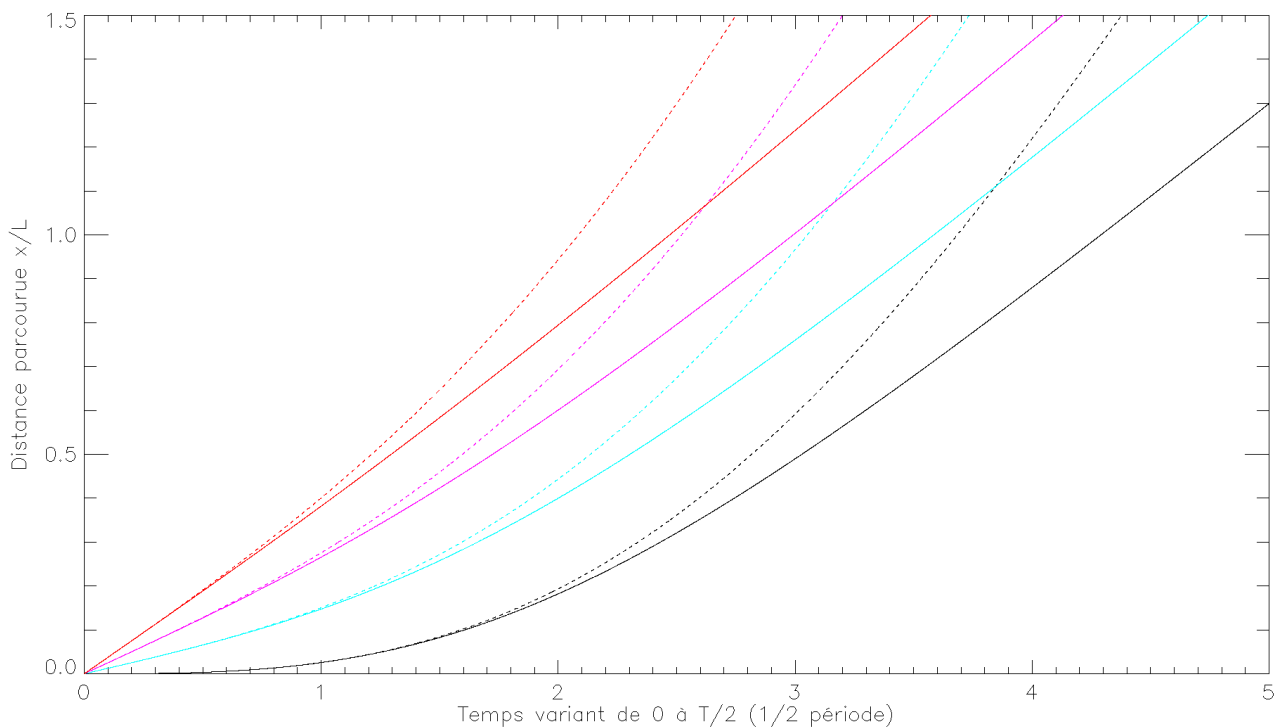


Figure 5 : distance parcourue normalisée à $L = C\tau$ en fonction du temps normalisé t/τ pour $v_0/C = 0.0, 0.25, 0.5, 0.75$ et pour t/τ variant de 0 à $T/2\tau$ (en pointillé le résultat de la mécanique classique)

La figure 6 permet de comparer sur une demi période entre $t = 0$ et $T/2 = \pi/\omega$ l'efficacité de l'accélération par un champ constant (traits pointillés) ou variable en $\sin(\omega t)$ (trait continu) ; la valeur moyenne du sinus étant égale à $2/\pi = 0.64$ sur ce laps de temps.

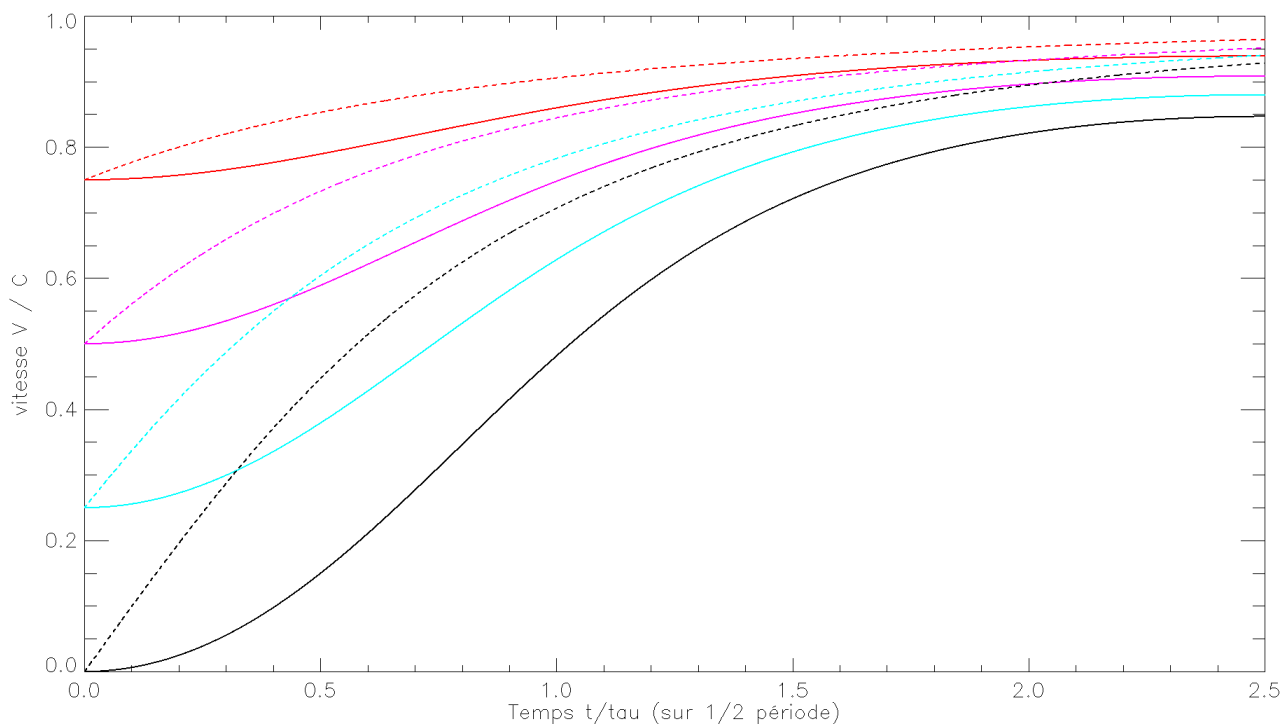


Figure 6 : vitesse v/C en fonction du temps normalisé t/τ pour $v_0/C = 0.0, 0.25, 0.5, 0.75$ et pour t/τ variant de 0 à $T/2$ pour un champ électrique en $\sin(\omega t)$ (trait continu) ou constant (trait pointillé)

IV – IMPULSION PAR UNE DIFFERENCE DE POTENTIEL ENTRE DEUX ELECTRODES

Une particule peut être accélérée entre deux électrodes aux potentiels V_0 et V_1 . La conservation de l'énergie implique alors :

$$\mathcal{E}_0 + q V_0 = \mathcal{E}_1 + q V_1$$

$$\text{ou bien } \gamma_0 m C^2 + q V_0 = \gamma_1 m C^2 + q V_1$$

$$1/(1-v_1^2/C^2)^{1/2} = 1/(1-v_0^2/C^2)^{1/2} + q (V_0 - V_1) / mC^2$$

Posons $\Delta V = V_0 - V_1$ positif pour une accélération si $q > 0$, ou négatif si $q < 0$:

$$\text{On a } 1/(1-v_1^2/C^2)^{1/2} = 1/(1-v_0^2/C^2)^{1/2} + q \Delta V / mC^2$$

En mécanique classique, on a simplement $\frac{1}{2} m v_1^2 + q V_1 = \frac{1}{2} m v_0^2 + q V_0$, formule qui ne convient que pour les particules non relativistes ($v/C \ll 1$).

La [figure 7](#) donne v_1/C pour l'électron et le proton en supposant $v_0 = 0$ selon la valeur du potentiel accélérateur ΔV . L'électron est relativiste pour une tension modérée (quelques dizaines de KV), ce n'est pas le cas pour le proton qui nécessite des tensions très élevées (quelques dizaines de MV).

Pour éviter d'avoir à gérer des tensions trop fortes, l'accélération peut se faire en utilisant N étages (N grand) avec $\mathcal{E}_n + q V_n = \mathcal{E}_{n-1} + q V_{n-1}$, car à chaque étage on a l'incrément d'énergie $\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E}_n - \mathcal{E}_{n-1} = |q \Delta V|$; c'est ce qui est mis en œuvre dans les accélérateurs linéaires (en alternative au Van de Graaf à un étage), permettant de dépasser les performances de ces derniers (sections suivantes).

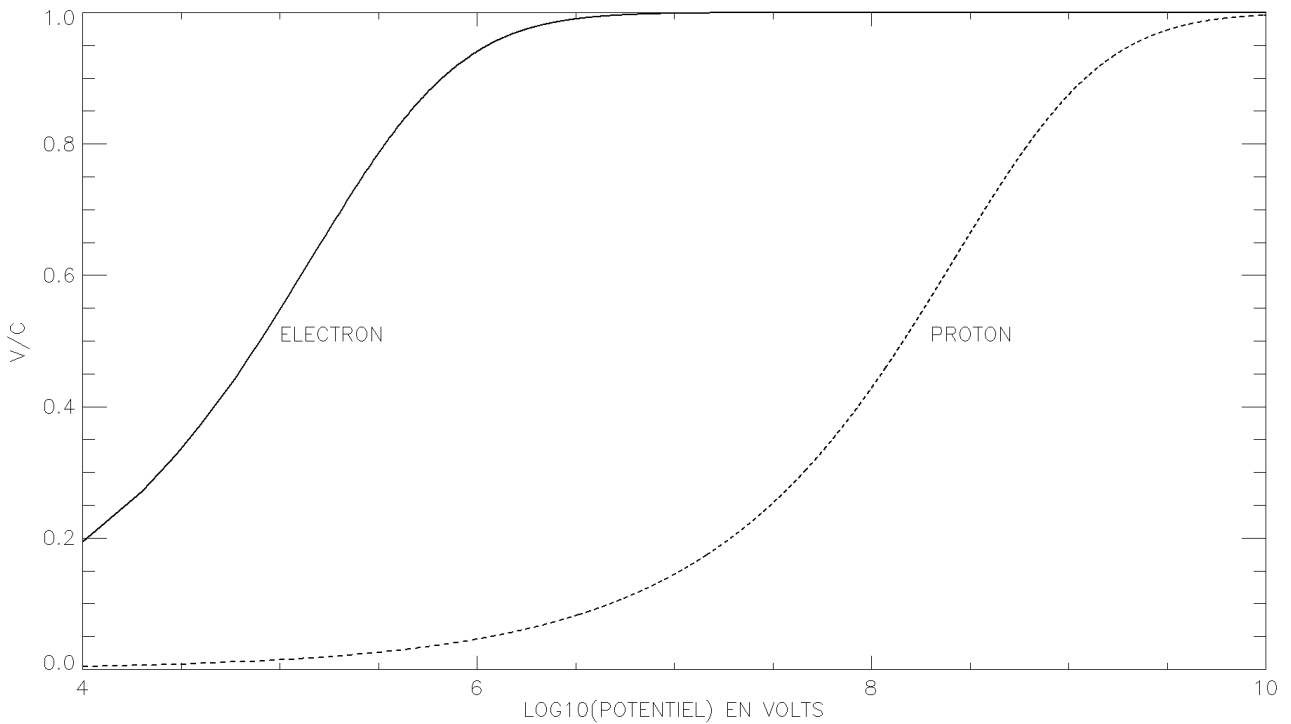


Figure 7 : v/C pour l'électron et le proton en fonction du potentiel accélérateur en échelle LOG (de 10^4 V à 10^{10} V). L'électron est relativiste ($v/C = 0.3$) dès 30000 V environ alors que le proton, 1836 fois plus lourd, ne le devient qu'à partir de plusieurs dizaines de millions de Volts.

V – LE VAN DE GRAEFF

En préambule du générateur et accélérateur de Van de Graaff, qui fabrique une haute tension (millions de Volts) par transport de charges électrostatiques vers des grands condensateurs sphériques de stockage, nous allons présenter la machine historique dont le Van de Graaff s'inspire.

V – 1 - La machine électrostatique de Wimshurst en péambule

C'est une machine (figure 8) qui fait apparaître de hautes tensions par influence ; elle fut inventée en 1883 en Grande Bretagne par le physicien James Wimshurst (1832-1903).

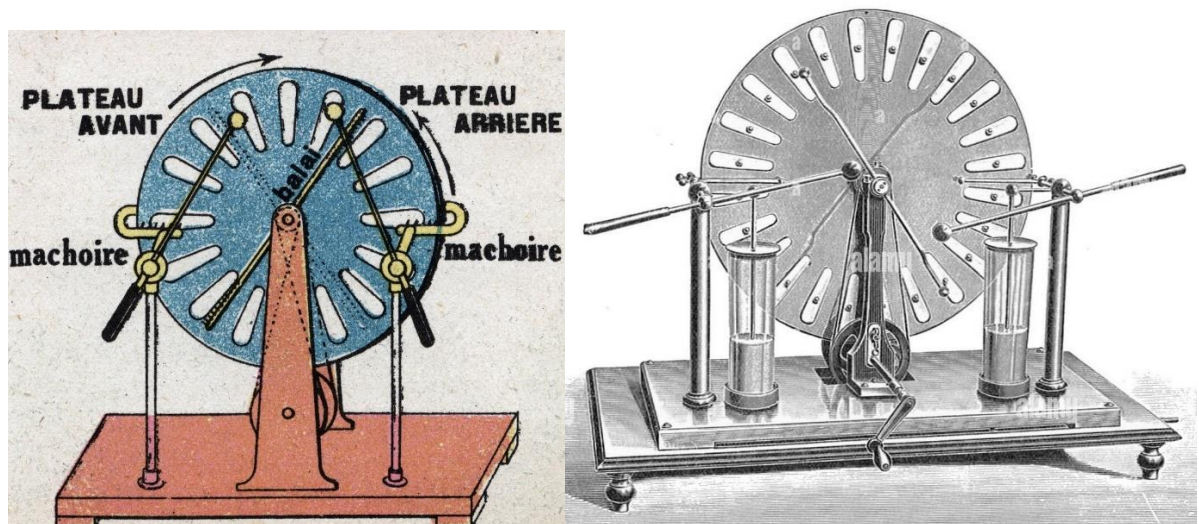


Figure 8 : schémas historiques d'une machine électrostatique centenaire de Wimshurst

Cette machine se compose de deux disques de verre tournant en sens contraire. Des secteurs conducteurs sur lesquels frottent deux balais y sont incrustés. Deux peignes recueillent les charges électriques apparues par influence que l'on dirige vers deux condensateurs de stockage (figure 8 à droite). Lorsque la tension aux bornes des condensateurs excède un seuil critique, l'éclateur composé de deux petites boules conductrices à écartement variable, reliées aux condensateurs, produit un éclair qui ferme le circuit de décharge. Sachant que l'air sec claqué pour un champ électrique E_m supérieur à $3 \cdot 10^6$ V/m (ou moins si humide), la différence de potentiel entre les boules doit être de l'ordre de 10000 V pour un écartement de 1 cm. Plus elles sont écartées, plus la différence de potentiel (qui dépend de la charge q des condensateurs par la relation $q = C V$, C étant la capacité de l'ordre du pF) doit être élevée. Le système électrique équivaut au schéma de la figure 9, les deux disques jouant le rôle de générateur de courant continu tel que $i = dq/dt$.

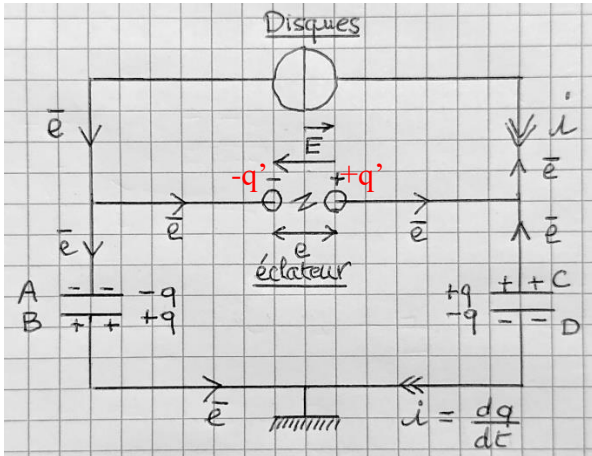


Figure 9 : schéma électrique. Les disques rotatifs constituent un générateur de courant i qui charge les condensateurs jusqu'au moment où le champ électrique entre les deux petites boules de rayon R de l'éclateur excède le seuil E_m . L'éclair ferme alors le circuit de décharge des condensateurs, avec inversion du sens du courant. On appelle $-q'$ et $+q'$ les charges des deux boules de l'éclateur. C est la capacité des condensateurs dont la charge est q ($-q$ et $+q$ sur les électrodes en regard, $q > 0$).

On $V_B - V_A = q/C$ et $V_C - V_D = q/C$ avec $V_B = V_D = 0$ (mise à la terre), d'où $V_A = -q/C$, $V_C = q/C$

Ainsi, les deux boules de l'éclateur sont au potentiel V_A et $V_C = -V_A$ et leurs charges sont $-q' = 4\pi\epsilon_0 R V_A$ et $+q' = 4\pi\epsilon_0 R V_C$ ($4\pi\epsilon_0 R$ est la capacité d'une surface sphérique de rayon R).

Le champ électrique entre les boules distantes de e centre à centre, à la distance r de la charge $-q'$, est selon l'axe Ox dirigé vers la droite : $E = (1/4\pi\epsilon_0) (-q'/r^2 - q'/(e-r)^2) = R V_A (1/r^2 + 1/(e-r)^2)$

Pour $r = e/2$, entre les boules, $E = 8 R V_A / e^2$; posons $e = k R$ ($k > 2$), alors $E = 8 V_A / (k^2 R)$. Il y a claquage lorsque $(8/k^2) |V_A|/R > E_m$. Par exemple, pour $k = 2$ (boules accolées), il faut $|V_A| > \frac{1}{2} R E_m$, et pour $k = 4$, $|V_A| > 2 R E_m$. Plus les boules sont distantes (k grand) et plus $|V_A|$ doit être élevé, donc la charge q emmagasinée par les condensateurs. L'ordre de grandeur pour $|V_A|$ va de 10 KV à quelques dizaines de KV selon la distance des sphères et la valeur du champ électrique de claquage.

La décharge se fait selon une constante de temps égale à $RC/2$ (les deux condensateurs sont en série) si cette fois R désigne la résistance du circuit de décharge. Pour $R = 1 \Omega$ et $C = 1$ pF, elle vaudrait environ 10^{-9} s, c'est instantané, comme les décharges atmosphériques de foudre.

V - 2 - Le générateur électrostatique et l'accélérateur de Van de Graaff

La machine électrostatique de Van de Graaff développe largement les concepts de la machine de Wimshurst ; c'est un générateur électrostatique de haute tension (jusqu'à 10 millions de volts) qui a servi à fabriquer les premiers accélérateurs de particules chargées, avant le développement des machines plus puissantes que sont les accélérateurs linéaires multi étages et les accélérateurs circulaires tels le cyclotron et le synchrotron.

La machine de Van de Graaff est constituée d'une sphère métallique creuse et conductrice qui est supportée par une colonne creuse et isolante. On charge la sphère de rayon R par frottement à

l'aide d'une courroie et de peignes (positivement ou négativement). C'est Robert Van de Graaff (1901-1967) qui a conçu le premier appareil aux USA en 1930 et par la suite d'autres beaucoup plus grands comme les deux générateurs de Round Hill, l'un à charge positive, l'autre négative, dont le diamètre des sphères atteignait 4.6 m (figures 10, 11). Le champ électrique en surface des sphères est relié à leur potentiel V par la relation $E(R) = V / R$, et sachant que $E(R)$ ne peut excéder le seuil de claquage E_m , la valeur maximale du potentiel V admissible est proportionnelle à R par la relation $V_{\max} \equiv R E_m$. C'est ce qui explique le gigantisme des générateurs de Van de Graaf de l'époque, qui pour être utilisés en accélérateurs efficaces, doivent produire la plus haute tension possible.

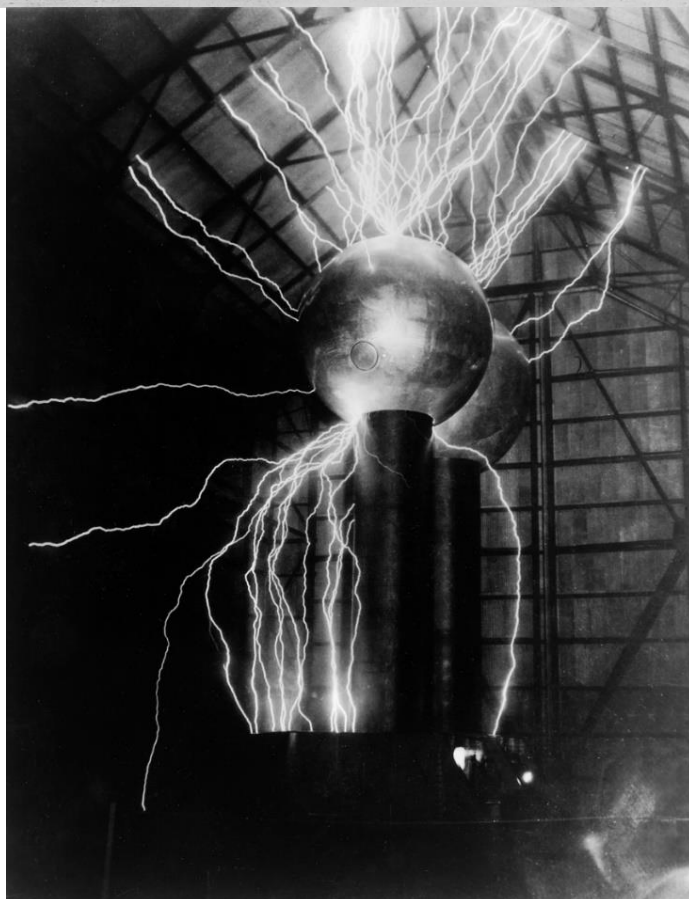
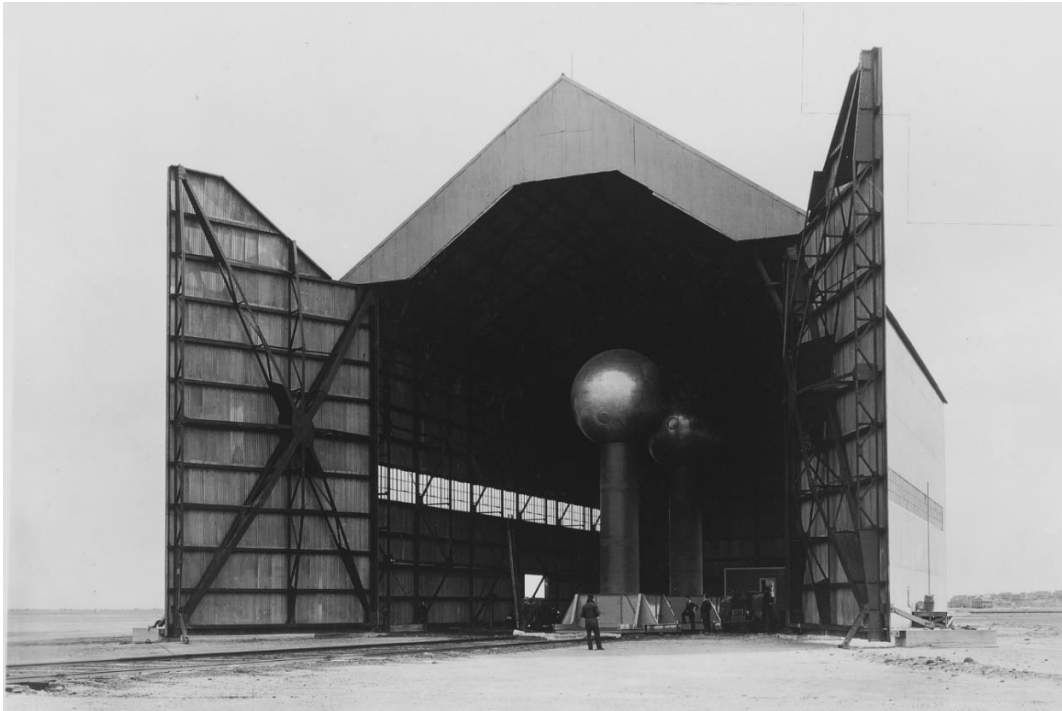


Figure 10 : double générateur géant de Van de Graaff situé à Round Hill (MIT, USA) avec une sphère à charge positive de 4.6 m de diamètre et une autre négative de même taille, installé dans un ancien hangar à ballons dirigeables. La tension entre les sphères dépassait plusieurs millions de Volts. Un tunnel sous vide entre les deux permettait d'accélérer des particules (figure 11).

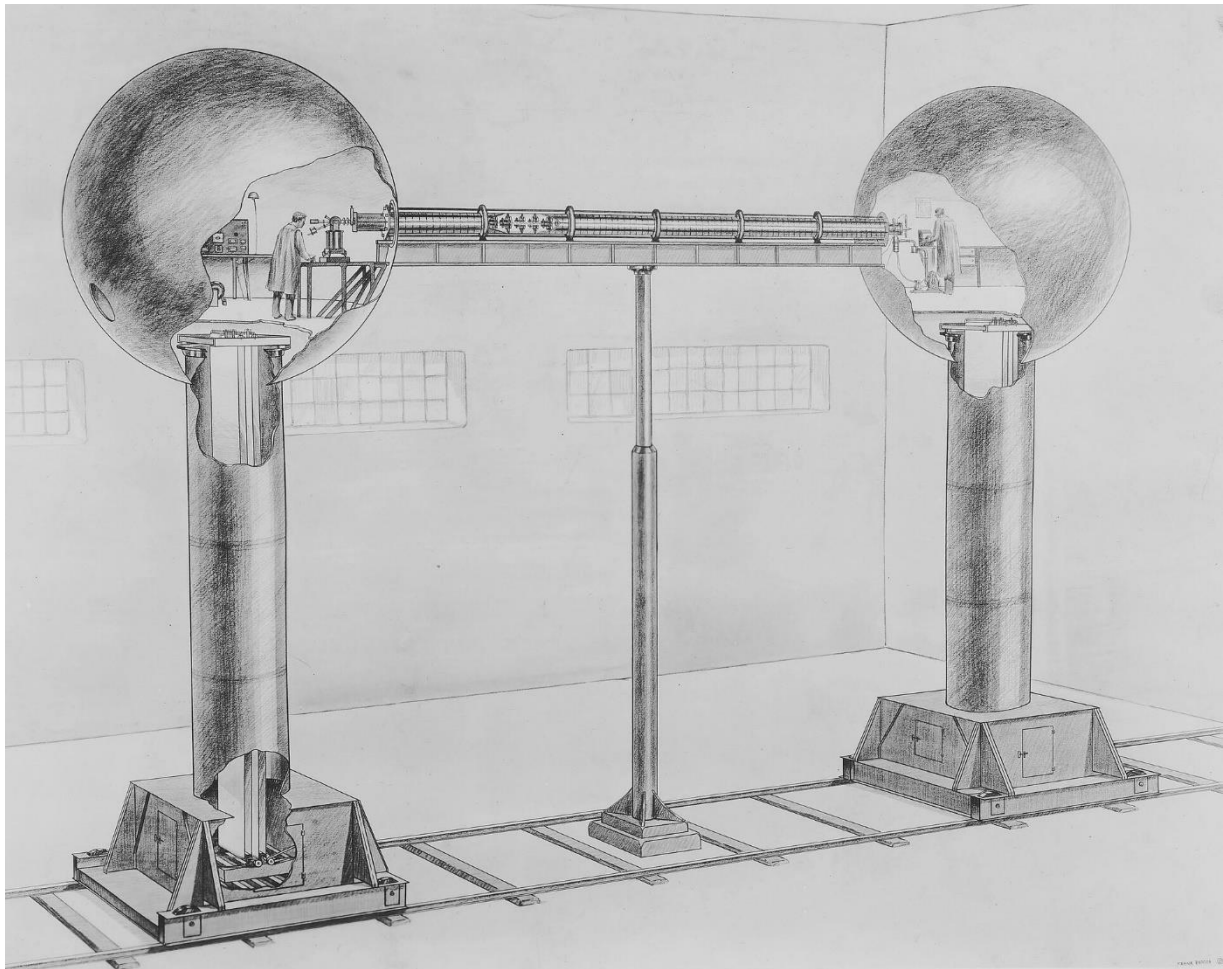


Figure 11 : coupe du double générateur géant de Van de Graaff de Round Hill (MIT, USA). Entre les deux sphères de charges opposées et de 4.6 m de diamètre, doublant ainsi la différence de potentiel entre chacune et le sol (2 x 5 millions de Volts), un tunnel accélérateur a été aménagé.

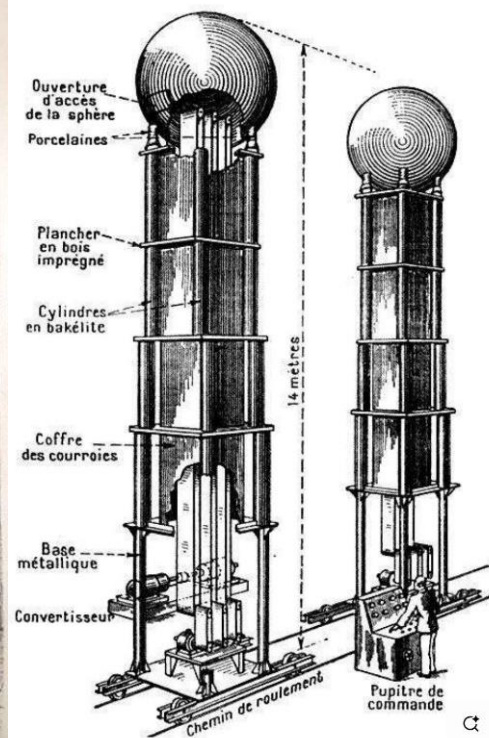
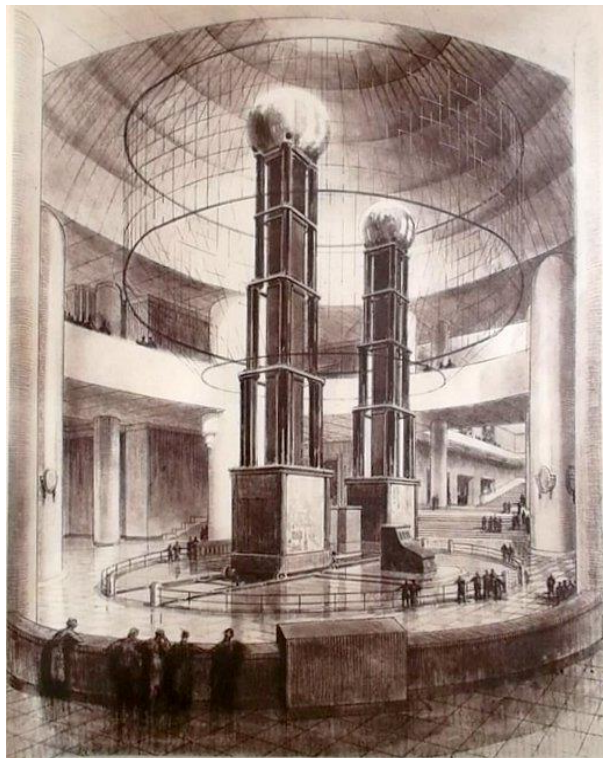


Figure 12 : double générateur de Van de Graaff installé par André Lazard en 1937 au Palais de la Découverte avec deux sphères de 3 m de diamètre

Le Palais de la Découverte à Paris a abrité une machine Van de Graaff dès 1937 ; elle disposait aussi de deux sphères de 3.0 m de diamètre de charges opposées (figures 12 et 13).

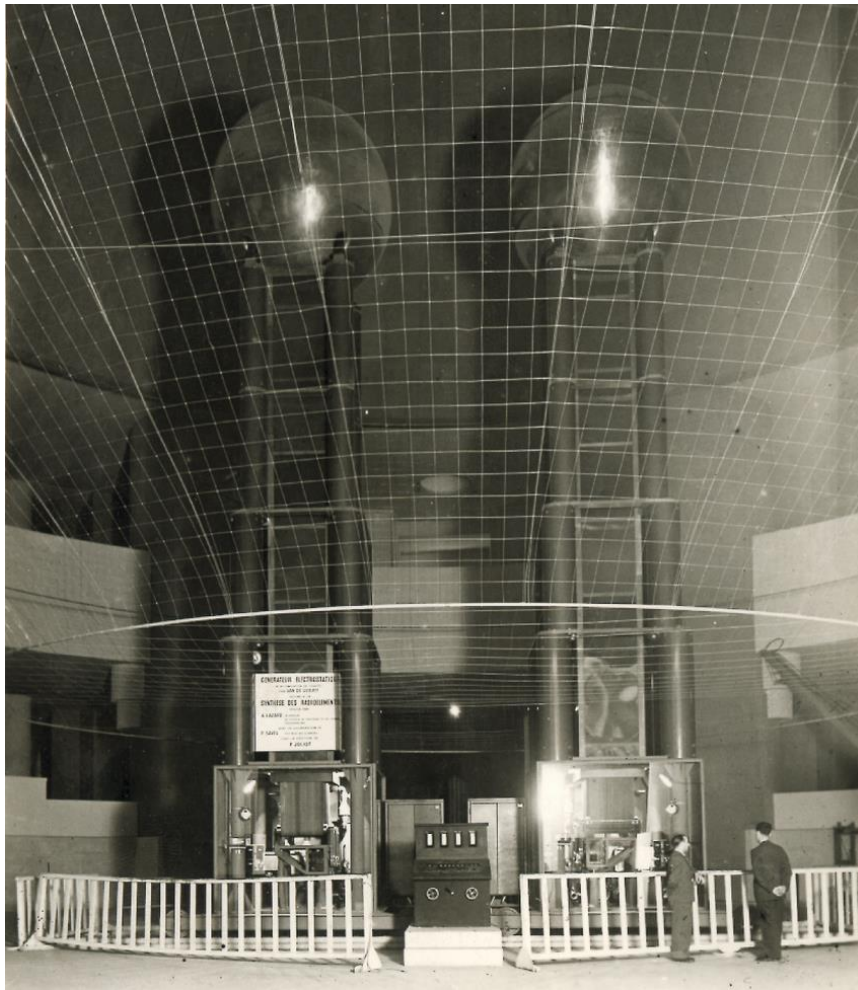


Figure 13 : double générateur de Van de Graaff installé en 1937 au Palais de la Découverte

Le principe du Van de Graaff est explicité ci-dessous sur la figure 14. La sphère de rayon R chargée au potentiel V porte une charge Q telle que $V = Q/(4\pi\epsilon_0R)$, elle constitue ainsi un condensateur de capacité $C = 4\pi\epsilon_0R$. Le champ électrique à la surface de la sphère est $E(R) = V/R$ et la densité surfacique de charge σ est telle que $Q = 4\pi R^2\sigma$; la charge est apportée par la courroie et déposée sur la sphère par un peigne. La tension V peut au plus monter à 10 millions de volts. L'intérieur de la sphère constitue un volume équipotentiel constituant une cage de Faraday ; en conséquence, le champ électrique est nul à l'intérieur et un expérimentateur peut y prendre place et y travailler avec des appareils raccordés au potentiel de la sphère.

En revanche, la différence de potentiel avec l'environnement extérieur l'entoure d'un champ électrique puissant $E(r) = Q/(4\pi\epsilon_0r^2)$. En surface, $E(R) = V/R$ peut provoquer le claquage de l'air (création d'un canal ionisé conducteur portant un arc électrique) s'il excède une valeur critique E_m ($3 \cdot 10^6$ V/m pour de l'air sec, trois fois moins pour de l'air humide). Le choix de la sphère s'explique par le fait qu'il faut éviter toute pointe ou aspérité. En effet, le champ électrique à la surface d'un conducteur porté au potentiel V est inversement proportionnel au rayon de courbure local ; plus celui-ci est petit, et plus E est grand (pouvoir des pointes, un rayon de 1 mm donne un champ de 10^6 V/m pour un potentiel de 1000 V) ; inversement, plus le rayon R est grand, plus $E(R)$ est petit ; sachant que l'on doit avoir $V/R < E_m$, on a $V_m = R E_m$, le potentiel maximum admissible et utile pour l'accélération de particules sera donc d'autant plus grand que R le sera. Pour transformer le générateur en accélérateur, on place un tube à vide (figure 15) entre la sphère au potentiel V et le sol au potentiel

0. Si $V > 0$, le champ électrique E est dirigé vers le bas, on accélère des ions positifs, et inversement si $V < 0$. Le mouvement des particules est celui décrit par les équations données dans la section II. Disposer de deux sphères de charges opposées permet de doubler le potentiel en plaçant un tube à vide entre elles (figure 11).

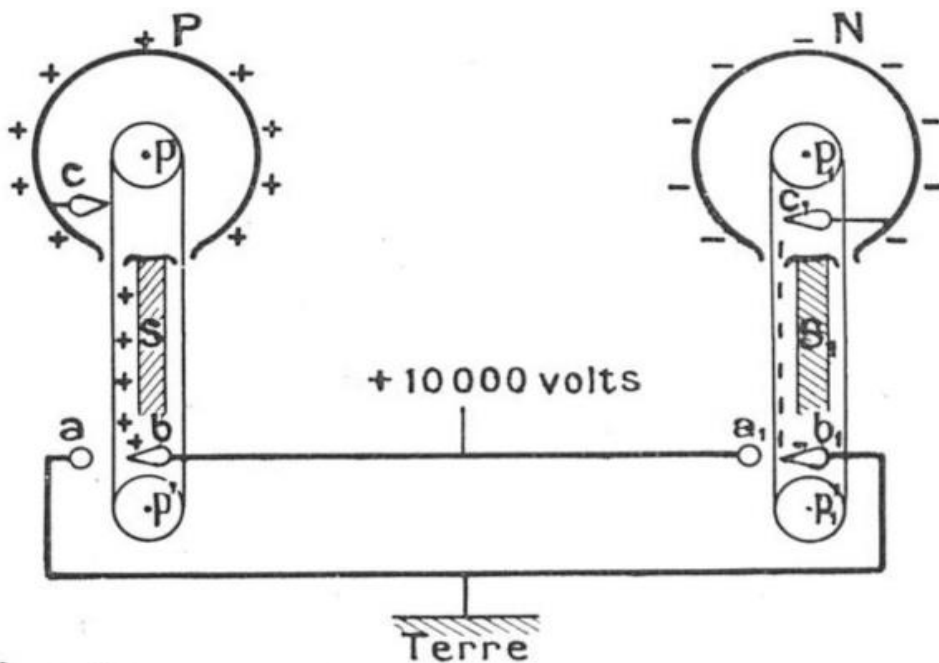


FIG. 2. — VOICI COMMENT ON REND « CONTINUE » LA CHARGE ÉLECTRIQUE DE DEUX SPHÈRES MÉTALLIQUES P et N, sphères métalliques creuses supportées par des colonnes isolantes $S S_1$; $p p'$, $p_1 p'_1$, poulies sur lesquelles passent des courroies de soie apportant l'électricité aux sphères P et N, grâce aux peignes métalliques $C C_1$. Ces courroies sont elles-mêmes électrisées par un courant provenant d'un transformateur à 10.000 volts et redressé au moyen de kénotron; ce courant s'écoule par les pointes b et b_1 .

Figure 14 : principe du générateur de Van de Graaff expliqué dans un vieux numéro de « la sciences et la vie », en archive au CNUM/CNAM

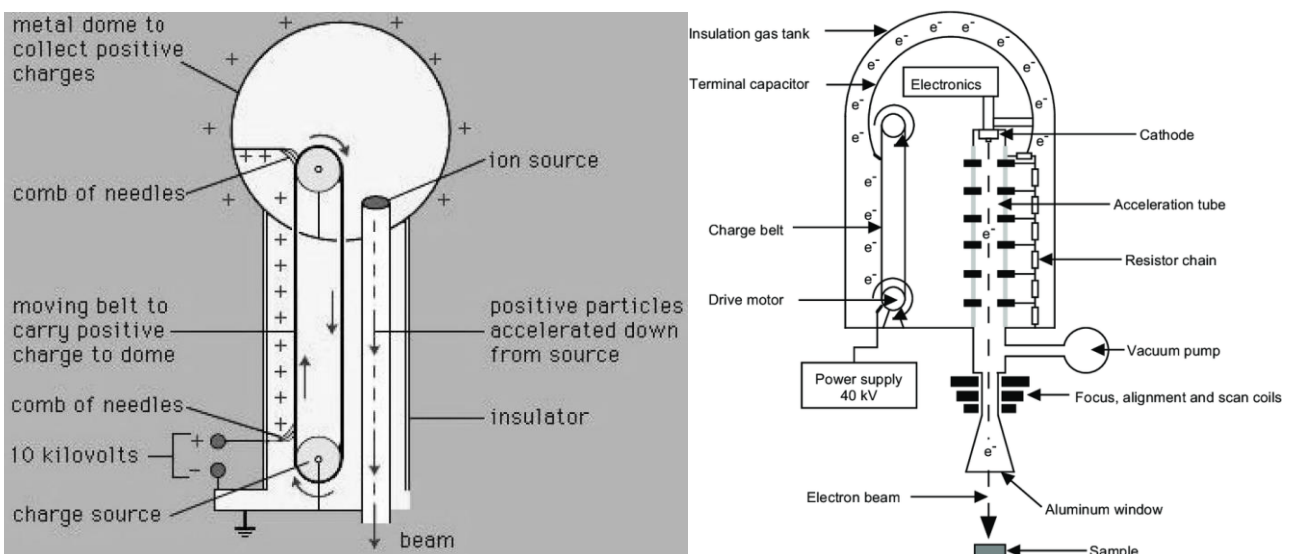


Figure 15 : principe du générateur de Van de Graaff utilisé en accélérateur de particules chargées positives ou négatives (tube d'accélération sous vide de la sphère vers le sol)

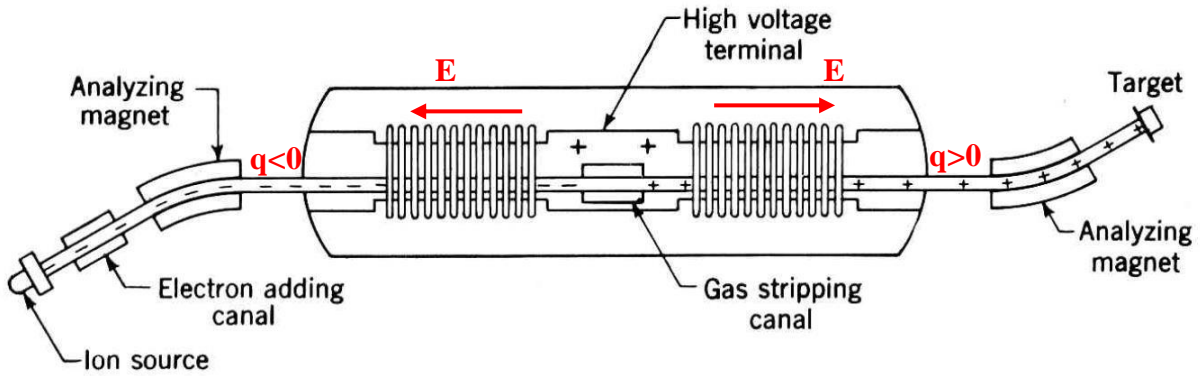


Figure 16 : principe du générateur de Van de Graaff tandem à deux accélérations successives, les ions sont accélérés de la source (à gauche) vers la cible (à droite). La partie gauche du tandem accélère des ions négatifs (par adjonction d'électrons si la source produit des ions positifs) et la partie droite accélère des ions positifs (par retrait d'électrons s'ils y entrent négatifs)

Le Van de Graaf à deux sphères opposées avait comme inconvénient d'avoir la source de particules et la cible à des potentiels très élevés et opposés. Cet inconvénient fut résolu par le Van de Graaff tandem (figure 16) dans lequel la source et la cible sont au potentiel zéro. En outre cet appareil fut pressurisé (figure 17) dans le but d'augmenter la rigidité diélectrique (relèvement du champ électrique de claquage) de sorte que les machines les plus performantes purent délivrer de 25 à 30 millions de volts (Orsay, Strasbourg en France). Les ions positifs de la source étaient complétés en électrons et devenaient négatifs avant accélération par un champ électrique dirigé vers la gauche sur la figure 16 ; une fois au potentiel $V > 0$ au centre du tandem, ils redevenaient positifs pour subir une seconde accélération par un champ électrique dirigé vers la droite.



Figure 17 : accélérateur pressurisé de Van de Graaff tandem de l'institut de physique nucléaire d'Orsay

VI – LES PREMIERS ACCELERATEURS LINEAIRES LINAC

L'accélération se fait en utilisant N étages ; à chaque étage on a l'incrément d'énergie $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_n - \mathcal{E}_{n-1} = |q \Delta V|$ ce qui équivaut à un gain final en énergie $\Delta\mathcal{E} = N |q \Delta V|$ où N peut être très grand (des centaines). Le principe de l'accélérateur linéaire à tubes électrodes est donné par la figure 18.

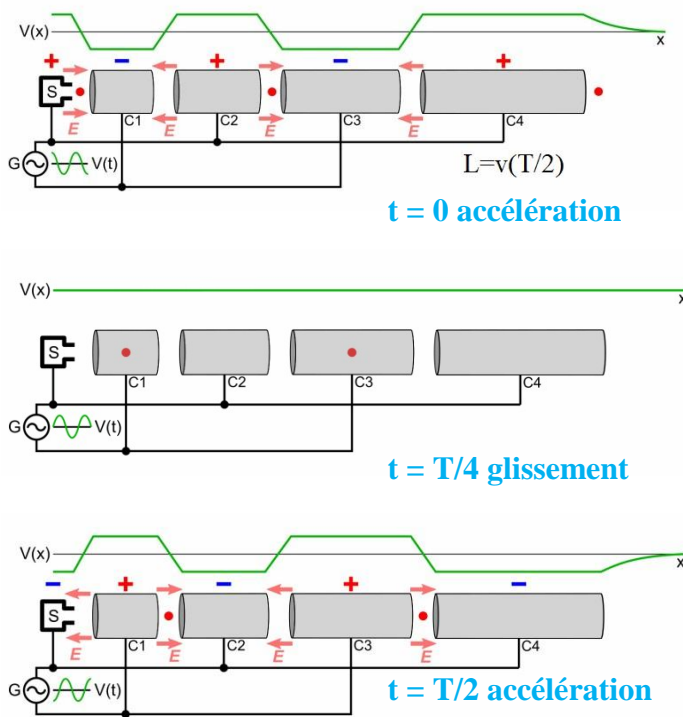


Figure 18 : principe de l'accélérateur linéaire constitué d'une succession de tubes connectés à une source de tension alternative de sorte que les électrodes soient alternativement au potentiel +V, -V, +V, -V, ... Dans les tubes, le potentiel est uniforme de sorte que le champ électrique E y est nul : ce sont donc des tubes de glissement à vitesse constante dont la longueur L est adaptée à la vitesse des particules v par la loi $L = v(T/2)$ où T est la période de la source de tension alternative. L'accélération se fait uniquement entre les tubes toutes les demi périodes lorsque le champ électrique E est dirigé vers la droite dans le cas d'une charge $q > 0$. Crédit Wikimedia Commons.

Les accélérations se produisent dans les espaces entre les tubes conducteurs de glissement, conformément à la théorie développée en section II (champ électrique constant) ou III (champ sinusoïdal de période T), sachant que les tubes sont connectés à une source de tension alternative aux fréquences radio. Dans les tubes-électrodes, la vitesse est constante car le champ électrique y est nul. Avec cette technologie, on peut exploiter des fréquences de 25 Mz (longueur d'onde correspondante de 12 m). Lorsque la vitesse v de la particule approche celle de la lumière, la longueur des tubes atteint $CT/2 = 6$ m. Pour acquérir davantage d'énergie, il faut augmenter le nombre de tubes, donc de « gaps » accélérateurs, mais la longueur totale devient prohibitive ainsi que le rayonnement électromagnétique de cette grande surface conductrice.

L'alternative consiste à monter en fréquence, ce qui permet d'avoir des tubes plus courts. Par exemple, à 200 MHz, la longueur d'onde passe à 1.5 m, et à 2 GHz en hyperfréquences, on n'est plus qu'à 0.15 m de longueur d'onde. On utilise alors des cavités résonantes, les ondes réfléchies sur les extrémités de la cavité conductrice (figure 19) formant des modes d'ondes stationnaires.

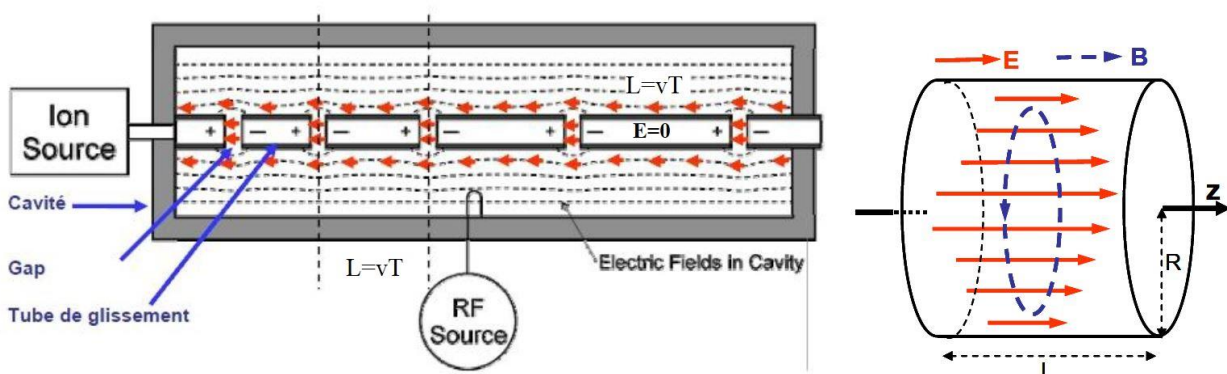


Figure 19 : cavité cylindrique résonante en radio fréquences et en mode transverse magnétique fondamentale TM_{010} à champ électrique axial et champ magnétique orthoradial

Avec certains modes de vibration, comme le mode transverse magnétique fondamental TM010, le champ électrique \mathbf{E} dans la cavité est axial (figure 19) donc accélérateur, tandis que le champ magnétique est orthoradial. Toutefois, \mathbf{E} possède une variation sinusoïdale de période T (onde stationnaire) et est accélérateur une demi période sur deux ; de ce fait, les « gaps » accélérateurs sont séparés d'une distance $L = v T$, v étant la vitesse de la particule (proche de C). Dans les tubes de glissement équipotentiels, le champ électrique est nul, donc la vitesse y est constante. C'est seulement dans les « gaps » que le champ électrique accélère les charges.

D'autres modes transverses magnétiques d'ordre plus élevé existent avec une composante axiale du champ électrique permettant l'accélération ; ils sont présentés en annexe. Nous explicitons ci-dessous le mode fondamental.

Mode fondamental TM010 d'ondes stationnaires

On recherche un champ électrique sous la forme d'une onde stationnaire de la forme $\mathbf{E} = E(r) e^{i\omega t} \mathbf{e}_z$ à symétrie cylindrique, dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) , où z est l'axe de la cavité de rayon R (figure 19). Le champ électrique vérifie les équations de Maxwell :

$$\text{div}(\mathbf{E}) = 0 \text{ et l'équation des ondes } \Delta \mathbf{E} = (1/C^2) \partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2$$

Le long de l'axe Oz , l'équation des ondes s'écrit : $(1/r) \partial(r \partial E / \partial r) / \partial r + (\omega^2 / C^2) E = 0$ où $E(r)$ est l'amplitude de l'onde stationnaire qui ne dépend que de la variable radiale r . En développant, on a :

$$r^2 \partial^2 E / \partial r^2 + r \partial E / \partial r + r^2 (\omega^2 / C^2) E = 0$$

Si l'on pose $u = k r$ où $k = \omega / C$, on reconnaît une équation différentielle de Bessel dont une solution est $E(r) = E_0 J_0(kr)$ où J_0 est la fonction de Bessel d'indice nul (figure 20). Les conditions aux limites sur les parois de la cavité conductrice sont en $r = R$: conservation de la composante tangentielle, donc nullité car le champ est nul à l'intérieur du conducteur.

De ce fait, on doit avoir $J_0(kR) = 0$ qui donne le mode fondamental de la vibration $k R = a_{01}$ où $a_{01} \approx 2.405$ est le premier zéro de la fonction de Bessel J_0 . Comme $k = \omega / C$, le mode fondamental est :

$$\omega = C a_{01} / R \approx 2.405 C / R \text{ et } E(r) = E_0 J_0(a_{01}r / R)$$

Par exemple, pour une cavité de rayon $R = 0.1$ m, on trouve $\omega = 7.2 \cdot 10^9$ rd/s ou une fréquence $\nu = \omega / 2\pi$ de 1.14 GHz (domaine hyperfréquence ou micro-onde). La longueur d'onde associée $\lambda = C / \nu$ vaut 0.26 m.

Le champ magnétique associé est donné par l'équation de Maxwell Faraday $\text{rot}(\mathbf{E}) = - \partial \mathbf{B} / \partial t$, le champ est de la forme $\mathbf{B} = B(r) e^{i\omega t} \mathbf{e}_\theta$; $B(r)$ obéit à l'équation $- i \omega B(r) = - dE(r) / dr$. D'où :

$$B(r) = (E_0 / i\omega) dJ_0(kr) / dr$$

Or il se trouve que la dérivée de $J_0(u)$ vaut $- J_1(u)$, J_1 étant la fonction de Bessel d'indice 1 (figure 20). On en déduit : $B(r) = i (k E_0 / \omega) J_1(kr)$ avec $k = a_{01} / R$,

d'où $B(r) = i E_0 (a_{01} / R\omega) J_1(a_{01}r / R)$ et finalement comme $\omega = C a_{01} / R$:

$$E(r, t) = E_0 J_0(a_{01}r / R) \sin(\omega t) \text{ vibration stationnaire selon } \mathbf{e}_z \text{ (axial)}$$

$$\text{et } B(r, t) = (E_0 / C) J_1(a_{01}r / R) \cos(\omega t) \text{ vibration selon } \mathbf{e}_\theta \text{ (orthoradiale, déphasée de } \pi/2)$$

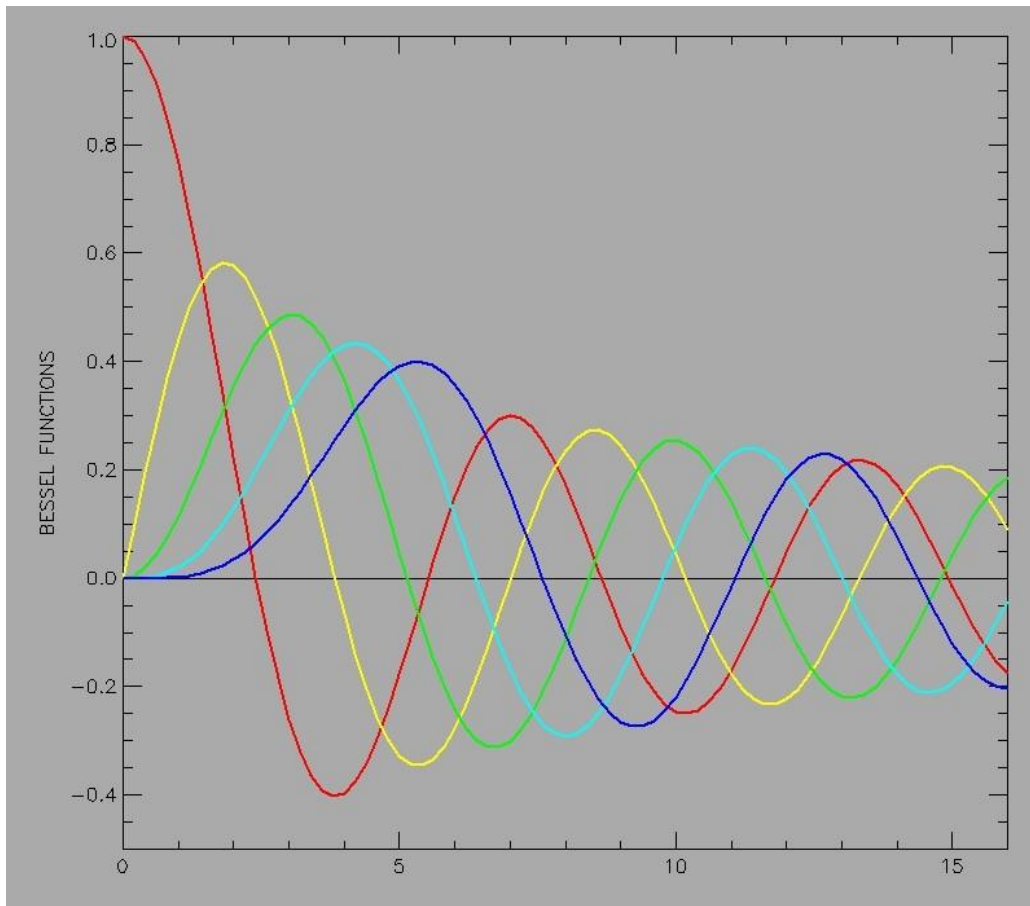


Figure 20 : fonctions de Bessel $J_n(x)$ en fonction de x pour n entier ($n=0$ rouge ; $n=1$ jaune ; $n=2$ vert ; $n=3$ cyan ; $n=4$ bleu). $J_0(0) = 1$, mais $J_n(0) = 0$ pour n strictement positif.

Complément sur les fonctions de Bessel

Les fonctions de Bessel sont solutions de l'équation différentielle :
 $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2) y = 0$, pour n entier positif ou nul

ayant pour solution $J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2^p p! (n+p)!)}$

dont le comportement asymptotique, quand $x \rightarrow \infty$, est $J_n(x) \rightarrow (2 / \pi x)^{1/2} \cos[x - (\pi/2)(n + 1/2)]$

donc quand $x \rightarrow \infty$, $J_0(x) \rightarrow (2 / \pi x)^{1/2} \cos[x - (\pi/4)]$ et $J_1(x) \rightarrow (2 / \pi x)^{1/2} \cos[x - (3\pi/4)]$

A l'origine, quand $x \rightarrow 0$, $J_n(x) \rightarrow (x/2)^n / (n!)$, donc $J_0(x) \rightarrow 1$ et $J_1(x) \rightarrow x/2$

Propriété des fonctions de Bessel : $dJ_n/dx = J_{n-1} - n J_n/x$ et $dJ_n/dx = n J_n/x - J_{n+1}$

Dans le cas particulier où $n = 0$, $dJ_0/dx = -J_1$. Les zéros de J_1 annulent la dérivée de J_0 .

VII - ANNEXE : LE MODE TRANSVERSE MAGNETIQUE TM_{mnp} stationnaire

D'autres modes que le TM_{010} que l'on vient de décrire simplement sont possibles dans une cavité cylindrique conductrice. On recherche un champ magnétique sous la forme d'une onde de la forme :

$\mathbf{B} = \mathbf{B}(r) e^{i(\omega t - kz + m\theta)}$ ayant une composante selon \mathbf{e}_r et \mathbf{e}_θ , mais pas selon \mathbf{e}_z qui constitue l'axe du cylindre (onde transverse magnétique), dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) pour une cavité d'axe z et de rayon R . m est un nombre entier pour avoir une solution périodique selon θ . k est le nombre d'onde, qui est progressive selon Oz vers la droite si $k > 0$ ou vers la gauche si $k < 0$. Nous allons en fait nous intéresser à la superposition de deux ondes progressives, l'une à droite, l'autre à gauche, donnant par sommation une onde stationnaire par réflexion sur les parois de la cavité de sorte que le champ électrique tangentiel y soit nul (conséquence de l'équation de Maxwell Faraday), mais pas le champ magnétique tangentiel (ces conditions aux limites sont habituelles et produisent un courant de surface, conséquence de l'équation de Maxwell Ampère). Le champ électrique aura une composante accélératrice selon Oz . Le champ magnétique vérifie les équations :

$$\text{div}(\mathbf{B}) = 0 \text{ et } \mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{B})) + (1/C^2) \partial^2 \mathbf{B} / \partial t^2 = \mathbf{0}$$

Les opérateurs deviennent pour les ondes des opérateurs multiplicatifs, ainsi :

$$\partial / \partial t = i \omega, \partial^2 / \partial t^2 = -\omega^2, \partial / \partial \theta = im, \partial^2 / \partial \theta^2 = -m^2, \partial / \partial z = -i k, \partial^2 / \partial z^2 = -k^2$$

$$\text{div}(\mathbf{B}) = 0 \text{ s'écrit avec } B_z = 0 : \partial(r B_r) / \partial r + \partial B_\theta / \partial \theta = 0, \text{ soit } i m B_\theta = - \partial(r B_r) / \partial r$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{B}) = [-\partial B_\theta / \partial z, \partial B_r / \partial z, (1/r) (\partial(r B_\theta) / \partial r - \partial B_r / \partial \theta)]$$

Comme $B_z = 0$, et $i m B_\theta = - \partial(r B_r) / \partial r$, seule la partie radiale de $\mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{B})) = (\omega^2 / C^2) \mathbf{B}$ doit être traitée pour en déduire $B_r(r)$. L'équation radiale s'écrit et se développe selon :

$$(1/r) \partial [(1/r) \partial(r B_\theta) / \partial r - \partial B_r / \partial \theta] / \partial \theta - \partial^2 B_r / \partial z^2 = (\omega^2 / C^2) B_r$$

$$(1/r^2) \partial [\partial(r B_\theta) / \partial r - \partial B_r / \partial \theta] / \partial \theta + k^2 B_r = (\omega^2 / C^2) B_r$$

$$(1/r^2) [\partial(r \partial B_\theta / \partial \theta) / \partial r - \partial^2 B_r / \partial \theta^2] = (\omega^2 / C^2 - k^2) B_r$$

$$(1/r^2) [i m \partial(r B_\theta) / \partial r + m^2 B_r] = (\omega^2 / C^2 - k^2) B_r$$

$$- (1/r^2) \partial [r \partial(r B_r) / \partial r] / \partial r + (m^2 / r^2 + k^2 - \omega^2 / C^2) B_r = 0$$

Posons $\mathbf{u}(r) = r B_r(r)$

$$- (1/r) \partial [r \partial u / \partial r] / \partial r + (m^2 / r^2 + k^2 - \omega^2 / C^2) u = 0$$

$$- (1/r) [r \partial^2 u / \partial r^2 + \partial u / \partial r] + (m^2 / r^2 + k^2 - \omega^2 / C^2) u = 0$$

$$- r^2 \partial^2 u / \partial r^2 - r \partial u / \partial r + [m^2 + r^2 (k^2 - \omega^2 / C^2)] u = 0, \text{ et finalement :}$$

$$r^2 \partial^2 u / \partial r^2 + r \partial u / \partial r + [r^2 (\omega^2 / C^2 - k^2) - m^2] u = 0, \text{ qui est une équation de Bessel de solution :}$$

$$u(r) = J_m [(\omega^2 / C^2 - k^2)^{1/2} r] \text{ où } J_m \text{ est la fonction de Bessel d'indice } m \text{ entier positif ou nul}$$

$$\text{soit } B_r(r) = A J_m [(\omega^2 / C^2 - k^2)^{1/2} r] / r \text{ où } A \text{ est une constante multiplicative de normalisation}$$

$B_r(R)$ étant la composante normale du champ magnétique sur la paroi cylindrique conductrice de la cavité en $r = R$, celle-ci est nulle (conservation de la composante normale du champ magnétique à la

surface d'un conducteur, conséquence de $\text{div}(\mathbf{B}) = 0$, \mathbf{B} étant nul à l'intérieur du conducteur). Cette condition aux limites impose alors :

$$J_m[(\omega^2/C^2 - k^2)^{1/2} R] = 0$$

Ainsi, les modes possibles sont donnés par les zéros a_{mn} (n entier positif ≥ 1) de la fonction de Bessel J_m , soit : $[(\omega^2/C^2 - k^2)^{1/2} R = a_{mn}$, on en déduit la relation de dispersion : $\omega^2/C^2 - k^2 = a_{mn}^2/R^2$, soit :

$$k^2 = \omega^2/C^2 - a_{mn}^2/R^2 > 0$$

Il faut donc $\omega/C > a_{mn}/R$, il existe donc une pulsation de coupure $\omega_c = a_{mn} C/R$ et pour le mode fondamental on a $a_{01} = 2.405$ (voir tableau ci-dessous)

n	1	2	3	4	5	6	7
m							
0	2,404 83	5,520 08	8,653 73	11,791 53	14,930 92	18,071 06	21,211 64
1	3,831 71	7,015 59	10,173 47	13,323 69	16,470 63	19,615 86	22,760 08
2	5,135 62	8,417 24	11,619 84	14,795 95	17,959 82	21,117 00	24,271 12
3	6,380 16	9,761 02	13,015 20	16,223 47	19,409 42	22,582 73	
4	7,588 34	11,064 71	14,372 54	17,616 0	20,826 9	24,199 0	
5	8,771 42	12,338 60	15,700 17	18,980 1	22,217 8		
6	9,936 11	13,589 29	17,003 8	20,320 8	23,586 1		
7	11,086 37	14,821 27	18,287 6	21,641 6	24,934 9		
8	12,225 09	16,037 8	19,554 5	22,945 2			
9	13,354 30	17,241 2	20,807 0	24,233 9			
10	14,475 50	18,433 5	22,047 0				

Zéros a_{mn} de rang n des fonctions de Bessel $J_m(x)$ pour m entier variant de 0 à 10 (les lignes). Les colonnes donnent les zéros de rang n variant de 1 à 7 pour chaque fonction J_m .

D'autre part, nous avons une cavité cylindrique de longueur L . La réflexion des ondes en $z = 0$ et en $z = L$ implique la présence d'une onde stationnaire selon Oz , correspondant à la superposition de deux ondes progressives à propagation droite ($+k$) et gauche ($-k$) telles que $kL = p\pi$ (p entier). La relation de dispersion devient : $\omega^2/C^2 = (p\pi/L)^2 + a_{mn}^2/R^2$, définissant ainsi les modes transverses magnétiques TM_{mnp} , m, n, p entiers, $m \geq 0, n \geq 1, p \geq 0$, le fondamental étant TM_{010} ($m, n, p = 0, 1, 0$). La composante normale aux faces conductrices de la cavité en $z = 0$ et $z = L$ (soit B_z) est nulle, ce qui satisfait bien à $\text{div}(\mathbf{B}) = 0$. La composante B_θ est fournie par $i m B_\theta = -\partial(r B_r)/\partial r$ qui va impliquer la dérivée J'_m de la fonction de Bessel J_m et le champ magnétique a finalement pour forme générale (A constante):

$$\begin{cases} B_r = A m [J_m(a_{mn} r/R) / r] \sin(m\theta) \cos(p\pi z/L) e^{i\omega t} \\ B_\theta = A (a_{mn}/R) J'_m(a_{mn} r/R) \cos(m\theta) \cos(p\pi z/L) e^{i\omega t} \\ B_z = 0 \end{cases}$$

On obtient ensuite le champ électrique \mathbf{E} par l'équation de Maxwell Ampère $\text{rot}(\mathbf{B}) = (1/C^2) \partial\mathbf{E}/\partial t$.

$$\begin{cases} E_r = A i (p\pi C^2/L\omega) (a_{mn}/R) J'_m(a_{mn} r/R) \sin(m\theta) \sin(p\pi z/L) e^{i\omega t} \\ E_\theta = A i (p\pi m C^2/L\omega) [J_m(a_{mn} r/R) / r] \sin(m\theta) \sin(p\pi z/L) e^{i\omega t} \\ E_z = A i (C^2/\omega) (a_{mn}/R)^2 J_m(a_{mn} r/R) \cos(m\theta) \cos(p\pi z/L) e^{i\omega t} \end{cases}$$

Posons $E_0 = A i (C^2/\omega) (a_{mn}/R)^2$, alors on en déduit pour le mode m, n, p entiers, $m \geq 0, n \geq 1, p \geq 0$:

$$\begin{cases} E_r = E_0 (p \pi / L) (R/a_{mn}) J'_m(a_{mn} r/R) \sin(m\theta) \sin(p\pi z/L) e^{i\omega t} \\ E_\theta = E_0 (p \pi / L) m (R/a_{mn})^2 [J_m(a_{mn} r/R) / r] \sin(m\theta) \sin(p\pi z/L) e^{i\omega t} \\ E_z = E_0 J_m(a_{mn} r/R) \cos(m\theta) \cos(p\pi z/L) e^{i\omega t} \\ B_r = -i (E_0/C) m [(p\pi/L)^2 + a_{mn}^2/R^2]^{1/2} (R/a_{mn})^2 [J_m(a_{mn} r/R) / r] \sin(m\theta) \cos(p\pi z/L) e^{i\omega t} \\ B_\theta = -i (E_0/C) [(p\pi/L)^2 + a_{mn}^2/R^2]^{1/2} (R/a_{mn}) J'_m(a_{mn} r/R) \cos(m\theta) \cos(p\pi z/L) e^{i\omega t} \\ B_z = 0 \end{cases}$$

Où $\omega/C = [(p\pi/L)^2 + a_{mn}^2/R^2]^{1/2}$

Remarque générale sur la dérivée de J_m : $dJ_m/dr = J_{m-1} - m J_m/r$ et $dJ_m/dr = m J_m/r - J_{m+1}$

Où l'on peut prendre la partie réelle avec $\text{Re}(e^{i\omega t}) = \cos(\omega t)$ et $\text{Re}(-i e^{i\omega t}) = \sin(\omega t)$, \mathbf{E} et \mathbf{B} sont en quadrature de phase. Il y a une composante E_z , l'onde stationnaire n'est pas transverse électrique.

Pour $m = 0$, $n = 1$, $p = 0$, on retrouve le mode fondamental (dans ce cas particulier, $J'_0 = -J_1$) :

$$E_r = E_\theta = 0, E_z = E_0 J_0(a_{01} r/R) e^{i\omega t}; B_r = B_z = 0, B_\theta = i (E_0/C) J_1(a_{01} r/R) e^{i\omega t}$$

On peut choisir $E_z = E_0 J_0(a_{01} r/R) \sin(\omega t)$ et $B_\theta = (E_0/C) J_1(a_{01} r/R) \cos(\omega t)$

avec $\omega = C a_{01}/R$ mode fondamental

VIII - REFERENCES

Malherbe, J.M., Mouvement relativiste des particules chargées dans des champs électriques et magnétiques et application aux premières observations de désintégrations dans les chambres de Wilson du Col du Midi (Chamonix, 3600 m) et du Pic du Midi de Bigorre (2870 m)

<https://cnrs.hal.science/hal-05329933v1>

Ausset, P., Panorama des accélérateurs de particules, Institut de Physique Nucléaire, Orsay

Farabolini, W., 2011, Les accélérateurs de particules, partie 1, historique et le foisonnement des techniques, CERN

Farabolini, W., 2011, Les accélérateurs de particules, les accélérateurs linéaires, CERN

Podler, H., 2013, RF structures, Institute for applied physics, University of Frankfurt