

Déconvolution adaptative pour le contrôle non destructif par ultrasons

Ewen Carcreff

▶ **To cite this version:**

Ewen Carcreff. Déconvolution adaptative pour le contrôle non destructif par ultrasons. Acoustique [physics.class-ph]. Université du Maine, 2014. Français. NNT : 2014LEMA1009 . tel-01098798v2

HAL Id: tel-01098798
https://hal.science/tel-01098798v2

Submitted on 18 May 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat

Ewen CARCREFF

Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'Université du Maine
sous le label de l'Université de Nantes Angers Le Mans

École doctorale : Sciences pour l'Ingénieur, Géosciences et Architecture

Discipline : Acoustique, section CNU 60, 61
Unité de recherche : Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes (IRCCyN)
Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (LAUM)

Soutenue le 28 novembre 2014

Déconvolution adaptative pour le contrôle non destructif par ultrasons

JURY

Président :	**M. Cédric RICHARD**, Professeur des universités, Université de Nice Sophia Antipolis
Rapporteurs :	**M. Laurent DAUDET**, Professeur des universités, Université Paris Diderot
	M. Thomas RODET, Professeur des universités, École Normale Supérieure de Cachan
Examinateur :	**M. Pierre CALMON**, Directeur de recherche, CEA, Saclay
Invité :	**M. Vincent BALTAZART**, Chargé de recherche, IFSTTAR, Nantes
Directeur de thèse :	**M. Laurent SIMON**, Professeur des universités, Université du Maine
Co-directeur de thèse :	**M. Jérôme IDIER**, Directeur de recherche CNRS, IRCCyN
Encadrant :	**M. Sébastien BOURGUIGNON**, Maître de Conférences, École Centrale de Nantes

Remerciements

En préambule, je remercie la région Pays de la Loire, et le pôle de compétence ECND-PdL, d'avoir financé cette thèse.

Je tiens à remercier les membres du jury qui ont accepté de juger mon travail de thèse. Merci à Cédric Richard, professeur à l'Université de Nice Sophia Antipolis, d'avoir présidé ce jury. Merci à Pierre Calmon, directeur de recherche au CEA, et à Vincent Baltazart, chargé de recherche à l'IFSTTAR. Je remercie vivement Laurent Daudet, professeur à l'Université Paris Diderot, et Thomas Rodet, professeur à l'ENS Cachan, d'avoir accepté d'être les rapporteurs de mon manuscrit. Leurs remarques ont permis d'améliorer la qualité de celui-ci.

Je veux exprimer ma reconnaissance à mes encadrants de thèse, Sébastien Bourguignon, Jérôme Idier et Laurent Simon. Ils ont su me guider en me laissant beaucoup d'autonomie, tout en me faisant toujours confiance. C'est un vrai luxe de travailler dans ces conditions. Je remercie Laurent pour son optimisme. Je remercie Jérôme pour sa hauteur de vue sur le sujet de thèse. Un immense merci à Sébastien pour sa disponibilité et son implication constante. Travailler à ses côtés a vraiment été très enrichissant, tant du point de vue professionnel que relationnel.

Je tiens à souligner l'aide précieuse fournie par Aroune Duclos, maître de conférences à l'Université du Maine, pour réaliser les expérimentations au laboratoire d'acoustique de l'Université du Maine tout au long de la thèse.

Mes remerciements vont également aux membres dynamiques de l'équipe *Analyse et décision en traitement du signal et de l'image* de l'IRCCyN, les permanents, Marie-Françoise Lucas, Saïd Moussaoui, Éric Le Carpentier et Mathieu Lagrange, ainsi que les doctorants (cités plus loin).

Je remercie de surcroît les membres de l'IRCCyN que j'ai croisés pendant ces trois années. Je remercie particulièrement Emily Thureau pour son aide constante. Merci également au service administratif, Patricia Brière, Sylvie Julienne, Virginie Dupont, Michelle-Anne Audrain et Armelle Radigois. Je n'oublie pas le service informatique, Denis Creusot, Richard Randriatoamanana et Robert Legal. Je remercie enfin Michel Malabre, directeur de l'IRCCyN, de m'avoir accueilli dans le laboratoire où j'ai travaillé dans d'excellentes conditions.

Je voudrais également remercier les membres du LAUM, qui m'ont toujours réservé le meilleur accueil lors de mes nombreuses visites. Notamment, je remercie Aroune Duclos, Catherine Potel, Claude Dépollier, Simon Félix, Pierrick Lotton. Je remercie également Joël Gilbert, directeur du LAUM, pour son soutien. Merci également à Anne-Marie Brulé pour son aide précieuse. Je remercie aussi Nacera Bedrici qui nous a accueillis à l'ESTACA.

Je remercie Alain Le Duff et Guy Plantier, enseignant-chercheurs à l'ESEO pour leur bonne humeur et leur enthousiasme au sujet de ma thèse. Merci aussi à Roberto Longo pour son dynamisme.

Avec Sébastien, nous avons accueilli Gwenola Rolland et Yan Li qui ont réalisé un stage au sein de l'équipe ADTSI. Je les remercie d'avoir travaillé sur ces projets en lieu avec ma thèse.

J'ai passé deux jours au CEA pour réaliser des simulations avec le logiciel CIVA. Je veux remercier Raphaële Raillon et Pierre Calmon pour leur accueil.

J'adresse mes vifs remerciements aux doctorants et post-doctorants qui m'ont accompagné pendant ces trois années : Maxime, Vincent, Corentin, Grégoire, Philip, Emmanuel, Julien, Joan, Ablamvi, Hendry, Maria, Oscar, Aleksandra, Jonathan, Inès, Denis, Xavier, Céline, ...

Mes remerciements vont évidemment à mes amis qui me soutiennent depuis longtemps : Olivier, Gaëlle, Edwin, Quentin, Thomas, Hadrien, Guillaume, Nicolas, François, Charlotte, Jean-François, Aurélien, Enric, Mathieu, et bien d'autres.

Enfin, je ne serai jamais assez reconnaissant envers ma famille qui est toujours là pour moi. Je remercie ma belle-famille pour leur bienveillance permanente. Je remercie Gwenal et Lena de m'avoir supporté toutes ces années. Merci à mes parents pour leur soutien inconditionnel. Je clos ces remerciements par le soutien qui me donne le plus de force, celui de ma femme Gaëlle et de mon fils Maden, qui est né pendant cette thèse.

Table des matières

Introduction générale **9**
Contexte . . . 9
Problématique . . . 9
Contributions . . . 10
Organisation du document . . . 11
Publications . . . 12

1 Positionnement du problème **13**
Introduction . . . 13
1.1 Le contrôle non destructif industriel . . . 14
1.1.1 Généralités . . . 14
1.1.2 Le contrôle non destructif par ultrasons . . . 14
1.1.3 Transducteurs et mesures . . . 15
1.2 Détection des discontinuités et des défauts . . . 17
1.2.1 Changements d'impédance acoustique . . . 17
1.2.2 La séquence de réflectivité . . . 19
1.3 Modèle direct et problème inverse . . . 20
1.3.1 Modèle direct . . . 20
1.3.2 Difficultés spécifiques liées au problème inverse . . . 20
1.3.3 Caractère mal posé . . . 21
1.4 Revue bibliographique . . . 21
1.5 Axes de travail effectués pendant la thèse . . . 24

2 Le modèle direct **25**
Introduction . . . 25
2.1 Modèle de signaux continus pour une cible ponctuelle . . . 26
2.1.1 Modèle fréquentiel . . . 26
2.1.2 Écriture en fonction de la distance de propagation . . . 27
2.1.3 L'atténuation fréquentielle . . . 28
2.1.4 La dispersion et les théories causales . . . 33
2.2 Modèle discret linéaire pour l'inversion . . . 38
2.2.1 Modèle de signaux à temps continu pour une distribution de cibles . . . 38
2.2.2 Modèle de signaux à temps discret . . . 39
2.2.3 Différents cas pour le modèle linéaire discret . . . 40
2.2.4 Calcul numérique des réponses impulsionnelles d'atténuation . . . 43
2.2.5 Modèle d'atténuation d'Olofsson . . . 45

2.3 Exploitation des modèles . . . 47
2.3.1 Mesure en mode *pulse-echo* avec du polycarbonate . . . 48
2.3.2 Mesure en transmission dans l'huile de ricin . . . 53
2.3.3 Mesure aérienne en transmission dans un matériau poreux . . . 56
2.3.4 Exploitation du modèle pour l'Évaluation Non Destructive . . . 58
2.3.5 Problème de diffraction des cibles : application aux trous à fond plat 61

3 Le problème inverse 65
Introduction . . . 66
3.1 Approches paramétriques . . . 66
3.1.1 Modèles de formes d'ondes . . . 66
3.1.2 Méthodes locales d'optimisation . . . 67
3.1.3 Quelques méthodes d'optimisation non-linéaire . . . 69
3.1.4 Méthodes de type Espérance-Maximisation . . . 71
3.2 Minimisation d'un critère pénalisé . . . 73
3.2.1 Description du modèle direct . . . 73
3.2.2 Inverse généralisée . . . 74
3.2.3 Régularisation par minimisation d'un critère pénalisé . . . 74
3.2.4 Réglage du paramètre de régularisation . . . 79
3.3 Régularisation par la pseudo-norme ℓ_0 . . . 80
3.3.1 Formulation du problème d'optimisation . . . 80
3.3.2 Méthodes d'optimisation par une approche gloutonne . . . 81
3.3.3 L'agorithme Single Best Replacement . . . 84
3.3.4 Comparaison des algorithmes gloutons et SBR . . . 86
3.4 Des algorithmes plus efficaces d'optimisation ℓ_0 . . . 88
3.4.1 Mouvements plus complexes . . . 88
3.4.2 Sélection dans une fenêtre . . . 89
3.4.3 Sélection basée sur un calcul d'auto-corrélation multidimensionnelle 92

4 Déconvolution parcimonieuse sur-échantillonnée 101
Introduction . . . 101
4.1 Modèle sur-échantillonné et MISO . . . 102
4.1.1 Convolution discrète sur-échantillonnée . . . 102
4.1.2 Système MISO . . . 103
4.2 Facteur de sur-échantillonnage . . . 104
4.3 Algorithmes de déconvolution . . . 105
4.3.1 Calcul rapide de la convolution discrète . . . 106
4.3.2 Détails de mise en œuvre des algorithmes . . . 107
4.4 Résultats . . . 108
4.4.1 Outils de mesure de l'erreur d'estimation . . . 108
4.4.2 Résultats issus de données simulées . . . 110
4.4.3 Simulations de Monte-Carlo . . . 112
4.4.4 Résultats expérimentaux . . . 113

5 Application au CND **117**
Introduction . . . 117
5.1 Estimation de la forme d'onde . . . 118
5.1.1 Mesure d'un écho isolé . . . 118
5.1.2 Estimation par connaissance de la séquence de réflectivité . . . 118
5.1.3 Moyennage dans le domaine homomorphique . . . 119
5.1.4 Construction d'un dictionnaire ou apprentissage . . . 120
5.2 Plaque de matériau homogène . . . 120
5.2.1 Généralités . . . 120
5.2.2 Calcul d'incertitude . . . 122
5.2.3 Estimation du temps de vol moyen par moindres carrés . . . 123
5.2.4 END d'une plaque épaisse . . . 123
5.2.5 CND d'une plaque fine . . . 126
5.3 Matériaux atténuants . . . 127
5.4 Plaques avec trous à fond plat . . . 129
5.4.1 Cas d'un Ascan . . . 129
5.4.2 Cas d'un Bscan . . . 130

Conclusion et perspectives **133**
Conclusion générale . . . 133
Perspectives . . . 135

A Relations de causalité **139**
A.1 Relations de causalité . . . 139
A.2 Relations de causalité . . . 140
A.2.1 Calcul de la phase dispersive pour une atténuation linéaire . . . 141

B Modèle de réponse impulsionnelle instrumentale **143**
B.1 Modèle d'écho gaussien . . . 143
B.2 Facteur de bande passante . . . 143
B.2.1 Définition . . . 143
B.2.2 Application à la forme d'onde gaussienne . . . 144

C Détails des calculs algorithmiques **147**
C.1 Critère d'ajout pour OLS et SBR . . . 147
C.2 Critère de retrait pour SBR . . . 148

Bibliographie **150**

Introduction générale

Contexte

Ce travail de thèse est le fruit d'une collaboration entre les laboratoires IRCCyN (Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes, UMR CNRS 6597) et LAUM (Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine, UMR CNRS 6613). Il a été réalisé au sein de l'équipe ADTSI (Analyse et Décision en Traitement du Signal et de l'Image) de l'IRCCyN. Le financement a été assuré par la région Pays de la Loire par le biais du pôle de compétence ECND-PdL (Evaluation et Contrôle Non Destructifs en Pays de la Loire).

Cette thèse traite de méthodes inverses dans un contexte de contrôle non destructif par ultrasons, où le but est la détection de discontinuités dans les objets inspectés. L'application directe de ces méthodes permet une meilleure interprétation des signaux et une aide au diagnostic.

Problématique

Le contrôle non destructif (CND) est une étape importante du processus industriel. Il permet de contrôler l'intégrité des composants sans les endommager, pendant ou à la fin de leur fabrication, et en situation d'utilisation. Différents phénomènes physiques permettent ces contrôles de par leur caractère pénétrant dans les objets (ondes électromagnétiques, ondes acoustiques, champ magnétique, *etc.*), menant à différents modes de contrôle[1].

Nous nous intéressons dans ce travail au CND par ultrasons, modalité qui consiste à émettre des ondes acoustiques dans le matériau à inspecter [Krautkramer et Krautkramer 1990]. Les ondes se propageant dans le milieu, et récupérées par le capteur ultrasonore, permettent dans la mesure du possible de détecter et d'identifier les défauts contenus dans la pièce. Le même procédé peut être appliqué pour évaluer les matériaux, c'est-à-dire pour estimer des paramètres physiques propres, tels que la vitesse des ondes ou le coefficient d'atténuation. Le but de l'utilisateur est de visualiser les échos et d'en déduire une information spatiale sur l'objet inspecté. Nous nous intéressons ici aux discontinuités, qui présentent des transitions franches dans l'objet (surfaces, arêtes, défauts, *etc.*). L'analyse du signal peut cependant se révéler difficile à l'œil nu pour plusieurs raisons : bruit, atténuation, diffraction, superposition d'échos, *etc.* Des techniques de traitement du signal sont alors employées pour améliorer la résolution des signaux [Zhang et Harvey 2013]. Nous nous intéressons plus précisément aux approches qui visent à résoudre le problème inverse d'estimation des distances de propagation correspondant à chaque écho.

[1] Voir le site de la COnfédération Française pour les Essais Non Destructifs (COFREND) : http://www.cofrend.com.

Nous nous plaçons dans le cadre des méthodes de déconvolution parcimonieuse qui ont montré de bons résultats dans un contexte de CND [Zala 1992]. Ces méthodes partent du principe que les échos sont des répliques d'un écho de référence. Le modèle sous-jacent est discret et linéaire, et donne de bons résultats lorsque la forme des échos varie très peu. Des algorithmes efficaces ont été mis en œuvre, notamment en utilisant une approche pénalisée pour traduire le caractère parcimonieux de l'inconnue. La pénalisation ℓ_1 a été beaucoup utilisée dans le domaine géophysique [Taylor *et al.* 1979], puis acoustique [O'Brien *et al.* 1994]. Elle trouve ses limites dans notre application car ce type de pénalisation fournit des solutions avec de nombreux pics de faibles amplitudes. La pénalisation ℓ_0 qui compte les composantes non-nulles semble plus adaptée à notre problème mais son caractère discret formule des problèmes d'optimisation plus complexes. Des travaux récents ont ainsi abordé le problème en pénalisation ℓ_0 sous la forme d'algorithmes itératifs sous optimaux (algorithme SBR [Soussen *et al.* 2011]). Nous nous plaçons dans la continuité de ces travaux. L'exploration combinatoire limitée peut se révéler insatisfaisante et requiert le développement de méthodes plus abouties et adaptées aux formes d'ondes ultrasonores.

Dans de nombreux matériaux, la forme des échos reçus varie à cause de l'atténuation fréquentielle, de la dispersion et des signatures des interfaces et des défauts. Certaines méthodes permettent de prendre en compte ces déformations, notamment les méthodes d'estimation de modèles paramétriques [Demirli et Saniie 2001a]. En revanche, de par son caractère invariant, le modèle de convolution n'est pas adapté à ces types de distorsion. Un modèle empirique de déformation des échos a été proposé dans [Olofsson et Stepinski 2001], mais ne prend pas en considération la réalité physique. Des modèles existent cependant dans la littérature pour traduire l'atténuation, notamment le modèle en loi de puissance fréquentielle [Ophir et Jaeger 1982]. La dispersion peut également être définie par certains modèles physiques [He 1999]. L'insertion de tels modèles physiques dans le modèle des données ultrasonores est une autre motivation de cette thèse.

Contributions

Les contributions de cette thèse portent sur deux aspects : la modélisation des signaux et la résolution du problème inverse. Les publications scientifiques issues de ces contributions sont indexées par des lettres majuscules et sont listées à la fin de ce chapitre.

Nous développons tout d'abord un modèle de signaux ultrasonores qui prend en compte l'atténuation et la dispersion. La nouveauté de ce modèle est de produire un système linéaire non invariant pour les signaux discrets, tout en prenant en compte l'atténuation et la dispersion [A, E, F, H, I]. Ce modèle peut être vu comme une extension du modèle convolutif classique, mais où la réponse impulsionnelle varie en fonction de la distance de propagation. Nous montrons également qu'il est possible de discrétiser le modèle à une résolution plus élevée que les données, qui permet d'aboutir à un modèle sur-échantillonné (dit à super-résolution) [C, D, G].

Les contributions méthodologiques concernent la résolution du problème inverse par optimisation d'un critère des moindres carrés pénalisé par une norme ℓ_0. Nous proposons tout d'abord de revisiter des algorithmes de déconvolution parcimonieuse pour le modèle sur-échantillonné [C, D], qui est décrit comme un cas particulier de système à entrées multiples et sortie unique (MISO). Dans un second temps, nous développons un algorithme pour l'optimisation ℓ_0 grâce à une exploration combinatoire plus complexe adaptée aux formes d'ondes

oscillantes [B].

Cette thèse comporte également un volet expérimental qui a permis de valider les modèles et les méthodes développés sur des cas pratiques de contrôle non destructif par ultrasons. Les différentes données ont été acquises au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine. Le traitement de ces données expérimentales apparaît dans les publications [A, C, E, F, H, I].

Organisation du document

Ce mémoire est composé de cinq chapitres dont nous précisons succinctement le contenu.

- Le chapitre 1 a pour but de détailler la problématique et les objectifs de notre étude. Nous présentons ce qu'est le contrôle non destructif ultrasonore dans un contexte industriel. Nous abordons ensuite l'objectif de ce travail qui est la détection de discontinuités dans les matériaux. Dans cette optique, nous exposons les verrous du problème ainsi qu'une revue bibliographique des modèles et des méthodes utilisés.

- Le chapitre 2 présente la construction du modèle direct de propagation ultrasonore développé. Nous proposons un modèle linéaire pour les signaux à temps discret qui prend en compte l'atténuation et la dispersion de l'onde propagée. Ce modèle est comparé à d'autres modèles de la littérature grâce à des signaux réels obtenus à partir de matériaux atténuants (polycarbonate, huile de ricin, mousse poreuse).

- Le chapitre 3 est consacré au problème inverse et aux développements méthodologiques. Nous présentons tout d'abord les différentes approches pour résoudre le problème inverse et nous nous focalisons sur l'approche pénalisée par une pseudo-norme ℓ_0. Dans un premier temps, nous présentons une approche de mouvements multiples dans une fenêtre. Ensuite, nous proposons un algorithme inspiré de SBR pour l'optimisation avec une pénalisation ℓ_0 et présentant une exploration combinatoire plus complexe adaptée aux formes d'ondes oscillantes. Appliqué à des données ultrasonores, cet algorithme est plus performant pour un accroissement restreint du coût de calcul.

- Le chapitre 4 présente la déconvolution parcimonieuse lorsque le modèle de convolution est sur-échantillonné, ce qui permet de reconstruire un train d'impulsions à une résolution temporelle plus fine que celle des données. Nous montrons que ce modèle a un cadre plus général de système à entrées multiples et sortie unique. Des algorithmes classiques de déconvolution parcimonieuse sont alors adaptés pour ce type de système.

- Dans le chapitre 5, des exemples concrets d'application de la déconvolution parcimonieuse au contrôle non destructif sont présentés. Nous exposons en particulier des cas de calcul d'épaisseur de plaques fines et de détection de défauts dans l'aluminium, le plexiglas et le polycarbonate.

Publications

- Article de revue internationale publié :

  [A] E. Carcreff, S. Bourguignon, J. Idier et L. Simon. **A linear model approach for ultrasonic inverse problems with attenuation and dispersion**. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, Vol. 61(7), Pages 1191-1203, Juillet 2014.

- Article de revue internationale en cours de rédaction :

  [B] E. Carcreff, S. Bourguignon, J. Idier et L. Simon. **Sparse deconvolution of signals containing oscillating waveforms**. En cours de rédaction, 2014.

- Articles de conférences avec actes et comité de lecture :

  [C] E. Carcreff, S. Bourguignon, J. Idier et L. Simon. **Algorithmes de déconvolution impulsionnelle à résolution augmentée**. *Actes du 24ème colloque GRETSI*, Brest, France, Septembre 2013.

  [D] E. Carcreff, S. Bourguignon, J. Idier et L. Simon. **Resolution enhancement of ultrasonic signals by up-sampled sparse deconvolution**, *IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing*, pages 6511-6515, Vancouver, Canada, Mai 2013.

- Articles de conférences avec actes :

  [E] E. Carcreff, S. Bourguignon, J. Idier et L. Simon. **Contrôle non destructif des matériaux atténuants et dispersifs par déconvolution impulsionnell**e. *Actes du 12ème Congrès Français d'Acoustique*, Poitiers, France, Avril 2014.

  [F] E. Carcreff, S. Bourguignon, J. Idier, L. Simon et Aroune Duclos. **Including frequency-dependent attenuation for the deconvolution of ultrasonic signals**, *19th International Congress on Acoustics*, Montréal, Canada, Juin 2013.

  [G] E. Carcreff, S. Bourguignon, J. Idier et L. Simon. **High-resolution deconvolution applied to non destructive testing**, *Acoustics 2012*, Nantes, France, Avril 2012.

- Articles de conférences sans actes :

  [H] E. Carcreff, A. Duclos, J.-P. Groby et S. Bourguignon. **A dispersive attenuation model for ultrasonic wave propagation in porous materials**. *Symposium on the Acoustics of Poro-Elastic Materials*, Stockholm, Suède, Décembre 2014.

  [I] E. Carcreff, S. Bourguignon, J. Idier et L. Simon. **Déconvolution pour le contrôle par ultrasons des matériaux atténuants et dispersifs**. *Journées COFREND*, Bordeaux, France, Mai 2014.

Chapitre 1

Positionnement du problème : la détection de discontinuités en contrôle non destructif

Sommaire

Introduction **13**

1.1 Le contrôle non destructif industriel **14**

1.1.1 Généralités 14

1.1.2 Le contrôle non destructif par ultrasons 14

1.1.3 Transducteurs et mesures 15

1.2 Détection des discontinuités et des défauts **17**

1.2.1 Changements d'impédance acoustique 17

1.2.2 La séquence de réflectivité 19

1.3 Modèle direct et problème inverse **20**

1.3.1 Modèle direct 20

1.3.2 Difficultés spécifiques liées au problème inverse 20

1.3.3 Caractère mal posé 21

1.4 Revue bibliographique **21**

1.5 Axes de travail effectués pendant la thèse **24**

Introduction

Le but de ce chapitre est de présenter les enjeux et objectifs de la thèse. La section 1.1 décrit tout d'abord les objectifs et les modalités du contrôle non destructif industriel. Il est question ici de présenter les généralités d'un contrôle par ultrasons : transducteurs, mesures, *etc.* Nous décrivons ensuite dans la section 1.2 l'objectif de notre travail, qui est la détection de discontinuités. Ce point est illustré par un exemple simple de contrôle de plaque homogène immergée. La formulation du problème inverse est ensuite décrite dans la section 1.3. Nous

détaillons notamment les difficultés de sa résolution. La section 1.4 établit une revue bibliographique des modèles et des méthodes inverses utilisés. Cela permet finalement de décrire les axes de travail abordés pendant la thèse dans la section 1.5.

1.1 Le contrôle non destructif industriel

1.1.1 Généralités

Le Contrôle Non Destructif (CND) a pour objectif de détecter d'éventuels défauts à l'intérieur ou à la surface de pièces industrielles sans les endommager. La différence est faite avec l'Évaluation Non Destructive (END) où le but est de mesurer des grandeurs physiques propres aux matériaux (masse volumique, vitesse des ondes acoustiques, constante diélectrique, *etc.*). Différents phénomènes physiques permettent cette auscultation grâce à leurs propriétés pénétrantes dans le matériau[1] : résurgence d'un liquide ou d'un gaz pénétrant (ressuage), ondes ultrasonores, courants de Foucault, ondes infrarouges (thermographie), ondes électromagnétiques X ou gamma (radiographie), champ magnétique (magnétoscopie), *etc.* La plupart de ces phénomènes sont employés dans le domaine de l'imagerie médicale (échographie, radiologie, imagerie par résonance magnétique, *etc.*), qui peut aussi être considérée comme un domaine d'application du CND pour les tissus mous et les os. Nous associons également au CND les techniques d'auscultation du sol et du génie civil qui utilisent les mêmes phénomènes, mais également les ondes sismiques (sismologie) et les micro-ondes [Jonscher 1983] (radar à pénétration de sol).

Le CND dans le domaine industriel intervient pendant deux phases de la vie des composants. Premièrement, il sert à vérifier que les pièces produites ne contiennent pas d'anomalies ou de défauts avant leur utilisation. Il permet ainsi d'éviter un dysfonctionnement lié à la mauvaise fabrication d'une pièce. Ce contrôle peut être appliqué au contrôle de tubes, barres, plaques, *etc.* mais également de pièces manufacturées comme des assemblages avec soudures ou avec des matériaux composites. Un exemple de contrôle de tube de grosse dimension est présenté sur la figure 1.1. La deuxième phase d'utilisation du CND intervient pendant l'usage des pièces. Il sert alors à contrôler leur bon fonctionnement *in situ*, car celles-ci peuvent subir de fortes sollicitations mécaniques, chimiques, radioactives, menant à l'apparition de craquements, fissures, *etc.* Les domaines d'application sont variés : transports terrestres et aériens, centrales électriques, *etc.*

1.1.2 Le contrôle non destructif par ultrasons

Le CND par ultrasons est effectué en émettant des ondes acoustiques à l'intérieur ou à la surface des pièces à inspecter. La réception de ces ondes après propagation dans le matériau permet d'obtenir des informations sur le milieu de propagation [Krautkramer et Krautkramer 1990]. Les ondes acoustiques créent des modifications locales de la pression et de la vitesse des particules. Par exemple, l'équation d'une onde plane se propageant dans la direction x s'écrit [Bruneau 1998]

$$\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = 0, \tag{1.1}$$

[1] Voir le site de la COnfédération Française pour les Essais Non Destructifs (COFREND) : http://www.cofrend.com.



FIGURE 1.1 – Contrôle d'un tube de grand diamètre par ultrasons. La sonde ultrasonore est placée directement en contact avec la pièce par l'opérateur pour l'inspecter (source : IRC Advanced NDT Services, www.indiamart.com).

où $p(x,t)$ est la pression en x à un instant t, et c est la vitesse des ondes. La solution de ce type d'équation est de ce fait une fonction de l'espace et du temps.

Les ultrasons sont non invasifs, contrairement aux rayons X notamment. Cela présente un avantage évident dans le domaine médical, mais également dans le domaine industriel lorsque l'environnement est soumis à de fortes contraintes (radioactives par exemple). Un autre avantage du contrôle par ultrasons est leur facilité d'utilisation, qui permet par exemple de créer des systèmes de faible encombrement et portatifs que les opérateurs peuvent utiliser sur le terrain. Les systèmes utilisant des rayons X ou des champs magnétiques nécessitant une puissance électrique conséquente sont plus difficilement portables. Un dernier atout est le faible coût des systèmes et des sondes de mesure par ultrasons. D'un point de vue modélisation, l'hypothèse de linéarité [Bruneau 1998] de la propagation ultrasonore rend possible le développement de logiciels de simulation [Lingvall 2004a, Mahaut *et al.* 2009, McGough 2014]. Ce travail de thèse concerne le CND par ultrasons, même si les modèles et techniques d'inversion proposés pourraient être étendus à d'autres modalités de CND.

1.1.3 Transducteurs et mesures

Les transducteurs utilisés en CND et END ultrasonores sont des convertisseurs électro-acoustiques : ils convertissent un signal électrique en mouvement de la membrane du transducteur (à la manière d'un haut-parleur). Le mouvement de cette membrane provoque la mise en mouvement des particules autour d'elle et crée ainsi une onde acoustique. Les transducteurs possèdent l'effet réciproque, c'est à dire qu'un mouvement de la membrane crée un signal électrique. Un transducteur peut donc être à la fois émetteur et récepteur. Typiquement, l'effet piézoélectrique permet de réaliser ces transducteurs [Krautkramer et Krautkramer 1990, chap. 7]. La piézoélectricité est la propriété que possèdent certains corps de se polariser électriquement sous l'action d'une contrainte mécanique, et réciproquement de se déformer lorsqu'on leur applique un champ électrique. Des transducteurs mono-élément sont représentés sur la figure 1.2a. Il existe également des capteurs multi-éléments (voir figure 1.2b). Ceux-ci permettent le contrôle spécifique de chaque élément et ainsi la génération de champs acoustiques complexes (focalisation, balayage, ondes planes, *etc.*). Une acquisition avec une sonde mono-élément permet d'obtenir un signal numérique unidimensionnel que l'on appelle *A-scan*. Un exemple de A-scan est présenté sur la figure 1.6. Il est également possible d'obtenir



FIGURE 1.2 – Types de sondes ultrasonores. (a) : sondes mono-palpeur, (b) : sonde multi-éléments (source : Olympus, www.olympus-ims.com).

des images ou *B-scans* en déplaçant le transducteur mono-élément ou en utilisant un transducteur multi-éléments.

Pour réaliser des contrôles par ultrasons, un émetteur et un récepteur ultrasonores sont nécessaires. Deux cas de figure sont alors possibles. Le premier cas utilise un seul transducteur qui va servir d'émetteur et de récepteur. On parle alors de mesure en réflexion ou *pulse-echo* en anglais. Ce type de mesure est utilisé pour sa simplicité, mais également lorsque la face arrière de la pièce n'est pas accessible [Krautkramer et Krautkramer 1990]. On peut par exemple citer le cas de contrôle de tube, à l'intérieur duquel on ne peut pas accéder. La deuxième possibilité consiste à utiliser un transducteur émetteur et un transducteur récepteur. On l'appelle alors mesure en transmission ou *pitch-catch* en anglais. Ce procédé est par exemple appliqué pour réaliser l'évaluation de matériaux avec un transducteur de part et d'autre de la pièce de test. Ces deux dispositifs expérimentaux sont représentés sur la figure 1.3.

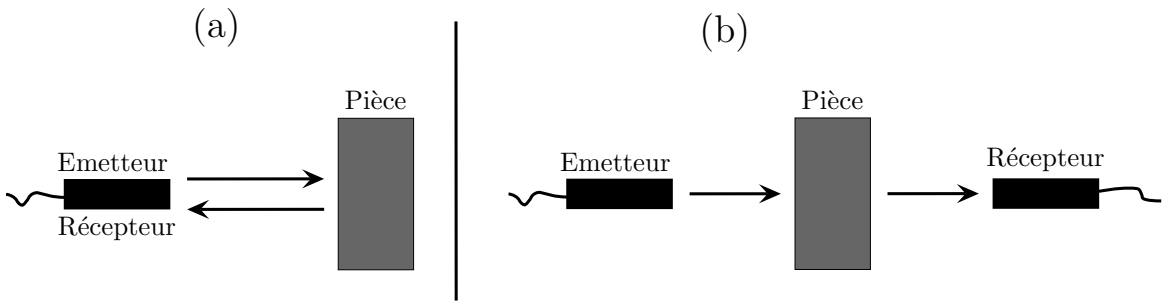


FIGURE 1.3 – Configurations de mesure par ultrasons. (a) : en réflexion, (b) : en transmission.

Les mesures peuvent se faire directement en contact avec la pièce à inspecter (voir figure 1.1). On utilise alors un couplant entre le(s) transducteur(s) et le matériau pour réaliser une adaptation d'impédance. L'eau est également un très bon adaptateur d'impédance si bien que la majorité des contrôles est réalisée en immersion dans une cuve (voir photo 1.4).

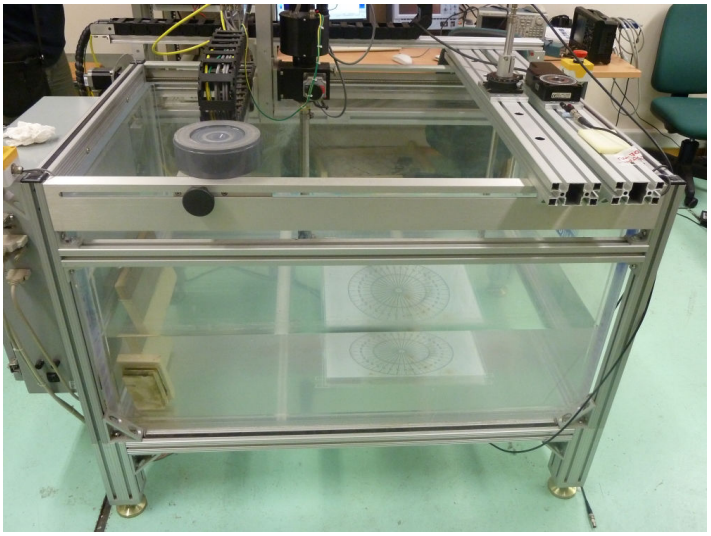


FIGURE 1.4 – Cuve de mesure par ultrasons au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine. Les transducteurs et les pièces à inspecter sont immergés le plus souvent dans l'eau.

1.2 Détection des discontinuités et des défauts

1.2.1 Changements d'impédance acoustique

Les ondes acoustiques sont générées grâce à un transducteur électro-acoustique. L'onde se propage alors dans le milieu et crée une onde retour à chaque changement d'impédance rencontré [Saniie et Nagle 1989]. Ces discontinuités d'impédance acoustique peuvent provenir d'interfaces entre deux milieux ou alors de défauts qui créent des ruptures dans le matériau. À titre d'exemple, nous étudions le cas d'un matériau homogène d'impédance Z_1 entouré par un milieu homogène d'impédance Z_2 (cf. figure 1.5). C'est typiquement le cas d'une

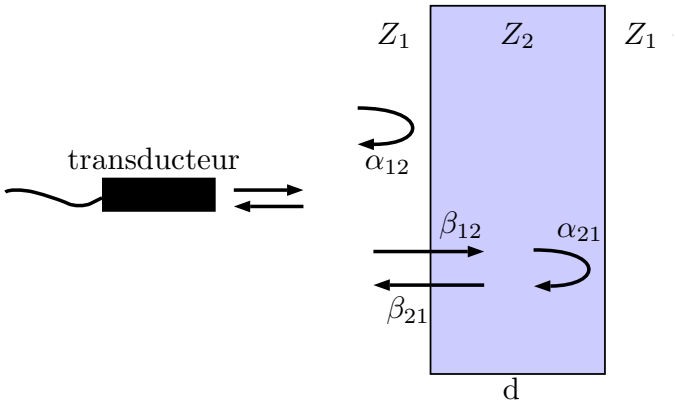


FIGURE 1.5 – Coefficients de réflexion aux interfaces de deux matériaux.

pièce immergée dans une cuve d'eau. L'impédance acoustique d'un matériau homogène est $Z_i = \rho_i c_i$, où ρ_i est la masse volumique et c_i est la vitesse des ondes [Krautkramer et Krautkramer 1990, chap. 2]. Le coefficient de réflexion α_{ij}, entre un milieu i et un milieu j, qui

indique le rapport entre la pression réfléchie et la pression incidente, se calcule par

$$\alpha_{ij} = \frac{Z_j - Z_i}{Z_i + Z_j}. \tag{1.2}$$

D'un manière similaire, le coefficient de transmission β_{ij}, d'un milieu i vers un milieu j, définit le rapport entre les pressions transmise et incidente, et s'écrit

$$\beta_{ij} = 1 + \alpha_{ij} = \frac{2Z_j}{Z_i + Z_j}. \tag{1.3}$$

Pour une mesure en réflexion, nous pouvons alors calculer les coefficients de réflexion des deux premiers échos, l'écho de surface et l'écho du fond de la pièce (voir figure 1.5), qui ont pour amplitudes respectives α_{12} et $\beta_{12}\alpha_{21}\beta_{21}$.

Les ondes réfléchies sont ensuite réceptionnées par un capteur acousto-électrique et forment les échos dans le signal électrique. Pour illustrer la problématique, nous avons choisi une pièce d'aluminium immergée dans l'eau avec les paramètres suivants : $c_1 = 1500\,\text{m.s}^{-1}$, $\rho_1 = 1000\,\text{kg.m}^{-3}$, $c_2 = 6500\,\text{m.s}^{-1}$, $\rho_2 = 2660\,\text{kg.m}^{-3}$. Le premier écho est l'écho de surface qui a une amplitude $\alpha_{12} = 0.8403$. Les échos suivants proviennent des allers-retours avec le fond de la pièce. Le deuxième écho a donc une amplitude $\beta_{12}\alpha_{21}\beta_{21} = -0.2469$, le troisième $\beta_{12}\alpha_{21}^3\beta_{21} = -0.1744$ et ainsi de suite pour les échos suivants. Des exemples de signaux simulés pour des épaisseurs $d = 10\,\text{mm}$ et $d = 1\,\text{mm}$ sont représentés sur la figure 1.6. Dans ces signaux, les amplitudes sont identiques, mais les temps entre les échos

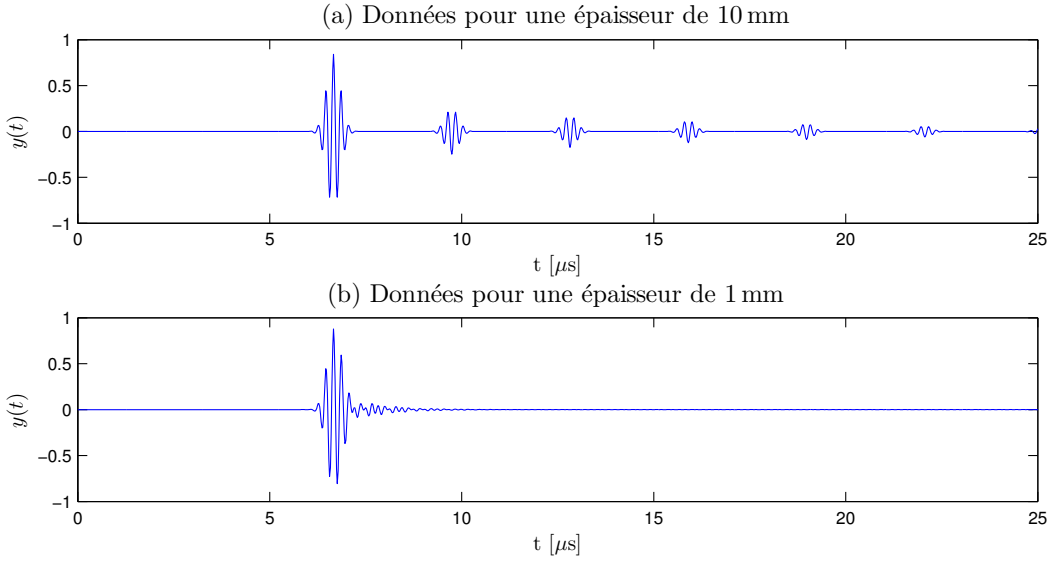


FIGURE 1.6 – Exemple de A-scan simulé correspondant à la figure 1.5 avec (a) $d = 10\,\text{mm}$ et (b) $d = 1\,\text{mm}$. Le matériau 1 est l'eau ($c_1 = 1500\,\text{m.s}^{-1}$, $\rho_1 = 1000\,\text{kg.m}^{-3}$) et le matériau 2 est l'aluminium ($c_2 = 6500\,\text{m.s}^{-1}$, $\rho_2 = 2660\,\text{kg.m}^{-3}$).

sont différents. En effet, le temps d'un aller-retour dans la pièce est $2d/c_2$ et vaut $3.08\,\mu\text{s}$ pour $d = 10\,\text{mm}$ et $0.31\,\mu\text{s}$ pour $d = 1\,\text{mm}$.

Le but de la déconvolution est de retrouver les positions et les amplitudes des discontinuités d'impédance à partir du signal électrique reçu par le capteur ultrasonore. Retrouver

ces grandeurs à partir de mesures échantillonnées, incomplètes et bruitées consiste en un problème inverse mal posé [Idier 2001]. Dans les exemples de la figure 1.6, on devine qu'il sera plus facile de résoudre le problème pour $d = 10\,\text{mm}$ que pour $d = 1\,\text{mm}$.

1.2.2 La séquence de réflectivité

A partir de la problématique évoquée dans la section précédente, nous pouvons formaliser l'inconnue à retrouver. Il s'agit d'une séquence de réflectivité qui contient les positions spatiales et les amplitudes des changements d'impédance. De façon analogue, la séquence de transmittivité est relative à une mesure en transmission. Deux configurations sont alors possibles suivant la nature de l'objet inspecté. La première considère une distribution dans toutes les directions à partir d'un point de référence à la surface du transducteur. L'illustration de la figure 1.7a montre par exemple trois réflecteurs ponctuels répartis dans un matériau homogène. La deuxième configuration considère une séquence de réflectivité dans une direction donnée. Ce principe est adapté pour analyser des matériaux multi-couches par exemple (figure 1.7b). Les deux exemples que nous montrons aboutissent à la même séquence de réflectivité illustrée sur la figure 1.7c. Ces deux conventions permettent d'obtenir des séquences composées de pics, c'est-à-dire présentant des discontinuités franches. Nous pouvons alors modéliser la séquence $x(z)$ sous la forme

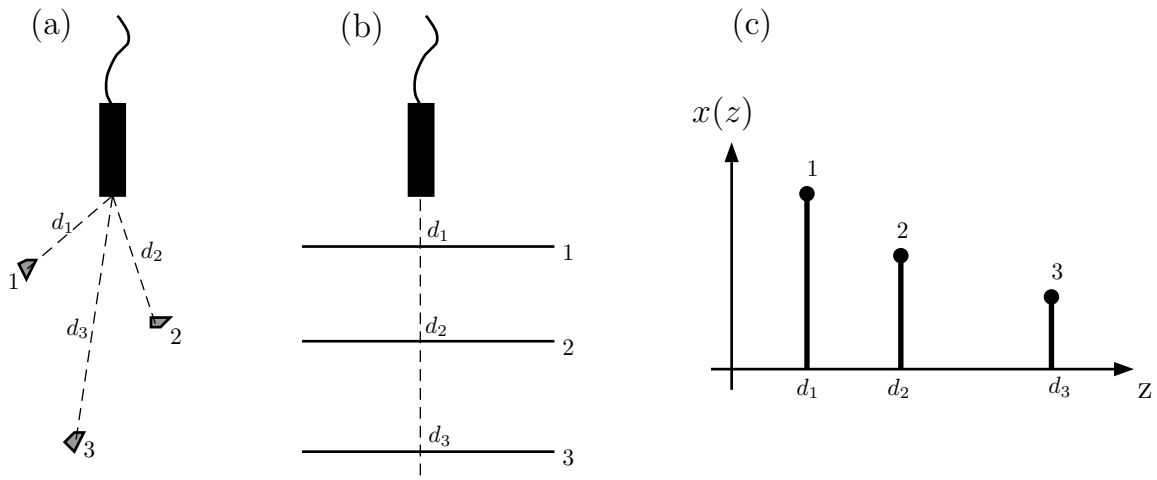


FIGURE 1.7 – Séquence de réflectivité. (a) : cas de trois réflecteurs considérés ponctuels, (b) : cas de trois couches de matériaux homogènes, (c) : séquence de réflectivité équivalente.

$$x(z) = \sum_i a_i \delta(z - z_i), \tag{1.4}$$

où a_i et z_i sont respectivement les amplitudes et les positions des changements d'impédance. L'hypothèse que nous faisons ici est que $x(z)$ est parcimonieux : il ne contient qu'un faible nombre de valeurs non nulles. Ce point est important pour le développement des méthodes d'inversion.

La figure 1.8 représente les séquences de réflectivité des exemples exposés sur la figure 1.5 et correspondant aux données de la figure 1.6. Ce type d'information est à haute résolution car la forme temporellement étendue d'un écho devient un pic spatial. On peut

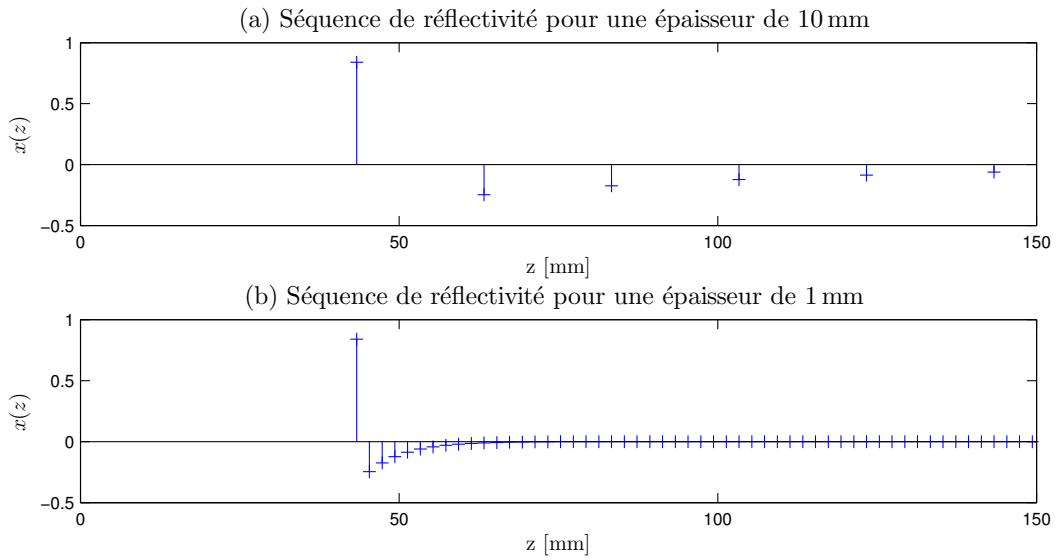


FIGURE 1.8 – Exemple de séquences de réflectivité correspondant aux signaux de la figure 1.6 pour (a) $d = 10\,\text{mm}$ et (b) $d = 1\,\text{mm}$.

par conséquent en déduire des dimensions spatiales, comme ici l'épaisseur d de la pièce : la distance entre chaque pic correspond à un aller-retour dans la plaque et donc à deux fois l'épaisseur.

1.3 Modèle direct et problème inverse

1.3.1 Modèle direct

Le problème inverse consiste à estimer la grandeur x, inaccessible directement, à partir des données mesurées y. La première étape pour résoudre ce problème est d'établir un modèle direct qui relie x à y. Dans notre cas, ce lien doit respecter au mieux la physique des ondes ultrasonores. Nous développons ce point dans le chapitre 2. Un modèle parfait n'existant pas, il faut prendre en compte un terme d'erreur qui représente les erreurs de modélisation, les incertitudes de mesure et les erreurs de discrétisation. D'une façon générique, le modèle direct s'écrit

$$y = \Phi\big(x,\, \text{bruit}\big), \tag{1.5}$$

où l'opérateur Φ établit le lien direct entre l'inconnue x, le bruit et les mesures y.

1.3.2 Difficultés spécifiques liées au problème inverse

Le problème inverse introduit précédemment qui consiste à retrouver les positions des changements d'impédance et les coefficients d'amplitude associés présente des difficultés de résolution.

1. Premièrement, les transducteurs travaillant dans une bande de fréquences limitée, l'information reçue est également à bande limitée. Néanmoins, le signal à reconstruire est un train d'impulsions qui contient toutes les fréquences.

2. Le deuxième problème provient de la manière dont sont acquis les signaux. En effet, nous disposons de signaux quantifiés, ce qui constitue une perte d'information par rapport au signal continu. De plus, ces données comprennent un bruit de mesure qui rajoute des imprécisions dans le signal à traiter.

3. Ensuite, la propagation des ondes acoustiques est soumise à l'atténuation fréquentielle et à la dispersion, phénomènes physiques qui modifient la forme des échos en fonction de la propagation. Cette modification, de caractère passe-bas, provoque une perte plus importante des hautes fréquences des échos lorsque la distance de propagation augmente. Des phénomènes de diffraction peuvent également être présents, qui modifient la forme des échos en fonction de la géométrie des obstacles rencontrés.

4. Enfin, le dernier problème est la superposition des échos qui intervient lorsque les discontinuités sont proches. C'est le cas par exemple pour des plaques minces, pour des défauts proches les uns des autres ou proches des interfaces.

1.3.3 Caractère mal posé

Un problème mathématique est dit bien posé s'il vérifie les trois conditions d'existence de la solution, d'unicité de la solution et de continuité de la solution [Idier 2001]. Dans un cas linéaire de dimension finie, cas dans lequel nous nous ramènerons, la condition de continuité est toujours vérifiée. Les conditions d'existence et d'unicité dépendent alors des dimensions du problème. Pour un système carré, ces conditions sont vérifiées. Lorsque le système est sur-déterminé, il n'y a pas existence de solutions. Il est alors d'usage de choisir une solution au sens des moindres carrés : l'inverse généralisée. Quand le système est sous-déterminé, il y a une infinité de solutions et la condition d'unicité n'est pas vérifiée. On peut alors choisir la solution de plus petite norme. Ces propriétés occasionnent un caractère mal posé suivant la définition des dimensions du modèle direct.

Dans notre application, le caractère mal posé vient avant tout du fait que le signal à reconstruire est à très large bande (train d'impulsions), alors que l'information reçue est à bande limitée. De ce fait, des informations sont absentes des données et ne peuvent être obtenues par une procédure classique d'inversion. Une opération d'inversion naïve aura pour seule conséquence d'amplifier le bruit de mesure et les erreurs de modèles à cause de son caractère filtre inverse, et donc amplificateur des fréquences hors du signal utile. Ceci est lié au mauvais conditionnement du système, qui est de surcroît aggravé en présence d'atténuation. Les effets propagatifs engendrent en effet une perte supplémentaire d'information à haute fréquence.

Une solution efficace consiste à régulariser le problème, c'est-à-dire à introduire une certaine connaissance *a priori* de la solution recherchée. Dans le cas de la recherche de discontinuités franches, la solution sera considérée parcimonieuse.

1.4 Revue bibliographique

Pour résoudre le problème d'estimation des discontinuités d'un objet inspecté par ultrasons, il existe dans la littérature plusieurs familles de méthodes [Zhang et Harvey 2013]. Une première approche consiste à utiliser un modèle d'écho en fonction d'un jeu de paramètres Θ :

$y = \Phi(\Theta) +$ bruit, l'inconnue x étant contenue dans certains paramètres de Θ. La relation entre les données et les paramètres est le plus souvent non-linéaire. L'avantage de ce modèle est sa flexibilité en termes de variation des paramètres, qui peut permettre de modéliser des changements de forme dus à l'atténuation, à la dispersion et à la diffraction. Un autre avantage est la définition des paramètres dans des espaces continus, qui ne sont donc pas limités par une discrétisation. Demirli et Saniie [2001a] ont proposé de modéliser les mesures comme une somme d'échos gaussiens modulés et de résoudre le problème par des algorithmes d'optimisation non linéaire locale (Gauss-Newton). Ils utilisent plus particulièrement l'algorithme SAGE (Space Alternating Generalized Expectation-Maximization) [Ziskind et Wax 1988, Fessler et Hero 1993], une extension de la méthode EM, qui donne de bons résultats dans un contexte de CND et d'END [Demirli et Saniie 2001b]. Ces méthodes sont très sensibles aux initialisations des paramètres et requièrent soit une certaine connaissance de la solution, soit des routines tendant vers une optimisation globale, mais augmentant considérablement le temps de calcul. Des travaux postérieurs utilisent des modèles d'échos plus complexes [Lu *et al.* 2006, Demirli et Saniie 2009], permettant une plus grande flexibilité mais compliquant l'optimisation. Ces travaux ne spécifient néanmoins aucun *a priori* physique sur la façon dont les paramètres peuvent varier.

Afin d'éviter une optimisation des moindres carrés non-linéaires, qui présente une forte sensibilité aux initialisations et aux minima locaux, plusieurs auteurs ont proposé de discrétiser les paramètres du modèle pour obtenir un modèle linéaire [Hong *et al.* 2006, Lu et Michaels 2008, Zhang *et al.* 2008, Mor *et al.* 2010, Bossmann *et al.* 2012]. Ces approches utilisent un dictionnaire de grande taille qui liste les possibilités de modélisation des échos. De nombreux travaux effectuent également un apprentissage du dictionnaire [Lewicki et Sejnowski 2000, Kreutz-Delgado *et al.* 2003, Aharon *et al.* 2006, Zhang *et al.* 2008; 2012]. À cause de la grande dimension du problème, ils utilisent ensuite des méthodes rapides d'approximation parcimonieuse, de type Matching Pursuit (MP) [Mallat et Zhang 1993], qui sont peu performantes lorsque les échos se mélangent. Les méthodes décrites jusqu'ici sont considérées comme aveugles, car elles n'ont besoin d'aucun signal de référence.

Une autre façon d'appréhender le problème inverse est d'utiliser un modèle discret linéaire. On se retrouve alors dans le cas où $y = \Phi x +$ bruit, utilisé par exemple dans un contexte de CND dans [Zala 1992, Sin et Chen 1992]. Bien souvent, un opérateur de convolution est utilisé tel que $y = h * x +$ bruit, où h est la réponse impulsionnelle du système supposée connue (Φ est alors une matrice de convolution). Le modèle direct spécifie par conséquent que les données contiennent des répliques exactes de cette réponse et décalés dans le temps. Contrairement aux approches paramétriques, ce modèle direct est très contraint et permet d'utiliser des méthodes d'inversion robustes et efficaces. D'un autre côté, la résolution temporelle est limitée par la discrétisation, et le modèle s'applique à des problèmes où la forme des échos varie extrêmement peu. Les méthodes d'estimation les plus simples sont l'inversion généralisée [Sin et Chen 1992] et les méthodes basées sur l'intercorrélation [Quazi 1981, Nandi 1995]. Ces approches naïves sont malheureusement peu performantes en présence de bruit et/ou lorsque les échos se mélangent. Une solution adaptée consiste à régulariser le problème en injectant une connaissance *a priori* sur l'inconnue. L'objectif est dès lors de minimiser un critère d'attache aux données auquel on ajoute une fonction de pénalisation [Idier 2001, Zhang *et al.* 2008, Soussen *et al.* 2012].

Pour des aspects pratiques d'optimisation, des fonctions convexes et différentiables ont été utilisées, telles que la norme ℓ_2 [Idier 2001]. Le filtrage de Wiener est par exemple équi-

valent à une pénalisation ℓ_2 [Chen *et al.* 1988, Neal *et al.* 1993]. L'inconvénient de ce type de régularisation est que les solutions produites ne sont pas parcimonieuses. On préfère alors utiliser une norme ℓ_1 [Taylor *et al.* 1979, Chen *et al.* 1998] qui, de par sa non différentiabilité en zéro, produit des solutions parcimonieuses [Moulin et Liu 1999]. La convexité de la norme ℓ_1 permet l'utilisation d'algorithmes rapides qui aboutissent à un minimum unique (voir une revue dans [Tropp et Wright 2010]). O'Brien *et al.* [1990; 1994] utilisent notamment ce type de pénalisation dans un cadre de CND. Du fait de la pénalisation linéaire des amplitudes, cette régularisation produit néanmoins des solutions avec de nombreux pics de faibles amplitudes, qui sont faiblement pénalisés. Une autre solution repose sur la formulation du problème par une pénalisation ℓ_0 [Zala 1992, Rao et Kreutz-Delgado 1999, Soussen *et al.* 2011], qui compte le nombre de composantes non nulles dans l'estimé et donne donc un vrai critère de parcimonie pour la solution recherchée. Cette pénalisation est discrète, non convexe, et nécessite une exploration combinatoire des solutions. Une façon optimale de procéder est de tester toutes les combinaisons des composantes non nulles de x, ce qui est prohibitif en termes de temps de calcul (sauf pour des problèmes avec un très petit nombre de pics non nuls [He *et al.* 2011]). Il existe des méthodes sous-optimales inspirées des méthodes gloutonnes d'approximation parcimonieuse [Mallat et Zhang 1993, Pati *et al.* 1993, Chen *et al.* 1989]. Celles-ci partent d'une solution nulle et ajoutent un élément à chaque itération. L'algorithme Single Best Replacement (SBR) proposé par Soussen *et al.* [2011], et inspiré de l'algorithme SMLR utilisé pour la déconvolution sous un modèle Bernoulli-gaussien [Kormylo et Mendel 1982, Mendel 1983, Goussard *et al.* 1990, Champagnat *et al.* 1996], permet l'ajout ou le retrait d'un élément à chaque itération. Il a montré de bons résultats par rapport à des approches gloutonnes et aux approches par pénalisation ℓ_1 [Bourguignon *et al.* 2011, Selesnick et Bayram 2014], notamment dans un contexte de CND [Soussen *et al.* 2012]. Les mouvements d'un seul élément à chaque itération de l'algorithme SBR peuvent néanmoins être insuffisants lorsque les échos se mélangent. Dans une optique de mouvements plus complexes, Kaaresen [1997] a proposé les algorithmes Iterative Window Maximization (IWM) qui ont donné de bons résultats pour la déconvolution en CND [Kaaresen 1998]. On retrouve également ce type de mouvements dans [Zala 1992] dans un contexte de déconvolution pour le CND.

L'atténuation et la dispersion provoquent une distorsion des échos, avec pertes des hautes fréquences, qui s'amplifie au fur et à mesure que la distance de propagation augmente [Wear 2000]. La prise en compte de ces phénomènes est un problème majeur dans les méthodes d'inversion [Zhang et Harvey 2013]. Ils sont indirectement pris en compte dans les méthodes aveugles citées plus haut, car celles-ci considèrent une variation de la forme d'onde au cours de son parcours [Demirli et Saniie 2001a]. Cette flexibilité permet, dans la limite du modèle considéré, de s'adapter aux variations dues à l'atténuation. D'autres approches aveugles permettent une faible variation des échos entre des intervalles temporels voisins [Kaaresen et Bolviken 1999]. D'un autre côté, les méthodes qui considèrent un modèle de convolution discrète ne prennent pas du tout en compte l'atténuation. Des travaux existent en géophysique et modélisent l'atténuation grâce un modèle en Q [Hale 1981, Wang 2009]. La propagation des ondes sismiques est en effet similaire à celle des ultrasons [Kjartansson 1979]. Dans le domaine ultrasonore, l'atténuation a été modélisée dans le domaine temporel de façon empirique par un filtre à réponse impulsionnelle finie [Rasmussen 1994, Olofsson et Stepinski 2001], dont la réponse impulsionnelle varie en fonction de la distance de propagation. Le modèle d'Olofsson et Stepinski a notamment donné de bons résultats pour le

contrôle de composites. Cependant, les modèles paramétriques et empiriques n'exploitent pas de connaissance physique sur la propagation. Les modèles en loi de puissance fréquentielle [Kak et Dines 1978, Ophir et Jaeger 1982, Narayana et Ophir 1983], qui ont montré de bons résultats avec de nombreux matériaux [Szabo 1995, He 1999], semblent de ce fait plus adaptés pour modéliser les signaux ultrasonores. La dispersion peut notamment être réglée en fonction de l'atténuation grâce à des théories de la causalité [Gurumurthy et Arthur 1982, Kuc 1984, Szabo 1995]. L'utilisation de ces modèles fréquentiels dans les problèmes inverses est plus compliquée du fait de leur non-linéarité et n'a à notre connaissance pas été envisagée avant ce travail.

1.5 Axes de travail effectués pendant la thèse

Le premier axe de travail a consisté à établir un modèle direct qui prend en compte un profil physique d'atténuation et de dispersion (chapitre 2). Nous avons développé un modèle linéaire pour les signaux discrets qui permet l'utilisation de méthodes d'inversion robustes et efficaces. Pour résoudre des problèmes dus à l'échantillonnage, nous montrons également comment développer un modèle sur-échantillonné par rapport aux données (chapitre 4).

En ce qui concerne la partie méthodologique, nous dirigeons notre étude vers l'inversion par approche pénalisée avec une norme ℓ_0 (chapitre 3). Ce choix nous paraît le plus logique en termes de performances au vu des contributions récentes dans le domaine de la déconvolution parcimonieuse (algorithme SBR). Par différentes procédures, nous avons notamment montré l'efficacité de cette approche comparée aux approches naïves et aux méthodes d'estimation paramétrique. Nous avons développé plusieurs algorithmes inspirés de SBR, mais présentant une exploration combinatoire plus complexe et adaptée aux formes d'ondes oscillantes. La déconvolution pour un modèle sur-échantillonné a également été un axe de développement méthodologique important (chapitre 4). Nous avons adapté des algorithmes de déconvolution parcimonieuse pour obtenir une meilleure résolution de la solution et ainsi résoudre des problèmes de modes locaux.

Tout au long de ce travail, nous avons illustré nos modèles et méthodes avec de nombreuses expérimentations réalisées au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (LAUM). Le chapitre 5 est spécialement dédié à l'application concrète des méthodes de déconvolution parcimonieuse pour le CND. Toutes les acquisitions ne figurent évidemment pas dans ce manuscrit, mais nous avons testé des matériaux homogènes comme l'aluminium, le polyméthacrylate de méthyle (PMMA[2]), le polycarbonate, le caoutchouc synthétique et l'huile de ricin, ainsi que des matériaux hétérogènes comme des composites carbone/époxyde et des matériaux poreux.

[2]Le PMMA est également connu sous le nom de la marque Plexiglas®.

Chapitre 2

Le modèle direct des signaux ultrasonores

Sommaire

Introduction **25**

2.1 Modèle de signaux continus pour une cible ponctuelle **26**

2.1.1 Modèle fréquentiel 26

2.1.2 Écriture en fonction de la distance de propagation 27

2.1.3 L'atténuation fréquentielle 28

2.1.4 La dispersion et les théories causales 33

2.2 Modèle discret linéaire pour l'inversion **38**

2.2.1 Modèle de signaux à temps continu pour une distribution de cibles 38

2.2.2 Modèle de signaux à temps discret 39

2.2.3 Différents cas pour le modèle linéaire discret 40

2.2.4 Calcul numérique des réponses impulsionnelles d'atténuation . . 43

2.2.5 Modèle d'atténuation d'Olofsson 45

2.3 Exploitation des modèles **47**

2.3.1 Mesure en mode *pulse-echo* avec du polycarbonate 48

2.3.2 Mesure en transmission dans l'huile de ricin 53

2.3.3 Mesure aérienne en transmission dans un matériau poreux 56

2.3.4 Exploitation du modèle pour l'Évaluation Non Destructive 58

2.3.5 Problème de diffraction des cibles : application aux trous à fond plat 61

Introduction

Ce chapitre présente le modèle direct que nous construisons pour résoudre le problème inverse. Dans la section 2.1, nous décrivons la formation du signal ultrasonore en présence

d'une cible dans un milieu homogène. Ce modèle utilise la réponse instrumentale du système ainsi qu'un modèle de propagation spécifique, incluant l'atténuation. Nous détaillons plusieurs modèles d'atténuation, notamment celui qui décrit la dispersion à partir de l'atténuation grâce à des théories causales. Ensuite, dans la section 2.2, nous montrons qu'en présence de plusieurs cibles, le modèle discret échantillonné s'écrit comme un système linéaire. Nous validons dans la section 2.3 cette formulation avec des données expérimentales, tout d'abord pour comparer les modèles d'atténuation présentés. Puis le modèle est exploité pour réaliser l'évaluation non destructive d'un matériau. Enfin, nous utilisons des données acquises en présence d'un trou à fond plat et montrons les problèmes liés à la diffraction des cibles et donc les limites du modèle.

Ce chapitre est en partie tiré des publications [Carcreff *et al.* 2013c], [Carcreff *et al.* 2014a] et [Carcreff *et al.* 2014b].

2.1 Modèle de signaux continus pour une cible ponctuelle

2.1.1 Modèle fréquentiel

Nous considérons un milieu de propagation homogène et isotrope dans lequel est placée une cible ponctuelle en $\boldsymbol{r}_T$ ($\boldsymbol{r}_T$ est composé des coordonnées spatiales de la cible par rapport au centre du transducteur émetteur). La cible est supposée avoir une impédance acoustique significativement différente de celle du milieu. La mesure ultrasonore peut être effectuée avec un seul transducteur en mode *pulse-echo* ou avec deux transducteurs utilisés en mode transmission sans que le modèle ne diffère. Les deux configurations sont illustrées sur la figure 2.1.

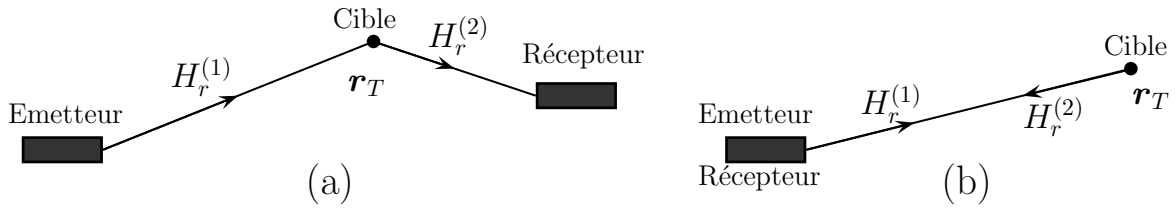


FIGURE 2.1 – Configurations possibles de mesure ultrasonore. (a) : Transmision, (b) : *pulse-echo*.

Le signal reçu par le transducteur est alors décrit dans le domaine fréquentiel par la cascade de plusieurs réponses fréquentielles [Fink et Cardoso 1984, Chen *et al.* 1988] :

$$Y(f, \boldsymbol{r}_T) = U(f)H_{ea}(f)H_r(f, \boldsymbol{r}_T)H_{ae}(f), \tag{2.1}$$

comme illustré sur la figure 2.2. Le signal $U(f)$ est l'excitation électrique fournie au transducteur électro-acoustique. Les fonctions $H_{ea}(f)$ et $H_{ae}(f)$ sont respectivement les réponses électro-acoustique et acousto-électrique du transducteur. La réponse instrumentale $H_i(f) = U(f)H_{ea}(f)H_{ae}(f)$ peut être définie en regroupant les fonctions qui ne dépendent pas de la propagation dans le matériau. L'équation (2.1) devient alors :

$$Y(f, \boldsymbol{r}_T) = H_i(f)H_r(f, \boldsymbol{r}_T). \tag{2.2}$$

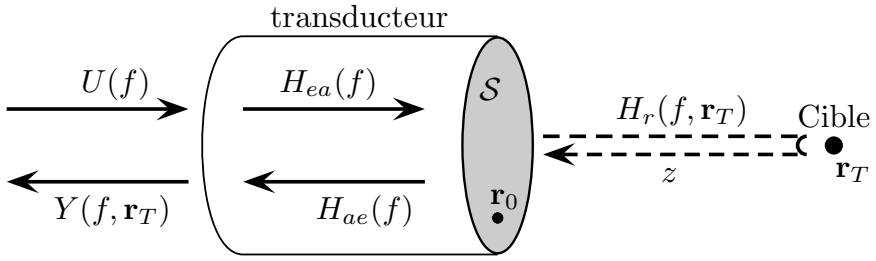


FIGURE 2.2 – Schéma de la mesure ultrasonore pour un cible ponctuelle.

La fonction de transfert de propagation $H_r(f, \boldsymbol{r}_T)$ représente la fonction relative au parcours de l'onde dans le milieu de propagation [Stephanishen 1971, Fink et Cardoso 1984]. Elle prend en compte la diffraction de la source, la propagation vers la cible, la réflexion ou la transmission par la cible et la propagation vers la surface réceptrice, tout ceci incluant le cas échéant des effets visco-élastiques. Nous verrons par la suite que ces effets se traduisent sous forme d'atténuation et de dispersion. La fonction de transfert de propagation totale s'écrit alors $H_r(f, \boldsymbol{r}_T) = H_r^{(1)}(f, \boldsymbol{r}_T) H_r^{(2)}(f, \boldsymbol{r}_T)$. On peut calculer la fonction de transfert de propagation du transducteur vers la cible $H_r^{(1)}(f, \boldsymbol{r}_T)$ grâce à l'intégrale de Rayleigh [Rayleigh 1945], qui est la somme de contributions ponctuelles intégrées sur la surface $\mathcal{S}$ [Stephanishen 1971, Harris 1981]

$$H_r^{(1)}(f, \boldsymbol{r}_T) = \int_{\boldsymbol{r}_0 \in S} \frac{e^{-jk(f)|\boldsymbol{r}_T - \boldsymbol{r}_0|}}{2\pi|\boldsymbol{r}_T - \boldsymbol{r}_0|} \mathrm{d}S, \tag{2.3}$$

où $k(f)$ est le nombre d'onde[1] (nous détaillerons ci-après sa formulation). Pour une mesure en *pulse-echo*, la fonction retour $H_r^{(2)}(f, \boldsymbol{r}_T)$ se calcule en considérant la cible comme une nouvelle source excitée par le champ créé en son emplacement et en intégrant ensuite le champ sur la surface du transducteur récepteur [Lhemery 1991, Rhyne 1977]. Cette fonction n'est pas développée ici, mais a une forme similaire à l'équation (2.3) [Lhemery 1991]. En effet, la symétrie entre $\boldsymbol{r}_T$ et $\boldsymbol{r}_0$ entraîne un principe de réciprocité entre l'émission et la réception. Pour une mesure en *pulse-echo*, ce principe implique que $H_r^{(1)}(f, \boldsymbol{r}_T) = H_r^{(2)}(f, \boldsymbol{r}_T)$ à un facteur multiplicatif près [Lhemery 1991].

Le nombre d'onde $k(f)$ dépend de la fréquence et a une forme générale complexe

$$k(f) = \beta(f) - j\alpha(f). \tag{2.4}$$

Le terme $\beta(f)$ décrit le caractère propagatif de l'onde, tel que $\beta(f) = 2\pi f / c(f)$, avec $c(f)$ la vitesse de phase des ondes acoustiques. Le terme $\alpha(f)$ traduit le caractère dissipatif de l'onde et représente l'atténuation fréquentielle dans le matériau.

2.1.2 Écriture en fonction de la distance de propagation

Nous considérons une distance de propagation moyenne z qui représente le trajet entre les centres des transducteurs émetteur et récepteur [Fink et Cardoso 1984] (voir les figures 2.1 et 2.2). Les effets de diffraction de la source et de la cible sont alors considérés comme

[1] Par convention, pour une fréquence f donnée, nous considérons $e^{j(2\pi ft - k(f)x)}$ une onde plane se propageant dans le sens des x positifs.

identiques en fonction de z. A partir des équations (2.3) et (2.4), $|\boldsymbol{r}_T - \boldsymbol{r}_0| \simeq z$ ne dépend plus de la position $\boldsymbol{r}_0$. La fonction de propagation $H_r^{(1)}(f,z)$ peut donc s'écrire

$$H_r^{(1)}(f,z) = \frac{e^{-jk(f)z}}{2\pi z} \int_{\boldsymbol{r}_0 \in S} \mathrm{d}S. \tag{2.5}$$

Par le principe de réciprocité évoqué plus haut, la fonction $H_r^{(2)}(f,z)$ a une forme similaire à un facteur multiplicatif près. On peut considérer une amplitude $b(z)$, indépendante de la fréquence, et qui dépend de plusieurs facteurs comme la surface ou les surfaces des transducteurs, la position de la cible et le changement d'impédance. On s'intéresse ici à la modélisation du problème pour une valeur fixée de z. Nous détaillons dans la partie 2.2.1 le modèle à plusieurs cibles. On peut donc écrire une forme générale de la fonction de propagation

$$\begin{aligned} H_r(f,z) &= b(z)e^{-\alpha(f)z}e^{-j\beta(f)z} \\ &= b(z)e^{-\alpha(f)z}e^{-j2\pi fz/c(f)}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Elle est composée d'un facteur d'amplitude $b(z)$, d'un terme de module $e^{-\alpha(f)z}$ qui définit l'atténuation et d'un terme de phase $e^{-j2\pi fz/c(f)}$ qui caractérise la vitesse de phase. Il faut noter que la fonction $H_r(f,z)$ est valable pour une fonction de diffraction donnée de la cible [Sin et Chen 1992], simplification nécessaire pour uniformiser l'effet de l'atténuation par rapport à z. Nous verrons dans la partie 2.3.5 l'influence de cette hypothèse. L'équation (2.2) devient donc

$$Y(f,z) = H_i(f)H_r(f,z). \tag{2.7}$$

Nous notons respectivement $y(t,z)$, $h_i(t)$ et $h_r(t,z)$ les signaux temporels correspondant à $Y(f,z)$, $H_i(f)$ et $H_r(f,z)$. Le signal temporel reçu par le capteur pour une cible est le produit de convolution à temps continu

$$y(t,z) = h_i(t) * h_r(t,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_i(\tau)h_r(t-\tau,z)\mathrm{d}\tau. \tag{2.8}$$

2.1.3 L'atténuation fréquentielle

L'atténuation $\alpha(f)$ de l'onde acoustique dans le milieu de propagation est due à plusieurs phénomènes [Krautkramer et Krautkramer 1990, chap. 6], [Sachse et Pao 1978]. Dans un matériau homogène, les deux principales causes d'atténuation sont la dissipation thermique et la diffusion. La dissipation thermique ou absorption traduit le fait que l'énergie de l'onde se transforme en chaleur à cause de la mise en mouvement des particules. La diffusion sous-entend que le matériau n'est pas strictement homogène et que de petites discontinuités provoquent un éparpillement de l'onde dans toutes les directions. Ces deux phénomènes sont de ce fait dépendants de la longueur d'onde[2] et donc de la fréquence de l'onde. En effet, les particules et discontinuités ne sont pas « vues » par une onde basse fréquence, lorsque la longueur d'onde est très supérieure à leur dimension. L'effet de l'atténuation augmente par conséquent avec la fréquence.

[2]La longueur d'onde λ est définie en fonction du nombre d'onde par $\lambda(f) = 2\pi/k(f)$. Pour un matériau homogène non dissipatif, la longueur d'onde est seulement fonction de la fréquence de l'onde : $\lambda(f) = c/f$.

Généralement, l'atténuation se modélise par une loi de puissance fréquentielle [Ophir et Jaeger 1982, Narayana et Ophir 1983]

$$\alpha(f) = \alpha_0 |f|^\gamma, \tag{2.9}$$

où α_0, le coefficient d'atténuation, et γ, le facteur de puissance, sont des paramètres réels positifs caractérisant un matériau homogène donné.

Pour la majorité des milieux, le facteur γ (sans unité) vérifie $\gamma \in]0, 2]$ [Narayana et Ophir 1983, Szabo 1995]. Pour de nombreux matériaux, le choix d'un modèle linéaire ($\gamma = 1$) s'est avéré une approximation satisfaisante [Serabian 1967, Kuc *et al.* 1976, Kak et Dines 1978, Kuc 1983; 1984]. On rencontre une atténuation non-linéaire pour des structures plus complexes de matériaux tels que le polyéthylène ($\gamma \approx 1.13$), le caoutchouc synthétique ($\gamma \approx 1.38$) ou l'huile de ricin ($\gamma \approx 1.67$) [Harris *et al.* 1983, Szabo 1995, He 1999]. Pour les tissus mous, on peut considérer $1 \leqslant \gamma \leqslant 1.5$ [Duck 1990]. Notons que les propagations sans atténuation ($\gamma = 0$) et en régime visqueux ($\gamma = 2$) présentent des équations d'onde analytiques exactes [Kelly *et al.* 2008].

Le coefficient d'atténuation α_0 indique l'affaiblissement par unité de distance et de fréquence et est donc exprimé en Np.MHz$^{-\gamma}$.m^{-1} ou en dB.MHz$^{-\gamma}$.cm^{-1}. Un coefficient α_0 nul correspond à une propagation sans dissipation. Dans la réalité, α_0 n'est jamais nul, même s'il peut être très faible, comme dans l'eau par exemple : $\alpha(f) \simeq 0.025|f|^2$ Np.MHz^{-2}.m^{-1} [Pinkerton 1949]. De nombreuses méthodes permettent de mesurer α_0 dans le cas de l'atténuation linéaire [Kuc *et al.* 1976, Kak et Dines 1978, Kuc 1983; 1984, Rokhlin *et al.* 1986] et de mesurer α_0 et γ dans le cas non linéaire [Harris *et al.* 1983, Szabo 1995, He 1999]. Les paramètres α_0 et γ peuvent également être tirés de catalogues [Selfridge 1985].

L'atténuation fréquentielle crée donc une fonction de transfert en module $e^{-\alpha_0|f|^\gamma z}$ dans l'équation (2.6). Elle a un effet de filtrage passe-bas qui s'accentue au fur et à mesure de la propagation (quand z augmente), comme illustré sur la figure 2.3. Ceci a principalement

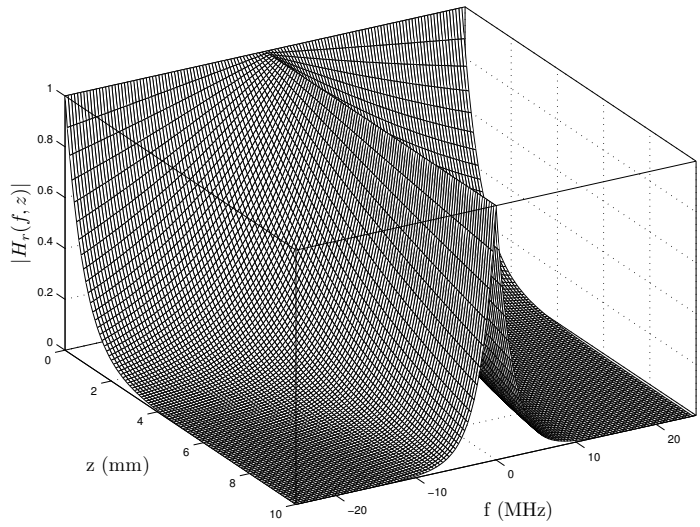


FIGURE 2.3 – Exemple de fonction d'atténuation $|H_r(f, z)|$ en fonction de la fréquence et de la distance de propagation. L'atténuation est linéaire, telle que $|H_r(f, z)| = e^{-\alpha_0|f|z}$, avec $\alpha_0 = 50$ Np.MHz^{-1}.m^{-1}.

deux effets dans une inspection par ultrasons. Premièrement, les ondes sont plus fortement

atténuées en amplitude lorsque z augmente, ce qui complique l'inspection pour de grandes distances de propagation. Deuxièmement, l'effet passe-bas provoque un étalement temporel des échos, ce qui diminue la résolution des mesures. Pour pallier le premier problème, il est d'usage d'utiliser des transducteurs plutôt basse fréquence pour inspecter des matériaux atténuants, au détriment de la résolution.

Dans la suite de ce chapitre, en section 2.3, nous montrons comment mesurer les paramètres α_0 et γ, à partir d'expériences réalisées avec des matériaux atténuants. Nous utilisons d'abord le polycarbonate qui est un polymère présentant une atténuation linéaire (partie 2.3.1). Ensuite, un cas d'atténuation non-linéaire est présenté avec l'huile de ricin (partie 2.3.2).

Lien avec l'atténuation en géophysique

En géophysique, les ondes sismiques ou radar sont utilisées pour inspecter le sol. Ce sont approximativement les mêmes modèles que ceux décrits précédemment [Wang 2009, chap. 2 et 3]. Les milieux sont caractérisés par un facteur de qualité Q qui correspond au rapport entre l'énergie maximale stockée et l'énergie perdue par cycle de déformation dans le milieu [Kjartansson 1979, Wang 2009]. Un facteur infini correspond donc à une propagation sans perte d'énergie et par conséquent à une atténuation nulle. Le coefficient d'atténuation est alors lié à Q par

$$\alpha(f) = \frac{\pi f}{Q(f)c(f)}, \tag{2.10}$$

où $c(f)$ est la vitesse des ondes. Si $Q(f)$ et $c(f)$ sont constants en fonction de la fréquence, l'atténuation est linéaire, avec $\alpha_0 = \pi/Qc$.

Nous faisons ce lien car le domaine géophysique est actif en matière de développement de méthodes inverses. De nombreux travaux sont ainsi consacrés au filtre Q inverse [Hargreaves et Calvert 1991, Wang 2009]. Le but de ce procédé est d'annuler les effets de l'atténuation et de la dispersion tout en conservant la signature instrumentale. Cela permet de réduire la perte de résolution et d'amplitude des signaux.

Exemple 1 : atténuation linéaire d'un écho gaussien

Un modèle paramétrique couramment utilisé pour modéliser les échos ultrasonores est le modèle d'écho gaussien ou ondelette de Gabor [Kuc *et al.* 1976, Narayana et Ophir 1983, Wear 2000]. La réponse instrumentale s'écrit alors comme une gaussienne modulée par une sinusoïde

$$h_i(t) = Ae^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma_t^2}} \cos\left(2\pi f_0(t-t_0) + \phi\right), \tag{2.11}$$

avec A l'amplitude, t_0 la position temporelle, σ_t^2 la variance temporelle de la gaussienne, f_0 la fréquence d'oscillation et ϕ le décalage de phase. On peut montrer que le module de la transformée de Fourier de $h_i(t)$ est composé de deux gaussiennes, centrées en f_0 et $-f_0$ et de variance fréquentielle σ_f^2 [Wear 2000]. En négligeant la contribution de la gaussienne en $-f_0$, le module de la transformée de Fourier de cette forme d'onde pour les fréquences positives est

$$|H_i(f)| = A'e^{-\frac{(f-f_0)^2}{2\sigma_f^2}}, \tag{2.12}$$

avec $A' = A\sigma_t\sqrt{2\pi}$ et $\sigma_f = 1/(2\pi\sigma_t)$. Nous ne nous intéressons pas à la phase ici pour observer la perte d'amplitude et de résolution. Nous développerons l'étude de la phase dans la partie 2.1.4. D'après l'équation (2.7), le module de la transformée de Fourier de l'écho, après une propagation de distance z, est $|Y(f,z)| = |H_i(f)|e^{-\alpha_0|f|z}$ et s'écrit, pour $f \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} |Y(f,z)| &= A'e^{-\frac{(f-f_0)^2}{2\sigma_f^2}} e^{-\alpha_0 f z} \\ &= A'e^{-\frac{f^2+f_0^2-2ff_0+2\alpha_0 f z\sigma_f^2}{2\sigma_f^2}} \\ &= A'e^{-\frac{f_0^2+f^2-2f(f_0-\alpha_0\sigma_f^2 z)}{2\sigma_f^2}}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

En posant

$$f_1(z) = f_0 - \alpha_0\sigma_f^2 z, \tag{2.14}$$

nous aboutissons à

$$\begin{aligned} |Y(f,z)| &= A'e^{-\frac{f_0^2+f^2-2ff_1(z)+f_1(z)^2-f_1(z)^2}{2\sigma_f^2}} \\ &= A'e^{\frac{f_1(z)^2-f_0^2}{2\sigma_f^2}} e^{-\frac{(f-f_1(z))^2}{2\sigma_f^2}}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Le spectre en module du signal transmis est donc une nouvelle gaussienne qui a la même variance σ_f^2 mais une fréquence centrale $f_1(z)$ plus petite que f_0. L'atténuation crée donc un décalage linéaire de la fréquence centrale f_1 en fonction de la distance de propagation z. On peut noter que $f_1(z)$ s'annule pour une distance maximale :

$$z_{max} = \frac{f_0}{\alpha_0\sigma_f^2}. \tag{2.16}$$

La fréquence $f_1(z)$ étant inférieure à f_0, le terme d'amplitude $e^{f_1(z)^2-f_0^2/2\sigma_f^2}$ diminue lorsque z augmente. C'est ce terme qui crée la décroissance exponentielle en amplitude due à l'atténuation.

Un exemple simulé est donné sur la figure 2.4. Nous traçons le module de $Y(f,z)$ pour trois distances de propagation z sur la figure 2.4b. La fréquence centrale diminue quand la distance z augmente, tandis que la largeur de bande – liée à σ_f – reste constante. Les formes temporelles correspondantes sont également tracées sur la figure 2.4c, montrant l'étalement temporel quand z augmente. Dans la réalité, les échos sont retardés temporellement à cause des distances de propagation. Cet aspect n'est pas pris en compte ici pour bien montrer le comportement en amplitude. De plus, dans les domaines temporel et fréquentiel, les signaux sont normalisés pour plus de clarté. En réalité les signaux subissent une forte décroissance en amplitude à cause de l'atténuation. La figure 2.4d montre le décalage linéaire de la fréquence centrale en fonction de la distance de propagation, avec une pente de $-\alpha_0\sigma_f^2 = -0.0465\,\text{MHz/mm}$.

Exemple 2 : atténuation quadratique d'un écho gaussien

Nous appliquons maintenant au même écho gaussien $|H_i(f)|$ une atténuation quadratique caractérisée par la fonction de transfert en module $|H_r(f,z)| = e^{-\alpha_0|f|^2 z}$. En négligeant la

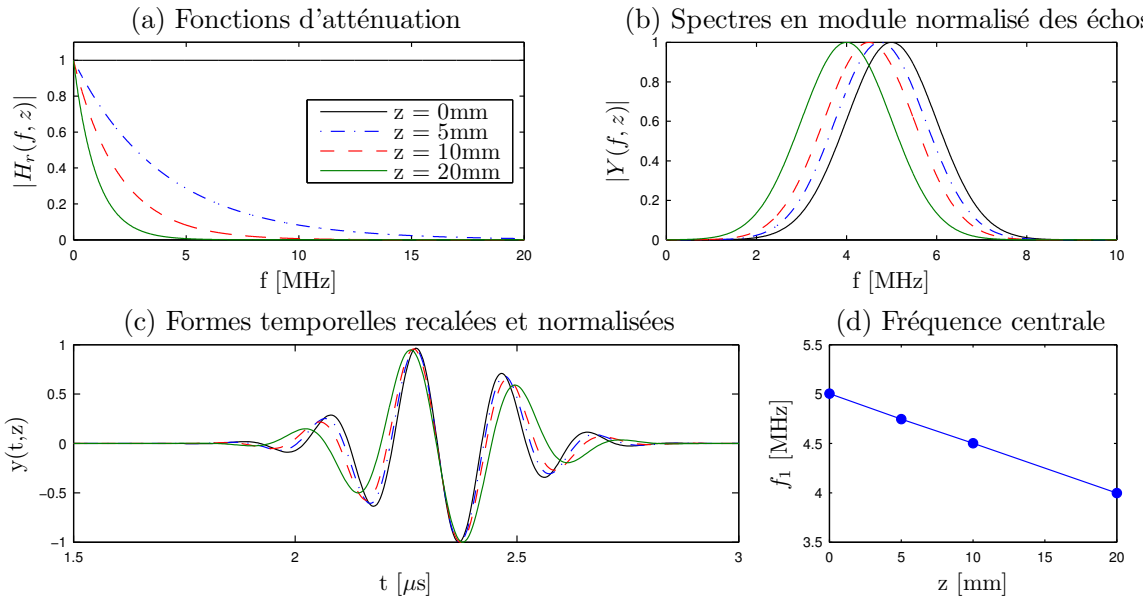


FIGURE 2.4 – Effets d'une atténuation linéaire avec $\alpha_0 = 50\,\text{Np.MHz}^{-1}.\text{m}^{-1}$ pour plusieurs distances de propagation $z = 0,\ 5,\ 10,\ 20\,\text{mm}$. (a) : Modules des fonctions de transfert $|H_r(f,z)|$. (b) : modules $|Y(f,z)|$. (c) : signaux temporels $y(t,z)$, normalisés et de même retard de phase. (d) : fréquences centrales des échos en fonction de la distance de propagation. Les paramètres de l'écho gaussien $h_i(t)$ sont $A = 1$, $f_0 = 5\,\text{MHz}$, $\sigma_f = 1$, $t_0 = 2.33\,\mu\text{s}$ et $\phi = 1.867\,\text{rad}$.

contribution des fréquences négatives, nous avons donc pour les fréquences positives

$$\begin{aligned} |Y(f,z)| &= |H_i(f)|e^{-\alpha_0 f^2 z} \\ &= A' e^{-\frac{(f-f_0)^2}{2\sigma_f^2}} e^{-\alpha_0 f^2 z} \\ &= A' e^{-\frac{f^2+f_0^2-2ff_0+2\alpha_0 f^2 z\sigma_f^2}{2\sigma_f^2}} \\ &= A' e^{-\frac{f_0^2+f^2(1+2\alpha_0\sigma_f^2 z)-2ff_0}{2\sigma_f^2}}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

En posant

$$f_1(z) = \frac{f_0}{1+2\alpha_0\sigma_f^2 z}, \tag{2.18}$$

et

$$\sigma'_f(z) = \frac{\sigma_f^2}{1+2\alpha_0\sigma_f^2 z}, \tag{2.19}$$

on aboutit à

$$\begin{aligned} |Y(f,z)| &= A' e^{-\frac{f_0^2/(1+2\alpha_0\sigma_f^2 z)+f^2-2ff_1(z)+f_1(z)^2-f_1(z)^2}{2\sigma'_f(z)^2}} \\ &= A' e^{\frac{f_1(z)^2-f_0^2/(1+2\alpha_0\sigma_f^2 z)}{2\sigma'_f(z)^2}} e^{-\frac{(f-f_1(z))^2}{2\sigma'_f(z)^2}}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Pour une distance de propagation z, le module $|Y(f,z)|$ est donc une gaussienne de fréquence centrale $f_1(z)$ et de variance $\sigma_f'^2(z)$. Comme pour l'atténuation linéaire, la fréquence centrale de l'écho diminue lorsque la distance de propagation augmente, mais de façon plus significative. La largeur spectrale diminue également lorsque z augmente, effet qui n'apparaissait pas avec l'atténuation linéaire. Nous retrouvons ces effets sur la figure 2.5, qui reprend les mêmes simulations que dans la figure 2.4 dans le cas de l'atténuation quadratique. On remarque que ceux-ci sont plus accentués pour l'atténuation quadratique : baisse non-linéaire de la fréquence centrale et élargissement temporel dû à la baisse de la variance fréquentielle.

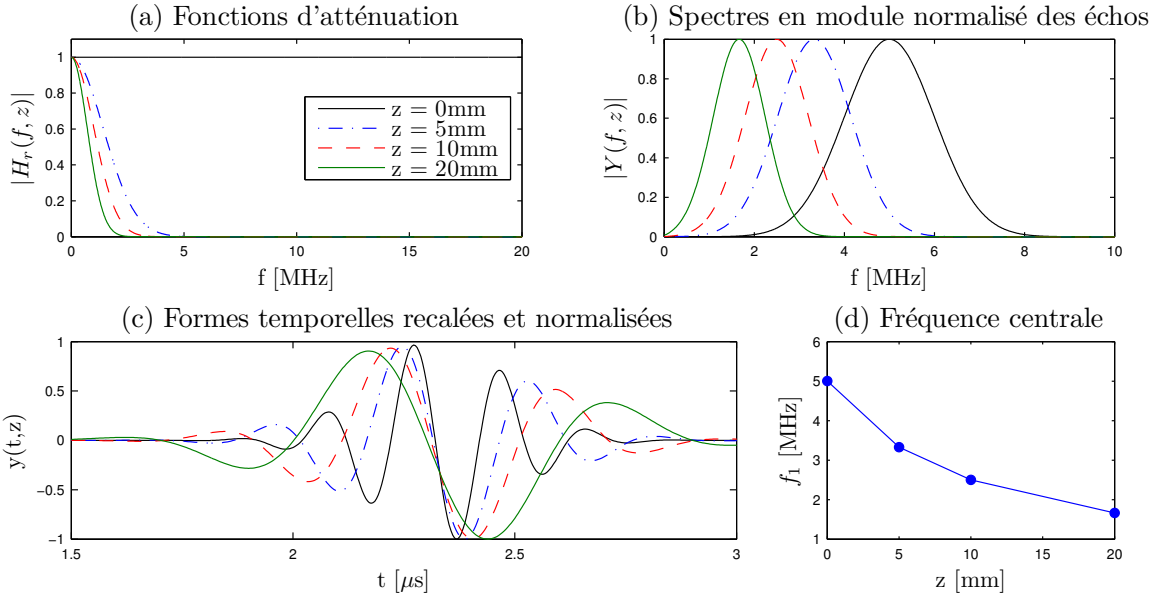


FIGURE 2.5 – Effets d'une atténuation quadratique avec $\alpha_0 = 50\,\text{Np.MHz}^{-2}.\text{m}^{-1}$ pour plusieurs distances de propagation $z = 0,\ 5,\ 10,\ 20\,\text{mm}$. (a) : Module des fonctions de transfert $|H_r(f,z)|$. (b) : modules $|Y(f,z)|$. (c) : signaux temporels $y(t,z)$, normalisés et de même retard de phase. (d) : fréquences centrales des échos en fonction de la distance de propagation. Les paramètres de l'écho gaussien $h_i(t)$ sont $A = 1$, $f_0 = 5\,\text{MHz}$, $\sigma_f = 1$, $t_0 = 2.33\,\mu\text{s}$ et $\phi = 1.867\,\text{rad}$.

2.1.4 La dispersion et les théories causales

Le but est ici de décrire précisément $H_r(f,z)$ pour respecter la physique des ondes ultrasonores. En effet, l'atténuation et la dispersion jouent respectivement sur le module et la phase de $H_r(f,z)$. La relation entre module et phase doit respecter le fait que la réponse impulsionnelle $h_r(t,z)$ est réelle et causale.

Tout d'abord, la réponse impulsionnelle correspondant à $H_r(f,z)$ doit être réelle, ce qui implique une symétrie hermitienne $H_r(-f,z)^* = H_r(f,z)$, où l'exposant $*$ indique le conjugué complexe. De ce fait, le nombre d'onde défini par l'équation (2.4) doit être à symétrie anti-hermitienne, signifiant que $\alpha(f)$ est paire et $\beta(f)$ impaire.

La dispersion est due au fait que la vitesse de propagation n'est pas constante en fonction de la fréquence de l'onde. Comme le montre l'équation (2.6), la dispersion provoque une

distorsion de la phase en fonction de la distance et de la fréquence [Droin *et al.* 1998, Wear 2000, Haiat *et al.* 2006]. Dans les milieux homogènes, la seule cause de dispersion est l'atténuation décrite dans la partie précédente [Lee *et al.* 1990]. On parle dans ce cas d'atténuation dispersive. En effet, en présence d'atténuation (modification du module), la dispersion (modification de la phase) apparaît pour assurer la cohérence physique de la propagation. La dispersion joue donc un rôle équilibrant dans la fonction de transfert de propagation $H_r(f,z)$. Plutôt que de mesurer la dispersion, il est d'usage de la déduire à partir de l'atténuation qui est décrite par un modèle fiable et relativement simple (équation (2.9)). Ce calcul met en jeu les théories causales des systèmes physiques développées pour les ondes électromagnétiques par Kramers et Kronig [Kronig 1926, Kramers 1927].

Nous allons maintenant étudier plusieurs modèles de phase de la fonction de transfert de propagation.

Modèle à phase linéaire

La première approche consiste à considérer une vitesse de phase constante $c(f) = c_0$ [Carstensen et Schwan 1959]. Kak et Dines [1978] ont proposé un tel modèle pour une atténuation linéaire, aboutissant à une phase linéaire $2\pi f z/c_0$ dans la fonction de transfert. Cela correspond à un retard pur de $t_0 = z/c_0$ pour chaque phase du signal. La vitesse c_0 est également la vitesse de groupe. La fonction de transfert de propagation s'écrit alors

$$H_r(f,z) = b(z)e^{-\alpha(f)z}e^{-j2\pi f z/c_0}. \tag{2.21}$$

Dans le cas d'une atténuation linéaire $\alpha(f) = \alpha_0|f|$, la réponse impulsionnelle correspondante pour $b(z) = 1$ est [Kak et Dines 1978]

$$h_r(t,z) = \frac{1}{\pi}\frac{\alpha_0 z/2\pi}{(\alpha_0 z/2\pi)^2 + (t - z/c_0)^2}. \tag{2.22}$$

Cette réponse est symétrique par rapport à t_0 et est de ce fait non-causale (voir figure 2.7).

La causalité

Un système est causal si sa réponse impulsionnelle est strictement nulle pour les temps négatifs. Des conditions sont néanmoins nécessaires pour que $H_r(f,z)$ soit le spectre en module d'une fonction causale [Papoulis 1962], et que le calcul soit possible. Dans ce cas et pour notre problème, les parties réelles et imaginaires de $H_r(f,z)$ sont reliées par une paire de transformées de Hilbert pour que $h_r(t,z)$ soit causale [Papoulis 1962] (voir le détail en annexe A.1).

Premièrement, la fonction de transfert $H_r(f,z)$ doit être de carré intégrable [Papoulis 1962]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |H_r(f,z)|^2 \mathrm{d}f < \infty. \tag{2.23}$$

Dans le cas d'une atténuation en loi de puissance $|H_r(f,z)| = e^{-\alpha_0|f|^\gamma z}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |H_r(f,z)|^2 \mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\alpha_0|f|^\gamma z}\mathrm{d}f. \tag{2.24}$$

Cette intégrale est bien convergente pour $\gamma > 0$. Deuxièmement, $H_r(f,z)$ doit vérifier la relation de Paley-Wiener qui est une condition nécessaire et suffisante sur le module d'une fonction de transfert pour qu'il puisse définir une réponse impulsionnelle causale [Papoulis 1962] :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left|\ln\left|H_r(f,z)\right|\right|}{1+f^2}\mathrm{d}f < \infty. \tag{2.25}$$

Pour le modèle d'atténuation (2.9), nous avons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left|\ln\left|H_r(f,z)\right|\right|}{1+f^2}\mathrm{d}f = \alpha_0 z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f|^\gamma}{1+f^2}\mathrm{d}f. \tag{2.26}$$

L'inégalité (2.25) est respectée seulement pour $\gamma < 1$ [He 1999, Kelly *et al.* 2008, Szabo 1994], et donc $h_r(t,z)$ n'est pas causale pour $\gamma \geqslant 1$. En acoustique, plusieurs méthodes ont été développées pour calculer le terme de phase et se rapprocher d'une réponse impulsionnelle causale : le modèle *nearly-local* [O'Donnell *et al.* 1978], le modèle *time-causal* [Szabo 1994], le modèle à minimum de phase [Gurumurthy et Arthur 1982, Kuc 1983; 1984]. Ces modèles sont équivalents pour une atténuation linéaire [Gurumurthy et Arthur 1982, He 1999]. Nous avons choisi d'utiliser le modèle à minimum de phase car il a donné une bonne concordance avec des données expérimentales dans le cas d'une atténuation linéaire et non-linéaire [He 1999]. Il peut de surcroît être adapté à un modèle de signaux à temps discret [Kuc 1983; 1984, Oppenheim et Schafer 1989].

Définition d'un temps de vol minimal pour respecter la causalité

En acoustique, la dispersion implique que la vitesse des ondes augmente avec la fréquence. Elle est appelée dispersion « anormale » (*anomalous dispersion*) en opposition à une dispersion « normale » (*normal dispersion*) pour laquelle la vitesse décroît avec la fréquence [Szabo 1995]. La dispersion « normale » est une convention établie pour les ondes électromagnétiques. On peut donc considérer qu'il existe une vitesse c_∞ obtenue lorsque $f \to \infty$ [Kelly *et al.* 2008, Wang 2009]. Pour une distance de propagation z donnée, on a donc un temps de vol minimal $t_0 = z/c_\infty$. De ce fait, pour respecter la causalité, une onde émise à $t = 0$ ne doit pas apparaître avant t_0 pour une cible placée en z. On peut donc définir le nombre d'onde comme

$$k(f) = \frac{2\pi f}{c_\infty} + \epsilon(f) - j\alpha(f), \tag{2.27}$$

où $\epsilon(f)$ représente la partie dispersive de la propagation. La vitesse de phase s'écrit alors

$$c(f) = \left(\frac{1}{c_\infty} + \frac{\epsilon(f)}{2\pi f}\right)^{-1}. \tag{2.28}$$

La fonction de transfert de propagation (2.6) peut de ce fait être exprimée suivant

$$H_r(f,z) = b(z)e^{-\alpha(f)z}e^{-j2\pi fz/c_\infty}e^{-j\epsilon(f)z}. \tag{2.29}$$

Il est possible de regrouper les parties dépendant de l'atténuation et de la dispersion dans une même fonction de transfert :

$$H_a(f,z) = e^{-\alpha(f)z}e^{-j\epsilon(f)z}, \tag{2.30}$$

le reste représentant le terme à phase linéaire $b(z)e^{-j2\pi fz/c_\infty}$, qui est la fonction de propagation sans atténuation, de fait causale. Ce découpage permet de séparer la partie propagation de la partie atténuation dispersive et sera utile pour construire le modèle numérique. Dans le domaine temporel, on a donc

$$h_r(f,z) = b(z)\delta(t - z/c_\infty) * h_a(t,z), \tag{2.31}$$

où $h_a(t,z)$ est la réponse impulsionnelle correspondant à $H_a(f,z)$.

Modèle à phase dispersive pour les signaux à temps discret

Dans le cas des signaux à temps continu, Gurumurthy et Arthur [1982] ont proposé, pour une atténuation linéaire, un modèle à minimum de phase [Papoulis 1962, Oppenheim et Schafer 1989] pour calculer la partie dispersive de $H_a(f,z)$. Une fonction à minimum de phase indique que sa réponse impulsionnelle est causale et a un retard de phase minimal par rapport à l'origine [Oppenheim et Schafer 1989]. Pour respecter la condition de Paley-Wiener et calculer la phase, Gurumurthy et Arthur considèrent une fréquence au-delà de laquelle l'atténuation est sous-linéaire ($\gamma < 1$). C'est un artifice de calcul permettant de satisfaire la condition aux limites (2.25). La partie dispersive $\epsilon(f)$ a alors une formulation analytique [Gurumurthy et Arthur 1982]. Ce modèle est équivalent à ceux établis par O'Donnell *et al.* [O'Donnell *et al.* 1978] et Szabo [Szabo 1994] dans le cas de l'atténuation linéaire [He 1999]. Le calcul de cette phase est également possible en considérant des signaux à temps discret pour une atténuation $\alpha(f)$ quelconque [Oppenheim et Schafer 1989, Kuc 1984] :

$$\epsilon(f) = -\frac{1}{f_S}\mathcal{P}\int_{-\frac{f_S}{2}}^{\frac{f_S}{2}} \alpha(g)\cot\left(\frac{\pi}{f_S}(f-g)\right)\mathrm{d}g, \tag{2.32}$$

où f_S est la fréquence d'échantillonnage et $\mathcal{P}$ est la valeur principale de Cauchy de l'intégrale[3]. Le détail du calcul de l'équation (2.32) est donné en annexe A.2. Kuc a utilisé ce modèle pour calculer des réponses impulsionnelles de propagation pour une atténuation linéaire [Kuc 1983; 1984]. C'est ce modèle, parfaitement applicable à un modèle d'atténuation non-linéaire [He 1999], que nous utilisons dans notre modèle d'atténuation dispersive. Pour un modèle d'atténuation en loi de puissance (2.9), la phase s'écrit

$$\epsilon(f) = -\frac{\alpha_0}{f_S}\mathcal{P}\int_{-\frac{f_S}{2}}^{\frac{f_S}{2}} |g|^\gamma \cot\left(\frac{\pi}{f_S}(f-g)\right)\mathrm{d}g. \tag{2.33}$$

C'est la formulation courante de la littérature et qui est approchée par intégration numérique. Nous avons néanmoins montré que, pour $\gamma = 1$, l'intégrale (2.33) a une expression analytique [Carcreff *et al.* 2014b], développée en annexe A.2.1

$$\epsilon(f) = -\frac{\alpha_0 f_S}{\pi^2}\left[\mathrm{Cl}_2\left(\frac{2\pi f}{f_S}+\pi\right) - \mathrm{Cl}_2\left(\frac{2\pi f}{f_S}\right)\right], \tag{2.34}$$

[3] La valeur principale de Cauchy de l'intégrale de $f(x)$ qui a une singularité en a est définie par

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{a-\epsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a+\epsilon}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x\right).$$

où Cl_2 est la fonction de Clausen à l'ordre 2 [Maximon 2003]. Nous montrons des exemples de calculs numériques dans la partie 2.2.4.

Sur la figure 2.6a, un exemple de phase dispersive est donné, pour une atténuation linéaire ($\gamma = 1$) et pour différentes valeurs de α_0. L'équation (2.33) montre que la phase $\epsilon(f)$ est

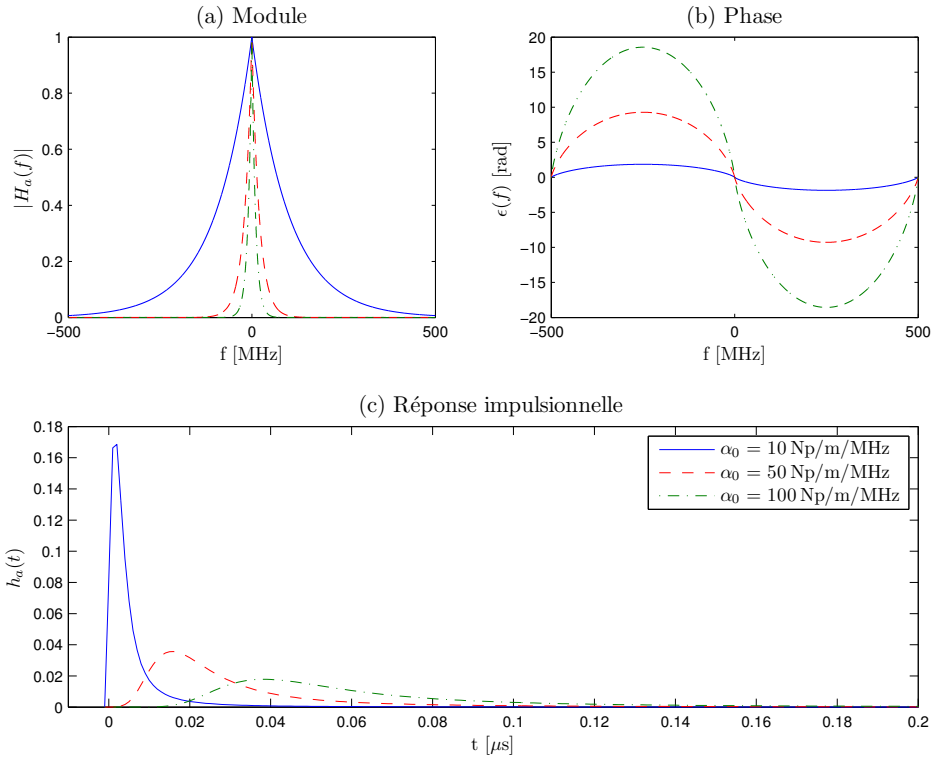


FIGURE 2.6 – Exemples de modèles à atténuation linéaire et phase dispersive pour plusieurs valeurs du coefficient d'atténuation $\alpha_0 = 10,\ 50,\ 100\,\text{Np.MHz}^{-1}\text{.m}^{-1}$ et pour une distance de propagation $z = 1\,\text{mm}$. (a) : Modules $|H_a(f,z)| = e^{-\alpha_0|f|z}$, (b) : phases $\epsilon(f)$, (c) : réponses impulsionnelles $h_a(t,z)$ obtenues par tranformée de Fourier inverse de $H_a(f,z) = e^{-\alpha_0|f|z}e^{-\epsilon(f)z}$.

linéaire en fonction de α_0, ce qui est vérifié dans la figure 2.6b. Les réponses impulsionnelles obtenues par transformées de Fourier inverse sont également tracées sur la figure 2.6c. On peut vérifier qu'elles sont causales. Il est également à noter que le retard de groupe augmente avec α_0.

Comparaison des réponses impulsionnelles

Nous comparons ici les réponses impulsionnelles $h_r(t,z)$ obtenues par trois modèles d'atténuation :

1. sans atténuation et phase linéaire : $H_r(f,z) = b(z)e^{-j2\pi fz/c_0}$
2. avec atténuation linéaire et phase linéaire : $H_r(f,z) = b(z)e^{-\alpha_0|f|z}e^{-j2\pi fz/c_0}$
3. avec atténuation linéaire et phase dispersive : $H_r(f,z) = b(z)e^{-\alpha_0|f|z}e^{-j2\pi fz/c_\infty}e^{-j\epsilon(f)z}$

Les modèles 1 et 2 ont des réponses impulsionnelles analytiques, respectivement $b(z)\delta(t - z/c_0)$ et la réponse de l'équation (2.22), tandis que celle du modèle 3 est calculée numériquement par transformée de Fourier inverse de $H_r(f, z)$. Arbitrairement, la vitesse c_∞ est réglée à la vitesse de groupe $c_0 = 2000\,\text{m.s}^{-1}$. Ce réglage nous permet de mieux observer la causalité. Dans la réalité, $c_0 > c_\infty$, comme nous le verrons dans la section expérimentale 2.3 à la fin de ce chapitre. La cible est placée à une distance $z = 1\,\text{mm}$ avec une amplitude $b(z) = 1$. Les trois réponses sont tracées sur la figure 2.7. La réponse sans atténuation est une impulsion

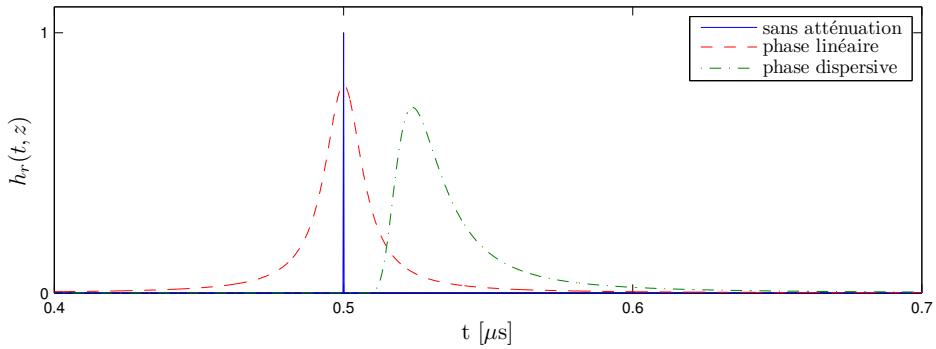


FIGURE 2.7 – Réponses impulsionnelles simulées $h_r(t, z)$ en utilisant trois modèles : sans atténuation, avec atténuation et phase linéaires, et avec atténuation linéaire et phase dispersive. Paramètres : $c_0 = c_\infty = 2000\,\text{m.s}^{-1}$, $\gamma = 1$, $\alpha_0 = 50\,\text{Np.MHz}^{-1}\text{.m}^{-1}$, $z = 1\,\text{mm}$ et $b(z) = 1$. Le temps de vol minimal est $t_0 = z/c_\infty = 0.5\,\mu\text{s}$.

placée en $t_0 = z/c_0 = 0.5\,\mu\text{s}$. Nous observons que la réponse avec une phase linéaire a une forme symétrique, des deux côtés de t_0, et est donc non-causale (*cf.* équation (2.22)). La réponse avec dispersion apparaît causale, même si elle ne l'est pas au sens strict car elle viole la condition de Paley-Wiener (2.25). On observe cependant que le signal est nul numériquement avant t_0. Nous étudierons le calcul numérique de cette réponse impulsionnelle dans la partie 2.2.4.

2.2 Modèle discret linéaire pour l'inversion

2.2.1 Modèle de signaux à temps continu pour une distribution de cibles

Le milieu est maintenant considéré comme ayant une distribution quelconque continue $b(z)$ de cibles. À partir des équations (2.8) et (2.31), le signal temporel reçu est la somme des contributions de toutes les cibles

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_z h_i(t) * h_r(t, z)\mathrm{d}z \\ &= \int_z b(z)h_i(t) * h_a(t - z/c_{\text{ref}}, z)\mathrm{d}z \\ &= \int_z b(z)\left(\int_\tau h_i(t - \tau)h_a(\tau - z/c_{\text{ref}}, z)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}z, \end{aligned} \tag{2.35}$$

où z définit la distance de propagation et $b(z)$ le contenu en amplitude de la distribution. La vitesse de référence appelée c_{ref} permet de s'adapter à plusieurs modèles. Pour un modèle

causal, il faut utiliser $c_{\text{ref}} = c_\infty$, où c_∞ est la vitesse de phase pour les fréquences tendant vers l'infini. Pour un modèle basé sur la vitesse de groupe, on emploie $c_{\text{ref}} = c_0$. Le but de l'inversion est d'estimer $b(z)$ à partir d'une version échantillonnée de $y(t)$. La reconstruction est plus efficace si des connaissances sont disponibles *a priori* sur la distribution spatiale. Nous détaillons dans le chapitre suivant un modèle spécifique de distribution.

2.2.2 Modèle de signaux à temps discret

Modèle générique

Nous considérons un signal à temps discret $y[n] = y(nT_S), n = 0, \ldots, N_y - 1$ où $T_S = 1/f_S$ est la période d'échantillonnage. A partir de l'équation (2.35), ce signal s'écrit

$$y[n] = y(nT_S) = \int_z b(z) \int_\tau h_i(nT_S - \tau) h_a(\tau - z/c_{\text{ref}}, z) \mathrm{d}\tau \mathrm{d}z. \tag{2.36}$$

Pour généraliser l'écriture et ne pas être limité par la résolution de l'échantillonnage, nous discrétisons l'intégrale de la convolution temporelle (intégrale par rapport à τ) par la méthode des rectangles avec un pas constant Δ_t. Nous posons $\tau = m\Delta_t$ et aboutissons à :

$$\begin{aligned} y[n] &\simeq \int_z b(z)\Delta_t \sum_m h_i(nT_S - m\Delta_t) h_a\left(m\Delta_t - \frac{z}{c_{\text{ref}}}, z\right) \mathrm{d}z \\ &\simeq \Delta_t \sum_m h_i(nT_S - m\Delta_t) \int_z b(z) h_a\left(m\Delta_t - \frac{z}{c_{\text{ref}}}, z\right) \mathrm{d}z. \end{aligned} \tag{2.37}$$

D'une façon similaire, l'intégrale spatiale est discrétisée en posant $z = p\Delta_z$:

$$y[n] \simeq \Delta_t\Delta_z \sum_m h_i(nT_S - m\Delta_t) \sum_p b(p\Delta_z) h_a\left(m\Delta_t - \frac{p\Delta_z}{c_{\text{ref}}}, p\Delta_z\right). \tag{2.38}$$

Modèle discret sur-échantillonné

Nous définissons maintenant les pas Δ_t et Δ_z comme des multiples du pas de référence qui est la période d'échantillonnage. Le but de ce formalisme est de pouvoir régler la résolution de reconstruction d'une façon arbitraire, mais toujours pour des multiples de T_S qui est fixé par les données. Il y a donc un facteur de sur-échantillonnage K à choisir et qui définit les résolutions du modèle

$$\Delta_t = \frac{T_S}{K}, \tag{2.39}$$

et

$$\Delta_z = \frac{c_{\text{ref}} T_S}{K}. \tag{2.40}$$

Nous aboutissons à

$$y[n] \simeq \Delta_t\Delta_z \sum_m h_i\left(nK - m\Delta_t\right) \sum_p b\left(p\Delta_z\right) h_a\left((m-p)\Delta_t, p\Delta_z\right). \tag{2.41}$$

Modèle compact

Nous notons maintenant les signaux à temps discret

$$\left\{\begin{array}{rcl} h_i[m] & = & h_i(m\Delta_t) \\ h_a[\ell,p] & = & h_a(\ell\Delta_t, p\Delta_z) \\ x[p] & = & \Delta_t\Delta_z b(p\Delta_z). \end{array}\right. \tag{2.42}$$

L'équation (2.41) devient alors

$$y[n] \simeq \sum_m h_i[nK-m] \sum_p h_a[m-p,p]x[p]. \tag{2.43}$$

Nous considérons les vecteurs

$$\boldsymbol{y} = \Big[y[0]\cdots y[N_y-1]\Big]^T, \tag{2.44}$$

$$\boldsymbol{x} = \Big[x[0]\cdots x[N_x-1]\Big]^T, \tag{2.45}$$

$$\boldsymbol{h}_i = \Big[h_i[0]\cdots h_i[N_h-1]\Big]^T, \tag{2.46}$$

et

$$\boldsymbol{h}_a(z_p) = \Big[h_a[0,p]\cdots h_a[N_x-1,p]\Big]^T, \tag{2.47}$$

où ^{T} symbolise la transposition. Les tailles N_x et N_y ne sont pas nécessairement égales, N_x dépendant des hypothèses de bord de la convolution [Idier 2001]. Nous montrerons dans la partie 2.2.3 plusieurs conventions qui relient N_x à N_y et N_h. L'équation (2.43) peut alors se mettre sous la forme compacte :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= \mathbf{H}_i\mathbf{H}_a\boldsymbol{x} \\ &= \mathbf{G}\boldsymbol{x}, \end{aligned} \tag{2.48}$$

où $\mathbf{H}_i \in \mathbb{R}^{N_y\times N_x}$ est la matrice de convolution correspondant à la réponse instrumentale $\boldsymbol{h}_i$. Pour $K = 1$, cette matrice a une structure de Toeplitz [Gray 2006], c'est-à-dire que les diagonales sont composées de valeurs identiques. Pour $K > 1$, nous verrons qu'elle correspond, à un ordonnancement près des colonnes, à la concaténation de K matrices de Toeplitz. $\mathbf{H}_a \in \mathbb{R}^{N_x\times N_x}$ est la matrice d'atténuation composée des réponses impulsionnelles $\boldsymbol{h}_a(z_p)$ pour chaque colonne $p = 0,\ldots,N_x-1$. La matrice $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{N_y\times N_x}$ combine à la fois les effets de l'instrument et de la propagation dans le milieu. Le modèle des données (2.48) est donc linéaire par rapport à $\boldsymbol{x}$ qui est l'inconnue du problème inverse. Nous détaillons ci-après plusieurs formalismes de modèle.

2.2.3 Différents cas pour le modèle linéaire discret

Cas sans atténuation et sans sur-échantillonnage

Dans le cas sans atténuation, la réponse impulsionnelle d'atténuation est une impulsion de Dirac : $h_a(t-z/c_{\text{ref}},z) = \delta(t-z/c_{\text{ref}})$. Sans sur-échantillonnage ($K=1$), le pas de discrétisation Δ_t est réglé à la période d'échantillonnage : $\Delta_t = T_S$. L'équation discrète (2.43) devient de ce fait

$$y[n] \simeq \sum_m h_i[n-m] \sum_p h_a[m-p,p]x[p] = \sum_m h_i[n-m]x[m], \tag{2.49}$$

qui est équivalent à un produit de convolution discrète. A partir de l'équation (2.49), chaque élément $y[n]$ est donc le produit scalaire euclidien entre $\boldsymbol{h}_i^T$ retournée et $\boldsymbol{x}$. Dans le modèle matriciel, chaque ligne contient donc une version retournée de $\boldsymbol{h}_i$. On obtient alors

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{H}_i \boldsymbol{x}, \tag{2.50}$$

où la matrice $\mathbf{H}_i$ est de Toeplitz et peut être définie suivant des conditions de bords particulières en fonction des hypothèses sur le signal $\boldsymbol{x}$. La matrice complète qui ne fait aucune hypothèse hors du support de $\boldsymbol{x}$ est donc

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} h_i[N_h-1] & \cdots & \cdots & h_i[0] & & & \\ & h_i[N_h-1] & \cdots & \vdots & \ddots & 0 & \\ & & \ddots & \vdots & \cdots & h_i[0] & \\ & & & h_i[N_h-1] & \cdots & \vdots & \ddots \\ & & & & \ddots & \vdots & \cdots \\ & 0 & & & & h_i[N_h-1] & \cdots \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ h_i[0] \\ \cdots \\ h_i[0] \end{matrix}. \tag{2.51}$$

La taille de $\boldsymbol{x}$ est donc $N_x = N_y + N_h - 1$. Dans le cadre d'un problème inverse où il faut retrouver $\boldsymbol{x}$, le problème est sous-déterminé. On peut également utiliser une formulation qui considère $\boldsymbol{x}$ nul au-delà de ses bornes. La matrice devient alors

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} h_i[0] & & 0 \\ \vdots & h_i[0] & \\ h_i[N_h-1] & \vdots & \ddots \\ & h_i[N_h-1] & \ddots \\ 0 & & \ddots \\ & & h_i[N_h-1] \end{bmatrix}, \tag{2.52}$$

définissant un problème sur-déterminé avec $N_x = N_y - N_h + 1$. De plus, chaque colonne a la même norme, ce qui simplifie les calculs de certains algorithmes. Cette forme de matrice ainsi que le modèle (2.50) constituent la formulation classique des problèmes de déconvolution [O'Brien *et al.* 1994, Olofsson et Stepinski 2000, Idier 2001]. Les propositions de solutions – chaque colonne de $\mathbf{H}_i$ – sont donc des répliques de $\boldsymbol{h}_i$ pour n'importe quelle distance de propagation.

Cas sans atténuation et avec sur-échantillonnage

Dans ce cas, le pas de discrétisation Δ_t est réglé comme un multiple de la période d'échantillonnage tel que $\Delta_t = T_S/K$ avec $K > 1$. L'équation discrète (2.43) devient

$$y[n] \simeq \sum_m h_i[nK-m] \sum_p h_a[m-p,p]x[p] = \sum_m h_i[nK-m]x[m], \tag{2.53}$$

qui n'est plus un produit de convolution discrète. Nous avons toujours le modèle (2.50) : $\boldsymbol{y} = \mathbf{H}_i\boldsymbol{x}$, mais la matrice $\mathbf{H}_i$ n'est plus Toeplitz. Les lignes sont toujours des versions retournées de $\boldsymbol{h}_i$ mais avec un décalage de K zéros entre chaque ligne. Par exemple, pour

$K = 2$, la matrice $\mathbf{H}_i$ similaire à celle de l'équation (2.51) ($\boldsymbol{y}$ est nul en dehors de ses bornes) est

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} h_i[N_h-1] & h_i[N_h-2] & h_i[N_h-3] & \cdots & h_i[0] & 0 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & h_i[N_h-1] & \cdots & h_i[2] & h_i[1] & h_i[0] & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_i[4] & h_i[3] & h_i[2] & h_i[1] & \cdots \\ & & & \cdots & h_i[6] & h_i[5] & h_i[4] & h_i[3] & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & h_i[8] & h_i[7] & h_i[6] & h_i[5] & \cdots \\ & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}, \tag{2.54}$$

avec $N_x = K(N_y - 1) + N_h$. Dans le cas de l'équation (2.52), où $\boldsymbol{x}$ est nul en dehors de ses bornes, $\mathbf{H}_i$ s'écrit

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} h_i[0] & 0 & 0 & \cdots & & & & \\ h_i[2] & h_i[1] & h_i[0] & 0 & \cdots & & & \\ h_i[4] & h_i[3] & h_i[2] & h_i[1] & h_i[0] & 0 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & \cdots & 0 & h_i[N_h-1] & h_i[N_h-2] & h_i[N_h-3] & h_i[N_h-4] & h_i[N_h-5] \\ & & & \cdots & 0 & h_i[N_h-1] & h_i[N_h-2] & h_i[N_h-3] \\ & & & & & \cdots & 0 & h_i[N_h-1] \end{bmatrix}, \tag{2.55}$$

avec $N_x = K(N_y - N_h - 1) + 2$. D'une manière générale, le vecteur $\boldsymbol{x}$ est donc environ K fois plus grand que le vecteur $\boldsymbol{y}$. Un exemple de matrices $\mathbf{H}_i$ est représenté sur la figure 2.8, pour $K = 1$ et $K = 4$ (au format de la matrice 2.55). On remarque que le nombre de colonnes est environ K fois supérieur pour la matrice de droite.

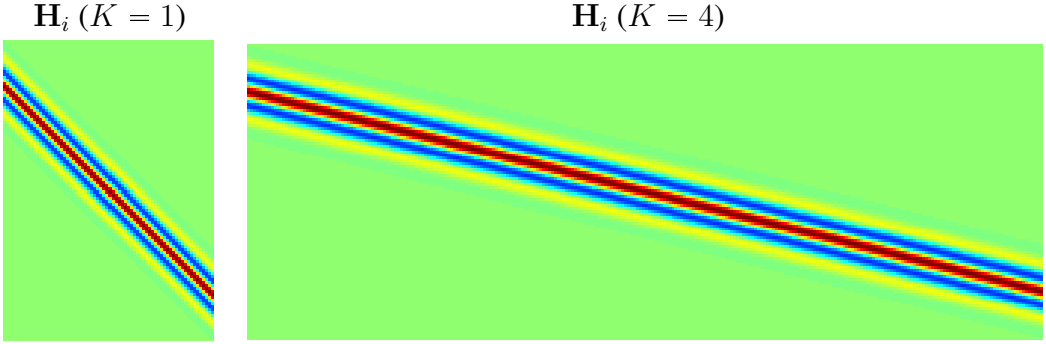


FIGURE 2.8 – Exemple de matrices $\mathbf{H}_i$ pour $K = 1$ (gauche) et pour $K = 4$ (droite).

En observant les matrices (2.54) et (2.55), on remarque que toutes les K colonnes sont identiques à un décalage vertical près. On peut alors montrer que l'équation (2.53) est équivalente à K convolutions discrètes [Carcreff *et al.* 2012; 2013b;a]

$$y[n] \simeq \sum_{k=1}^{K} \sum_{m} h_i^k[n-m]x[m], \tag{2.56}$$

où $\boldsymbol{h}_i^k$ est défini comme un sous-vecteur de $\boldsymbol{h}_i$. A partir de l'équation (2.42), on peut montrer que

$$h_i^k[\ell] = h_i[K\ell + k - 1] = h_i\left(\ell T_S + (k-1)\Delta_t\right). \tag{2.57}$$

Le vecteur $\boldsymbol{h}_i^k$ correspond donc à une résolution temporelle T_S et est décalé d'un pas $(k-1)\Delta_t$. L'entrelacement des $\boldsymbol{h}_i^k$ forme de ce fait le vecteur $\boldsymbol{h}_i$. D'une façon analogue, la matrice $\mathbf{H}_i$ peut être décomposée en K sous-matrices de convolution $\mathbf{H}_i^k$ pour $k = 1 \dots K$, menant à

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{H}_i \boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{K} \mathbf{H}_i^k \boldsymbol{x}^k, \tag{2.58}$$

où $\boldsymbol{x}^k$ est le sous-vecteur de $\boldsymbol{x}$, correspondant aux colonnes de $\mathbf{H}_i^k$ par rapport à $\mathbf{H}_i$. Les données $\boldsymbol{y}$ peuvent donc être modélisées par un système à plusieurs entrées et une sortie unique (*Multiple Input Single Output : MISO*). Le chapitre 4 est dédié au modèle et aux algorithmes adaptés à de tels systèmes MISO.

Cas avec atténuation et sans sur-échantillonnage

L'équation discrète (2.43) devient

$$y[n] \simeq \sum_m h_i[n-m] \sum_p h_a[m-p, p] x[p], \tag{2.59}$$

qui peut, comme nous l'avons montré, s'écrire $\boldsymbol{y} = \mathbf{H}_i \mathbf{H}_a \boldsymbol{x}$. Des formes similaires apparaissent également dans [Hale 1981, Olofsson et Stepinski 2001, Lingvall *et al.* 2003]. La matrice de convolution $\mathbf{H}_i$ peut prendre les mêmes formes que dans le cas sans atténuation. La « convolution » $\sum_p h_a[m-p, p]x[p]$ est quant à elle non-stationnaire, car la réponse impulsionnelle $\boldsymbol{h}_a$ a une forme différente pour chaque colonne p [Margrave 1998]. La matrice d'atténuation s'écrit alors :

$$\mathbf{H}_a = \begin{bmatrix} h_a[0,0] & h_a[-1,1] & h_a[-2,2] & \cdots & h_a[-N_x+1, N_x-1] \\ h_a[1,0] & h_a[0,1] & h_a[-1,2] & \cdots & h_a[-2, N_x-1] \\ h_a[2,0] & h_a[1,1] & h_a[0,2] & \cdots & h_a[-2, N_x-1] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_a[N_x-1,0] & h_a[N_x-2,1] & h_a[N_x-3,2] & \cdots & h_a[0, N_x-1] \end{bmatrix}. \tag{2.60}$$

Dans le cas où les réponses d'atténuation sont causales, la matrice $\mathbf{H}_a$ est triangulaire inférieure. Un exemple de matrices $\mathbf{H}_i$ et $\mathbf{H}_a$ est représenté sur la figure 2.9. La matrice instrumentale $\mathbf{H}_i$ est Toeplitz. La matrice $\mathbf{H}_a$ montre les réponses impulsionnelles d'atténuation générées avec une atténuation linéaire et une phase dispersive.

2.2.4 Calcul numérique des réponses impulsionnelles d'atténuation

Si le modèle avec atténuation dispersive (2.30) est utilisé pour définir l'atténuation, la réponse impulsionnelle $\boldsymbol{h}_a(z)$ est approchée par transformée de Fourier discrète inverse de $H_a(f, z)$. La transformée de Fourier discrète est calculée pour $f \in [-f_D/2,\ f_D/2]$ et est composée de N_f points. Elle est donc dépendante de deux paramètres qui sont f_D et N_f. La fréquence de discrétisation f_D est définie grâce à la résolution temporelle du modèle Δ_t, telle que

$$f_D = \frac{1}{\Delta_t} = K f_S, \tag{2.61}$$

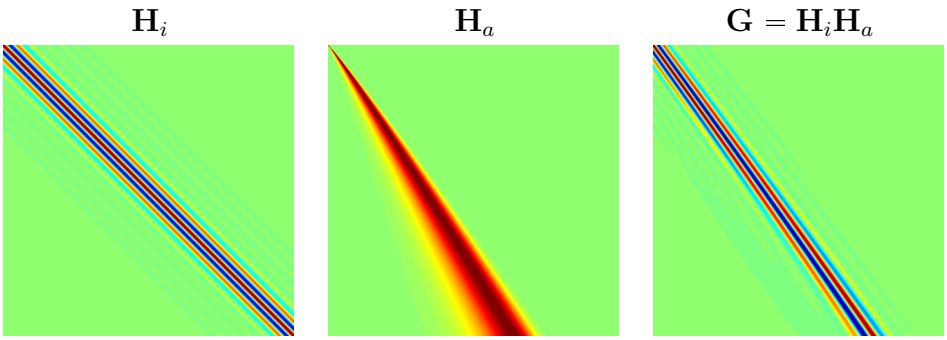


FIGURE 2.9 – Exemple de matrices $\mathbf{H}_i$, $\mathbf{H}_a$ et $\mathbf{G}$, où chaque colonne a été normalisée.

où f_S est la fréquence d'échantillonnage définie par les données et K est le facteur de sur-échantillonnage du modèle. Le premier problème dans le calcul des réponses impulsionnelles concerne la résolution temporelle. Le deuxième problème vient du fait que la discrétisation de l'axe des fréquences entraîne une périodicité du signal temporel. Dans la mesure du possible, il faut disposer d'un nombre de points conséquent pour éviter le repliement temporel. Nous illustrons ces deux problèmes par des exemples simples dans la suite.

Influence de la résolution temporelle

Nous étudions l'influence de la résolution temporelle sur le calcul de $\boldsymbol{h}_a(z)$, en utilisant un modèle d'atténuation linéaire avec $\alpha_0 = 50\,\text{Np.MHz}^{-1}\text{.m}^{-1}$ et une distance $z = 10\,\text{mm}$. Le nombre de points de l'axe fréquentiel est fixé à $N_f = 256$. En utilisant des résolutions temporelles $\Delta_t = 0.1\,\mu s,\ 0.05\,\mu s,\ 0.02\,\mu s$, les réponses impulsionnelles obtenues sont tracées sur la figure 2.10. Il est logique que la résolution temporelle soit plus fine lorsque Δ_t diminue. On remarque aussi que la causalité est « plus » marquée quand Δ_t diminue. Dans le modèle de signaux (2.48), il y a donc un intérêt certain à utiliser une discrétisation fine, par augmentation de la fréquence d'échantillonnage ou par sur-échantillonnage.

Influence du nombre de points de la transformée de Fourier discrète

Nous reprenons les mêmes simulations que précédemment mais avec $\Delta_t = 0.02\,\mu\text{s}$ et en faisant varier la nombre de points fréquentiels $N_f = 64,\ 128,\ 256$. Les réponses impulsionnelles correspondantes sont tracées sur la figure 2.11. Le repliement temporel crée une continuité entre les indices $k = 0$ et $k = N_f - 1$. Pour $N_f = 64$, la fonction ne descend pas suffisamment vers zéro et empêche donc la réponse d'être causale. Lorsque N_f augmente, les réponses tendent de plus en plus vers une fonction causale. Le nombre de points de calcul de la transformée $H_a(f, z)$ doit donc être le plus grand possible pour que la réponse $\boldsymbol{h}_a(z)$ tende vers une fonction causale.

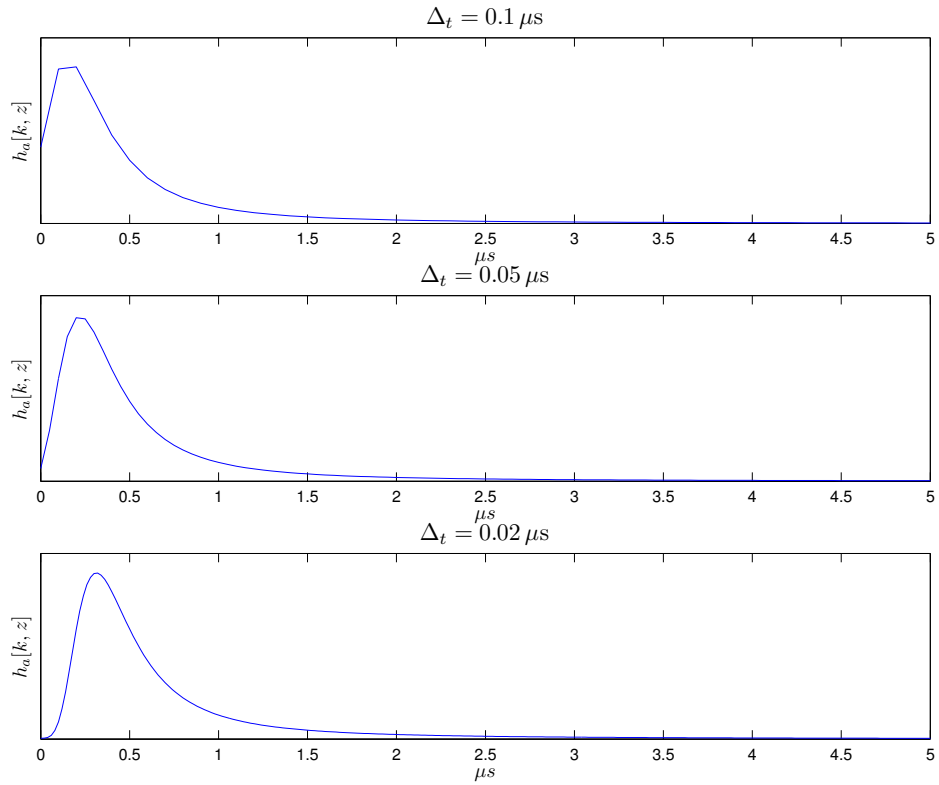


FIGURE 2.10 – Etude de l'influence de Δ_t dans le calcul des réponses impulsionnelles $\boldsymbol{h}_a(z)$ obtenues par transformée de Fourier discrète inverse de $H_a(f,z)$. Paramètres : $\gamma = 1$, $\alpha_0 = 50\,\text{Np.MHz}^{-1}\text{.m}^{-1}$, $z = 20\,\text{mm}$, $N_f = 256$, $\Delta_t = 0.1\,\mu s,\ 0.05\,\mu s,\ 0.02\,\mu s$.

2.2.5 Modèle d'atténuation d'Olofsson

A partir de l'équation (2.6), la fonction de transfert de propagation pour $z_p = p\Delta_z$ peut s'écrire

$$\begin{aligned} H_r(f,z_p) &= b(z_p)e^{-(\alpha(f)+j\beta(f))p\Delta_z} \\ &= b(z_p)\left[e^{-(\alpha(f)+j\beta(f))\Delta z}\right]^p \\ &= b(z_p)P(f)^p. \end{aligned} \tag{2.62}$$

Mise à part la constante $b(z_p)$, la fonction $H_r(f,z_p)$ est donc équivalente à un noyau fréquentiel $P(f)$ à la puissance p. Si $\boldsymbol{\rho}$ est la réponse impulsionnelle à temps discret correspondant à $P(f)$ pour $f \in [-f_S/2,\ f_S/2]$, elle représente le changement entre deux couches élémentaires séparées par Δ_z. La réponse impulsionnelle totale pour une distance $z_p = p\Delta_z$ correspond donc à $p-1$ auto-convolutions de $\boldsymbol{\rho}$ que nous notons

$$h_r(t,z_p) = \boldsymbol{\rho}^{*p} = \underbrace{\boldsymbol{\rho} * \boldsymbol{\rho} * \ldots * \boldsymbol{\rho}}_{p-1 \text{ auto-convolutions}}. \tag{2.63}$$

Olofsson et Stepinski ont proposé d'utiliser un noyau $\boldsymbol{\rho}$ très proche d'une impulsion de Dirac de façon à synthétiser une faible distorsion entre deux couches élémentaires [Olofsson et

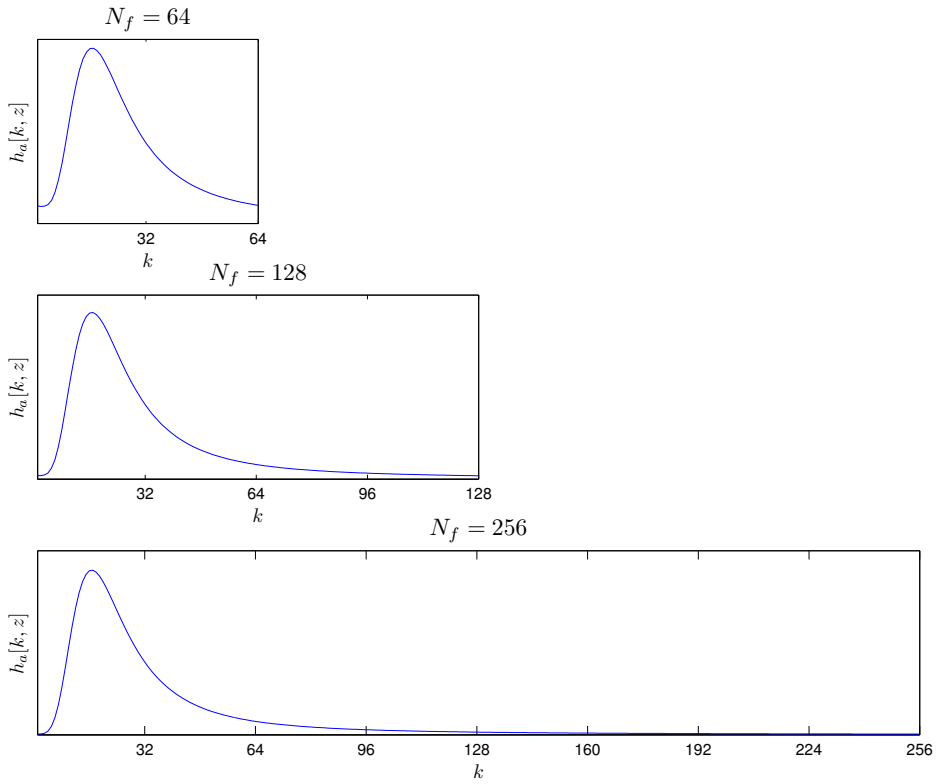


FIGURE 2.11 – Etude de l'influence de N_f dans le calcul des réponses impulsionnelles $\boldsymbol{h}_a(z)$ obtenues par transformée de Fourier discrète inverse de $H_a(f,z)$. Paramètres : $\gamma = 1$, $\alpha_0 = 50\,\text{Np.MHz}^{-1}\text{.m}^{-1}$, $z = 20\,\text{mm}$, $f_S = 50\,\text{MHz}$, $N_f = 64,\ 128,\ 256$.

Stepinski 2001]

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1-a \\ a \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \tag{2.64}$$

avec $a \ll 1$. On peut montrer que la transformée de Fourier de $\boldsymbol{\rho}$ est

$$\begin{aligned} P(f) &= 1 - a + ae^{-j2\pi\Delta_t f} \\ &= 1 - a + a(\cos 2\pi\Delta_t f - j \sin 2\pi\Delta_t f). \end{aligned} \tag{2.65}$$

On a alors le module au carré

$$\begin{aligned} |P(f)|^2 &= (1 - a + a\cos 2\pi\Delta_t f)^2 + (a \sin 2\pi\Delta_t f)^2 \\ &= 1 + 2a(a-1)(1 - \cos 2\pi\Delta_t f) \\ &= 1 - 4a(1-a)\sin^2(\pi\Delta_t f). \end{aligned} \tag{2.66}$$

Le module de la transformée de Fourier s'écrit alors

$$|P(f)| = \sqrt{1 - 4a(1-a)\sin^2(\pi\Delta_t f)}, \tag{2.67}$$

qui, à partir de l'équation (2.62), correspond à une fonction d'atténuation de la forme

$$\alpha(f) = -\frac{\ln |P(f)|}{\Delta_z}. \tag{2.68}$$

Enfin, la phase $\arg P(f) = \beta(f)\Delta_z$ permet de déduire la vitesse de phase

$$c(f) = -\frac{2\pi f \Delta_z}{\arg P(f)}. \tag{2.69}$$

Sur la figure 2.12, nous comparons les noyaux $P(f)$ calculés avec l'atténuation linéaire $|P(f)| = e^{-\alpha_0 |f| \Delta_z}$ et par le modèle d'Olofsson (2.67). Les paramètres sont réglés de façon à donner des allures semblables aux fonctions $P(f)$. Sur la figure 2.13, nous traçons un ensemble de fonctions de transfert de propagation avec le modèle d'Olofsson. En comparaison avec la figure 2.3 page 29, malgré un noyau semblable, nous observons des profils d'atténuation relativement différents. Le choix d'un tel modèle est plutôt empirique, car l'atténuation ne respecte pas un modèle physique de loi d'atténuation. L'avantage de ce modèle est qu'il

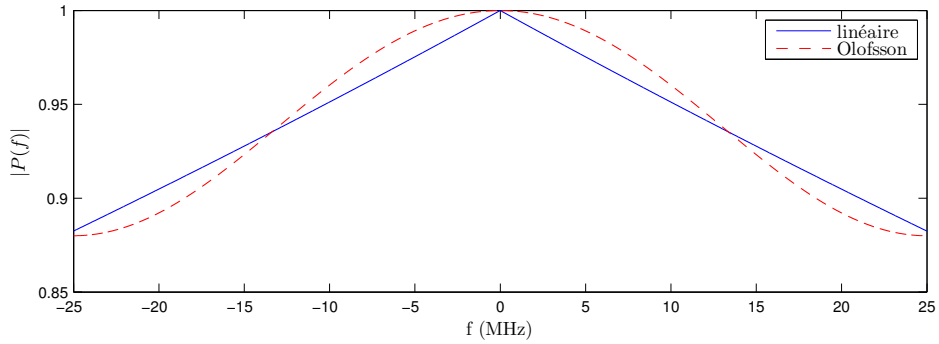


FIGURE 2.12 – Comparaison des noyaux fréquentiels $|P(f)|$ pour l'atténuation linéaire ($\alpha_0 = 50\,\text{Np.MHz}^{-1}\text{.m}^{-1}$) et pour le modèle d'Olofsson ($a = 0.06$).

ne dépend que d'un seul paramètre a. Il est défini dans le domaine temporel et est automatiquement causal grâce à la présence du premier zéro dans l'équation (2.64). Par conséquent, il n'y a pas de dispersion à régler, car elle est intégrée dans les réponses temporelles. La matrice $\mathbf{H}_a$ se construit donc simplement en plaçant la $p-1^{\text{ème}}$ auto-convolution $\boldsymbol{\rho}^{*p}$ à la colonne p

$$\mathbf{H}_a = \left[\boldsymbol{\rho}^{*1}\ \boldsymbol{\rho}^{*2}\ \boldsymbol{\rho}^{*2}\ \cdots\right] = \begin{bmatrix} \rho_0^{*1} & 0 & 0 & \cdots \\ \rho_1^{*1} & \rho_1^{*2} & 0 & \cdots \\ \rho_2^{*1} & \rho_2^{*2} & \rho_2^{*3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{2.70}$$

Par convention, la première colonne $\boldsymbol{\rho}^{*1}$ est une impulsion de Dirac discrète $[1, 0, \ldots]^T$.

2.3 Exploitation des modèles d'atténuation et de dispersion avec des données expérimentales

Dans cette section, nous comparons les modèles décrits précédemment à l'aide de données expérimentales. Dans un premier temps, nous mesurons l'atténuation et la vitesse des ondes

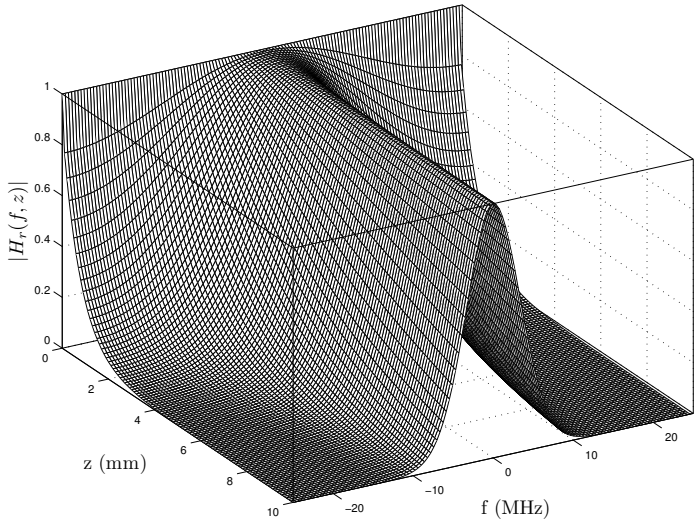


FIGURE 2.13 – Exemple de fonction d'atténuation $|H_r(f,z)|$ en fonction de la fréquence et de la distance de propagation. Le noyau d'Olofsson (2.64) est défini avec $a = 0.06$ pour générer le modèle d'atténuation (2.62).

grâce à des échos atténués. Ces profils expérimentaux sont comparés à ceux produits par les modèles. Nous appliquons cette comparaison pour un matériau ayant une atténuation linéaire, le polycarbonate, et un matériau avec une atténuation non-linéaire, l'huile de ricin. Cette partie montre de ce fait comment mesurer les paramètres nécessaires pour régler les modèles. Nous montrons également la modélisation d'un signal transmis par un matériau hétérogène, une mousse poreuse. Un deuxième exemple est l'évaluation non destructive d'un matériau. Nous montrons qu'il est possible de déduire le coefficient d'atténuation et la vitesse des ondes grâce aux modèles développés. Pour finir, nous exposons une des limites du modèle proposé dans le cas de la modélisation de l'écho provenant d'un trou à fond plat.

2.3.1 Mesure en mode *pulse-echo* avec du polycarbonate

Pour vérifier expérimentalement la précision du modèle, nous réalisons une mesure en mode *pulse-echo* avec une plaque de polycarbonate d'épaisseur $e = 10.2$ mm, comme illustré sur la Figure 2.14. Le polycarbonate présente une forte atténuation, et qui peut être considérée

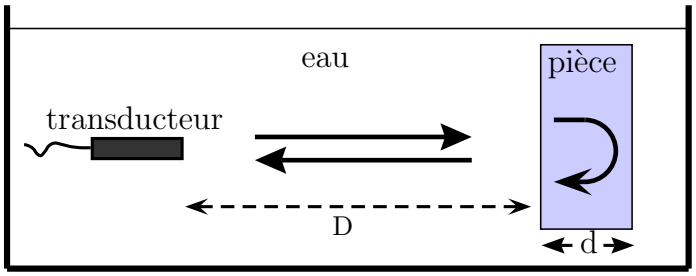


FIGURE 2.14 – Schéma du dispositif expérimental d'une mesure en mode *pulse-echo*.

linéaire en fréquence [Selfridge 1985]. Le transducteur utilisé a une surface plane circulaire de diamètre 12.7 mm et une fréquence centrale de 2.25 MHz. La plaque de polycarbonate

est placée dans le champ lointain du transducteur en incidence normale. Les données sont échantillonnées à la fréquence $f_S = 100\,\text{MHz}$ et moyennées sur 100 réalisations pour réduire le niveau de bruit. Le signal reçu par le transducteur est représenté sur la figure 2.15a. Il contient un écho de surface et un écho de fond que nous notons respectivement $\boldsymbol{y}_f$ et $\boldsymbol{y}_b$ et que nous séparons manuellement. Ils sont respectivement représentés sur les figures 2.15b et 2.15c. Les transformées de Fourier normalisées de ces deux échos $Y_f(f)$ et $Y_b(f)$ sont également représentées en module sur la figure 2.15d. On remarque le décalage quasiment uniforme vers les basses fréquences de la forme spectrale, qui sous-entend une atténuation linéaire.

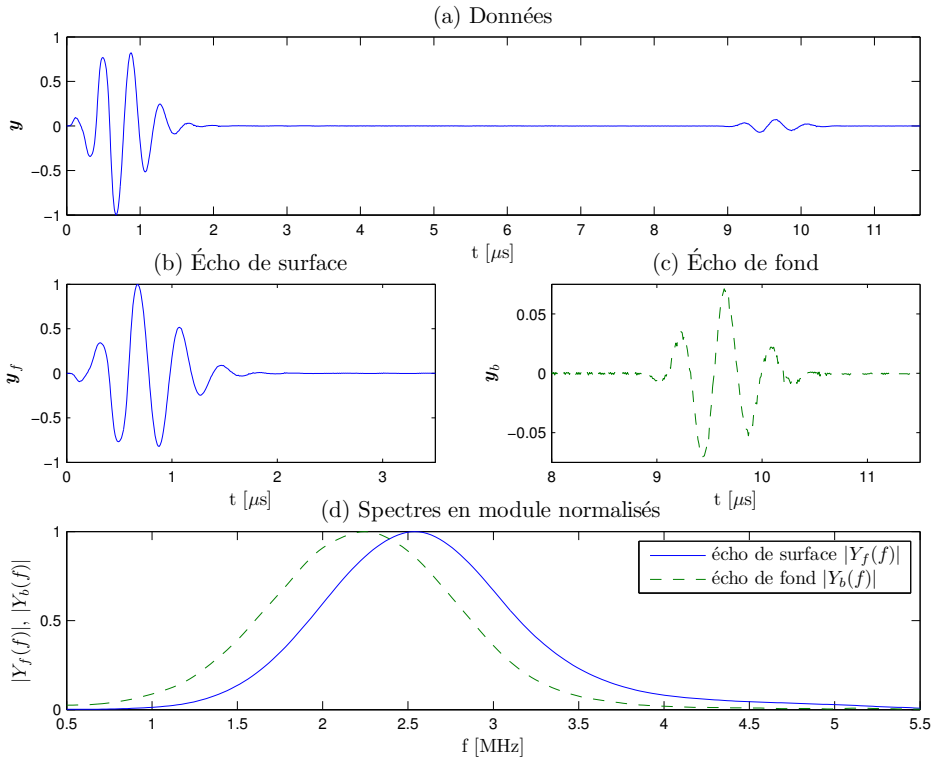


FIGURE 2.15 – Signaux temporels et fréquentiels acquis à partir d'une plaque de polycarbonate de 10.2 mm d'épaisseur avec un transducteur à 2.25 MHz. (a) : Données, (b) : écho de surface, (c) : écho de fond, (d) : spectres en module.

Le but est de vérifier la modélisation de l'écho de fond à partir de l'écho de surface et des modèles d'atténuation présentés dans ce chapitre. Pour cela, il faut dans un premier temps mesurer les paramètres des modèles : α_0 et γ pour l'atténuation, c_0 ou c_∞ pour la vitesse de phase et le paramètre a pour le modèle d'Olofsson. A partir de l'équation (2.6), la transformée de Fourier de l'écho de surface $\boldsymbol{y}_f$ s'écrit

$$Y_f(f) = b(2D)H_i(f)e^{-(\alpha_w(f)+j\beta_w(f))2D}, \tag{2.71}$$

où $-\alpha_w(f)$ et $\beta_w(f)$ sont respectivement les parties imaginaire et réelle du nombre d'onde dans l'eau. Pour simplifier, nous considérons $b(2D) = 1$ comme l'amplitude de référence. D'une façon similaire, l'écho de fond $\boldsymbol{y}_b$ est défini dans le domaine fréquentiel par

$$Y_b(f) = b(2D + 2d)H_i(f)e^{-(\alpha_w(f)+j\beta_w(f))2D-(\alpha(f)+j\beta(f))2d}, \tag{2.72}$$

avec $-\alpha(f)$ et $\beta(f)$ respectivement les parties imaginaire et réelle du nombre d'onde dans le polycarbonate. Le coefficient $b(2D + 2d)$ est l'amplitude de l'écho de fond.

Calcul de l'atténuation

Le rapport des modules de $Y_b(f)$ et $Y_f(f)$ caractérise la fonction de transfert pour une distance égale au double de l'épaisseur de la plaque, dans la bande passante du transducteur. Ce calcul permet de s'affranchir du terme $H_i(f)$ et de la propagation dans l'eau

$$\frac{|Y_b(f)|}{|Y_f(f)|} = b(2D + 2d)e^{-\alpha(f)2d}. \tag{2.73}$$

En prenant le logarithme naturel de cette fonction, on aboutit à

$$\ln\left(\frac{|Y_b(f)|}{|Y_f(f)|}\right) = \ln|b(2D + 2d)| - \alpha(f)2d. \tag{2.74}$$

Cette équation permet de déduire l'atténuation $\alpha(f)$ à partir de la mesure des modules

$$-\frac{1}{2d}\ln\left(\frac{|Y_b(f)|}{|Y_f(f)|}\right) = -\frac{1}{2d}\ln|b(2D + 2d)| + \alpha(f). \tag{2.75}$$

Le tracé de $-1/2d\ln(|Y_b(f)|/|Y_f(f)|)$ sur la figure 2.16 permet d'identifier $\alpha(f)$ dans la bande de fréquences du transducteur. Cette fonction peut être considérée comme linéaire-

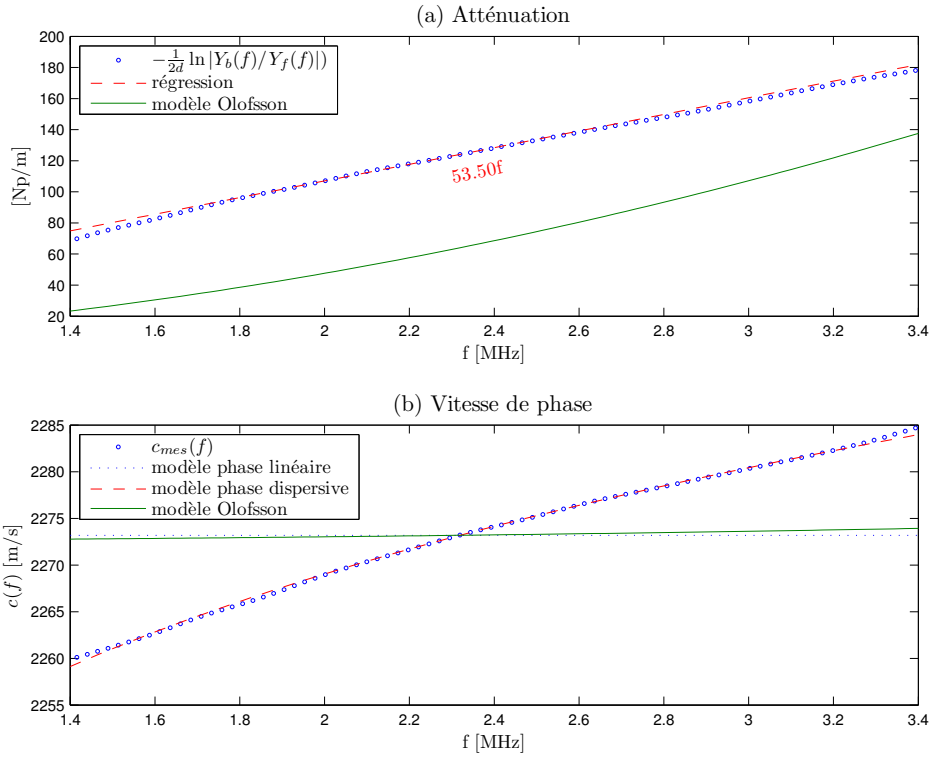


FIGURE 2.16 – Atténuation fréquentielle et vitesse de phase, mesurées et modèles, pour du polycarbonate. (a) : Atténuation, (b) : vitesse de phase.

ment dépendante de la fréquence. Une régression linéaire également représentée sur la figure 2.16 permet d'estimer le terme d'ordonnée à l'origine $-1/2d \ln |b(2D+2d)|$ et le terme qui dépend de la fréquence, $\alpha(f)$. On aboutit à un coefficient d'atténuation $\widehat{\alpha}_0 = 53.5\,\text{Np.MHz}^{-1}.\text{m}^{-1}$, conforme aux valeurs que l'on trouve dans la littérature [Selfridge 1985].

Pour le modèle d'Olofsson, le paramètre a est discrétisé sur une grille fine, de manière à générer les fonctions $h_r(t,z)$ et à modéliser l'écho. Le paramètre qui minimise l'erreur entre les données et le modèle

$$r = \frac{\|\boldsymbol{y}_b - \widehat{\boldsymbol{y}}_b\|}{\|\boldsymbol{y}_b\|}, \tag{2.76}$$

est choisi. Le détail de cette procédure est présenté dans la partie 2.3.1 page 52. On obtient $a = 0.2098$. A partir de l'équation (2.68), on peut calculer la fonction d'atténuation correspondant au modèle d'Olofsson. Elle est tracée sur la figure 2.16a et arbore une allure sensiblement équivalente au modèle d'atténuation linéaire.

Calcul de la vitesse de phase

A partir des équations (2.71) et (2.72), nous pouvons écrire la différence de phase entre les deux spectres

$$\arg Y_f(f) - \arg Y_b(f) = \beta(f)2d = \frac{2\pi f}{c(f)}2d, \tag{2.77}$$

ce qui permet d'écrire la vitesse de phase mesurée $c_{\text{mes}}(f)$

$$c_{\text{mes}}(f) = 2\pi f \frac{2d}{\arg Y_f(f) - \arg Y_b(f)}. \tag{2.78}$$

Dans le cas du modèle à phase linéaire, une estimation de la vitesse constante $c(f) = c_0$ peut se calculer en effectuant la moyenne des $c_{\text{mes}}(f)$

$$\widehat{c}_0 = \Big\langle c_{\text{mes}}(f) \Big\rangle. \tag{2.79}$$

Dans le cas du modèle dispersif, à partir de l'équation (2.28), la vitesse c_∞ se calcule par

$$\frac{1}{c_\infty} = \frac{1}{c(f)} - \frac{\epsilon(f)}{2\pi f}, \tag{2.80}$$

où $\epsilon(f)$ est calculé à partir de α_0 grâce à l'équation (2.33). On peut donc estimer $\widehat{c}_\infty$ en calculant la moyenne

$$\frac{1}{\widehat{c}_\infty} = \left\langle \frac{1}{c_{\text{mes}}(f)} - \frac{\epsilon(f)}{2\pi f} \right\rangle. \tag{2.81}$$

Les estimations de $\widehat{c}_0$ et $\widehat{c}_\infty$ donnent respectivement $\widehat{c}_0 = 2273.2\,\text{m.s}^{-1}$ et $\widehat{c}_\infty = 2379.3\,\text{m.s}^{-1}$. Ces valeurs permettent de calculer les vitesses de phase correspondantes, représentées sur la figure 2.16b. On observe que la vitesse de phase donnée par le modèle dispersif est assez fidèle à la vitesse mesurée. Le modèle à phase linéaire est forcément inexact en présence de dispersion et fournit une valeur moyenne de la vitesse. La vitesse de phase du modèle d'Olofsson donnée par l'équation (2.69) montre une vitesse quasiment constante dans la bande passante du transducteur, de valeur très proche de la vitesse de groupe calculée $\widehat{c}_0$ avec le modèle à phase linéaire. La vitesse c_∞ pour le modèle d'Olofsson peut être trouvée en divisant $2e$ par le temps de vol (nous détaillons cela dans la partie 2.3.4), ce qui mène à $\widehat{c}_\infty = 2749.3\,\text{m.s}^{-1}$.

Estimation des signaux temporels par un processus de filtre adapté

Nous comparons maintenant les échos de fond mesurés et modélisés grâce aux paramètres obtenus précédemment. Les valeurs des paramètres sont récapitulés dans le tableau 2.1. L'écho de surface $\boldsymbol{y}_f$ est la transformée de Fourier inverse de $Y_f(f) = H_i(f)e^{-(\alpha_w(f)+j\beta_w(f))2D}$

	Atténuation	Vitesse (m.s^{-1})
Modèle en loi de puissance	$\widehat{\alpha}_0 = 53.5$ Np.MHz^{-1}.m^{-1}	$\widehat{c}_0 = 2273.2$ $\widehat{c}_\infty = 2379.3$
Olofsson	$\widehat{a} = 0.2098$	$\widehat{c}_\infty = 2749.3$

TABLE 2.1 – Tableau des estimations des coefficients d'atténuation et vitesses par division spectrale. Les mesures sont réalisées avec une plaque de polycarbonate de 10.2 mm d'épaisseur grâce à un transducteur centré à 2.25 MHz.

(voir équation (2.71)). A partir de l'équation (2.72), l'écho de fond est défini par

$$Y_b(f) = Y_f(f)b(2D + 2d)e^{-(\alpha(f)+j\beta(f))2d}. \tag{2.82}$$

Suivant les modèles retenus pour $\alpha(f)$ et $\beta(f)$, on peut donc modéliser l'écho de fond $\widehat{\boldsymbol{y}}_b$ par une convolution entre l'écho de surface $\boldsymbol{y}_f$ et une réponse impulsionnelle de propagation. Nous utilisons la formulation matricielle (2.48) : $\boldsymbol{y}_b = \mathbf{G}\boldsymbol{x}$. Quatre modèles sont comparés pour construire la matrice $\mathbf{G}$:

1. le modèle sans atténuation
2. le modèle avec atténuation linéaire et phase linéaire
3. le modèle avec atténuation linéaire et phase dispersive
4. le modèle d'Olofsson.

Pour modéliser un écho, le vecteur $\boldsymbol{x}$ est composé d'une seule valeur non nulle $\widehat{a}$, qui correspond à l'amplitude $b(2D + 2d)$ – pour rappel, nous avons considéré $b(2D) = 1$ –, positionné à l'indice $\widehat{p}$ avec $\widehat{p} \in [1 \dots N_x]$. L'écho modélisé est donc une colonne $\boldsymbol{g}_{\widehat{p}}$ de $\mathbf{G}$ pondérée par un facteur d'amplitude tel que $\widehat{\boldsymbol{y}}_b = \boldsymbol{g}_{\widehat{p}}\widehat{a}$. Nous considérons alors la minimisation d'un critère des moindres carrés entre les données et le modèle

$$(\widehat{p}, \widehat{a}) = \underset{p=0\dots N_x-1,\ a\in\mathbb{R}}{\arg\min} \left\| \boldsymbol{y}_b - \boldsymbol{g}_p a \right\|^2. \tag{2.83}$$

Le modèle étant linéairement dépendant de l'amplitude, l'amplitude optimale peut être calculée pour chaque p en annulant la dérivée en fonction de a

$$\frac{\partial \left\| \boldsymbol{y}_b - \boldsymbol{g}_p a \right\|^2}{\partial a} = -2\boldsymbol{g}_p^T \left(\boldsymbol{y}_b - \boldsymbol{g}_p a \right) = 0 \quad \longrightarrow \quad \widehat{a} = \frac{\boldsymbol{g}_p^T \boldsymbol{y}_b}{\left\| \boldsymbol{g}_p \right\|^2}. \tag{2.84}$$

En insérant l'équation (2.84) dans (2.83), on obtient

$$\begin{aligned}\left\| \boldsymbol{y}_b - \frac{\boldsymbol{g}_p \boldsymbol{g}_p^T \boldsymbol{y}_b}{\left\|\boldsymbol{g}_p\right\|^2} \right\|^2 &= \left(\boldsymbol{y}_b - \frac{\boldsymbol{g}_p \boldsymbol{g}_p^T \boldsymbol{y}_b}{\left\|\boldsymbol{g}_p\right\|^2} \right)^T \left(\boldsymbol{y}_b - \frac{\boldsymbol{g}_p \boldsymbol{g}_p^T \boldsymbol{y}_b}{\left\|\boldsymbol{g}_p\right\|^2} \right) \\ &= \left\|\boldsymbol{y}_b\right\|^2 - 2\frac{\boldsymbol{y}_b^T \boldsymbol{g}_p \boldsymbol{g}_p^T \boldsymbol{y}_b}{\left\|\boldsymbol{g}_p\right\|^2} + \frac{\boldsymbol{y}_b^T \boldsymbol{g}_p \boldsymbol{g}_p^T \boldsymbol{g}_p \boldsymbol{g}_p^T \boldsymbol{y}_b}{\left\|\boldsymbol{g}_p\right\|} \\ &= \left\|\boldsymbol{y}_b\right\|^2 - \frac{\boldsymbol{y}_b^T \boldsymbol{g}_p \boldsymbol{g}_p^T \boldsymbol{y}_b}{\left\|\boldsymbol{g}_p\right\|^2} \\ &= \left\|\boldsymbol{y}_b\right\|^2 - \frac{\left\|\boldsymbol{g}_p^T \boldsymbol{y}_b\right\|^2}{\left\|\boldsymbol{g}_p\right\|^2}. \end{aligned} \tag{2.85}$$

Le terme $\left\|\boldsymbol{y}_b\right\|^2$ étant constant et $\boldsymbol{g}_p^T \boldsymbol{y}_b$ étant scalaire, la minimisation de l'équation (2.85) revient à maximiser $|\boldsymbol{g}_p^T \boldsymbol{y}_b| / \left\|\boldsymbol{g}_p\right\|$. La position optimale $\hat{p}$ est donc déterminée par :

$$\hat{p} = \underset{p \in [1 \dots N_x]}{\arg\max} \frac{|\boldsymbol{g}_p^T \boldsymbol{y}_b|}{\left\|\boldsymbol{g}_p\right\|}. \tag{2.86}$$

La localisation de l'écho revient donc à sélectionner la colonne $\boldsymbol{g}_{\hat{p}}$ de $\mathbf{G}$ la plus corrélée aux données. Dans le cas spécifique où $\mathbf{G}$ est une matrice de convolution, ce calcul est équivalent à un filtre adapté [Van Trees 1968] ou au maximum d'intercorrélation. En pratique, les colonnes de la matrice $\mathbf{G}$ sont calculées pour des distances z autour de $2d = 20.4\,\text{mm}$, avec un pas de discrétisation assez fin : $\Delta_z = 0.0001\,\text{mm}$. On obtient les résultats illustrés sur la figure 2.17. Nous affichons également l'erreur r entre les données et l'estimation, définie selon l'équation (2.76). On peut observer que la meilleure estimation est réalisée par le modèle avec atténuation dispersive, qui fait baisser l'erreur d'un facteur cinq par rapport au modèle sans atténuation. Viennent ensuite les modèles avec phase linéaire et d'Olofsson. Nous remarquons que les formes estimées par ces deux modèles sont très proches, ce qui était attendu au vu des profils $\alpha(f)$ et $c(f)$ de la figure 2.16. La plus mauvaise modélisation provient du modèle qui ne considère pas d'atténuation.

2.3.2 Mesure en transmission dans l'huile de ricin

D'une manière similaire, nous présentons des résultats expérimentaux effectués avec de l'huile de ricin, matériau connu pour avoir une atténuation non-linéaire [He 1999, Szabo 1995]. Les mesures sont réalisées autour de 5 MHz par deux transducteurs, un émetteur et un récepteur, immergés face à face dans l'huile de ricin (voir figure 2.18). Comme illustré sur le schéma 2.19, la distance entre les transducteurs est fixée à 2 mm puis à 5 mm pour créer une épaisseur équivalente de matériau de 3 mm. Ces deux mesures correspondent respectivement aux signaux $\boldsymbol{y}_f$ et $\boldsymbol{y}_b$. Les signaux temporels ainsi que leurs transformées de Fourier respectives $Y_f(f)$ et $Y_b(f)$ sont représentés sur la figure 2.20. Nous observons un décalage du spectre vers les basses fréquences dû à l'atténuation. A partir de la division spectrale (2.75) et à l'aide d'une régression non-linéaire, nous identifions un facteur de puissance $\gamma \approx 1.70$, valeur similaire à celles que l'on trouve dans la littérature [He 1999, Szabo 1995], et un coefficient d'atténuation $\alpha_0 = 10.93\,\text{Np.MHz}^{-1.70}\text{.m}^{-1}$. Ces valeurs permettent de calculer

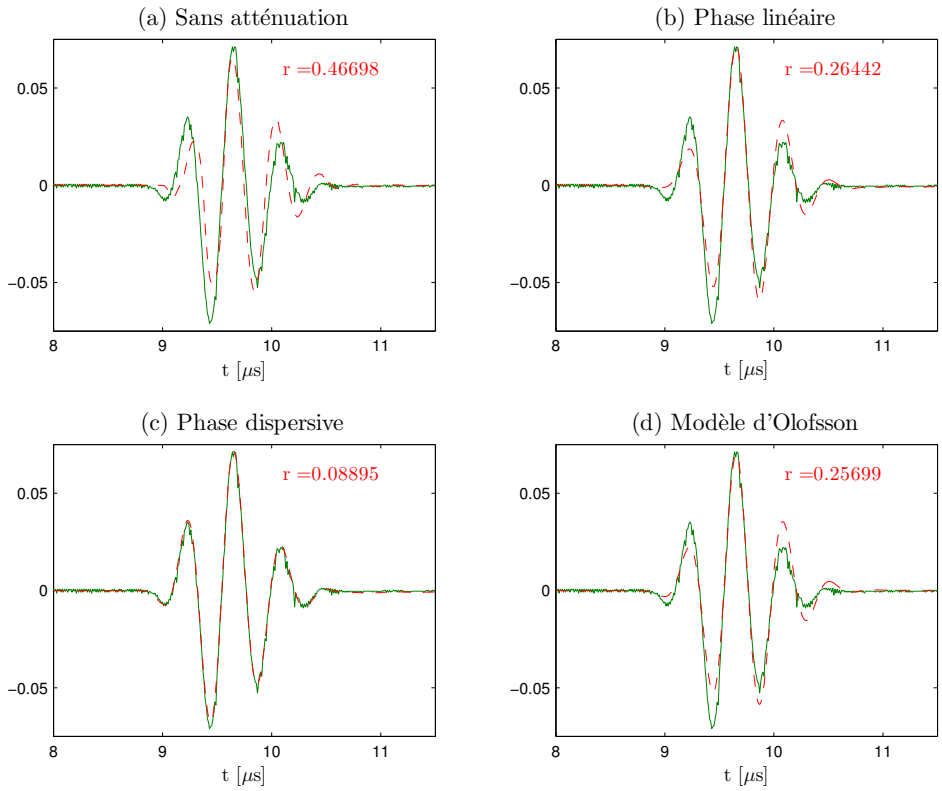


FIGURE 2.17 – Estimation de l'écho de fond acquis avec une plaque de polycarbonate grâce à plusieurs modèles d'atténuation. (a) : Estimation sans atténuation, (b) : estimation avec atténuation linéaire et phase linéaire, (c) : estimation avec atténuation linéaire et phase dispersive, (d : estimation avec le modèle d'Olofsson. '–' : données, '- -' : estimation, r : erreur définie par l'équation (2.76).

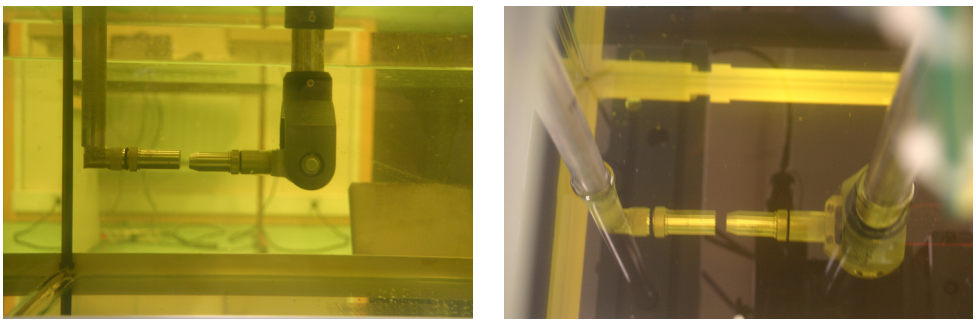


FIGURE 2.18 – Photos de l'expérimentation dans l'huile de ricin. Les transducteurs sont immergés dans l'huile et positionnés face à face pour réaliser une mesure en transmission.

le profil de phase $\epsilon(f)$ grâce à l'équation (2.33). L'atténuation provenant du modèle d'Olofsson calculée avec l'équation (2.68) est également tracée sur la figure 2.21. On remarque une allure relativement proche de celle du modèle en loi de puissance.

Les vitesses de phase mesurées et estimées sont représentées sur la figure 2.21. Le modèle à phase linéaire tend à estimer une vitesse moyenne $\widehat{c}_0 = 1522.5\,\mathrm{m.s}^{-1}$. Le modèle à phase dispersive permet d'obtenir, avec $\widehat{c}_\infty = 1592.4\,\mathrm{m.s}^{-1}$, une modélisation assez précise de la

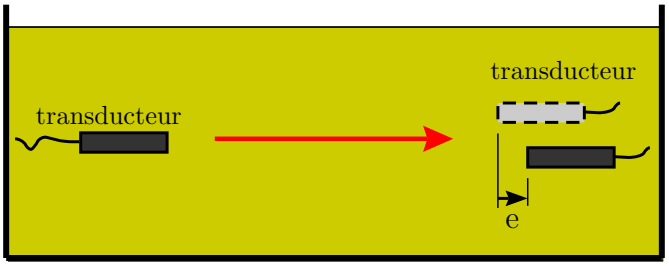


FIGURE 2.19 – Schéma du dispositif expérimental pour la mesure dans l'huile de ricin. Le transducteur récepteur est déplacé d'une distance e pour créer un matériau de même épaisseur.

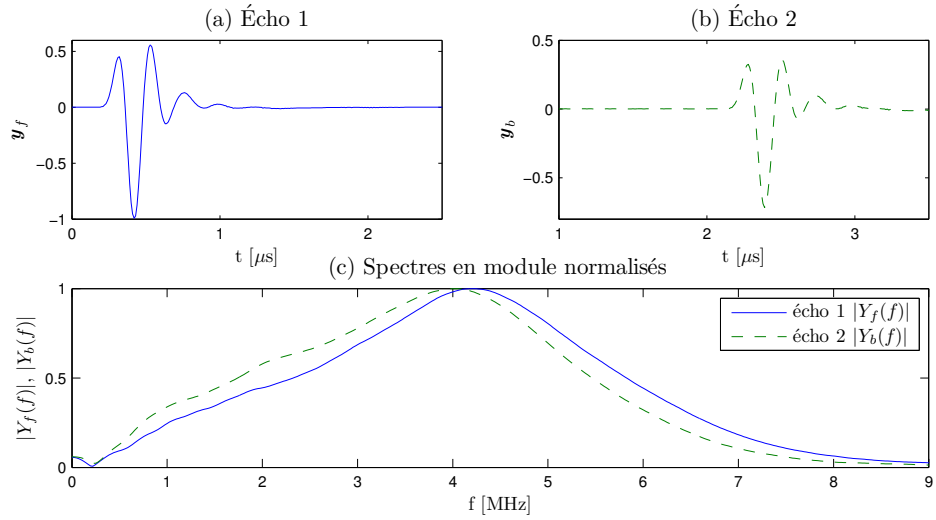


FIGURE 2.20 – Signaux temporels et fréquentiels acquis à partir d'une épaisseur d'huile de ricin de 3 mm avec un transducteur à 5 MHz. (a) : Écho 1 acquis avec la première position du transducteur, (b) : écho 2 acquis avec la deuxième position du transducteur, (c) : spectres en module des deux échos.

vitesse de phase grâce à la prise de compte de la dispersion. Nous observons également que la vitesse calculée avec le modèle d'Olofsson (2.69) a une forme relativement proche de la réalité.

La modélisation des signaux temporels est effectuée de la même façon que dans la partie précédente. Ces signaux sont représentés sur la figure 2.22. En termes d'adéquation entre les données et le modèle, nous obtenons le même classement que pour le polycarbonate. La moins bonne estimation est réalisée avec le modèle sans atténuation. Ensuite, les modèles à phase linéaire et d'Olofsson donnent des résultats équivalents. Les meilleurs résultats sont obtenus pour le modèle à phase dispersive qui fait baisser le résidu d'un facteur six par rapport à l'approche classique.

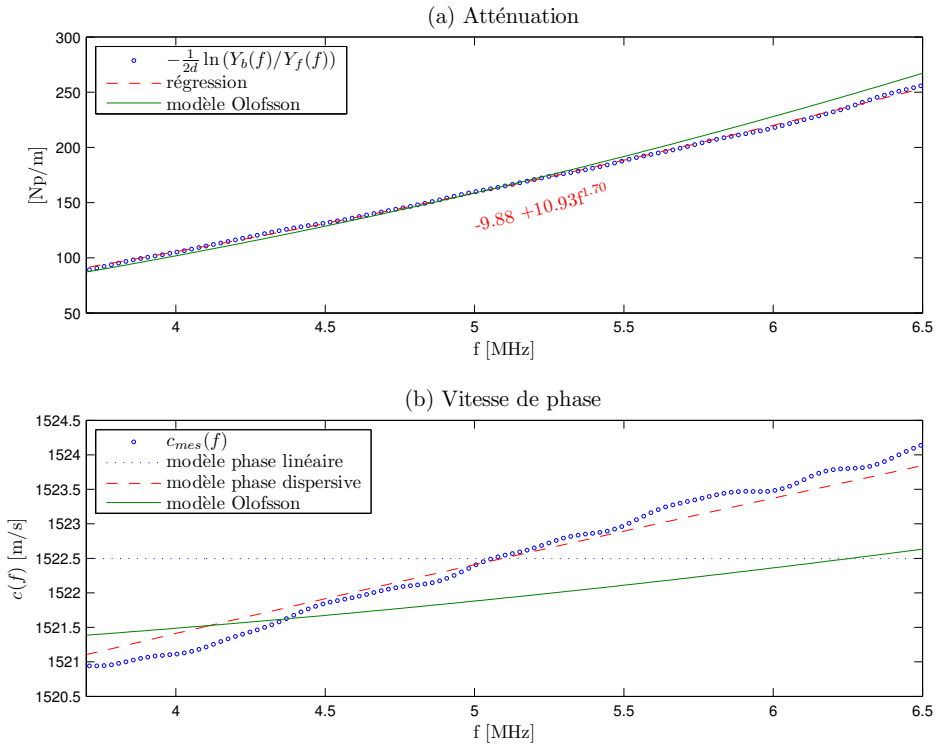


FIGURE 2.21 – Atténuation fréquentielle et vitesse de phase dans l'huile de ricin, mesurées et modèles. (a) : Atténuation, (b) : vitesse de phase.

2.3.3 Mesure aérienne en transmission dans un matériau poreux

Dans cette partie, nous nous intéressons aux matériaux poreux, qui sont des matériaux hétérogènes, contrairement au polycarbonate et à l'huile de ricin. Un matériau poreux est un milieu biphasique, c'est-à-dire constitué d'une partie solide et d'une partie fluide (les pores). Lorsqu'il est immergé, il y a donc trois ondes qui se propagent : une onde longitudinale dans la partie fluide et deux ondes, longitudinale et transversale, dans la partie solide. Nous ne nous intéressons pas à un modèle précis de propagation dans les matériaux poreux, tel qu'il est présenté par Biot [1956a;b]. Nous voulons ici tester la capacité du modèle d'atténuation dispersive à s'adapter à des matériaux hétérogènes. La mesure que nous présentons est réalisée dans l'air, de manière à avoir uniquement l'onde dans le fluide.

Tout d'abord, une mesure en transmission dans l'air entre deux transducteurs, de fréquence centrale 100 kHz, espacés de 22.1 cm, nous permet d'obtenir le signal $\boldsymbol{y}_f$ représenté sur la figure 2.23a. Cette mesure permet également d'obtenir la vitesse du son dans l'air : $c_a = 343\,\text{m.s}^{-1}$. Ensuite, une mousse poreuse d'épaisseur $d = 20\,\text{mm}$ est placée entre les deux transducteurs. Le signal obtenu $\boldsymbol{y}_b$, après propagation dans la mousse, est tracé sur la figure 2.23b. Les spectres en module normalisés des deux signaux sont représentés sur la figure 2.23c. On peut remarquer une annulation vers 50 kHz, due aux caractéristiques des transducteurs. Les points autour de cette valeur n'ont pas servi aux calculs d'atténuation et de vélocité. D'une manière similaire à ce qui a été fait précédemment, les spectres permettent de mesurer l'atténuation (figure 2.23d) dans le matériau poreux. Celle-ci ayant un profil plutôt linéaire, on peut identifier $\alpha_0 = 513.8\,\text{Np.MHz}^{-1}.\text{m}^{-1}$ par régression linéaire. Le coefficient α_0 permet de calculer la partie dispersive de la phase $\epsilon(f)$. La mesure de la vi-

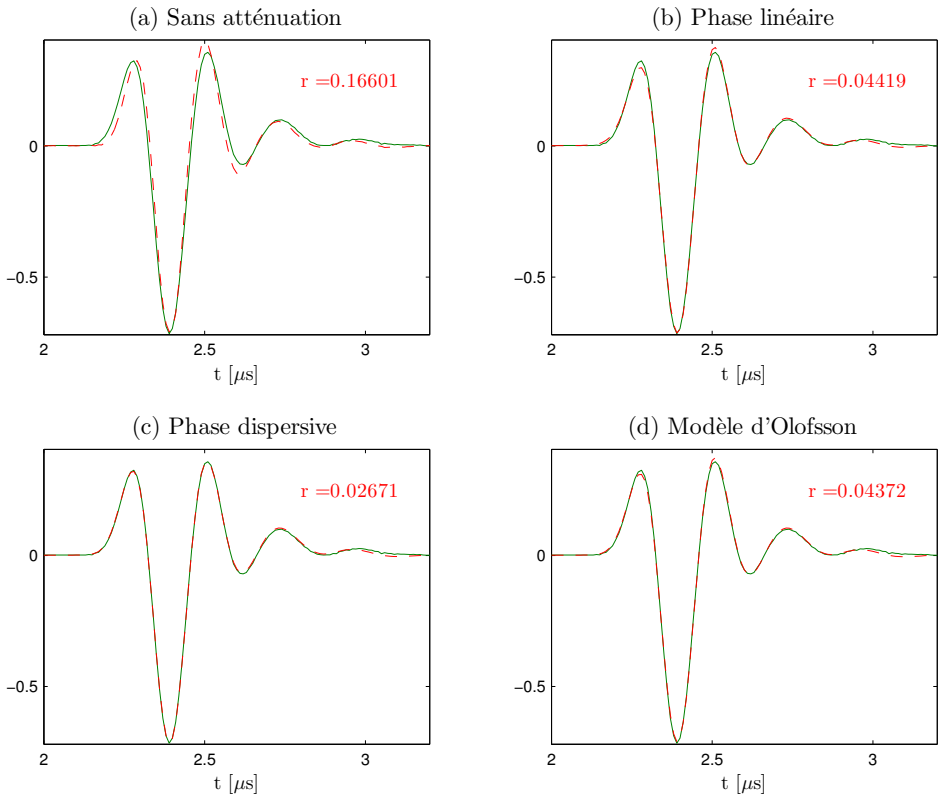


FIGURE 2.22 – Estimation du deuxième écho acquis dans l'huile de ricin grâce à plusieurs modèles d'atténuation. (a) : Estimation sans atténuation, (b) : estimation avec atténuation linéaire et phase linéaire, (c) : estimation avec atténuation linéaire et phase dispersive, (d) : estimation avec le modèle d'Olofsson. '–' : données, '- -' : estimation, r : erreur (2.76).

tesse de phase, exposée en figure 2.23e, aboutit aux estimations des vitesses $\widehat{c}_0 = 301.3\,\mathrm{m.s}^{-1}$ et $\widehat{c}_\infty = 325.8\,\mathrm{m.s}^{-1}$, grâce aux équations (2.79) et (2.81), respectivement. L'estimation de la vitesse de phase par le modèle dispersif est également représentée sur la figure 2.23e. L'adéquation n'est pas parfaite mais elle est plus proche que le modèle à vitesse de phase constante. Cette différence est due à la nature hétérogène de la mousse poreuse, qui a probablement un profil de vitesse de phase différent de notre modèle. Néanmoins, celui-ci permet une bonne approximation de la vitesse.

Comme dans les parties précédentes, l'écho réceptionné après propagation dans la mousse peut être estimé grâce au modèle sans atténuation et au modèle avec atténuation linéaire et phase dispersive. Ces estimations sont respectivement représentées sur les figures 2.24a et 2.24b. Le modèle avec atténuation dispersive fournit un résultat avec une erreur environ deux fois inférieure au modèle sans atténuation. Cette expérience montre que, dans une moindre mesure que pour les matériaux homogènes, le modèle avec atténuation dispersive développé permet de modéliser des signaux provenant de matériaux hétérogènes, comme les mousses poreuses. Ce travail mériterait d'être poursuivi dans le cas de matériaux poreux saturés par de l'eau, dans lesquelles trois types d'ondes se propagent et se mélangent.

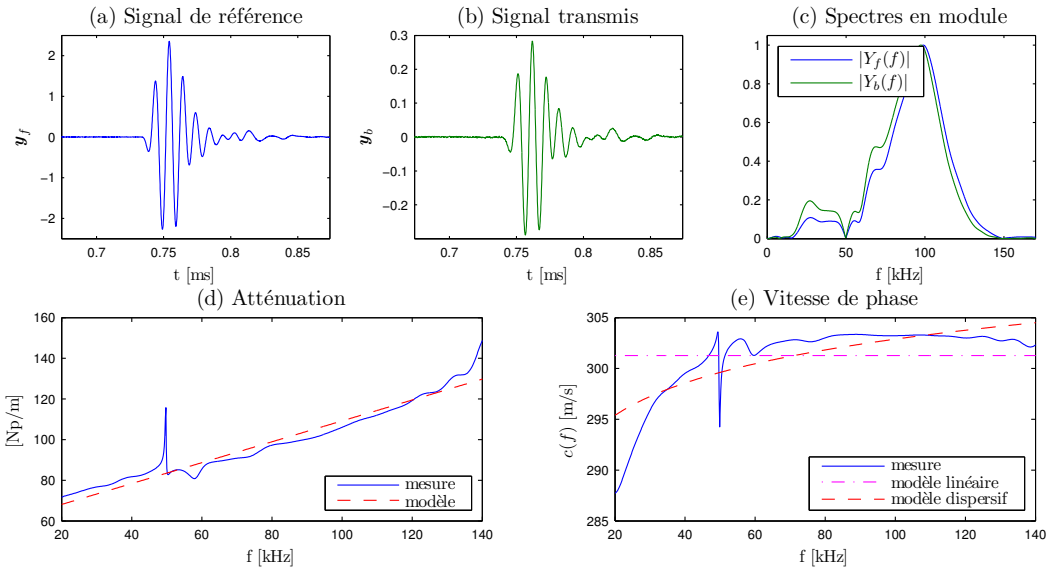


FIGURE 2.23 – Signaux temporels et fréquentiels acquis à partir d'une mousse poreuse de 20 mm d'épaisseur avec deux transducteurs à 100 kHz, et . (a) : Signal de référence, (b) : signal transmis, (c) : spectres en module, (d) : atténuation mesurée et régression linéaire, (e) : vitesse de phase mesurée et modèle.

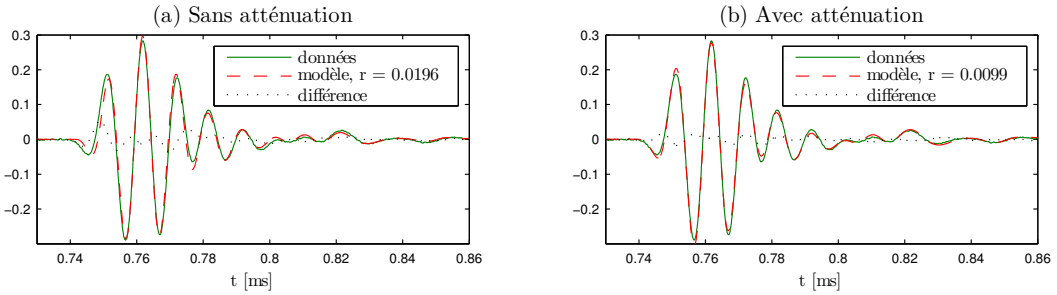


FIGURE 2.24 – Estimation de l'écho transmis par une mousse poreuse d'épaisseur 20 mm. (a) : Estimation sans atténuation, (b) : estimation avec atténuation linéaire et phase dispersive. '–' : données, '- -' : estimation, r : erreur (2.76).

2.3.4 Exploitation du modèle pour l'Évaluation Non Destructive

Le modèle linéaire introduit dans la section 2.2 permet l'usage de méthodes d'estimation rapides comme le filtre adapté (équation (2.86)). Nous proposons d'utiliser cette procédure pour réaliser l'évaluation non-destructive d'un matériau, c'est-à-dire estimer certains de ses paramètres inhérents (masse volumique, vitesse des ondes, coefficient d'atténuation, *etc.*). Dans cette étude, les paramètres à retrouver sont le coefficient d'atténuation et la vitesse des ondes. Le principe est de tester plusieurs configurations de modèles avec des paramètres de différentes valeurs et de sélectionner les paramètres qui minimisent l'erreur entre les données et le modèle (équation (2.76)). Nous montrons qu'il est possible d'exprimer les modèles en fonction d'un seul paramètre (à facteur de loi de puissance constant). Dans cette partie, ce procédé d'évaluation est appliqué à l'estimation des paramètres du polycarbonate.

Pour un facteur γ donné dans le modèle en loi de puissance $\alpha(f) = \alpha_0|f|^\gamma$ (équation (2.9)),

on peut écrire la fonction de propagation (2.29) comme

$$H_r(f, p\Delta_z) = e^{-\alpha(f)p\Delta_z - j2\pi f p\Delta_z / c_{\text{ref}} - j\epsilon(f)p\Delta_z}. \tag{2.87}$$

La partie dispersive de la phase

$$\epsilon(f) = -\frac{1}{f_S}\alpha_0 \mathcal{P} \int_{-\frac{f_S}{2}}^{\frac{f_S}{2}} |g|^\gamma \cot\left(\frac{\pi}{f_S}(f-g)\right) \mathrm{d}g = \alpha_0 \epsilon'(f, \gamma), \tag{2.88}$$

est linéaire par rapport à α_0. Si $\Delta_z = c_{\text{ref}}\Delta_t$, on peut donc écrire

$$H_r(f, z_p) = e^{-(|f|^\gamma + j\epsilon'(f,\gamma))\alpha_0 c_{\text{ref}} p\Delta_t} e^{-j2\pi f p\Delta_t}. \tag{2.89}$$

Pour une valeur donnée de γ, la fonction de propagation est donc paramétrée par un unique coefficient sans unité $\chi = \alpha_0 c_{\text{ref}}$. Pour chaque valeur de χ, la vitesse c_{ref} peut être déduite à partir de la dimension d de l'objet et de l'estimation de la position temporelle $\hat{p}$ de l'écho suivant

$$c_{\text{ref}} = \frac{d}{\hat{p}\Delta_t}. \tag{2.90}$$

où $\hat{p}$ est calculé selon l'équation (2.86). Le coefficient d'atténuation correspondant est alors

$$\alpha_0 = \frac{\chi}{c_{\text{ref}}}. \tag{2.91}$$

En pratique, nous discrétisons χ sur une grille fine de façon à couvrir des plages réalistes de paramètres pour α_0 et c_{ref}. Pour chaque valeur de χ, une matrice $\mathbf{G}(\chi)$ est construite avec un modèle d'atténuation donné. Nous utilisons ensuite le processus de filtrage adapté (voir partie 2.3.1) pour déterminer la position optimale $\hat{p}$:

$$(\hat{p}(\chi), \hat{a}(\chi)) = \underset{p=0\ldots N_x-1,\ a\in\mathbb{R}}{\arg\min} \left\| \boldsymbol{y}_b - \boldsymbol{g}_p(\chi) a \right\|^2. \tag{2.92}$$

L'estimation de l'écho est donc

$$\hat{\boldsymbol{y}}_b(\chi) = \boldsymbol{g}_{\hat{p}(\chi)} \hat{a}(\chi). \tag{2.93}$$

Une fois tous les $\hat{p}(\chi)$ calculés, nous sélectionnons la solution $\hat{\chi}$ qui minimise l'erreur (2.76)

$$\hat{\chi} = \underset{\chi}{\arg\min} \frac{\|\boldsymbol{y}_b - \hat{\boldsymbol{y}}_b(\chi)\|}{\|\boldsymbol{y}_b\|}. \tag{2.94}$$

Cette valeur permet d'estimer les paramètres $\hat{\alpha}_0$ et $\hat{c}_{\text{ref}}$ grâce aux équations (2.90) et (2.91).

Dans cet exemple, nous avons utilisé les données acquises avec une plaque de polycarbonate de 10.2 mm d'épaisseur avec un transducteur à 2.25 MHz (mêmes données que dans la partie 2.3.1). Le paramètre χ est discrétisé entre 0 et 0.2350 avec un pas de 0.000175. Nous discrétisons également le paramètre a du modèle d'Olofsson entre 0 et 0.4 avec un pas de 0.0001. La résolution temporelle choisie est $0.0025\ \mu$s, ce qui correspond à un facteur de sur-échantillonnage $K = 4$ (avec $f_S = 100$ MHz). Pour chaque valeur de χ ou a, une matrice $\mathbf{G}$ est générée et le calcul de l'équation (2.86) permet de retrouver la position temporelle optimale $\hat{p}$. Nous représentons sur la figure 2.25, les coefficients d'atténuation et les vitesses associés à chaque valeur de χ ou de a. Les valeurs qui minimisent l'erreur (2.76) sont réca-

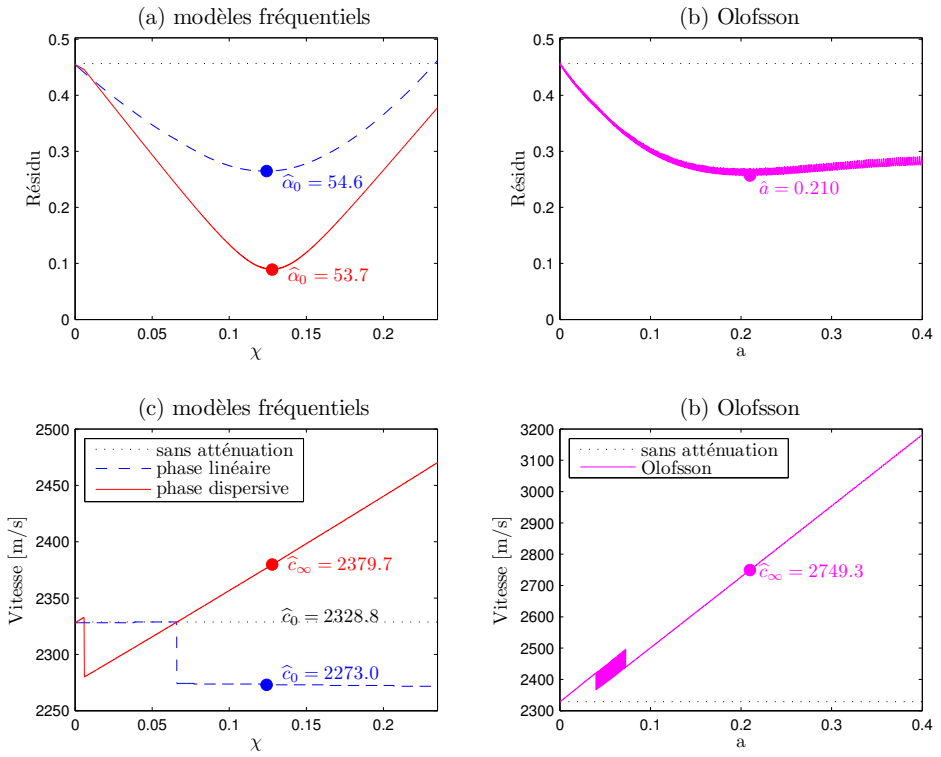


FIGURE 2.25 – Evaluation non destructive d'une plaque de polycarbonate. (a) : Résidu (2.76) en fonction de χ (modèles fréquentiels), (b) : résidu en fonction de a (modèle d'Olofsson), (c) : vitesse en fonction de χ, (d) : vitesse en fonction de a. Les valeurs minimales de résidu (•) permettent l'estimation des coefficients d'atténuation ($\widehat{\alpha}_0$ ou $\widehat{a}$) et des vitesses ($\widehat{c}_0$ ou $\widehat{c}_\infty$).

	Modèle	$\widehat{\chi}$ ou $\widehat{a}$	$\widehat{p}\Delta_t$ (μs)	$\widehat{c}_{\text{ref}}$ (m.s^{-1})	$\widehat{\alpha}_0$ (Np.MHz^{-1}.m^{-1})
1	Sans atténuation		8.76	$\widehat{c}_0 = 2328.8$	0
2	Phase linéaire	$\widehat{\chi} = 0.1242$	8.97	$\widehat{c}_0 = 2273.0$	54.6
3	Phase dispersive	$\widehat{\chi} = 0.1278$	8.57	$\widehat{c}_\infty = 2379.7$	53.7
4	Olofsson	$\widehat{a} = 0.210$	7.42	$\widehat{c}_\infty = 2749.3$	

TABLE 2.2 – Tableau des estimations des $\widehat{\chi}$, des temps de vol $\widehat{p}\Delta_t$, des vitesses et des coefficients d'atténuation par évaluation non destructive. Mesures acquises avec une plaque de polycarbonate de 10.2 mm d'épaisseur grâce à un transducteur centré à 2.25 MHz. Pour les modèles 2 et 3, $\gamma = 1$.

pitulées dans le tableau 2.2. Ces valeurs sont à comparer avec celles obtenues par division spectrale dans la partie 2.3.1 (voir tableau 2.1 page 52).

On remarque que ces valeurs sont très proches sauf pour le modèle sans atténuation. Le coefficient d'atténuation $\widehat{\alpha}_0$ et la vitesse $\widehat{c}_0 = 2273.0\,\text{m.s}^{-1}$ sont conformes aux valeurs que l'on trouve dans la littérature [Selfridge 1985]. Les signaux temporels estimés avec les paramètres optimaux sont représentés sur la figure 2.26. Notons que les résidus sont très proches de celles obtenues dans la partie 2.3.1. La différence pour le modèle sans atténuation vient du fait qu'une meilleure estimation est obtenue une demi-période plus tôt par rapport

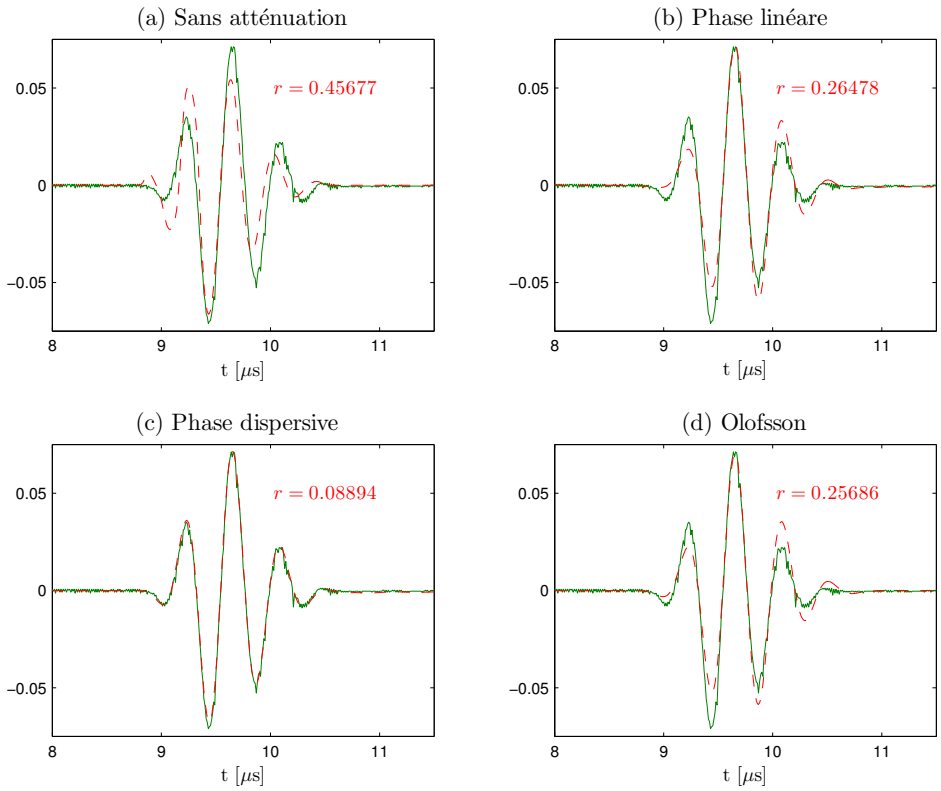


FIGURE 2.26 – Signaux temporels correspondant aux paramètres obtenus par évaluation non destructive (voir tableau 2.2) d'une plaque de polycarbonate d'épaisseur 10.2 mm et un transducteur à 2.25 MHz. (a) : Estimation sans atténuation, (b) : estimation avec atténuation linéaire et phase linéaire, (c) : estimation avec atténuation linéaire et phase dispersive, (d) : estimation avec le modèle d'Olofsson. '–' : données, '- -' : estimation, r : erreur (2.76).

à la figure 2.17. Cela influe donc directement sur l'estimation sur-évaluée de la vitesse qui devrait être proche de la vitesse de groupe : $2273\,\mathrm{m.s^{-1}}$. De même que dans les parties précédentes, c'est le modèle avec atténuation en loi de puissance et phase dispersive qui fournit l'erreur la plus faible et qui peut donc être considéré comme le plus fiable dans l'estimation des paramètres dans un contexte d'évaluation non destructive.

2.3.5 Problème de diffraction des cibles : application aux trous à fond plat

Nous nous intéressons ici à la fiabilité du modèle dans le cas où les échos proviennent de profils géométriques différents. C'est typiquement le cas dans un cadre de contrôle non destructif où il faut détecter des défauts de formes variées. Nous choisissons d'étudier un cas simple : le trou à fond plat (*Flat Bottom Hole*, FBH). Celui-ci est percé par la face arrière d'une plaque d'aluminium de 40 mm d'épaisseur. L'aluminium est reconnu pour être homogène et avoir une atténuation quasiment nulle [Selfridge 1985]. De cette façon, nous nous focalisons sur la diffraction en négligeant l'atténuation. Nous considérons le schéma de mesure de la figure 2.27. Le transducteur centré sur 5 MHz utilisé en mode *pulse-echo* est placé du coté opposé au FBH. Ce dernier est de diamètre 5 mm et de profondeur $d = 20\,\mathrm{mm}$.

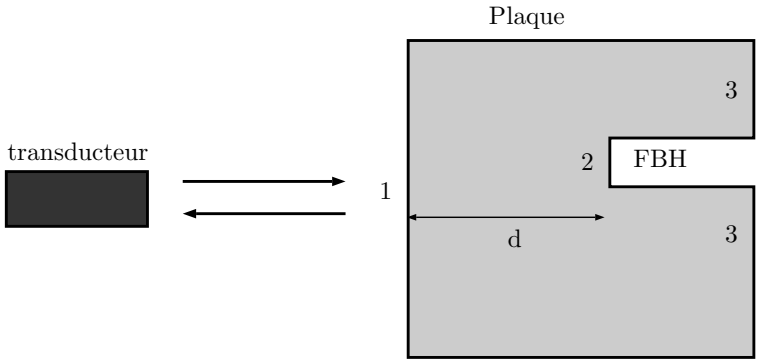


FIGURE 2.27 – Schéma de la mesure ultrasonore avec une plaque percée d'un trou à fond plat (FBH) par le fond. Les échos reçus par le capteur sont respectivement 1) l'écho de surface, 2) l'écho du FBH et 3) l'écho du fond de la plaque.

Nous utilisons le logiciel CIVA [Mahaut *et al.* 2009][4] pour simuler le signal acquis pour une telle mesure. La méthode de calcul utilisée est l'approximation de Kirchhoff, qui est une extension du principe de Huygens[5].

Les données acquises sont représentées sur la figure 2.28, respectivement composées de l'écho de surface $\boldsymbol{y}_f$, de l'écho du FBH $\boldsymbol{y}_{fbh}$ et de l'écho du fond de la plaque $\boldsymbol{y}_b$. Nous traçons également les spectres en module $|Y_f(f)|$ et $|Y_{fbh}(f)|$. On observe un décalage vers les hautes fréquences de la forme d'onde et donc un effet passe-haut du FBH. Cela se confirme si on trace le rapport des modules (2.75) : $-1/2d \ln\left(|Y_{fbh}(f)|/|Y_f(f)|\right)$. Cet effet passe-haut se retrouve dans la littérature lorsqu'on aborde la modélisation du signal réfléchi par un disque [Rhyne 1977, Fink et Cardoso 1984, Cassereau *et al.* 1988]. Une approximation linéaire de la division spectrale permet d'obtenir un coefficient d'atténuation négatif $\alpha_0 = -10.23\,\text{Np.MHz}^{-1}.\text{m}^{-1}$ sous le modèle de l'équation (2.9) $\alpha(f) = \exp\left(-\alpha_0|f|z\right)$.

Ce caractère passe-haut dû à la réflexion sur le trou a été observé avec des données réelles acquises dans l'aluminium, pour plusieurs diamètres et profondeurs de trou. Cet exemple permet de montrer que la géométrie des défauts joue un rôle important dans la signature spectrale. Dans un contexte d'inversion, pour retrouver les positions des défauts, l'hypothèse d'invariance de la fonction de diffraction que nous avions supposée est incorrecte. Le modèle que nous avons développé est de ce fait applicable à des problèmes où les formes géométriques sont équivalentes. C'est le cas par exemple pour les surfaces planes que nous avons utilisées dans les parties 2.3.1 et 2.3.4, ou des défauts de grandes tailles. Une des perspectives de ce travail sera d'adapter le modèle à plusieurs signatures de défauts dans le but de les détecter.

[4] Voir également le site du logiciel CIVA : http://www-civa.cea.fr.

[5] Le principe de Huygens postule que chaque point d'un front d'onde peut être considéré comme un point source émettant une onde sphérique, et que le champ total est ensuite construit par la superposition des champs créés par chacun des points sources.

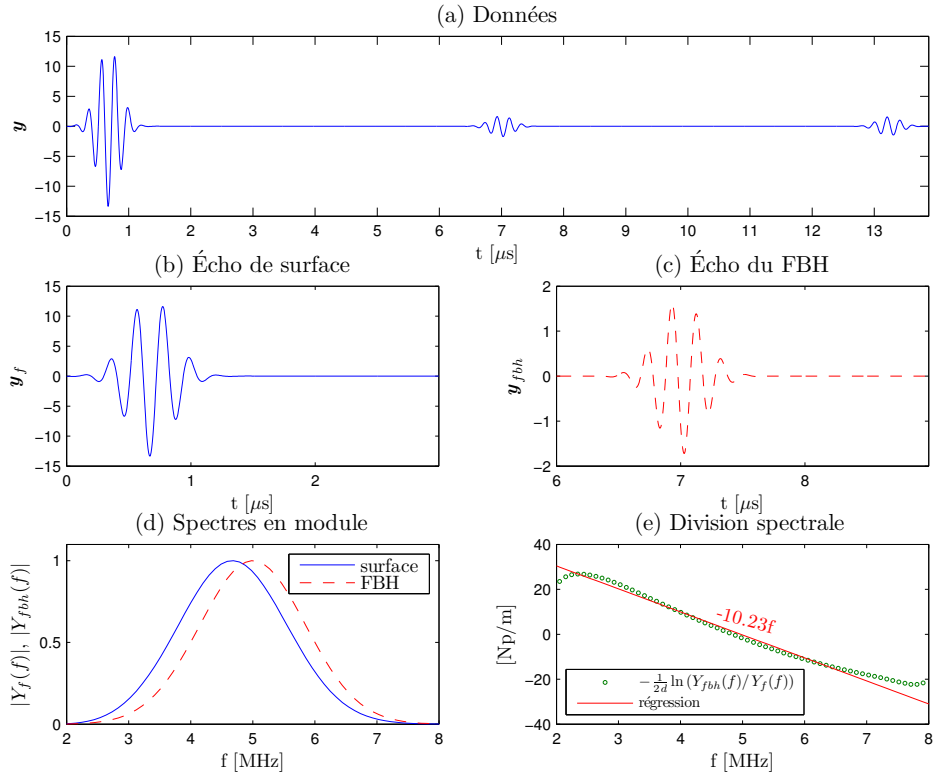


FIGURE 2.28 – Signaux reçus à partir d'une plaque d'aluminium contenant un trou à fond plat (Simulations CIVA). (a) : Données, (b) : écho de surface, (c) : écho du FBH, (d) : spectres en modules des échos, (e) : division spectrale et regression linéaire.

Chapitre 3

Le problème inverse : la déconvolution parcimonieuse

Sommaire

Introduction **66**

3.1 Approches paramétriques **66**

3.1.1 Modèles de formes d'ondes 66

3.1.2 Méthodes locales d'optimisation 67

3.1.3 Quelques méthodes d'optimisation non-linéaire 69

3.1.4 Méthodes de type Espérance-Maximisation 71

3.2 Minimisation d'un critère pénalisé **73**

3.2.1 Description du modèle direct 73

3.2.2 Inverse généralisée 74

3.2.3 Régularisation par minimisation d'un critère pénalisé 74

3.2.4 Réglage du paramètre de régularisation 79

3.3 Régularisation par la pseudo-norme ℓ_0 . . . . . **80**

3.3.1 Formulation du problème d'optimisation 80

3.3.2 Méthodes d'optimisation par une approche gloutonne 81

3.3.3 L'agorithme Single Best Replacement 84

3.3.4 Comparaison des algorithmes gloutons et SBR 86

3.4 Des algorithmes plus efficaces d'optimisation ℓ_0 . . . . . **88**

3.4.1 Mouvements plus complexes 88

3.4.2 Sélection dans une fenêtre 89

3.4.3 Sélection basée sur un calcul d'auto-corrélation multidimensionnelle 92

Introduction

Le problème inverse consiste à estimer les temps de vol et les amplitudes des échos contenus dans le signal reçu par le capteur ultrasonore. Nous détaillons dans ce chapitre plusieurs méthodes pour résoudre ce problème. La première approche consiste à formuler le modèle comme la somme d'échos paramétrés et à identifier les paramètres par des méthodes d'optimisation de type moindres carrés non linéaires. Dans la section 3.1, nous donnons un aperçu des modèles et des méthodes d'estimation des paramètres. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, le modèle direct peut se mettre sous une forme linéaire en discrétisant les domaines spatial et temporel. Le but est alors d'estimer un vecteur parcimonieux, c'est-à-dire qui contient peu de valeurs non nulles, permettant de localiser les temps de vol. Dans la section 3.2, nous montrons qu'une inversion directe ne permet pas d'atteindre ce but et présente des problèmes d'instabilité. Une solution efficace est alors de régulariser le problème inverse grâce à la minimisation d'un critère pénalisé qui favorise la parcimonie. Nous nous intéressons particulièrement dans la section 3.3 à la régularisation par une pseudo-norme ℓ_0. Cette norme n'est pas convexe et nécessite des heuristiques performantes d'exploration des solutions. Plusieurs algorithmes d'optimisation sont proposés dans cette section et sont comparés grâce à des exemples simulés et à des simulations de Monte-Carlo.

3.1 Approches paramétriques

La façon qui semble la plus naturelle pour résoudre le problème inverse est de considérer un modèle analytique des échos et d'estimer les paramètres de ce modèle à partir des données [Demirli et Saniie 2001a].

L'utilisation des méthodes paramétriques a fait l'objet d'un stage ingénieur au sein de l'équipe ADTSI de l'IRCCyN [Rolland 2014]. Il a été consacré aux méthodes d'optimisation locales dans un contexte de contrôle non destructif par ultrasons. Cette partie reprend quelques éléments et résultats obtenus lors du stage.

3.1.1 Modèles de formes d'ondes

Nous avons vu au chapitre 2 que le signal peut être modélisé par la somme de K échos à laquelle on ajoute un bruit gaussien $b(t)$. Chaque écho $s(t, \boldsymbol{\theta}_k)$ est défini par un jeu de paramètres $\boldsymbol{\theta}_k$. Le modèle du signal reçu par le capteur est alors

$$y(t) = \sum_{k=1}^{K} s(t, \boldsymbol{\theta}_k) + b(t). \tag{3.1}$$

On notera $\boldsymbol{\Theta}$, le vecteur colonne qui représente l'ensemble des paramètres $\boldsymbol{\theta}_k$, tel que $\boldsymbol{\Theta} = [\boldsymbol{\theta}_1^T, \ldots, \boldsymbol{\theta}_K^T]^T$. Ce vecteur est l'inconnue du problème.

Le modèle le plus utilisé dans la littérature est l'écho gaussien[1] ou ondelette de Gabor [Demirli et Saniie 2000; 2001a], qui est une gaussienne modulée par un signal sinusoï-

[1] Dans la suite, nous utilisons cette forme d'onde pour simuler des signaux ultrasonores. Par ailleurs, nous utilisons le paramètre de facteur de largeur de bande BWR_p détaillé dans l'annexe B.2 pour régler la variance des gaussiennes. Pour une bande passante à p dB ce lien s'écrit $\sigma_f^2 = -\frac{(\mathrm{BWR}_p f_0)^2}{8 \ln(10^{p/20})}$ avec $p < 0$.

dal :

$$s(t, \boldsymbol{\theta}) = Ae^{-\alpha(t-\tau)^2} \cos\left(2\pi f_0(t-\tau) + \phi\right), \tag{3.2}$$

où A est l'amplitude de l'écho, τ est le temps de vol, α est relié à la largeur de la gaussienne, f_0 est la fréquence centrale et ϕ est le décalage de phase. Ces paramètres forment $\boldsymbol{\theta} = [\alpha\ \tau\ f_0\ \phi\ A]$ qui est le jeu de paramètres à estimer pour un écho. D'autres modèles plus complexes existent, comme par exemple, une sinusoïde avec une enveloppe composée de la somme de gaussiennes [Demirli et Saniie 2001b], un chirp avec une enveloppe gaussienne [Lu *et al.* 2006], un chirp avec une enveloppe composée de la somme de gaussiennes [Demirli et Saniie 2009], un chirp avec une enveloppe asymétrique [Demirli et Saniie 2010]. Ces modèles avec davantage de paramètres permettent une plus grande flexibilité mais peuvent rendre le problème d'optimisation plus difficile à résoudre.

3.1.2 Méthodes locales d'optimisation

L'objectif est de minimiser l'erreur entre les données $y(t)$ et le modèle au sens des moindres carrés. Pour obtenir une estimation des paramètres $\boldsymbol{\Theta}$, il faut résoudre le problème d'optimisation

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}} = \arg\min_{\boldsymbol{\Theta}} \left\| y(t) - \sum_{k=1}^{K} s(t, \boldsymbol{\theta}_k) \right\|^2 = \arg\min_{\boldsymbol{\Theta}} f(\boldsymbol{\Theta}). \tag{3.3}$$

Pour des données à temps discret, où $t_n = nT_S$ avec $0T_S$ la période d'échantillonnage, la fonction à minimiser est donc

$$f(\boldsymbol{\Theta}) = \sum_{n=1}^{N_y} \left(y(t_n) - \sum_{k=1}^{K} s(t_n, \boldsymbol{\theta}_k) \right)^2 = \left\| \boldsymbol{y} - \sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{s}(\boldsymbol{\theta}_k) \right\|^2 = \left\| \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\Theta}) \right\|^2, \tag{3.4}$$

où $\boldsymbol{y}$ est le vecteur des données, $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{\theta}_k)$ est le modèle pour l'écho k et $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\Theta})$ est le résidu d'estimation (ce sont des vecteurs colonnes). La fonction f étant non-linéaire en fonction de $\boldsymbol{\Theta}$, l'équation (3.3) formule un problème d'optimisation des moindres carrés non-linéaire. Il est possible d'utiliser une méthode d'optimisation itérative qui tend à converger vers une solution locale. Ces algorithmes partent d'une solution initiale $\boldsymbol{\Theta}^{(0)}$ et s'arrêtent lorsque la norme entre deux itérés est inférieure à une tolérance ϵ. Il est possible d'utiliser d'autres conditions d'arrêt comme lorsque la fonction à minimiser ne décroît plus ou lorsque la norme de son gradient est inférieure à une certaine valeur. La structure générale d'un algorithme itératif est donnée ici :

- Initialisations : $i = 1$, cvge $= 0$, $\boldsymbol{\Theta}^{(0)}$
- Tant que cvge $= 0$ faire
  $\boldsymbol{\Theta}^{(i)} = \boldsymbol{\Theta}^{(i-1)} + \boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\Theta}}$
  si $\left\| \boldsymbol{\Theta}^{(i)} - \boldsymbol{\Theta}^{(i-1)} \right\| < \epsilon$
  cvge $= 1$
  sinon
  $i = i + 1$
  fin si
  Fin tant que

La différence entre les méthodes réside dans la façon dont est calculé $\Delta_{\boldsymbol{\Theta}}$ à chaque itération. Cette grandeur détermine la convergence et la vitesse de celle-ci. Nous détaillons quelques algorithmes dans la partie 3.1.3. Ces algorithmes sont des méthodes d'optimisation locales en opposition aux méthodes globales qui tentent de résoudre un problème contenant plusieurs minima locaux. Nous n'abordons pas ce type de méthodes qui sont très coûteuses en temps de calcul.

Étude de f en fonction des paramètres

Pour illustrer la difficulté de résolution du problème d'optimisation des moindres carrés non-linéaire, nous étudions qualitativement l'évolution de la fonction à minimiser de l'équation (3.4) en fonction de chaque paramètre pour un modèle à un écho gaussien. Les données sont générées sans bruit suivant le modèle de l'équation (3.2) avec les paramètres $\check{\alpha} = 25\,\mu\text{s}^{-2}$, $\check{\tau} = 1\,\mu\text{s}$, $\check{f}_0 = 5\,\text{MHz}$, $\check{\phi} = 0\,\text{rad}$, $\check{A} = 1$ et sont représentées sur la figure 3.1a. Les variations de f en fonction de chaque paramètre, avec les autres paramètres fixés à leurs

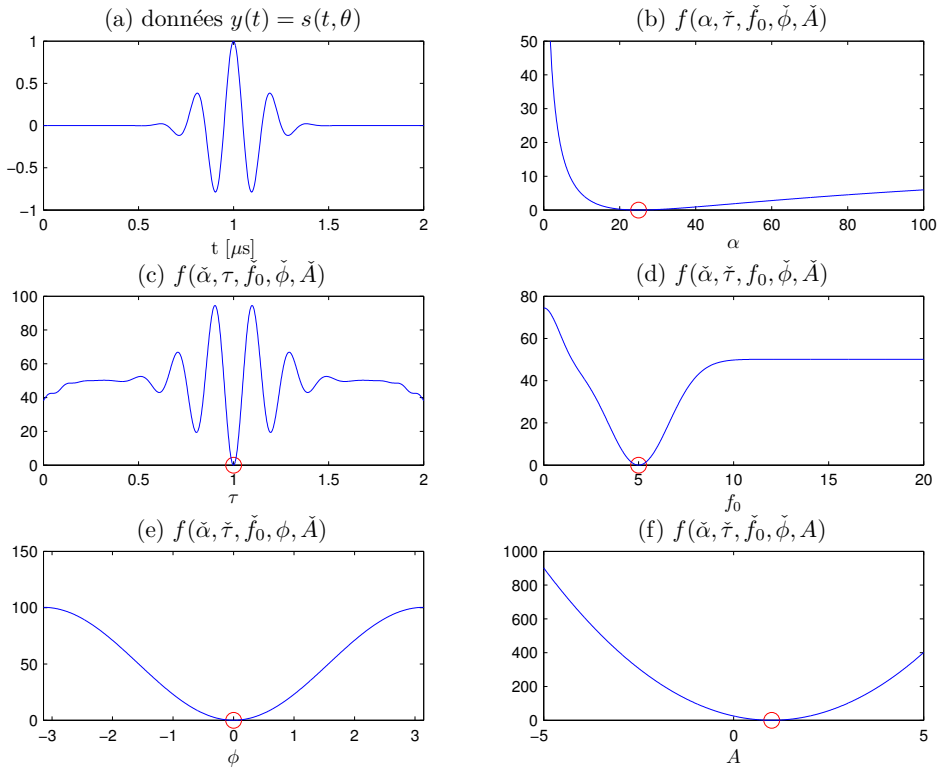


FIGURE 3.1 – Étude de la fonction (3.4) à minimiser par rapport à chaque paramètre (les autres paramètres sont fixés à leur vraie valeur), pour un modèle d'écho gaussien. (a) : Données, (b) : f en fonction de α, (c) : f en fonction de τ, (d) : f en fonction de f_0, (e) : f en fonction de ϕ, (f) : f en fonction de A. La valeur minimale de la fonction est nulle et les vraies valeurs des paramètres sont représentées par des cercles.

vraies valeurs, sont présentées sur les figures 3.1b-c-d-e-f. Le paramètre d'amplitude A étant linéaire par rapport au modèle, on obtient une forme quadratique, donc convexe (figure 3.1f). Les paramètres α, f_0 et ϕ ne montrent pas de difficulté particulière non plus, car les fonctions correspondantes ont un seul minimum local. Elles ne sont cependant pas convexes. Il

faut noter que la dépendance en ϕ est périodique. Le problème vient essentiellement de la dépendance de la fonction par rapport au temps de vol τ qui a de nombreux minima locaux. Ceci est dû au caractère oscillant du modèle de formes d'onde, qui crée une répétition des minima locaux espacés de $1/f_0$. Une bonne initialisation sur le temps de vol est donc primordiale pour que l'algorithme ne converge pas vers un mauvais minimum local. Le problème est plus difficile lorsque le nombre d'échos augmente, de surcroît lorsqu'ils se mélangent.

3.1.3 Quelques méthodes d'optimisation non-linéaire

Nous présentons ici quelques méthodes d'optimisation locales [Bazaraa *et al.* 2013].

Méthode du gradient

La méthode du gradient ou méthode de la plus forte pente consiste à sélectionner les itérés dans la direction opposée au gradient, de manière à faire décroître la fonction au point courant. Si f est différentiable, l'estimation des paramètres à l'itération i est donc

$$\boldsymbol{\Theta}^{(i)} = \boldsymbol{\Theta}^{(i-1)} - \alpha \nabla f(\boldsymbol{\Theta}^{(i-1)}), \tag{3.5}$$

où $\alpha > 0$ est le pas de descente et $\nabla f(\boldsymbol{\Theta}^{(i-1)})$ est le gradient de f au point $\boldsymbol{\Theta}^{(i-1)}$. Le gradient étant défini par $\nabla f(\boldsymbol{\Theta}) = 2\mathbf{J}^T \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\Theta})$, avec $\mathbf{J}$ la matrice jacobienne telle que

$$\mathbf{J}_{n,m} = \frac{\partial r_n}{\partial \Theta_m} = -\frac{\partial \sum_{k=1}^{K} s(t_n, \boldsymbol{\theta}_k)}{\partial \Theta_m}, \tag{3.6}$$

(où r_n est le $n^{\text{ème}}$ élément de $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\Theta})$), on peut écrire

$$\boldsymbol{\Theta}^{(i)} = \boldsymbol{\Theta}^{(i-1)} - 2\alpha \mathbf{J}^T \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\Theta}). \tag{3.7}$$

Le pas de descente peut être constant. Dans ce cas, l'algorithme converge lentement si le pas est trop petit ou s'éloigne du minimum s'il est trop grand. Il est de ce fait préférable de définir le pas à chaque itération par recherche de ligne, de façon à assurer une décroissance suffisante du critère à chaque itération [Chouzenoux 2010]. Cet algorithme est efficace car il garantit une décroissance de la fonction à minimiser. Il est cependant connu pour être lent à converger. D'autres extensions, comme le gradient conjugué, effectuent une recherche de pas efficace combinée au calcul du gradient (nous avons fait le choix de ne pas poursuivre l'étude ce genre d'approches).

Méthode de Newton

Si f est deux fois dérivable, un extremum local vérifie la condition nécessaire $\nabla f(\boldsymbol{\Theta}) = 0$. La méthode de Newton va permettre de chercher des solutions de $\nabla f(\boldsymbol{\Theta}) = 0$, autrement dit les points stationnaires de f. La loi des itérés est

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Theta}^{(i)} &= \boldsymbol{\Theta}^{(i-1)} - \mathbf{H}(\boldsymbol{\Theta}^{(i-1)})^{-1} \nabla f(\boldsymbol{\Theta}^{(i-1)}) \\ &= \boldsymbol{\Theta}^{(i-1)} - 2\mathbf{H}(\boldsymbol{\Theta}^{(i-1)})^{-1} \mathbf{J}^T \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\Theta}^{(i-1)}), \end{aligned} \tag{3.8}$$

où $\mathbf{H}(\boldsymbol{\Theta}^{(i-1)})$ est la matrice hessienne formée des dérivées partielles secondes de f au point $\boldsymbol{\Theta}^{(i-1)}$: $\mathbf{H}_{n,m} = \partial^2 f_n / \partial \Theta_m \partial \Theta_n$. Cet algorithme est rapide à converger mais nécessite une inversion de système à chaque itération. Des problèmes se posent alors lorsque la matrice $\mathbf{H}(\boldsymbol{\Theta}^{(i-1)})$ est mal conditionnée. De plus, il ne garantit pas une convergence au minimum local car il peut se diriger vers un maximum local ou un point selle.

Méthode de Gauss-Newton

La méthode de Gauss-Newton est spécifique à la résolution de problèmes de moindres carrés non linéaires, dont l'équation (3.3) fait partie. Si on considère la linéarisation de l'équation (3.4) telle que $f(\boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\Theta}}) \approx \|\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\Theta}) - \mathbf{J}\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\Theta}}\|^2$ ($\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\Theta})$ est le résidu d'estimation), l'annulation du gradient de $f(\boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\Theta}})$ par rapport à $\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\Theta}}$ aboutit à $\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\Theta}} = \left(\mathbf{J}^T\mathbf{J}\right)\mathbf{J}^T\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\Theta})$. Si on se dirige dans le sens opposé au gradient, on obtient alors la solution au point courant

$$\boldsymbol{\Theta}^{(i)} = \boldsymbol{\Theta}^{(i-1)} - \left(\mathbf{J}^T\mathbf{J}\right)^{-1}\mathbf{J}^T\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\Theta}^{(i-1)}). \tag{3.9}$$

Cette approche peut être vue comme une approximation de la méthode de Newton dans laquelle la matrice hessienne $\mathbf{H}(\boldsymbol{\Theta})$ est approchée par $2\mathbf{J}^T\mathbf{J}$, évitant ainsi le calcul des dérivées secondes. Tout comme l'algorithme de Newton, l'algorithme peut ne pas converger si $\mathbf{J}^T\mathbf{J}$ est mal conditionnée.

Méthode de Levenberg-Marquardt

La méthode de Levenberg-Marquardt se situe entre les méthodes du gradient et de Gauss-Newton. Le principe est de régulariser l'équation (3.9) de façon à stabiliser l'inversion

$$\boldsymbol{\Theta}^{(i)} = \boldsymbol{\Theta}^{(i-1)} - \left(\mathbf{J}^T\mathbf{J} + \lambda\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{J}^T\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\Theta}^{(i-1)}), \tag{3.10}$$

où $\lambda > 0$ est un paramètre de régularisation et $\mathbf{I}$ est la matrice identité. Lorsque λ tend vers zéro, la méthode tend vers celle de Gauss-Newton alors que quand λ est très grand, elle tend vers la méthode du gradient avec un pas $\alpha = 1/2\lambda$. Une autre version de l'algorithme utilise la diagonale de $\mathbf{J}^T\mathbf{J}$ à la place de la matrice identité. Le paramètre λ est modifié en permanence pour obtenir la valeur qui fait le plus décroître f.

Comparaison des algorithmes en fonction de l'initialisation

Nous utilisons ici les données contenant un seul écho non bruité présentées dans la partie 3.1.2, où les vrais paramètres sont notés $\breve{\boldsymbol{\theta}} = [25,\ 1,\ 5,\ 0,\ 1]$. Les algorithmes de Newton, Gauss-Newton et Levenberg-Marquardt sont utilisés avec plusieurs initialisations. Nous écartons la méthode du gradient qui est lente à converger. Les résultats sont regroupés dans le tableau 3.1. Les valeurs très proches de zéro indiquent la convergence au minimum global

Initialisation $\boldsymbol{\theta}_0$	$\tau^{(0)}$	Newton	Gauss-Newton	Levenberg-Marquardt
$\breve{\boldsymbol{\theta}} + 2\%$	1.02	$2.29.\,10^{-15}$	$5.60.\,10^{-27}$	$5.11.\,10^{-20}$
$\breve{\boldsymbol{\theta}} + 3\%$	1.03	25.07	$1.47.\,10^{-27}$	$2.30.\,10^{-23}$
$\breve{\boldsymbol{\theta}} + 5\%$	1.05	26.63	24.99	25.07
$\breve{\boldsymbol{\theta}} + 7\%$	1.07	73.67	26.97	$1.07.\,10^{-13}$

TABLE 3.1 – Valeurs de la fonction des moindres carrés à minimiser pour plusieurs méthodes d'optimisation et différentes valeurs d'initialisation.

tandis que les valeurs supérieures à la vingtaine correspondent à des minima locaux (voir la figure 3.1 pour les variations de la fonction par rapport à chaque paramètre). Pour une initialisation très proche de la vérité (2 %), les trois méthodes convergent vers l'optimum.

Pour des valeurs légèrement plus éloignées (3 %), la méthode de Newton converge vers un minimum local. Les méthodes aboutissent toutes à un minimum local pour une mauvaise initialisation de 5 %. La méthode de Levenberg-Marquardt permet néanmoins de converger vers le minimum global dans certains cas malgré de mauvaises initialisations (7 %). La régularisation établit à l'équation 3.10 permet de stabiliser l'inversion et, dans certains cas, de ne pas rester bloqué dans un minimum local.

D'après cet exemple simple, où un seul écho est considéré, nous montrons que les approches d'optimisation sont très sensibles aux valeurs initiales des paramètres. Dans un contexte où plusieurs échos se mélangent, ces approches ne semblent pas robustes.

3.1.4 Méthodes de type Espérance-Maximisation

L'algorithme Espérance-Maximisation (EM) (ou *Expectation-Maximization* en anglais) est une méthode itérative qui permet l'estimation de paramètres, sous un modèle de signaux superposés [Feder et Weinstein 1988], *i.e.* en adéquation avec l'équation (3.1). Il travaille ainsi en séparant le problème en plusieurs modes correspondant aux différents échos. Les données sont alors représentées par $\boldsymbol{y} = \sum_{i=k}^{K} \boldsymbol{w}_k$ où $\boldsymbol{w}_k$ est la $k^{\text{ème}}$ contribution. L'algorithme est composé de deux étapes, une étape d'espérance (E) qui construit les différentes estimations $\widehat{\boldsymbol{w}}_k$, et une étape de maximisation (M) qui consiste à estimer les paramètres $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_k$ pour chaque $\widehat{\boldsymbol{w}}_k$. L'étape M est effectuée grâce un algorithme local des moindres carrés non-linéaires (voir partie 3.1.3). Cet algorithme est connu pour être relativement lent à converger. Il faut noter que si tous les jeux de paramètres sont initialisés aux mêmes valeurs, les $\widehat{\boldsymbol{w}}_k$ et les $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_k$ resteront identiques.

L'algorithme *Space Alternating Generalized EM* (SAGE) [Ziskind et Wax 1988, Fessler et Hero 1994] est une légère amélioration de l'algorithme EM qui met à jour tous les $\boldsymbol{\theta}_k$ juste après une étape M. Chung et Böhme [2001] ont montré que cela permet à l'algorithme de converger plus rapidement. Le détail de l'algorithme est donné ici

- Initialisations : $i = 1$, cvge $= 0$, $\boldsymbol{\Theta}^{(0)} = [\boldsymbol{\theta}_1^{(0)T}, \ldots, \boldsymbol{\theta}_K^{(0)T}]^T$
- Tant que cvge $= 0$ faire
  Pour $k = 1$ à K faire
  $\underline{\text{Étape E}}$: $\boldsymbol{w}_k^{(i-1)} = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{\theta}_k^{(i-1)}) + \frac{1}{K}\left(\boldsymbol{y} - \sum_{\ell=1}^{k} \boldsymbol{s}(\boldsymbol{\theta}_\ell^{(i)} - \sum_{\ell=k+1}^{K} \boldsymbol{s}(\boldsymbol{\theta}_\ell^{(i-1)})\right)$

  $\underline{\text{Étape M}}$: $\boldsymbol{\theta}_k^{(i)} = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}_k} \left\| \boldsymbol{w}_k^{(i-1)} - \boldsymbol{s}(\boldsymbol{\theta}_k) \right\|^2$ avec init. $\boldsymbol{\theta}_k^{(i-1)}$

  fin pour
  $\boldsymbol{\Theta}^{(i)} = [\boldsymbol{\theta}_1^{(i)T}, \ldots, \boldsymbol{\theta}_K^{(i)T}]^T$
  si $\left\| \boldsymbol{\Theta}^{(i)} - \boldsymbol{\Theta}^{(i-1)} \right\| < \epsilon$
  cvge $= 1$
  sinon
  $i = i + 1$
  fin si
  fin tant que

Demirli et Saniie [2001a;b] ont appliqué l'algorithme SAGE avec un modèle d'écho gaussien pour le contrôle non destructif par ultrasons. Dans [Demirli et Saniie 2001a], l'optimisation est réalisée avec cinq paramètres pour chaque écho et des initialisations arbitraires plutôt favorables. Dans [Demirli et Saniie 2001b], seuls deux paramètres sont utilisés – l'amplitude et le temps de vol – de façon à disposer d'un modèle convolutif de la forme $y(t) = \sum_k A_k h_i(t - \tau_k)$. Sur la figure 3.2, nous montrons un exemple de déconvolution par les méthodes de Levenberg-Marquardt et SAGE (avec étape M réalisée pas la méthode de Levenberg-Marquardt). Les données sont composées de cinq échos de fréquence centrale

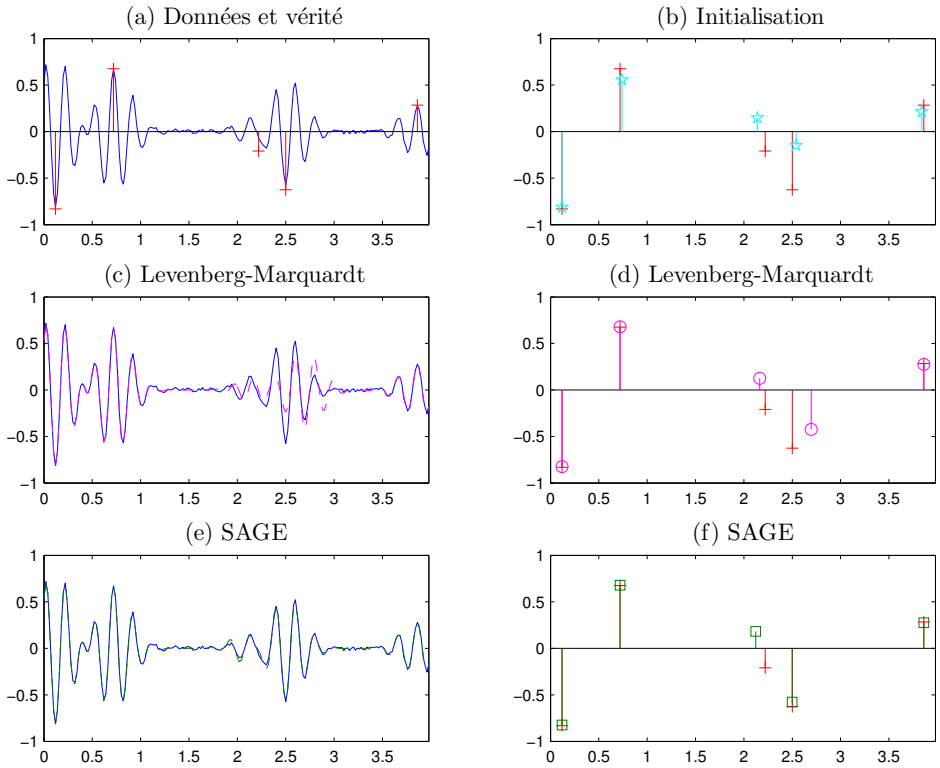


FIGURE 3.2 – Déconvolution par des méthodes paramétriques. (a) : Données (–) et vérité (+), (b) : vérité (+) et initialisation ($\star$), (c) : données (–) et approximation par la méthode de Levenberg-Marquardt (- -), (d) : vérité (+) et estimation par la méthode de Levenberg-Marquardt ($\circ$), (e) : données (–) et approximation par l'algorithme SAGE (- -), (f) : vérité (+) et estimation par l'algorithme SAGE ($\square$).

fixe 5 MHz. Les paramètres $\alpha = 16$ et $\phi = 0$ sont également fixés. Pour davantage de simplicité, le nombre d'échos recherchés est fixé à la vraie valeur. Il serait possible d'augmenter le nombre d'échos itérativement et d'utiliser un critère d'arrêt sur la norme du résidu ou grâce à un critère de sélection d'ordre [Stoica et Selén 2004]. L'étape d'initialisation des temps de vol et des amplitudes est réalisée grâce à un calcul d'enveloppe par transformée de Hilbert, puis par une détection de maxima. Cette étape permet de détecter correctement les échos séparés, mais elle faillit à détecter les échos mélangés (entre 2 et 2.5 μs). Nous utilisons ensuite les méthodes de Levenberg-Marquardt et SAGE pour estimer les temps de vol et amplitudes des échos. Les deux méthodes parviennent à estimer correctement les échos bien localisés à l'initialisation (deux à gauche et un à droite). En revanche, la méthode de Levenberg-Marquardt n'estime pas correctement les échos dans [2 μs 2.5 μs]. La méthode

SAGE parvient à détecter un des deux échos. Par cet exemple simple, on observe que les méthodes paramétriques sont très dépendantes de l'initialisation et servent en fait à raffiner localement le résultat issu de l'estimation initiale.

Pour remédier à ce genre de problème, [Demirli et Saniie 2001b] établissent des règles d'initialisation à partir de connaissances a priori sur l'objet inspecté. Par exemple, dans le cas du traitement de signaux issus de plaques homogènes (où on recherche des temps de vol régulièrement espacés), chaque nouvel écho est initialisé avec un écart de temps de vol constant par rapport à l'écho précédent. De plus, plusieurs initialisations différentes sont réalisées à chaque étape M pour augmenter les chances de converger vers le minimum global. Ces règles semblent délicates à appliquer pour traiter de façon robuste et automatique les signaux ultrasonores, qui plus est dans un contexte d'échos mélangés provenant d'une pièce inconnue.

3.2 La déconvolution parcimonieuse par minimisation d'un critère pénalisé

3.2.1 Description du modèle direct

Pour éviter l'optimisation des paramètres d'un modèle non-linéaire sensible aux mauvaises initialisations qui aboutissent à des minima locaux, nous proposons une formulation s'appuyant sur un modèle linéaire. Nous avons vu dans la section 2.2 du chapitre 2 qu'il est possible d'aboutir à un tel modèle en discrétisant les domaines spatial et temporel. A partir de l'équation (2.48), nous considérons un modèle discret linéaire auquel un terme de perturbation est rajouté

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{G}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{N_y}, \mathbf{G} \in \mathbb{R}^{N_y \times N_x}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{N_x}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{N_y}, \tag{3.11}$$

où $\boldsymbol{y}$ est le signal mesuré et $\boldsymbol{x}$ est l'inconnue du problème. La construction de la matrice $\mathbf{G}$ dépend du modèle physique considéré (se reporter à la partie 2.2). Le terme de perturbation $\boldsymbol{b}$ représente les erreurs de modèle, le bruit de mesure et les erreurs de discrétisation. Nous considérons ce terme comme un ensemble de réalisations aléatoires indépendantes, centrées, de même loi gaussienne de variance σ_b^2. Le signal $\boldsymbol{y}$ peut être caractérisé par un rapport signal sur bruit RSB défini par

$$\text{RSB} = 10 \log \left(\frac{P(\mathbf{G}\boldsymbol{x})}{P(\boldsymbol{b})} \right), \tag{3.12}$$

où $P(\mathbf{G}\boldsymbol{x})$ est la puissance du signal non bruité

$$P(\mathbf{G}\boldsymbol{x}) = \frac{1}{N_y} \left\| \mathbf{G}\boldsymbol{x} \right\|^2 = \frac{1}{N_y} \left(\mathbf{G}\boldsymbol{x} \right)^T \mathbf{G}\boldsymbol{x}, \tag{3.13}$$

et $P(\boldsymbol{b})$ est la puissance du bruit

$$P(\boldsymbol{b}) = \frac{1}{N_y} \sum_{n=1}^{N_y} b[n]^2 = \frac{1}{N_y} \left\| \boldsymbol{b} \right\|^2 \underset{N_y \to \infty}{\longrightarrow} \sigma_b^2. \tag{3.14}$$

Dans la suite de ce chapitre, nous approximons le RSB par

$$\text{RSB} \simeq 10 \log \left(\frac{P(\mathbf{G}\boldsymbol{x})}{\sigma_b^2} \right). \tag{3.15}$$

3.2.2 Inverse généralisée

Une approche simple pour estimer $\boldsymbol{x}$ dans l'équation (3.11) revient à minimiser un critère des moindres carrés entre les données et le modèle :

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{y} - \mathbf{G}\boldsymbol{x}\|^2 . \tag{3.16}$$

Puisque le critère est quadratique et donc convexe, le minimum global est défini par l'annulation du gradient qui s'écrit :

$$\nabla\mathcal{J}(\boldsymbol{x}) = -2\mathbf{G}^T\boldsymbol{y} + 2\mathbf{G}^T\mathbf{G}\boldsymbol{x} = 0. \tag{3.17}$$

Si $\mathbf{G}^T\mathbf{G}$ est inversible, la solution qui annule le gradient est

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \left(\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right)^{-1}\mathbf{G}^T\boldsymbol{y}. \tag{3.18}$$

En considérant $\breve{\boldsymbol{x}}$ comme la solution du système, nous obtenons l'estimation

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \breve{\boldsymbol{x}} + \left(\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right)^{-1}\mathbf{G}^T\boldsymbol{b}. \tag{3.19}$$

On observe que le terme d'erreur par rapport à la vraie solution est une fonction linéaire du terme du bruit. Si le bruit est nul, l'estimation est optimale. Dans le cas contraire, l'erreur due au bruit peut être importante suivant la nature de l'inverse de $\mathbf{G}^T\mathbf{G}$. En effet, lorsque la matrice $\mathbf{G}^T\mathbf{G}$ est mal conditionnée, son inverse prend de grandes valeurs qui ont pour effet d'amplifier le bruit. Pour illustrer ce propos, nous générons des données d'après le modèle $\boldsymbol{y} = \mathbf{G}\breve{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{b}$, où $\mathbf{G}$ est la matrice de convolution associée à une réponse instrumentale gaussienne ($f_0 = 5\,\text{MHz}$, $\text{BWR}_{-3} = 0.3$, $\phi = 0$), de nature passe-bande autour de f_0. Nous calculons $\hat{\boldsymbol{x}}$ pour plusieurs niveaux de bruit : sans bruit, RSB $= 80\,\text{dB}$ et RSB $= 50\,\text{dB}$. Les données et résultats d'estimation sont représentés sur la figure 3.3. D'après ces résultats, la solution est exacte dans le cas sans bruit. En présence d'un très faible bruit (RSB de 80 et 50 dB), la solution est fortement perturbée. Pour RSB $= 50\,\text{dB}$, le terme d'erreur dû au bruit est si important qu'il ne permet pas de distinguer le signal piqué, alors que le bruit n'est pas discernable dans les données. On observe ici très nettement le caractère instable de l'inversion directe dû à l'amplification des fréquences, hors de la signature instrumentale, contenues dans le bruit. Cette approche se révèle par conséquent difficilement applicable à des situation réelles où le bruit instrumental et les erreurs de modèles sont présents, et viennent de fait perturber l'estimation. Pour pallier ce problème nous allons introduire un principe de régularisation qui consiste à renforcer certaines propriétés de la solution [Idier 2001].

3.2.3 Régularisation par minimisation d'un critère pénalisé

Pour remédier au problème d'instabilité de la solution due au bruit, le critère des moindres carrés (3.16) est remplacé par un critère composite

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{x}, \mu) = \|\boldsymbol{y} - \mathbf{G}\boldsymbol{x}\|^2 + \mu R(\boldsymbol{x}), \tag{3.20}$$

où $R(\boldsymbol{x})$ est une fonction de régularisation qui favorise un *a priori* sur la solution $\boldsymbol{x}$. Le paramètre μ règle le compromis entre l'adéquation aux données et le respect de cet *a priori*. Lorsque μ est nul, on retrouve le critère des moindres carrés (3.16), tandis que lorsque μ tend vers l'infini, seul l'*a priori* est considéré, la solution ne dépendant alors pas des données.

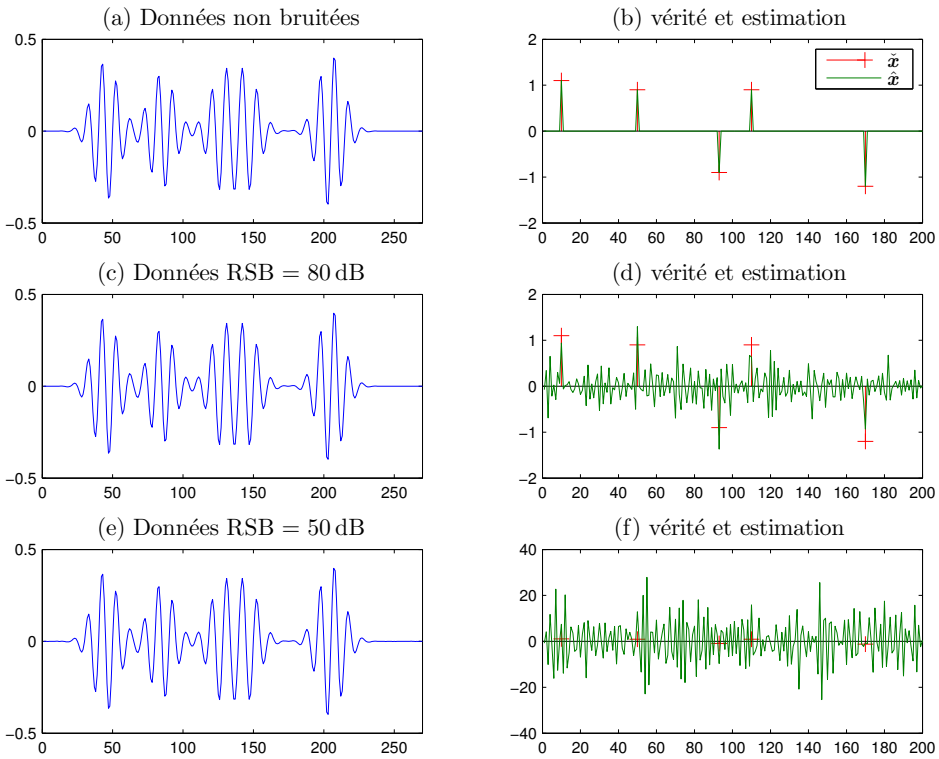


FIGURE 3.3 – Déconvolution par une approche d'inverse généralisée. (a) : Données non bruitées, (b) : vérité (+) et estimation (–), (c) : données avec RSB $= 80$ dB, (d) : vérité (+) et estimation (–), (e) : données avec RSB $= 50$ dB, (f) : vérité (+) et estimation (–).

Notion de parcimonie

Le vecteur $\boldsymbol{x}$ est supposé parcimonieux (*sparse* en anglais), c'est-à-dire qu'il contient un grand nombre de valeurs nulles [Elad 2010]. À temps continu, il peut être appelé train d'impulsions (*spike train*). Le format vectoriel est obtenu grâce à la discrétisation du modèle présenté dans la partie 2.2. Le nombre de composantes non-nulles dans $\boldsymbol{x}$ correspond de ce fait au nombre de cibles présentes. Le vecteur $\boldsymbol{x}$ a donc une interprétation spatiale puisqu'il indique les positions et les amplitudes des cibles (voir chapitre 2) [Olofsson et Stepinski 2000].

Régularisation quadratique

Le choix le plus simple est de prendre une régularisation quadratique appelée également régularisation de Tikhonov

$$R(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^2 . \tag{3.21}$$

Cette fonction offre l'avantage d'être convexe, c'est-à-dire qu'elle est unimodale (un seul minimum) et qu'elle est différentiable en tout point. En annulant le gradient

$$\nabla \mathcal{J}(\boldsymbol{x}, \mu) = -2\mathbf{G}^T\boldsymbol{y} + 2\mathbf{G}^T\mathbf{G}\boldsymbol{x} + 2\mu\boldsymbol{x} = 0, \tag{3.22}$$

on aboutit à la solution unique

$$\widehat{\boldsymbol{x}} = \left(\mathbf{G}^T\mathbf{G} + \mu\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{G}^T\boldsymbol{y}. \tag{3.23}$$

La présence de la matrice identité a pour effet de réduire le conditionnement et donc de stabiliser l'inversion. Pour un modèle de convolution, cette approche peut être implémentée par un filtre de Wiener ou de Kalman [Fatemi et Kak 1980, Demoment *et al.* 1984, Jensen 1992]. Cette forme de pénalisation est pratique mais n'aboutit pas à des solutions piquées, car elle pénalise trop les grandes amplitudes [Idier 2001].

Régularisation convexe non quadratique

L'utilisation d'autres fonctions de régularisation qui pénalisent moins les grandes amplitudes est possible, comme par exemple la norme ℓ_p pour $1 < p < 2$

$$R(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|_p^p = \sum_{n=1}^{N_x} |x[n]|^p, \qquad 1 < p < 2. \tag{3.24}$$

C'est une fonction convexe, continûment différentiable qui introduit un critère (3.20) convexe et différentiable également, ayant un minimum unique. En terme de solution algorithmique, il est par exemple possible d'utiliser un algorithme itératif de descente (voir partie 3.1.2), ou l'algorithme IRLS (*Iterative Reweighted Least-Squares*) [Yarlagadda *et al.* 1985].

Régularisation de norme ℓ_1

Une fonction qui pénalise moins les grandes amplitudes est la norme ℓ_1 [Taylor *et al.* 1979, Chen *et al.* 1998, Elad 2010]

$$R(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{n=1}^{N_x} |x[n]|. \tag{3.25}$$

Cette fonction convexe permet d'obtenir un minimum unique dans le critère (3.20). Le problème algorithmique vient de sa non différentiabilité en zéro, mais qui crée des solutions piquées [Moulin et Liu 1999]. Différentes formulations provenant de plusieurs communautés permettent de résoudre ce problème [Tibshirani 1994, Efron *et al.* 2002, Davies et Daudet 2003, Malioutov *et al.* 2005, Maria et Fuchs 2006, Tropp et Wright 2010]. Ce type de pénalisation a été très utilisée depuis une vingtaine d'années, notamment en géophysique [Taylor *et al.* 1979] et en contrôle non destructif [O'Brien *et al.* 1994]. La pénalisation étant appliquée linéairement aux amplitudes, les solutions ont tendance à contenir des pics multiples de faibles amplitudes en lieu et place d'un seul vrai pic [Soussen *et al.* 2012]. Pour cette raison, il est possible d'effectuer un seuillage pour supprimer ces nombreuses fausses détections.

Régularisation convexe qui favorise la parcimonie

Des fonctions de régularisation strictement convexes et différentiables ont été proposées pour favoriser la parcimonie, comme par exemple la fonction hyperbolique

$$R(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{N_x} \sqrt{x[n]^2 + \delta^2}, \qquad \delta > 0. \tag{3.26}$$

Cette dernière a le comportement de la norme ℓ_1 pour les grandes amplitudes et celui de la norme ℓ_2 pour les petites amplitudes. Elle permet ainsi de favoriser les solutions piquées tout en offrant l'avantage de la différentiabilité pour la mise en œuvre algorithmique. Lorsque δ tend vers zéro, la fonction tend vers la norme ℓ_1.

Régularisation non-convexe qui favorise la parcimonie

D'autres fonctions permettent de favoriser la parcimonie mais ne sont pas convexes, comme par exemple la norme ℓ_p définie à l'équation 3.24 avec $0 < p < 1$ [Rao et Kreutz-Delgado 1999]. Ce type de régularisation produit des solutions parcimonieuses du fait de la non-différentiablité en zéro [Moulin et Liu 1999]. Lorsque p tend vers zéro, cette dernière tend vers la pseudo-norme ℓ_0 qui compte le nombre de composantes non-nulles dans $\boldsymbol{x}$

$$\|\boldsymbol{x}\|_0 = \sum_{n=1}^{N_x} |x[n]|^0, \tag{3.27}$$

avec par définition

$$|x|^0 = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} . \tag{3.28}$$

Ce n'est pas exactement une norme car elle ne vérifie pas la propriété d'homogénéité[2] : $\forall \lambda \neq 0$ et $|\lambda| \neq 1$ on a $\|\lambda \boldsymbol{x}\|_0 \neq |\lambda| \, \|\boldsymbol{x}\|_0$. Nous utilisons ce type de régularisation et les méthodes pour résoudre le problème d'optimisation associé dans la section 3.3.

Comparaison de plusieurs types de régularisation

Plusieurs exemples de fonctions de régularisation sont exposés sur la figure 3.4. Pour les

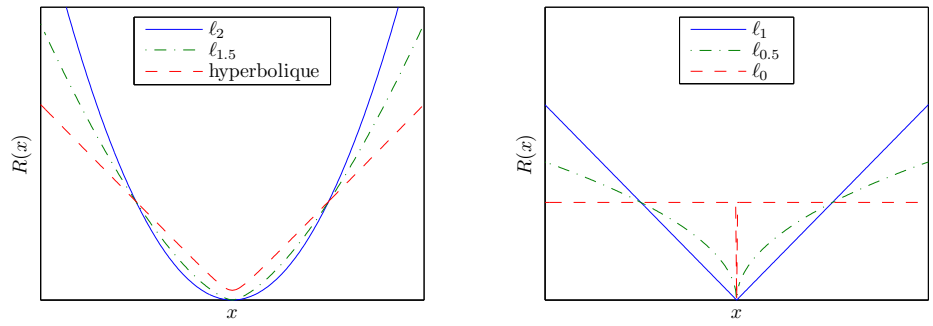


FIGURE 3.4 – Exemples de fonctions de régularisation $R(x)$. A gauche : ℓ_2, $\ell_{1.5}$, hyperbolique ($\sqrt{x^2 + \delta^2}$ avec $\delta = 0.1$), à droite : ℓ_1, $\ell_{0.5}$, ℓ_0.

données de la figure 3.3 avec RSB $= 20$ dB, les résultats de déconvolution correspondant à plusieurs fonctions de régularisation sont présentés sur la figure 3.5. Les paramètres de régularisation sont réglés empiriquement de façon à obtenir une solution la plus proche possible de la vérité. La solution de la régularisation ℓ_2 est donnée par la formulation explicite (3.23). L'optimisation pour la régularisation ℓ_1 est effectuée par un algorithme de type homotopie [Malioutov *et al.* 2005]. La minimisation pour la régularisation hyperbolique est réalisée par l'algorithme IRLS [Yarlagadda *et al.* 1985]. Pour la régularisation ℓ_0, nous utilisons l'algorithme d'optimisation locale SBR [Soussen *et al.* 2011], que nous détaillons dans la partie 3.3.3.

Comme vu dans la partie 3.2.2, l'inversion généralisée ne fournit pas de solution acceptable car elle amplifie le bruit. La régularisation quadratique permet de stabiliser la solution

[2] La propriété d'homogénéité d'une norme $\mathcal{N}$ est vérifiée par la condition $\forall (\lambda, \boldsymbol{x}) \neq 0,\ \mathcal{N}(\lambda \boldsymbol{x}) = |\lambda| \mathcal{N}(\boldsymbol{x})$.

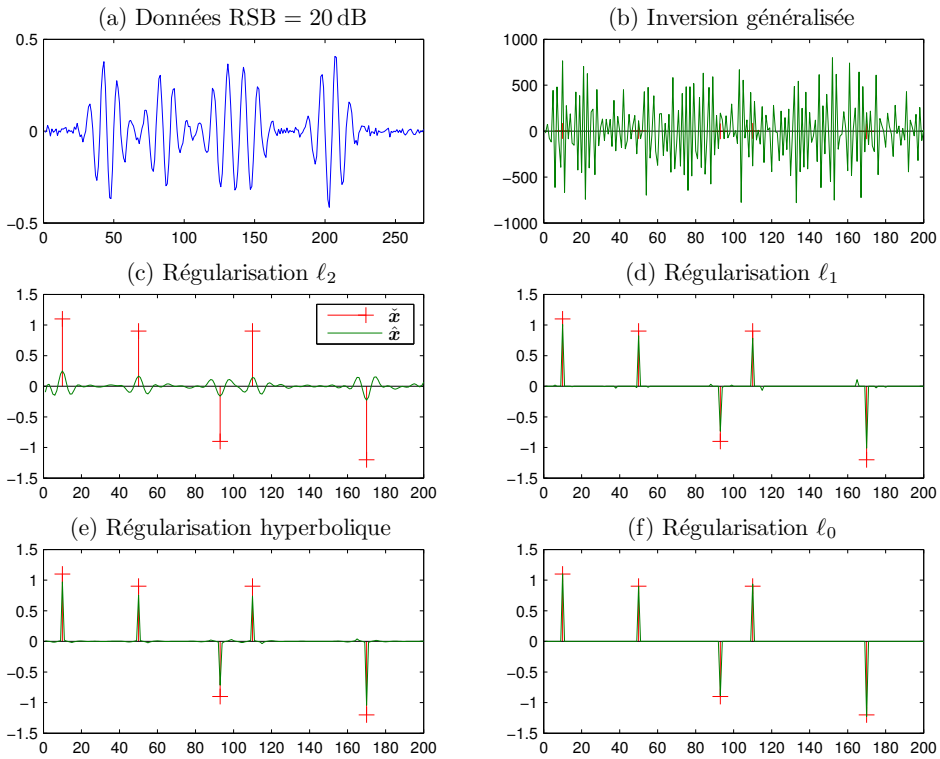


FIGURE 3.5 – Déconvolution avec plusieurs fonctions de régularisation. (a) : Données avec RSB $= 50$ dB, (b) : déconvolution par inverse généralisée, (c) déconvolution par régularisation quadratique, (d) : déconvolution par régularisation de norme ℓ_1, (e) : déconvolution par régularisation hyperbolique, (f) : déconvolution par régularisation de norme ℓ_0.

mais ne produit pas de solution piquée. La régularisation de norme ℓ_1 crée bien une solution piquée assez proche de la vérité. On remarque néanmoins quelques petits pics de faibles amplitudes. La régularisation hyperbolique fournit une solution piquée proche de celle obtenue avec une régularisation ℓ_1 mais avec des amplitudes non nulles sur tout le support de la solution. La solution fournie par la régularisation ℓ_0 permet de localiser parfaitement les pics. Il n'y a pas de valeurs de faible amplitude comparée à la norme ℓ_1 ou la norme hyperbolique. Ceci est dû à à la pénalisation de la cardinalité et non de l'amplitude.

Lien entre régularisation et loi *a priori*

Nous l'avons vu, la fonction de pénalisation a une influence directe sur l'allure de la solution. Ce lien peut être expliqué dans un cadre probabiliste [Idier 2001]. En effet, suivant la règle de Bayes, la loi *a posteriori* de $\boldsymbol{x}$ s'écrit

$$p_{\mathcal{X}|\mathcal{Y}}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}) \propto \mathcal{L}(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x}) p_{\mathcal{X}}(\boldsymbol{x}), \tag{3.29}$$

où $\mathcal{L}(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x})$ est la vraisemblance qui s'exprime à partir de la loi du bruit et $p_{\mathcal{X}}(\boldsymbol{x})$ est la loi *a priori* de $\boldsymbol{x}$ (nous notons respectivement $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ les variables aléatoires liées à $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$). En supposant le bruit gaussien centré de variance σ_b^2, on peut écrire

$$p_{\mathcal{X}|\mathcal{Y}}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}) \propto \frac{1}{\left(\sigma_b \sqrt{2\pi}\right)^{N_y}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_b^2} \left\|\boldsymbol{y} - \mathbf{G}\boldsymbol{x}\right\|^2\right) p_{\mathcal{X}}(\boldsymbol{x}). \tag{3.30}$$

La solution au sens du maximum *a posteriori* (MAP) consiste donc à prendre une solution qui maximise cette expression, pour une certaine loi *a priori* sur $\boldsymbol{x}$. En prenant l'opposé du logarithme, on aboutit à une expression à minimiser

$$-\ln p_{\mathcal{X}|\mathcal{Y}}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}) = \frac{1}{2\sigma_b^2} \|\boldsymbol{y} - \mathbf{G}\boldsymbol{x}\|^2 - \ln p_{\mathcal{X}}(\boldsymbol{x}) + \text{constante}, \tag{3.31}$$

qui peut directement s'interpréter par le critère pénalisé $\mathcal{J}(\boldsymbol{x}, \mu) = \|\boldsymbol{y} - \mathbf{G}\boldsymbol{x}\|^2 + \mu R(\boldsymbol{x})$. La fonction de régularisation respecte alors

$$R(\boldsymbol{x}) \propto -\ln p_{\mathcal{X}}(\boldsymbol{x}). \tag{3.32}$$

Dans le tableau 3.2, nous indiquons plusieurs exemples de fonctions de régularisation et de lois *a priori* associées. La régularisation quadratique induit donc une loi *a priori* gaussienne tandis que la norme ℓ_1 correspond à une loi de Laplace.

Régularisation $R(x) =$	quadratique x^2	hyperbolique $\sqrt{x^2+\delta^2}$	ℓ_p $\lvert x\rvert^p$	ℓ_1 $\lvert x\rvert$
Loi *a priori* $p_{\mathcal{X}}(x) \propto$	gaussienne $e^{-x^2/T}$	« hyperbolique » $e^{-\sqrt{x^2+\delta^2}/T}$	gaussienne généralisée $e^{-\lvert x\rvert^p/T}$	loi de Laplace $e^{-\lvert x\rvert/T}$

TABLE 3.2 – Exemples de lien entre fonction de régularisation $R(x)$ et loi *a priori* $p_{\mathcal{X}}(x)$ de paramètre T.

La régularisation de pseudo-norme ℓ_0 est un cas limite de la norme ℓ_p, plus délicate à formaliser en termes de loi *a priori* en raison de la nature discrète de la pseudo-norme ℓ_0. On peut cependant la mettre en relation avec une loi Bernoulli-gaussienne [Kormylo et Mendel 1982]. Celle-ci définit la présence ou l'absence d'un pic en tout point par un ensemble de variables binaires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre λ, représentant la probabilité *a priori* de présence d'un pic en chaque point. Les amplitudes de ces pics sont représentées par des lois indépendantes gaussiennes, centrées, de variances σ_a^2. Soussen *et al.* [2011] montrent alors que la loi *a priori* correspondant à la régularisation de pseudo-norme ℓ_0 est un cas limite d'une loi Bernoulli-gaussienne où σ_a^2 tend vers l'infini. Le paramètre de régularisation est alors lié au paramètre de la loi de Bernoulli par $\mu = 2\sigma_b^2 \ln(1/\lambda - 1)$.

3.2.4 Réglage du paramètre de régularisation

Le choix du paramètre de régularisation est primordial pour obtenir une solution satisfaisante [Fortier 1990]. En général, on calcule une collection de solutions correspondant à un ensemble de valeurs de μ. Le principe est ensuite de choisir une seule solution. Très souvent, on part d'un μ très grand qui minimise uniquement $R(\boldsymbol{x})$, et on le fait décroître. Dans le cas de la pénalisation ℓ_1 par exemple, la continuation homotopique permet de trouver les valeurs de μ optimales pour avoir des solutions différentes pour chaque valeur de μ [Malioutov *et al.* 2005]. D'une façon générale, pour les régularisations favorisant la parcimonie, les solutions ont une cardinalité croissante lorsque μ diminue.

Si la variance du bruit σ_b^2 est connue, on peut alors sélectionner la solution dont le résidu respecte la loi du bruit [Fortier 1990]. On pourra de ce fait choisir la solution dont la norme du résidu $\|\boldsymbol{y} - \mathbf{G}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2$ avoisine la norme du bruit $\|\boldsymbol{b}\|^2 \simeq N_y \sigma_b^2$. Il est également possible de

choisir la solution à partir d'un nombre de pics désiré. D'autres méthodes telles que la validation croisée [Wahba 1977, Hong *et al.* 2003] et la validation croisée généralisée [Golub *et al.* 1979] permettent de sélectionner une solution à partir de prédictions. Il existe également des critères informationnels qui permettent de choisir un compromis entre adéquation aux données et cardinalité [Akaike 1974, Rissanen 1983, Fitzgibbon *et al.* 2004, Stoica et Selén 2004, Selén et Larsson 2006]. Un exemple avec une application en déconvolution parcimonieuse pour le CND apparaît dans [Soussen *et al.* 2012].

Le réglage du paramètre ne fait pas l'objet d'une étude particulière dans cette thèse. Dans les exemples que nous montrons, il a été choisi par essai-erreur ou par adéquation au bruit contenu dans les données lorsque la variance de la loi du bruit est connue.

3.3 Régularisation par la pseudo-norme ℓ_0

3.3.1 Formulation du problème d'optimisation

L'utilisation de la régularisation par cette norme dans les approches pénalisées apparaît peu souvent [Zala 1992, Rao et Kreutz-Delgado 1999, Soussen *et al.* 2011]. C'est pourtant cette norme qui fournit le vrai critère de parcimonie de la solution. Habituellement, le problème d'optimisation se formule de façon alternative par

$$\min \|\boldsymbol{x}\|_0 \quad \text{sous contrainte} \quad \|\boldsymbol{y} - \mathbf{G}\boldsymbol{x}\|^2 < \epsilon, \tag{3.33}$$

ou

$$\min \|\boldsymbol{y} - \mathbf{G}\boldsymbol{x}\|^2 \quad \text{sous contrainte} \quad \|\boldsymbol{x}\|_0 < K. \tag{3.34}$$

Ces problèmes combinatoires sont connus pour être NP-difficiles [Natarajan 1995]. Sous certaines conditions strictes [Donoho et Elad 2003], ils peuvent être approximés par un problème d'optimisation relaxé convexe, utilisant par exemple une norme ℓ_1 [Chen *et al.* 1998]. Plus rigoureusement, ces problèmes sont analogues à la minimisation d'un critère composite pénalisé par la pseudo-norme ℓ_0 [Soussen *et al.* 2011] qui définit le problème d'optimisation

$$(\text{P0}) : \quad \widehat{\boldsymbol{x}} = \arg\min_{\boldsymbol{x}} \|\boldsymbol{y} - \mathbf{G}\boldsymbol{x}\|^2 + \mu \|\boldsymbol{x}\|_0 . \tag{3.35}$$

Nous utilisons cette forme de problème d'optimisation dans la suite de ce manuscrit. La méthode optimale pour résoudre le problème P0 defini par l'équation (3.35) consiste à tester toutes les combinaisons du support de $\boldsymbol{x}$, c'est-à-dire 2^{N_x} combinaisons [Miller 2002]. Cet examen est impossible à appliquer en un temps réaliste lorsque la taille du problème est importante ou quand le nombre de composantes dépasse quelques unités. Des méthodes sous-optimales existent et mettent en œuvre des heuristiques pour explorer un nombre limité de solutions. On peut tout d'abord citer quelques algorithmes gloutons (ou *forward*), *matching pursuit* (MP), *orthogonal matching pursuit* (OMP) et *orthogonal least squares* (OLS), qui partent d'une solution nulle et ajoute un seul élément à chaque itération [Mallat et Zhang 1993, Pati *et al.* 1993, Chen *et al.* 1989, Blumensath et Davies 2007]. La différence entre ces algorithmes réside en leur façon de réaliser la sélection. Un algorithme inspiré de OLS, *single best replacement* (SBR), a été proposé par Soussen *et al.* [2011] pour directement traiter le problème d'optimisation ℓ_0 (P0). Nous décrivons ces approches qui ont une complexité croissante ci-après.

3.3.2 Méthodes d'optimisation par une approche gloutonne

Notations

Nous notons $\mathcal{Q}_i$ le support actif de la solution à l'itération i, qui est une sélection du support complet $\{1, \ldots, N_x\}$. La solution correspondante est $\widehat{\boldsymbol{x}}_i$. Nous notons également $\mathbf{G}_i$, la matrice composée des colonnes de $\mathbf{G}$ indexées par $\mathcal{Q}_i$. Pour plus de clarté, on définit la valeur du critère pour un μ donné par la notation

$$\mathcal{J}_{\mathcal{Q}_i} = \mathcal{J}(\widehat{\boldsymbol{x}}_i, \mu) = \|\boldsymbol{y} - \mathbf{G}\widehat{\boldsymbol{x}}_i\|^2 + \mu \|\widehat{\boldsymbol{x}}_i\|_0 . \tag{3.36}$$

Nous verrons que cette notation n'est pas exacte pour l'algorithme *matching pursuit*. Pour les autres méthodes et celles que nous proposerons, elle est correcte car un support $\mathcal{Q}_i$ donné entraîne une seule solution $\widehat{\boldsymbol{x}}_i$. Le résidu à l'itération i est noté $\boldsymbol{r}_i$ et vérifie

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{y} - \mathbf{G}\widehat{\boldsymbol{x}}_i. \tag{3.37}$$

A l'initialisation des algorithmes ($i = 0$), la solution est nulle : $\widehat{\boldsymbol{x}}_0 = \boldsymbol{0}$, le support actif est vide : $\mathcal{Q}_0 = \varnothing$ et le critère est $\mathcal{J}_{\mathcal{Q}_0} = \|\boldsymbol{y}\|^2$. Le résidu est alors égal aux données : $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{y}$.

Paramètre de régularisation maximal

Il existe un paramètre de régularisation maximal μ_{max} au delà duquel la solution respecte uniquement l'*a priori* et est donc nulle. Pour le déterminer, il faut calculer le critère à la première itération (le même pour tous les algorithmes ajoutant un élément) qui s'écrit

$$\mathcal{J}_{\mathcal{Q}_1} = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{g}_n a\|^2 + \mu, \tag{3.38}$$

où $\boldsymbol{g}_n a$ est une colonne de $\mathbf{G}$ pondérée par une amplitude a. L'amplitude optimale étant $\widehat{a} = \boldsymbol{g}_n^T \boldsymbol{y} / \|\boldsymbol{g}_n\|^2$, le critère peut s'écrire (se référer à l'équation (2.85) du chapitre 2)

$$\mathcal{J}_{\mathcal{Q}_1} = \|\boldsymbol{y}\|^2 - \frac{\left\|\boldsymbol{g}_n^T \boldsymbol{y}\right\|^2}{\|\boldsymbol{g}_n\|^2} + \mu. \tag{3.39}$$

Pour que $\mathcal{J}_{\mathcal{Q}_1}$ soit inférieur à $\mathcal{J}_{\mathcal{Q}_0}$, il faut donc que $\mu - \frac{\left\|\boldsymbol{g}_n^T \boldsymbol{y}\right\|^2}{\|\boldsymbol{g}_n\|^2}$ soit inférieur à zéro. Le paramètre maximal μ_{max} vérifie donc [Soussen *et al.* 2011]

$$\mu_{\text{max}} = \max_n \frac{|\boldsymbol{g}_n^T \boldsymbol{y}|^2}{\|\boldsymbol{g}_n\|^2}. \tag{3.40}$$

Matching Pursuit et Orthogonal Matching Pursuit

Matching Pursuit (MP) [Mallat et Zhang 1993] et *Orthogonal Matching Pursuit* (OMP) [Pati *et al.* 1993] sont des algorithmes gloutons initialement conçus pour l'approximation parcimonieuse des signaux [Elad 2010]. Le but de cette technique est de modéliser le plus fidèlement un signal avec quelques éléments d'un dictionnaire, référencés dans le vecteur $\boldsymbol{x}$. Dans ce cas, le dictionnaire n'est pas imposé par le problème inverse, mais est choisi pour représenter au mieux les données. Les algorithmes ne cherchent pas à minimiser le critère pénalisé et sont arrêtés par la cardinalité de la solution (voir équation (3.34)) ou par la norme

du résidu (voir équation (3.33)). Ils peuvent néanmoins servir à explorer des solutions afin de minimiser le critère pénalisé $\mathcal{J}(\boldsymbol{x}, \mu)$ (P0).

Pour ces deux algorithmes, la sélection de l'élément à rajouter se fait grâce à un filtre adapté sur le résidu $\boldsymbol{r}_i$ (voir les détails dans la partie 2.3.1 du chapitre 2). A l'itération i, la position et l'amplitude optimales sont celles qui minimisent l'erreur entre le résidu et une colonne de $\mathbf{G}$

$$(\hat{n}, \hat{a}) = \underset{n,a}{\arg\min} \left\| \boldsymbol{r}_{i-1} - a\boldsymbol{g}_n \right\|^2. \tag{3.41}$$

Nous avons vu dans l'équation (2.86) du chapitre 2 que la position optimale est celle qui maximise le produit scalaire entre une colonne de $\mathbf{G}$ et le résidu

$$\hat{n} = \underset{n \notin \mathcal{Q}_{i-1}}{\arg\max} \frac{\left| \boldsymbol{g}_n^T \boldsymbol{r}_{i-1} \right|}{\left\| \boldsymbol{g}_n \right\|^2}. \tag{3.42}$$

L'amplitude optimale est alors $\hat{a} = \boldsymbol{g}_{\hat{n}}^T \boldsymbol{r}_{i-1} / \left\| \boldsymbol{g}_{\hat{n}} \right\|^2$. La différence entre MP et OMP vient de la façon dont est mise à jour la solution, et donc le résidu. Pour MP, seul l'élément $\hat{n}$ est modifié à chaque itération

$$\hat{\boldsymbol{x}}_i[\hat{n}] = \hat{\boldsymbol{x}}_{i-1}[\hat{n}] + \hat{a}, \tag{3.43}$$

tandis que pour OMP, on calcule une solution $\hat{\boldsymbol{x}}_i$ dont l'approximation $\mathbf{G}\hat{\boldsymbol{x}}_i$ est orthogonale au résidu pour tout le support actif

$$\hat{\boldsymbol{x}}_i = \left(\mathbf{G}_i^T \mathbf{G}_i \right)^{-1} \mathbf{G}_i^T \boldsymbol{y}. \tag{3.44}$$

Autrement dit, toutes les amplitudes du support actif sont remises à jour à chaque itération pour OMP. Par conséquent, MP met à jour le résidu par

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_{i-1} - \hat{a}\boldsymbol{g}_{\hat{n}}, \tag{3.45}$$

et OMP par

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{y} - \mathbf{G}_i \hat{\boldsymbol{x}}_i. \tag{3.46}$$

En pratique, l'algorithme OMP est plus efficace que MP car il remet en cause toutes les amplitudes de la solution courante. Il est récapitulé dans la table 3.3.

Orthogonal Least Squares

Le principe de l'algorithme *Orthogonal Least Squares* (OLS) [Chen *et al.* 1989] est de considérer *a priori* des solutions dont les approximations sont orthogonales au résidu. Dans OLS, l'idée est donc d'inclure l'estimation des amplitudes optimales dans la sélection du nouveau support. A l'inverse, OMP effectue l'orthogonalisation *a posteriori*, une fois la sélection effectuée. L'ajout d'une composante $n \notin \mathcal{Q}_{i-1}$ correspond à $\mathbf{G}_i = [\mathbf{G}_{i-1}, \boldsymbol{g}_n]$. Pour l'ajout de la composante n, nous notons alors la différence du critère (3.36) :

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{J}_{\mathcal{Q}_{i-1}}^{+n} &\triangleq \mathcal{J}_{\mathcal{Q}_{i-1} \cup n} - \mathcal{J}_{\mathcal{Q}_{i-1}} \\ &= \mu + \left\| \boldsymbol{y} - \mathbf{G}_i \left(\mathbf{G}_i^T \mathbf{G}_i \right)^{-1} \mathbf{G}_i^T \boldsymbol{y} \right\|^2 - \left\| \boldsymbol{y} - \mathbf{G}_{i-1} \left(\mathbf{G}_{i-1}^T \mathbf{G}_{i-1} \right)^{-1} \mathbf{G}_{i-1}^T \boldsymbol{y} \right\|^2, \end{aligned} \tag{3.47}$$

Initialisations :	$\mathcal{Q}_0 = \varnothing$, $\mathbf{G}_0 = \varnothing$, $\mathcal{J}_{\mathcal{Q}_0} = \|\boldsymbol{y}\|^2$, $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{y}$, $i = 1$
Algorithme :	1) $\hat{n} = \underset{n \notin \mathcal{Q}_{i-1}}{\arg\max} \, \lvert \boldsymbol{g}_n^T \boldsymbol{r}_{i-1} \rvert / \|\boldsymbol{g}_n\|^2$
	2) $\mathbf{G}_i = [\mathbf{G}_{i-1}, \ \boldsymbol{g}_{\hat{n}}]$
	3) $\hat{\boldsymbol{x}}_i = \left(\mathbf{G}_i^T \mathbf{G}_i\right)^{-1} \mathbf{G}_i^T \boldsymbol{y}$
	4) $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{y} - \mathbf{G}_i \hat{\boldsymbol{x}}_i$
	5) Calculer $\mathcal{J}_{\mathcal{Q}_i}$ (équation (3.36))
	6) si $\mathcal{J}_{\mathcal{Q}_i} < \mathcal{J}_{\mathcal{Q}_{i-1}}$
	$\mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}_{i-1} \cup \hat{n}$
	$i = i + 1$
	aller à 1)
	sinon
	terminer
	fin si
Sortie :	$\hat{\boldsymbol{x}}_{i-1}$

TABLE 3.3 – Description de l'algorithme Orthogonal Matching Pursuit (OMP).

celle-ci ne dépendant que de $\mathbf{G}$, des données $\boldsymbol{y}$, de l'indice n et de μ. La sélection de la composante optimale $\hat{n}$ revient donc à minimiser le critère (3.47) telle que

$$\hat{n} = \underset{n \notin \mathcal{Q}_{i-1}}{\arg\min} \, \Delta\mathcal{J}_{\mathcal{Q}_{i-1}}^{+n}. \tag{3.48}$$

Le calcul du critère (3.47) peut se faire efficacement de façon récursive en utilisant le lemme d'inversion de matrice partitionnée ou la factorisation de Cholesky [Soussen *et al.* 2011]. Cette dernière met en jeu des inversions de systèmes triangulaires qui sont rapides à calculer comparé aux inversions de systèmes complets.

La factorisation de Cholesky permet d'écrire $\mathbf{G}_i^T \mathbf{G}_i = \mathbf{L}_i \mathbf{L}_i^T$ où $\mathbf{L}_i$ est une matrice triangulaire inférieure [Golub *et al.* 1979]. Il est possible d'identifier $\mathbf{L}_i$ en posant

$$\mathbf{G}_i^T \mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{i-1}^T \mathbf{G}_{i-1} & \mathbf{G}_{i-1}^T \boldsymbol{g}_n \\ \boldsymbol{h}_n^T \mathbf{G}_{i-1} & \|\boldsymbol{g}_n\|^2 \end{bmatrix} = \mathbf{L}_i \mathbf{L}_i^T = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{i-1} & 0 \\ \boldsymbol{v}_n^T & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{i-1}^T & \boldsymbol{v}_n \\ 0 & a_n \end{bmatrix}, \tag{3.49}$$

où

$$\boldsymbol{v}_n = \mathbf{L}_{i-1}^{-1} \mathbf{G}_{i-1}^T \boldsymbol{g}_n \quad \text{et} \quad a_n = \sqrt{\|\boldsymbol{g}_n\|^2 - \|\boldsymbol{v}_n\|^2}. \tag{3.50}$$

La matrice $\mathbf{L}_i$ peut donc être construite récursivement à chaque itération. Après quelques manipulations détaillées en annexe C.1, le critère (3.47) s'écrit [Soussen *et al.* 2011]

$$\Delta\mathcal{J}_{\mathcal{Q}_{i-1}}^{+n} = \mu - \frac{\left(\boldsymbol{v}_n^T \mathbf{L}_{i-1}^{-1} \mathbf{G}_{i-1}^T \boldsymbol{y} - \boldsymbol{g}_n^T \boldsymbol{y}\right)^2}{\|\boldsymbol{g}_n\|^2 - \|\boldsymbol{v}_n\|^2}. \tag{3.51}$$

En posant

$$\boldsymbol{u}_{i-1} = \mathbf{L}_{i-1}^{-1}\mathbf{G}_{i-1}^{T}\boldsymbol{y}, \tag{3.52}$$

le critère (3.47) se calcule simplement par

$$\Delta\mathcal{J}_{\mathcal{Q}_{i-1}}^{+n} = \mu - \frac{\left(\boldsymbol{v}_n^T\boldsymbol{u}_{i-1} - \boldsymbol{g}_n^T\boldsymbol{y}\right)^2}{\|\boldsymbol{g}_n\|^2 - \|\boldsymbol{v}_n\|^2}. \tag{3.53}$$

La solution $\widehat{\boldsymbol{x}}$ peut être calculée par

$$\widehat{\boldsymbol{x}}_i = \left(\mathbf{G}_i^T\mathbf{G}_i\right)^{-1}\mathbf{G}_i^T\boldsymbol{y} = \left(\mathbf{L}_i^T\right)^{-1}\mathbf{L}_i^{-1}\mathbf{G}_i^T\boldsymbol{y} = \left(\mathbf{L}_i^T\right)^{-1}\boldsymbol{u}_i. \tag{3.54}$$

Étant donné qu'elle n'est pas nécessaire pour calculer le critère à chaque itération, elle est plutôt calculée à la fin de l'algorithme pour économiser du temps de calcul. L'algorithme OLS est récapitulé dans le tableau 3.4.

Initialisations :	$\mathcal{Q}_0 = \varnothing$, $\mathbf{L}_0 = \varnothing$, $\boldsymbol{u}_0 = \varnothing$, $i = 1$
Algorithme :	1) Calcul de $\boldsymbol{v}_n$, $\forall n \notin \mathcal{Q}_{i-1}$ (3.50)
	2) $\widehat{n} = \underset{n\notin\mathcal{Q}_{i-1}}{\arg\min}\, \Delta\mathcal{J}_{\mathcal{Q}_{i-1}}^{+n}$ (3.53)
	3) si $\Delta\mathcal{J}_{\mathcal{Q}_{i-1}}^{+\widehat{n}} < 0$
	$\mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}_{i-1} \cup \widehat{n}$
	Mise à jour de $\mathbf{L}_i$ (3.49), $\boldsymbol{u}_i$ (3.52)
	$i = i + 1$
	aller à 1)
	sinon
	terminer
	fin si
Sortie :	$\widehat{\boldsymbol{x}}_{i-1} = (\mathbf{L}_{i-1}^T)^{-1}\boldsymbol{u}_{i-1}$

TABLE 3.4 – Description de l'algorithme Orthogonal Least Squares (OLS).

En terme de nombre de combinaisons testées, pour un support final $\mathcal{Q}$, les algorithmes gloutons explorent $\sum_{i=0}^{\text{card}(\mathcal{Q})}(N_x - i)$ combinaisons (très loin des 2^{N_x}).

3.3.3 L'agorithme Single Best Replacement

L'algorithme *Single Best Replacement* (SBR) [Soussen *et al.* 2011] est dérivé de l'algorithme *Single Most Likely Replacement* (SMLR) [Kormylo et Mendel 1982, Mendel 1983, Goussard *et al.* 1990], qui a été développé pour la déconvolution parcimonieuse sous un modèle Bernoulli-gaussien. SBR est un algorithme dédié à la résolution du problème pénalisé P0 établi à l'équation (3.35). Il est basé sur l'algorithme glouton OLS : à chaque itération, il

propose un ajout suivant la minimisation du critère (3.47), et pour $i > 2$, le retrait d'une composante. Le mouvement qui est sélectionné est celui qui fait le plus décroître le critère. SBR est un algorithme bi-directionnel (ou *forward-backward*) car il permet d'ajouter et de retirer des éléments du support. Par rapport aux algorithmes gloutons, la robustesse vient du fait qu'une fausse détection peut être annulée grâce à la possibilité de retrait.

Le test pour le retrait d'un élément d'indice $m \in \mathcal{Q}_{i-1}$ est réalisé en calculant [Reeves 1999, Miller 2002]

$$\Delta\mathcal{J}_{\mathcal{Q}_{i-1}}^{-m} = \frac{(\hat{\boldsymbol{x}}_{i-1}[m])^2}{\gamma_m} - \mu, \tag{3.55}$$

où γ_m est le $m^{\text{ème}}$ élément de la diagonale de $\left(\mathbf{G}_{i-1}^T\mathbf{G}_{i-1}\right)^{-1}$ et $\hat{\boldsymbol{x}}_{i-1}[m]$ est le $m^{\text{ème}}$ élément de la solution à l'itération $i-1$. Le détail des calculs qui aboutissent à l'équation (3.55) est donné en annexe C.2. Le meilleur retrait est donc

$$\hat{m} = \underset{m\in\mathcal{Q}_{i-1}}{\arg\min}\, \Delta\mathcal{J}_{\mathcal{Q}_{i-1}}^{-m}. \tag{3.56}$$

On retrouve cette procédure de retraits dans les algorithmes *backward* [Reeves 1999, Couvreur et Bresler 2000, Miller 2002], qui partent d'un support complet (correspondant à la solution de l'inverse généralisée) et enlèvent un élément à chaque itération. Cette approche est performante seulement lorsque le niveau de bruit est très faible.

Pour résumer, à chaque itération, le mouvement qui aboutit à la plus faible valeur parmi $\Delta\mathcal{J}_{\mathcal{Q}_{i-1}}^{+n}$ pour $n \notin \mathcal{Q}_{i-1}$ et $\Delta\mathcal{J}_{\mathcal{Q}_{i-1}}^{-m}$ pour $m \in \mathcal{Q}_{i-1}$ est sélectionné. Il faut noter que le minimum de $\Delta\mathcal{J}_{\mathcal{Q}_{i-1}}^{-m}$ étant supérieur à $-\mu$, si $\Delta\mathcal{J}_{\mathcal{Q}_{i-1}}^{+n} < -\mu$, alors les retraits n'ont pas besoin d'être testés. Le détail de l'algorithme est donné dans le tableau 3.5.

Pour une solution de support $\mathcal{Q}$, on ne peut pas, contrairement aux algorithmes gloutons, prédire le nombre de combinaisons testées tant les mouvements d'ajout et de retrait peuvent mener à différents chemins possibles. Néanmoins, si tous les retraits sont testés pour $i > 2$ et qu'aucun retrait n'est effectué, les nombre de combinaisons testées est

$$\sum_{i=0}^{\text{card}(\mathcal{Q})} (N_x - i) + \sum_{i=3}^{\text{card}(\mathcal{Q})} (i-1). \tag{3.57}$$

Ce nombre est le minimum de combinaisons testées et reste très faible par rapport aux 2^{N_x} combinaisons possibles. L'algorithme SBR est à l'origine de nos travaux méthodologiques qui sont détaillés dans la section 3.4. Nous proposons d'une part, des mouvements multiples locaux (dans une fenêtre), et d'autre part, un algorithme qui utilise une information d'auto-corrélation pour sélectionner les meilleures positions.

Initialisations :	$\mathcal{Q}_0 = \varnothing$, $\mathbf{L}_0 = \varnothing$, $\boldsymbol{u}_0 = \varnothing$, $i = 1$
Algorithme :	1) Calcul de $\boldsymbol{v}_n$, $\forall n \notin \mathcal{Q}_{i-1}$ (3.50)
	2) $\hat{n} = \underset{n \notin \mathcal{Q}_{i-1}}{\arg\min}\, \Delta\mathcal{J}^{+n}_{\mathcal{Q}_{i-1}}$ (3.53)
	3) Pour $i > 2$: $\hat{m} = \underset{m \in \mathcal{Q}_{i-1}}{\arg\min}\, \Delta\mathcal{J}^{-m}_{\mathcal{Q}_{i-1}}$ (3.55)
	4) si $\min\left(\Delta\mathcal{J}^{+\hat{n}}_{\mathcal{Q}_{i-1}}, \Delta\mathcal{J}^{-\hat{m}}_{\mathcal{Q}_{i-1}}\right) < 0$
	$\mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}_{i-1} \cup \hat{n}$ ou $\mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}_{i-1} \backslash \hat{m}$
	Mise à jour de $\mathbf{L}_i$ (3.49), $\boldsymbol{u}_i$ (3.52)
	$i = i + 1$
	aller à 1)
	sinon
	terminer
	fin si
Sortie :	$\hat{\boldsymbol{x}}_{i-1} = (\mathbf{L}^T_{i-1})^{-1}\boldsymbol{u}_{i-1}$

TABLE 3.5 – Description de l'algorithme Single Best Replacement (SBR).

3.3.4 Comparaison des algorithmes gloutons et SBR

Nous comparons ici les algorithmes gloutons (MP, OMP, OLS) et SBR pour résoudre le problème P0 à partir de données simulées. Le signal $\breve{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^{200}$ à estimer est composé de 9 pics, de positions uniformément réparties dans $[1, \ldots, N_x]$ et d'amplitudes suivant une distribution gaussienne. Les données sont générées avec le modèle $\boldsymbol{y} = \mathbf{G}\breve{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{b}$ où $\mathbf{G}$ est une matrice de convolution associée à une forme d'onde gaussienne illustrée sur la figure 3.6a ($N_h = 51$). Le bruit $\boldsymbol{b}$ respecte un rapport signal à bruit fixé à 25 dB (voir partie 3.2.1). Les données sont représentées sur la figure 3.6b.

Le paramètre de régularisation est déterminé par une procédure d'adéquation aux données. Il est fixé à sa valeur maximale μ_{max} établi à l'équation (3.40) et est géométriquement diminué. Lorsque le niveau du résidu $\|\boldsymbol{y} - \mathbf{G}\hat{\boldsymbol{x}}_i\|^2$, obtenu par SBR, est inférieur à la vraie norme du bruit $\|\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{y} - \mathbf{G}\breve{\boldsymbol{x}}\|^2$, le paramètre courant est retenu. Même si cette méthode favorise SBR, elle offre l'avantage de comparer toutes les méthodes pour une même valeur de μ. Dans la partie 3.4.3, nous réaliserons des simulations en faisant varier la valeur de μ pour chaque algorithme. Les cardinalités de la solution et normes du résidu en fonction de μ pour l'exemple présenté sont tracées sur la figure 3.7. Comme attendu, la cardinalité augmente lorsque la norme du résidu diminue. Ces grandeurs évoluent par sauts à cause de la nature discrète de la pénalisation ℓ_0. En effet, pour un support donné, la solution est identique menant à une norme de résidu constante (d'une manière similaire aux algorithmes gloutons).

Les résultats de déconvolution obtenus par MP, OMP, OLS et SBR sont respectivement présentés sur les figures 3.6c-d-e-f. La valeur du critère pour chaque algorithme est également affichée. Nous observons que cette valeur décroît quand la complexité des algorithmes

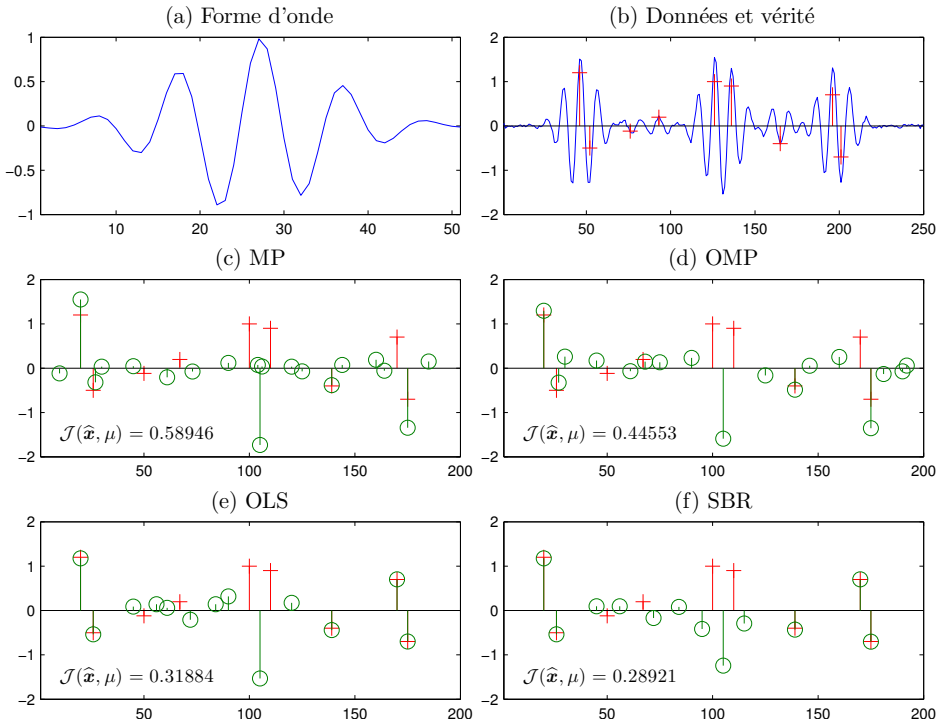


FIGURE 3.6 – Déconvolution par régularisation ℓ_0. (a) : Réponse impulsionnelle instrumentale avec $f_0 = 5\,\text{MHz}$, $\text{BWR}_{-3} = 0.3$, $\phi = -\pi/4$, (b) : données avec RSB $= 25\,\text{dB}$ (–) et vérité (+), (c) : vérité (+) et estimation par MP (○), (d) vérité (+) et estimation par OMP (○), (e) : vérité (+) et estimation par OLS (○), (f) : vérité (+) et estimation par SBR (○).

augmente : MP, OMP, OLS puis SBR. Pour résumer, MP est plus sensible aux fausses détections à cause de la non remise en cause des amplitudes de la solution. OMP donne à peu près le même résultat avec quelques fausses détections en moins. Les algorithmes OLS et SBR s'en sortent mieux grâce à une sélection plus raffinée. Il y a un avantage pour SBR qui parvient à supprimer quelques fausses détections grâce à sa possibilité de retraits. Pour tous les algorithmes, il est important de noter que la détection des deux pics centraux – autour de l'indice 100 – n'est pas réalisée. Ces échecs sont dûs au fait que la somme des deux échos crée une forme d'onde proche de l'ondelette de référence. Pour des algorithmes à détection simple, la position trouvée se situe donc au milieu des deux vrais pics.

A partir de cet exemple, on peut conclure que les approches basées sur la sélection d'une seule composante par itération trouvent leur limite lorsque les échos sont fortement entremêlés. Il est par conséquent intéressant d'étudier des approches à détections multiples. Dans la suite de ce chapitre, nous considérons des algorithmes dérivant d'OLS dans lesquelles les amplitudes sont marginalisées. C'est-à-dire, pour un support $\mathcal{Q}_i$ donné, la solution est de fait $\widehat{\boldsymbol{x}}_i = \left(\mathbf{G}_i^T \mathbf{G}_i\right)^{-1} \mathbf{G}_i^T \boldsymbol{y}$. Le problème revient par conséquent à explorer des supports.

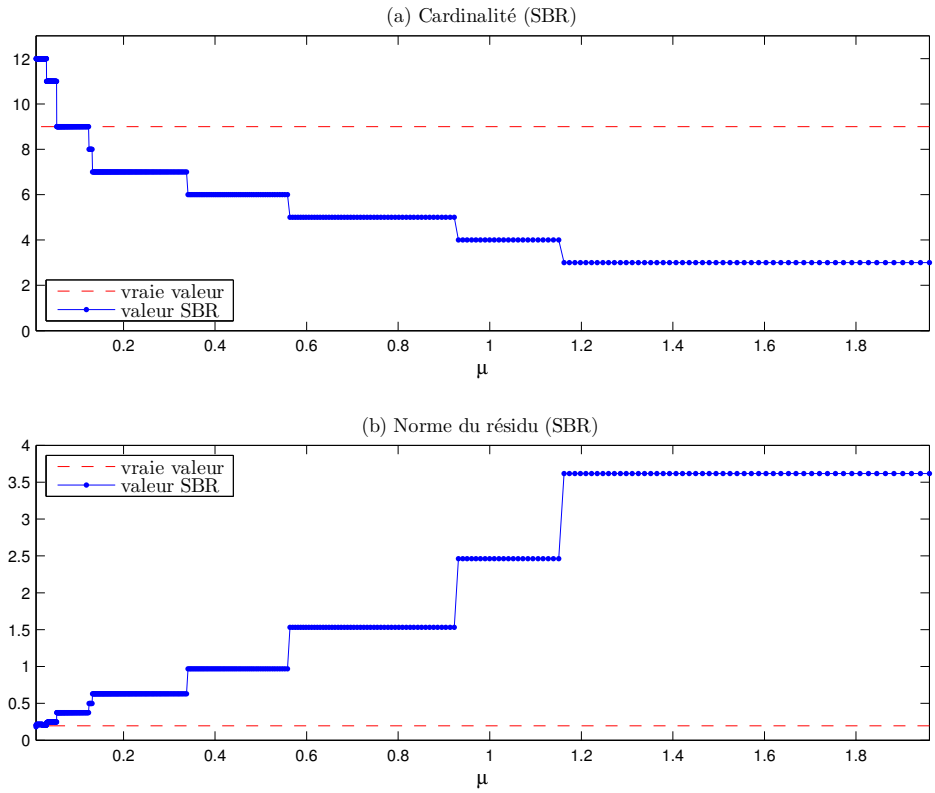


FIGURE 3.7 – Sélection du paramètre de régularisation par respect de la norme du bruit correspondant à l'exemple de la figure 3.6 pour l'algorithme SBR. Le paramètre qui donne la norme du résidu juste en dessous de la norme du bruit est sélectionné. (a) Cardinalité en fonction de μ, (b) norme du résidu en fonction de μ.

3.4 Des algorithmes plus efficaces d'optimisation ℓ_0

3.4.1 Mouvements plus complexes

Sur un schéma similaire à l'algorithme SBR, il est possible de considérer des ajouts multiples, des retraits multiples et des remplacements multiples. Par exemple, pour l'ajout de deux composantes $n_1, n_2 \notin \mathcal{Q}_{i-1}$ la différence de critère s'écrit

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{J}_{\mathcal{Q}_{i-1}}^{+n_1+n_2} &= \mathcal{J}_{\mathcal{Q}_{i-1}\cup\{n_1,n_2\}} - \mathcal{J}_{\mathcal{Q}_{i-1}} \\ &= \mathcal{J}_{\mathcal{Q}_{i-1}\cup n_1} - \mathcal{J}_{\mathcal{Q}_{i-1}} + \mathcal{J}_{\mathcal{Q}_{i-1}\cup\{n_1,n_2\}} - \mathcal{J}_{\mathcal{Q}_{i-1}\cup n_1} \\ &= \Delta\mathcal{J}_{\mathcal{Q}_{i-1}}^{+n_1} + \Delta\mathcal{J}_{\mathcal{Q}_{i-1}\cup n_1}^{+n_2}, \end{aligned} \tag{3.58}$$

avec $\Delta\mathcal{J}_{\mathcal{Q}_{i-1}\cup n_1}^{+n_2} = \mathcal{J}_{\mathcal{Q}_{i-1}\cup\{n_1,n_2\}} - \mathcal{J}_{\mathcal{Q}_{i-1}\cup n_1}$. Le calcul de la différence du critère pour deux ajouts est donc équivalent à la somme de deux mouvements simples. Ce principe s'étend de ce fait pour :

- K insertions de $n_1, \ldots, n_K \notin \mathcal{Q}_{i-1}$:

$$\Delta\mathcal{J}_{\mathcal{Q}_{i-1}}^{+n_1,\ldots,+n_K} = \Delta\mathcal{J}_{\mathcal{Q}_{i-1}}^{+n_1} + \Delta\mathcal{J}_{\mathcal{Q}_{i-1}\cup n_1}^{+n_2} + \ldots + \Delta\mathcal{J}_{\mathcal{Q}_{i-1}\cup\{n_1,\ldots,n_{K-1}\}}^{+n_K}. \tag{3.59}$$

- L retraits de $m_1, \ldots, m_L \in \mathcal{Q}_{i-1}$

$$\Delta\mathcal{J}^{-m_1,\ldots,-m_L}_{\mathcal{Q}_{i-1}} = \Delta\mathcal{J}^{-m_1}_{\mathcal{Q}_{i-1}} + \Delta\mathcal{J}^{-m_2}_{\mathcal{Q}_{i-1}\setminus m_1} + \ldots + \Delta\mathcal{J}^{+m_L}_{\mathcal{Q}_{i-1}\setminus\{m_1,\ldots,m_{L-1}\}}. \tag{3.60}$$

- K insertions et L retraits de $n_1, \ldots, n_K \notin \mathcal{Q}_{i-1},\ m_1, \ldots, m_L \in \mathcal{Q}_{i-1}$

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{J}^{+n_1,\ldots,+n_K-m_1,\ldots,-m_L}_{\mathcal{Q}_{i-1}} &= \Delta\mathcal{J}^{+n_1}_{\mathcal{Q}_{i-1}} + \Delta\mathcal{J}^{+n_2}_{\mathcal{Q}_{i-1}\cup n_1} + \ldots + \Delta\mathcal{J}^{+n_K}_{\mathcal{Q}_{i-1}\cup\{n_1,\ldots,n_{K-1}\}} \\ &+ \Delta\mathcal{J}^{-m_1}_{\mathcal{Q}_{i-1}\cup\{n_1,\ldots,n_K\}} + \Delta\mathcal{J}^{-m_2}_{\mathcal{Q}_{i-1}\cup\{n_1,\ldots,n_K\}\setminus m_1} + \ldots \\ &+ \Delta\mathcal{J}^{-m_L}_{\mathcal{Q}_{i-1}\cup\{n_1,\ldots,n_K\}\setminus\{m_1,\ldots,m_{L-1}\}}.\end{aligned} \tag{3.61}$$

Le coût de calcul augmente inévitablement si on augmente K et L. Par conséquent, nous allons plutôt orienter nos approches vers une exploration d'un nombre limité de combinaisons à tester.

3.4.2 Sélection dans une fenêtre

La sélection dans une fenêtre a été proposée par Kaaresen dans les algorithmes *Iterative Window Maximization* (IWM) [Kaaresen 1997; 1998]. Le principe est de proposer des ajouts, retraits et remplacements multiples dans une fenêtre centrée autour d'un pic donné. Kaaresen [1997] se limite néanmoins à des mouvements doubles dans une fenêtre de quelques éléments. Nous proposons d'étendre ce principe à des mouvements plus généraux pour des fenêtres plus larges, jusqu'à par exemple deux fois la taille de la forme d'onde de référence. Nous notons N_w la taille de la fenêtre de calcul des mouvements multiples.

Nous proposons un premier algorithme, basé sur SBR, mais avec des mouvements simples et doubles. Nous l'appelons Single or Double Best Replacement (SDBR). Il inclut à chaque itération le test

1. des ajouts simples : $\Delta\mathcal{J}^{+n}_{\mathcal{Q}_{i-1}}$ pour $n \notin \mathcal{Q}_{i-1}$,
2. des ajouts doubles : $\Delta\mathcal{J}^{+n_1+n_2}_{\mathcal{Q}_{i-1}}$ pour $n_1, n_2 \notin \mathcal{Q}_{i-1}$ et $n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_1 + N_w$,
3. des remplacements : $\Delta\mathcal{J}^{+n-m}_{\mathcal{Q}_{i-1}}$ pour $n \notin \mathcal{Q}_{i-1}$ et $m \in \mathcal{Q}_{i-1}$,
4. des retraits simples : $\Delta\mathcal{J}^{-m}_{\mathcal{Q}_{i-1}}$ pour $m \in \mathcal{Q}_{i-1}$,
5. des retraits doubles : $\Delta\mathcal{J}^{-m_1-m_2}_{\mathcal{Q}_{i-1}}$ pour $m_1 \in \mathcal{Q}_{i-1}$ et $m_2 \in \mathcal{Q}_{i-1}\setminus m_1$.

Cet algorithme a un coût de calcul bien plus important que SBR car il teste tous les doubles ajouts dans une fenêtre de taille N_w, les remplacements et les doubles retraits.

Kaaresen [1997] à proposé deux algorithmes : IWM1 et IWM2. IWM1 réalise les mouvements 1, 3 et 4 dans une fenêtre de cinq éléments, tandis que IWM2 effectue les mouvements 2, 3 et 5 dans une fenêtre de dix éléments. IWM2 permet également de séparer un pic en deux et de fusionner deux pics, qui sont en fait des mouvements d'ordre trois. Nous proposons ici un algorithme plus général avec des mouvements d'ordre deux.

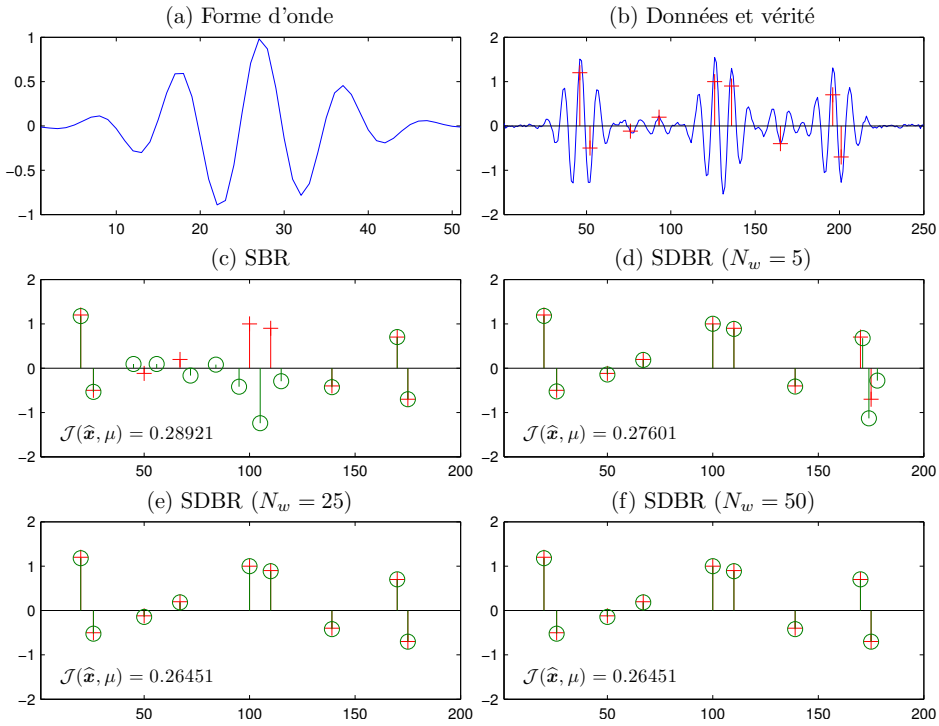


FIGURE 3.8 – Déconvolution par régularisation ℓ_0. (a) : Réponse impulsionnelle instrumentale avec $f_0 = 5\,\text{MHz}$, $\text{BWR}_{-3} = 0.3$, $\phi = -\pi/4$, (b) : données avec RSB $= 25\,\text{dB}$ (–) et vérité (+), (c) : vérité (+) et estimation par SBR (○), (d) vérité (+) et estimation par SDBR (○), (e) : vérité (+) et estimation par SDBR (○), (f) : vérité (+) et estimation par SDBR (○).

Résultats à partir d'un exemple simulé

Nous reprenons l'exemple de la figure 3.6 où la taille de la réponse impulsionnelle $\boldsymbol{h}$ est $N_h = 51$. La valeur de μ est déterminée de la même façon que dans la partie 3.3.4, par respect de la norme du bruit avec SBR. Les algorithmes SBR et SDBR avec plusieurs tailles de fenêtre $N_w = 5,\ 25,\ 50$ sont utilisés et les résultats sont présentés sur la figure 3.8. Les résultats numériques – pour les algorithmes gloutons, SBR et SDBR – sont récapitulés dans le tableau 3.6. Comme attendu, le critère et la norme du résidu baissent quand la complexité de

	$\mathcal{J}_{\mathcal{Q}}$ (0.276)	$\|\boldsymbol{y} - \mathbf{G}\widehat{\boldsymbol{x}}\|^2$ (0.196)	card$(\mathcal{Q})$ (9)	N. comb.	temps (ms)
MP	0.589	0.421	19	3810	4.5
OMP	0.446	0.295	17	3447	6.1
OLS	0.319	0.203	13	2709	7.7
SBR	0.289	0.183	12	3734	11.3
SDBR ($N_w = 5$)	0.276	0.187	10	80217	496.5
SDBR ($N_w = 25$)	0.265	0.185	9	65815	221.5
SDBR ($N_w = 50$)	0.265	0.185	9	87202	188.2

TABLE 3.6 – Résultats issus des figures 3.6 et 3.8. $\mathcal{J}_{\mathcal{Q}}$: valeur finale du critère, $\|\boldsymbol{y} - \mathbf{G}\widehat{\boldsymbol{x}}\|^2$: norme du résidu, card$(\mathcal{Q})$: nombre de composantes non nulles de la solution estimée, N. comb. : nombre de combinaisons testées par l'algorithme, temps : temps de calcul. Les valeurs en la vérité $\breve{\boldsymbol{x}}$, lorsqu'elles sont connues, sont affichées entre parenthèses.

l'algorithme augmente tandis que le nombre de combinaisons testées et le temps de calcul croissent. La cardinalité décroît quand la complexité augmente, signe de meilleures détections. Contrairement à SBR, SDBR parvient à détecter les deux pics autour de l'indice 100 et donc à faire baisser la valeur du critère. Pour $N_w = 5$, les deux derniers pics sont mal détectés. Sur cette portion de signal, ce résultat est moins bon que pour SBR car le chemin pris par l'algorithme a été légèrement modifié et mène à une moins bonne estimation des deux derniers pics. Pour $N_w = 25$ et $N_w = 50$, la solution a le bon support et est très proche de la séquence attendue. La norme du résidu est même inférieure à la norme du bruit $\|\boldsymbol{y} - \mathbf{G}\check{\boldsymbol{x}}\|^2$. Cette différence s'explique par le fait que le résidu $\|\boldsymbol{y} - \mathbf{G}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2$ est par définition, pour un même support, le résidu de norme minimale. La différence entre les deux approches SDBR ($N_w = 25$ et $N_w = 50$), qui renvoient la bonne solution, est le temps de calcul. Ces bonnes solutions sont obtenues grâce à un plus grand nombre de combinaisons testées, qui correspond forcément à un plus grand temps de calcul.

Résultats issus de simulations de Monte-Carlo

Nous réalisons ici 1000 simulations de Monte-Carlo avec une configuration voisine de la précédente : 8 pics uniformément positionnés dans $[1, \ldots, N_x]$ et d'amplitudes de distribution uniforme entre -1 et 1, $N_x = 200$, RSB $= 20$ dB. Nous testons cette fois trois tailles de fenêtres $N_w = 2, 11, 51$. Les résultats numériques sont récapitulés dans le tableau 3.7. Comme observé dans l'exemple précédent, la valeur moyenne du critère, la norme du résidu

	$\mathcal{J}_{\mathcal{Q}}$	$\|\boldsymbol{y} - \mathbf{G}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2$	card$(\mathcal{Q})$	N. comb.	temps (ms)
MP	0.656	0.130	15.9	3227	10.0
OMP	0.551	0.115	13.9	2863	9.9
OLS	0.464	0.098	13.6	2825	14.3
SBR	0.439	0.098	11.9	3399	17.2
SDBR ($N_w = 2$)	0.429	0.099	11.0	33782	289.9
SDBR ($N_w = 11$)	0.427	0.099	10.5	49991	279.1
SDBR ($N_w = 51$)	0.411	0.098	9.5	90010	207.5

TABLE 3.7 – Résultats issus de 1000 simulations de Monte-Carlo pour des données aléatoires du type de celles illustrées sur la figure 3.6 (8 pics). $\mathcal{J}_{\mathcal{Q}}$: valeur finale moyenne du critère, $\|\boldsymbol{y} - \mathbf{G}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2$: norme moyenne du résidu, card$(\mathcal{Q})$: nombre de composantes non nulles de la solution estimée, N. comb. : nombre moyen de combinaisons testées par l'algorithme, temps : temps de calcul moyen.

et la cardinalité baissent quand la complexité de l'algorithme augmente. Le nombre de combinaisons testées, et par conséquent le temps de calcul, ont tendance à augmenter avec la complexité. On remarque néanmoins que SDBR, avec $N_w = 2$, a un temps de calcul moyen plus important, dû à un plus grand nombre d'itérations : une fenêtre trop petite a pour effet de favoriser les ajouts et retraits multiples successifs, ne permettant pas de détections doubles importantes. L'algorithme SDBR est plus efficace mais requiert un temps de calcul plus de dix fois supérieur à SBR. Plutôt que d'orienter nos développements vers des approches avec des mouvements plus complexes, qui accroissent les temps de calcul, nous choisissons de restreindre le nombre de possibilités de la sélection grâce à des calculs préalables. C'est ce que nous détaillons dans la prochaine partie.

3.4.3 Sélection basée sur un calcul d'auto-corrélation multidimensionnelle

Définition d'une fonction d'auto-corrélation multidimensionnelle (FACM)

Plutôt que de choisir uniformément dans une fenêtre les éléments à rajouter ou à enlever, nous proposons de calculer les éléments les plus corrélés à la forme d'onde de référence de façon à réaliser un nombre limité de tests. Cette approche est adaptée aux formes d'ondes oscillantes car les éléments les plus corrélées ne sont pas forcément situés sur un continuum, comme pour l'approche utilisant une fenêtre. Le principe est d'utiliser une information de type auto-corrélation pour proposer les positions à sélectionner.

Nous considérons une colonne $\boldsymbol{g}_{\hat{n}}$ de $\mathbf{G}$. Le principe est de calculer les indices $n_1, \ldots, n_K$ tels que $\boldsymbol{g}_{\hat{n}}$ peut être approximé par

$$\boldsymbol{g}_{\hat{n}} \simeq \sum_{k=1}^{K} a_k \boldsymbol{g}_{\hat{n}+n_k}, \tag{3.62}$$

pour $n_k \neq 0$ et $\forall k \neq \ell$, $n_k \neq n_\ell$. Les a_k sont des facteurs d'amplitude. Pour cela, nous cherchons à minimiser une erreur au sens des moindres carrés définie par

$$\left\| \boldsymbol{g}_{\hat{n}} - \left[\boldsymbol{g}_{\hat{n}+n_1} \cdots \boldsymbol{g}_{\hat{n}+n_K} \right] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_K \end{bmatrix} \right\|_2^2. \tag{3.63}$$

Pour plus de simplicité et pour pouvoir faire les calculs au préalable, nous nous plaçons dans le cas d'un modèle de convolution où $\mathbf{G} = \mathbf{H}$. $\mathbf{H}$ est alors une matrice de convolution où les colonnes sont des répliques décalées de $\boldsymbol{h}$. Même si nous perdons la généralité de l'approche, cette approximation peut demeurer valide pour une atténuation raisonnable. Pour calculer l'expression (3.63), nous considérons une version de la réponse impulsionnelle avec insertion de zéros $\widetilde{\boldsymbol{h}} = [\mathbf{0}_{N_h}, h[0], \ldots, h[N_h - 1], \mathbf{0}_{N_h}]^T$, où $\mathbf{0}_{N_h}$ est un vecteur ligne composé de N_h zéros. Les versions décalées d'une valeur m sont ensuite définies par $\widetilde{\boldsymbol{h}}^{(m)} = [\mathbf{0}_{N_h+m}, h[0], \ldots, h[N_h - 1], \mathbf{0}_{N_h-m}]^T$ avec $m = -N_h, \ldots, N_h$. $\mathbf{H}$ étant une matrice de convolution, la fonction de l'équation (3.63) à minimiser n'est plus dépendante de $\hat{n}$ et devient

$$\left\| \widetilde{\boldsymbol{h}} - \left[\widetilde{\boldsymbol{h}}^{(n_1)} \ldots \widetilde{\boldsymbol{h}}^{(n_K)} \right] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_K \end{bmatrix} \right\|_2^2. \tag{3.64}$$

Nous définissons la matrice $\widetilde{\mathbf{H}}^{(n_1 \ldots n_K)} = \left[\widetilde{\boldsymbol{h}}^{(n_1)}, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{h}}^{(n_K)} \right]$. Les amplitudes optimales $\hat{a}_1 \ldots \hat{a}_K$ peuvent alors être calculées par

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_K \end{bmatrix} = \left(\widetilde{\mathbf{H}}^{(n_1 \ldots n_K)T} \widetilde{\mathbf{H}}^{(n_1 \ldots n_K)} \right)^{-1} \widetilde{\mathbf{H}}^{(n_1 \ldots n_K)T} \widetilde{\boldsymbol{h}}. \tag{3.65}$$

A partir de cette expression, on peut calculer la fonction de l'équation (3.64) qui ne dépend plus des amplitudes

$$\left\| \widetilde{\boldsymbol{h}} - \left[\widetilde{\boldsymbol{h}}^{(n_1)} \dots \widetilde{\boldsymbol{h}}^{(n_K)} \right] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_K \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \left\| \widetilde{\boldsymbol{h}} - \widetilde{\mathbf{H}}^{(n_1 \dots n_K)} \left(\widetilde{\mathbf{H}}^{(n_1 \dots n_K)T} \widetilde{\mathbf{H}}^{(n_1 \dots n_K)} \right)^{-1} \widetilde{\mathbf{H}}^{(n_1 \dots n_K)T} \widetilde{\boldsymbol{h}} \right\|_2^2$$
$$= \left\| \widetilde{\boldsymbol{h}} \right\|_2^2 - \left\| \widetilde{\mathbf{H}}^{(n_1 \dots n_K)} \left(\widetilde{\mathbf{H}}^{(n_1 \dots n_K)T} \widetilde{\mathbf{H}}^{(n_1 \dots n_K)} \right)^{-1} \widetilde{\mathbf{H}}^{(n_1 \dots n_K)T} \widetilde{\boldsymbol{h}} \right\|_2^2. \tag{3.66}$$

La minimisation de cette expression revient en fait à maximiser une fonction, que nous appelons fonction d'auto-corrélation multidimensionnelle (FACM)

$$F_K(n_1 \dots n_K) = \left\| \widetilde{\mathbf{H}}^{(n_1 \dots n_K} \left(\widetilde{\mathbf{H}}^{(n_1 \dots n_K)T} \widetilde{\mathbf{H}}^{(n_1 \dots n_K)} \right)^{-1} \widetilde{\mathbf{H}}^{(n_1 \dots n_K)T} \widetilde{\boldsymbol{h}} \right\|_2^2. \tag{3.67}$$

Les valeurs élevées de cette fonction indiquent que les indices correspondants produisent une combinaison linéaire de formes d'onde décalées (3.62) proche de la forme d'onde initiale. Par exemple, pour $K = 1$, la FACM est

$$F_1(n_1) = \left\| \widetilde{\boldsymbol{h}}^{(n_1)} \left(\widetilde{\boldsymbol{h}}^{(n_1)T} \widetilde{\boldsymbol{h}}^{(n_1)} \right)^{-1} \widetilde{\boldsymbol{h}}^{(n_1)T} \widetilde{\boldsymbol{h}} \right\|_2^2 = \frac{\left\| \widetilde{\boldsymbol{h}}^{(n_1)T} \widetilde{\boldsymbol{h}} \right\|^2}{\left\| \widetilde{\boldsymbol{h}}^{(n_1)} \right\|^2}. \tag{3.68}$$

Maximiser $F_1(n_1)$ revient donc à maximiser $|\widetilde{\boldsymbol{h}}^{(n_1)T} \widetilde{\boldsymbol{h}}|$, qui est la valeur absolue de l'auto-corrélation de $\widetilde{\boldsymbol{h}}$ en n_1. Nous illustrons des exemples de telles fonctions pour $K = 1$ et $K = 2$ sur les figures 3.9 et 3.10.

Seuillage de la FACM

Dans le but de réduire le nombre de combinaisons à tester, nous introduisons un seuillage de la FACM tel que

$$F_K(n_1 \dots n_K) \geqslant \epsilon, \tag{3.69}$$

où ϵ est la valeur du seuil de la FACM. Pour limiter encore le nombre de combinaisons à tester, nous écartons les indices qui donnent une amplitude de la FACM trop faible :

$$|\widehat{a}_k(n_1, \dots, n_K)| \geqslant \delta \qquad \forall k = 1, \dots, K. \tag{3.70}$$

Cela revient à supprimer par exemple le cas où l'une des amplitudes est quasiment nulle, et toutes les autres ont des amplitudes significatives. Ce point sera mis en évidence dans un exemple ci-après. Un exemple de fonction $F_1(n_1)$, pour la forme d'onde de la figure 3.6, est représenté sur la figure 3.9b. On ne garde alors que les indices qui ont une valeur de FACM supérieure au seuil ϵ. Les amplitudes optimales sont tracées sur la figure 3.9c et celles supérieures a δ sont retenues. Nous observons ici que le seuillage sur les amplitudes n'a pas d'impact sur la sélection. Les positions sélectionnées qui vérifient $F_1(n_1) \geqslant \epsilon$ et $|\widehat{a}(n_1)|$

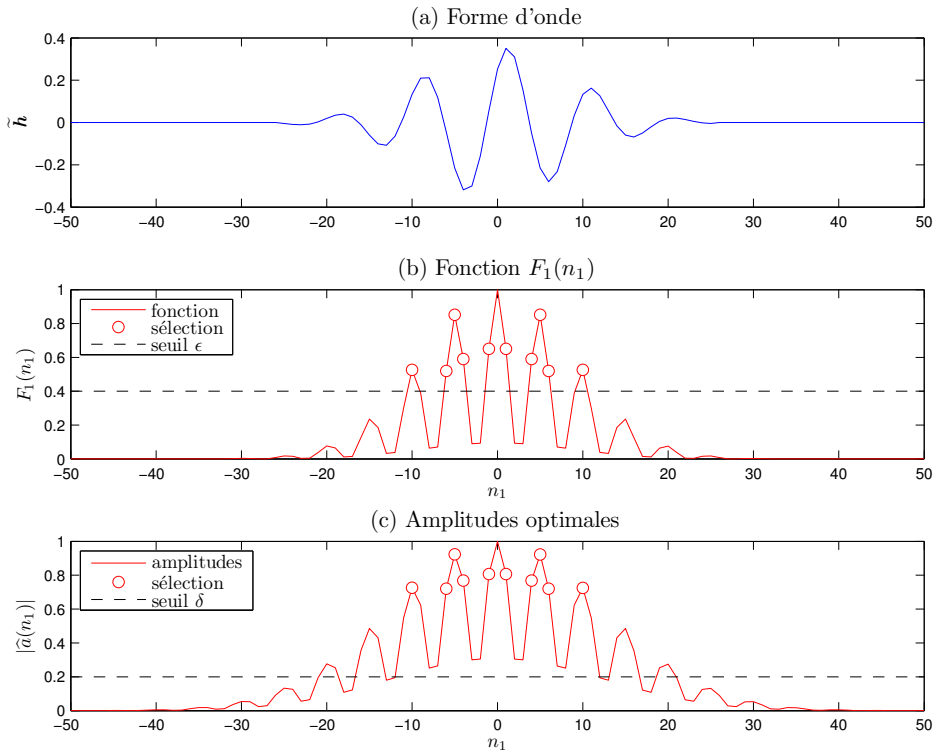


FIGURE 3.9 – Exemple de FACM pour $K = 1$ avec $\epsilon = 0.4$ and $\delta = 0.2$. (a) : Forme d'onde de référence $\widehat{\boldsymbol{h}}$, (b) : fonction $F_1(n_1)$ (–), seuil ϵ (- -) et sélection $F_1(n_1) \geqslant \epsilon$ (○), (c) : amplitudes optimales $\hat{a}(n_1)$, seuil δ (- -) et sélection (○).

sont représentées par des ronds blancs. Sur la figure 3.10, nous présentons la FACM associée à la même forme d'onde pour $K = 2$. La fonction $F_2(n_1, n_2)$ est représentée sur la figure 3.10a et les deux matrices d'amplitudes, $|\widehat{a}_1(n_1, n_2)|$ et $|\widehat{a}_2(n_1, n_2)|$, sont affichées sur les figures 3.10b et 3.10c. La sélection, après seuillage sur la fonction seulement, est représentée par des pixels blancs sur la figure 3.10d. On observe ici qu'il y a des positions sélectionnées alors qu'elles correspondent à de très faibles amplitudes $|\widehat{a}_1(n_1, n_2)|$ ou $|\widehat{a}_2(n_1, n_2)|$. Cela prouve l'intérêt d'utiliser un seuillage sur l'amplitude également. C'est ce qui est réalisé sur la figure 3.10e où les positions correspondant aux amplitudes inférieures à δ sont retirées. La figure 3.10f montre les positions sélectionnées suite au retrait des doublons dûs à la symétrie entre les indices.

Sur la figure 3.11, nous montrons le nombre de combinaisons sélectionnées en fonction du seuil ϵ, le seuil δ étant fixé à zéro. Comme attendu, le nombre de combinaisons sélectionnées augmente avec K. Nous proposons de choisir un nombre constant de combinaisons à tester pour chaque valeur de K. On peut par exemple définir un degré de complexité supplémentaire par rapport à SBR. Nous notons N_c le nombre de combinaisons supplémentaires pour chaque valeur de K.

L'algorithme MOBR

Nous proposons un algorithme appelé Multiple Optimized Best Replacement (MOBR) qui est similaire à SBR, mais qui propose également à chaque itération un ensemble de mouve-

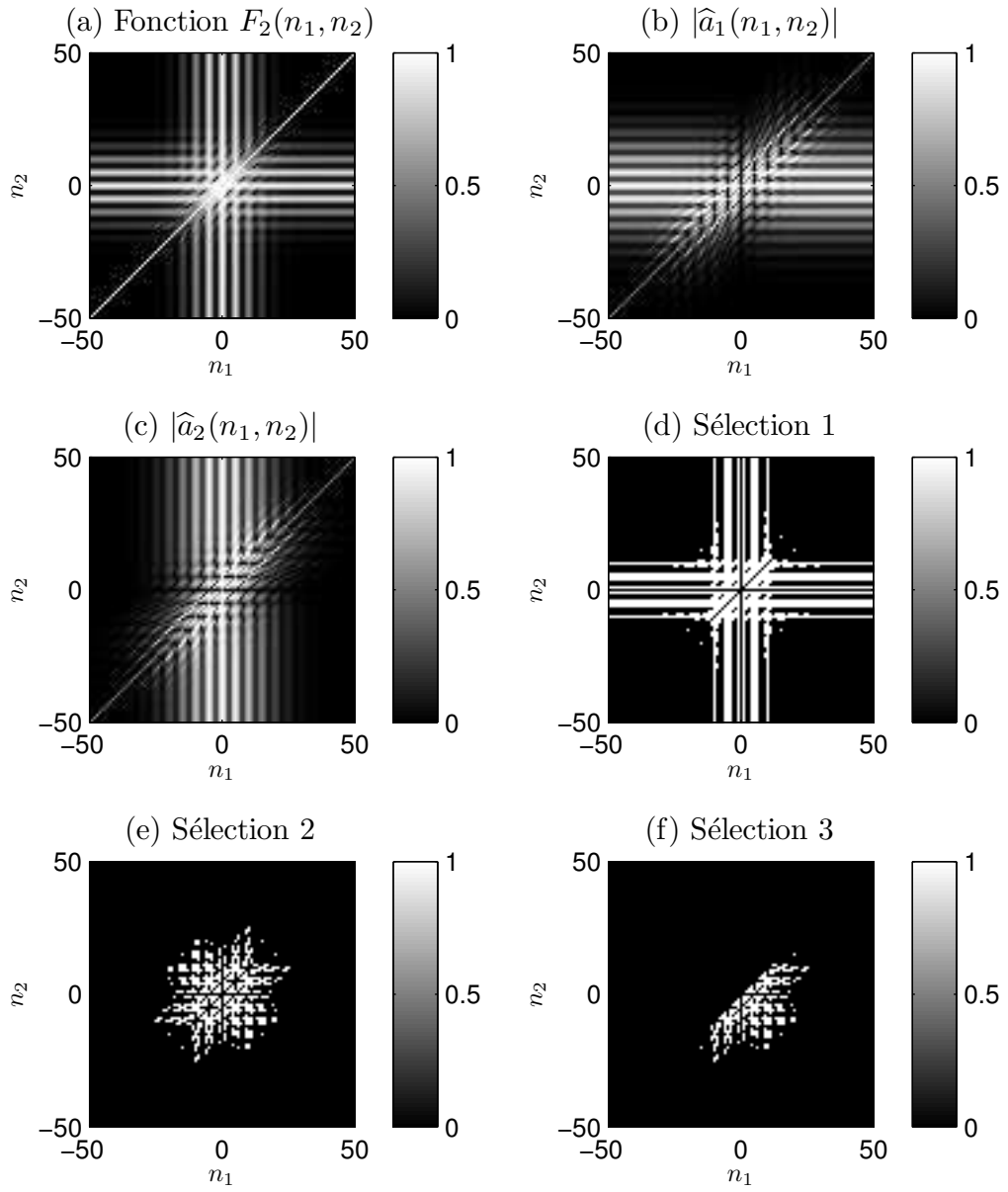


FIGURE 3.10 – Exemple de FACM pour $K = 2$ avec $\epsilon = 0.4$ and $\delta = 0.2$. (a) : fonction $F_2(n_1, n_2)$, (b) : amplitudes optimales $|\widehat{a}_1(n_1, n_2)|$, (c) : amplitudes optimales $|\widehat{a}_2(n_1, n_2)|$, (d) : sélection sur la fonction $F_2(n_1, n_2) \geqslant \epsilon$, (e) : sélection sur la fonction $F_2(n_1, n_2) \geqslant \epsilon$ et les amplitudes $|\widehat{a}_1(n_1, n_2)| \geqslant \delta$ et $|\widehat{a}_2(n_1, n_2)| \geqslant \delta$, (f) : suppression des doublons à partir de (e).

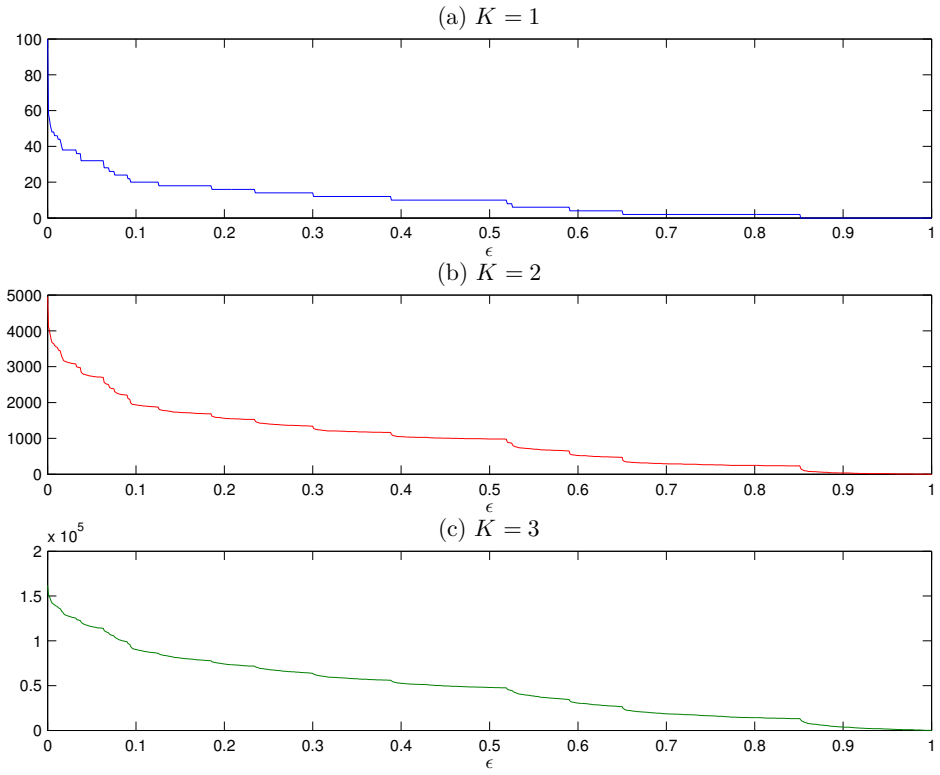


FIGURE 3.11 – Nombre de combinaisons retenues à partir de la FACM en fonction du seuil ϵ pour (a) $K = 1$, (b) $K = 2$ et (c) $K = 3$ (avec $\delta = 0$).

ments à K composantes basé sur le calcul de la FACM (équation (3.67)). Les tests des ajouts et retraits simples sont identiques à SBR. Néanmoins, lorsqu'un indice $\hat{n}$ est ajouté, nous proposons deux types de mouvements. Dans un premier temps, il est possible de rajouter $K-1$ composantes à $\hat{n}$, ce qui se traduit en terme de support par

$$\mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}_{i-1} \cup \{\hat{n}, \hat{n} + n_1, \ldots, \hat{n} + n_{K-1}\}. \tag{3.71}$$

La seconde possibilité est de remplacer $\hat{n}$ par K contributions telles que

$$\mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}_{i-1} \cup \{\hat{n} + n_1, \ldots, \hat{n} + n_K\}. \tag{3.72}$$

Pour une valeur de K, les indices correspondants sont calculés à partir de la FCAM $F_K(n_1 \ldots n_K)$. Une description de l'algorithme est donnée dans le tableau 3.8. L'algorithme MOBR est plus complexe que SBR puisqu'il autorise des ajouts multiples après la phase d'un ajout unique.

Résultats à partir d'un exemple simple

Nous reprenons l'exemple de la figure 3.6 où le paramètre μ est réglé par SBR pour respecter la norme du bruit (voir partie 3.3.4). L'algorithme MOBR est utilisé avec $K = 1$ et $K = 2$, avec $\epsilon = 0.9, 0.7, 0.5$ et $\delta = 0.1$. Les résultats de déconvolution sont affichés sur la figure 3.12. On remarque que les valeurs du critère sont inférieures à celle de SBR et baissent quand ϵ diminue. En termes de détection des pics, les algorithmes MOBR fournissent de meilleures solutions que SBR, MOBR pour $\epsilon = 0.5$ fournissant une solution proche de la

Initialisations :	$\mathcal{Q}_0 = \varnothing$
	pour K = 1 à K_{max} faire $\forall k \in [1, \ldots, K]$:
	$n_1 \ldots n_K \in \{F_K(n_1 \ldots n_K) \geqslant \epsilon \ \ \& \ \ \widehat{a}_k(n_1 \ldots n_K) \geqslant \delta\}$
	fin pour
	$i = 1$
Algorithme :	1) calculer $\widehat{n} = \underset{n \notin \mathcal{Q}_{i-1}}{\arg\min}\, \Delta\mathcal{J}^{+n}_{\mathcal{Q}_{i-1}}$
	pour K = 1 à K_{max} faire
	2) Proposer $\mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}_{i-1} \cup \{\widehat{n},\ \widehat{n} + n_1,\ \ldots,\ \widehat{n} + n_{K-1}\}$
	3) Proposer $\mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}_{i-1} \cup \{\widehat{n} + n_1,\ \ldots,\ \widehat{n} + n_K\}$
	fin pour
	4) Calculer $\widehat{m} = \underset{m \in \mathcal{Q}_{i-1}}{\arg\min}\, \Delta\mathcal{J}^{-m}_{\mathcal{Q}_{i-1}}$
	choisir le mouvement qui minimise $\mathcal{J}_{\mathcal{Q}_i}$ parmi 1, 2, 3, 4
	si $\mathcal{J}_{\mathcal{Q}_i} < \mathcal{J}_{\mathcal{Q}_{i-1}}$
	mettre à jour $\mathcal{Q}_i$
	$i = i + 1$
	aller à 1)
	sinon
	terminer
	fin si
Sortie :	$\widehat{\boldsymbol{x}}_i$

TABLE 3.8 – Description de l'algorithme Multiple Optimized Best Replacement (MOBR).

	$\mathcal{J}_{\mathcal{Q}}$ (0.276)	$\|\boldsymbol{y} - \mathbf{G}\widehat{\boldsymbol{x}}\|^2$ (0.196)	card($\mathcal{Q}$) (9)	N. comb.	temps (ms)
SBR	0.289	0.183	12	3734	11.3
SDBR ($N_w = 5$)	0.276	0.187	10	80217	496.5
SDBR ($N_w = 25$)	0.265	0.185	9	65815	221.5
SDBR ($N_w = 50$)	0.265	0.185	9	87202	188.2
MOBR ($\epsilon = 0.90$)	0.280	0.173	12	3667	49.4
MOBR ($\epsilon = 0.70$)	0.278	0.180	11	5336	147.7
MOBR ($\epsilon = 0.50$)	0.265	0.185	9	3840	156.1

TABLE 3.9 – Résultats issus des figures 3.6, 3.8 et 3.12. Les valeurs réélles, lorsqu'elles sont connues, sont affichées entre parenthèses.

séquence attendue. Des résultats numériques associés sont récapitulés dans le tableau 3.9. Les algorithmes MOBR ont un niveau de performance équivalent aux algorithmes SDBR, pour beaucoup moins de combinaisons testées et des temps de calcul inférieurs. Le com-

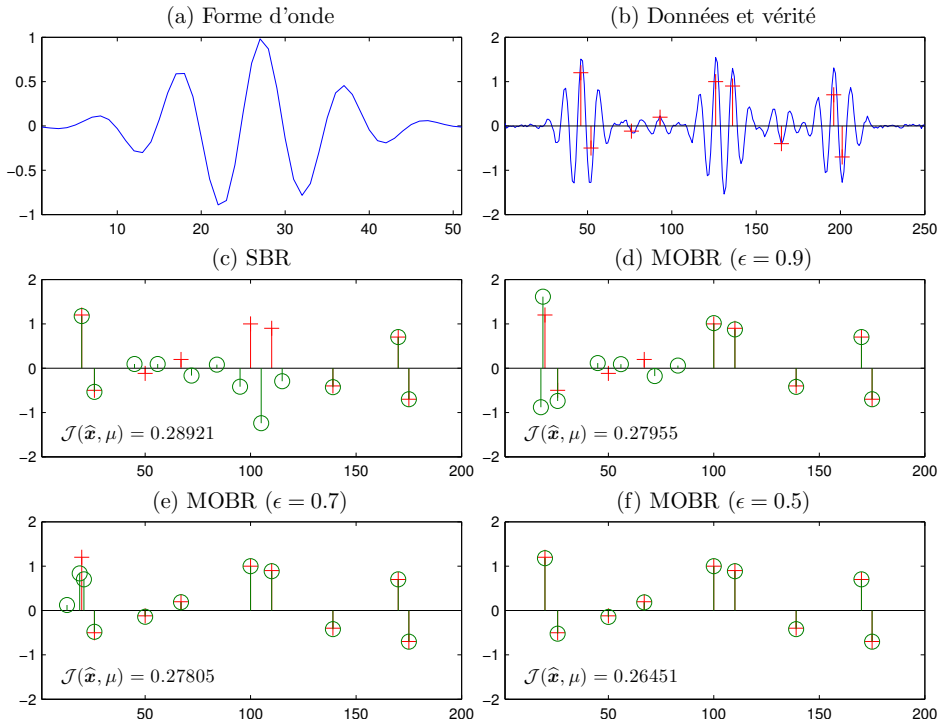


FIGURE 3.12 – Déconvolution par régularisation ℓ_0. (a) : Réponse impulsionnelle instrumentale avec $f_0 = 5\,\text{MHz}$, $\text{BWR}_{-3} = 0.3$, $\phi = -\pi/4$, (b) : données avec RSB $= 25\,\text{dB}$ (–) et vérité (+), (c) : vérité (+) et estimation par SBR (○), (d) vérité (+) et estimation par MOBR pour $\epsilon = 0.9$ (○), (e) : vérité (+) et estimation par MOBR pour $\epsilon = 0.7$ (○), (f) : vérité (+) et estimation par MOBR pour $\epsilon = 0.5$ (○).

promis entre nombre de combinaisons testées et temps de calcul est néanmoins en défaveur de MOBR, ce que nous attribuons à l'implémentation Matlab. En effet, la mise en œuvre de MOBR, qui doit réaliser une recherche et faire des tests sur des segments de positions, est plus lente que SDBR. Nous reviendrons sur ce constat dans la prochaine partie où nous réalisons des simulations de Monte-Carlo.

Résultats issus de simulations de Monte-Carlo

Dans cette partie, nous réalisons 5000 simulations de Monte-Carlo. Nous choisissons une séquence $\breve{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^{200}$ composée de 6 pics, de positions aléatoires uniformément réparties et d'amplitudes aléatoires uniformes entre -1 et 1. Nous utilisons les algorithmes gloutons (MP, OMP, OLS), SBR, SDBR avec $N_w = 25,\ 50$ et MOBR avec un nombre de combinaisons supplémentaires $N_c = 20,\ 200$, $K = 1$ et $K = 2$. Les données sont générées avec un bruit gaussien (RSB $= 25\,\text{dB}$).

Les données sont divisées par $\sqrt{\mu_{\max}}$ pour avoir une nouvelle valeur maximale $\mu_{\max} = 1$ au-delà de laquelle la solution est nulle (voir équation (3.40)). Afin de comparer équitablement les algorithmes, plusieurs valeurs de $\mu \leqslant 1$ sont utilisées. Nous traçons plusieurs résultats en fonction de μ sur la figure 3.13. La valeur finale du critère en fonction de μ est tracée sur la figure 3.13a pour tous les algorithmes. Les algorithmes ayant les plus faibles valeurs de critère sont SDBR et MOBR, suivis de SBR et OLS. A partir des valeurs du cri-

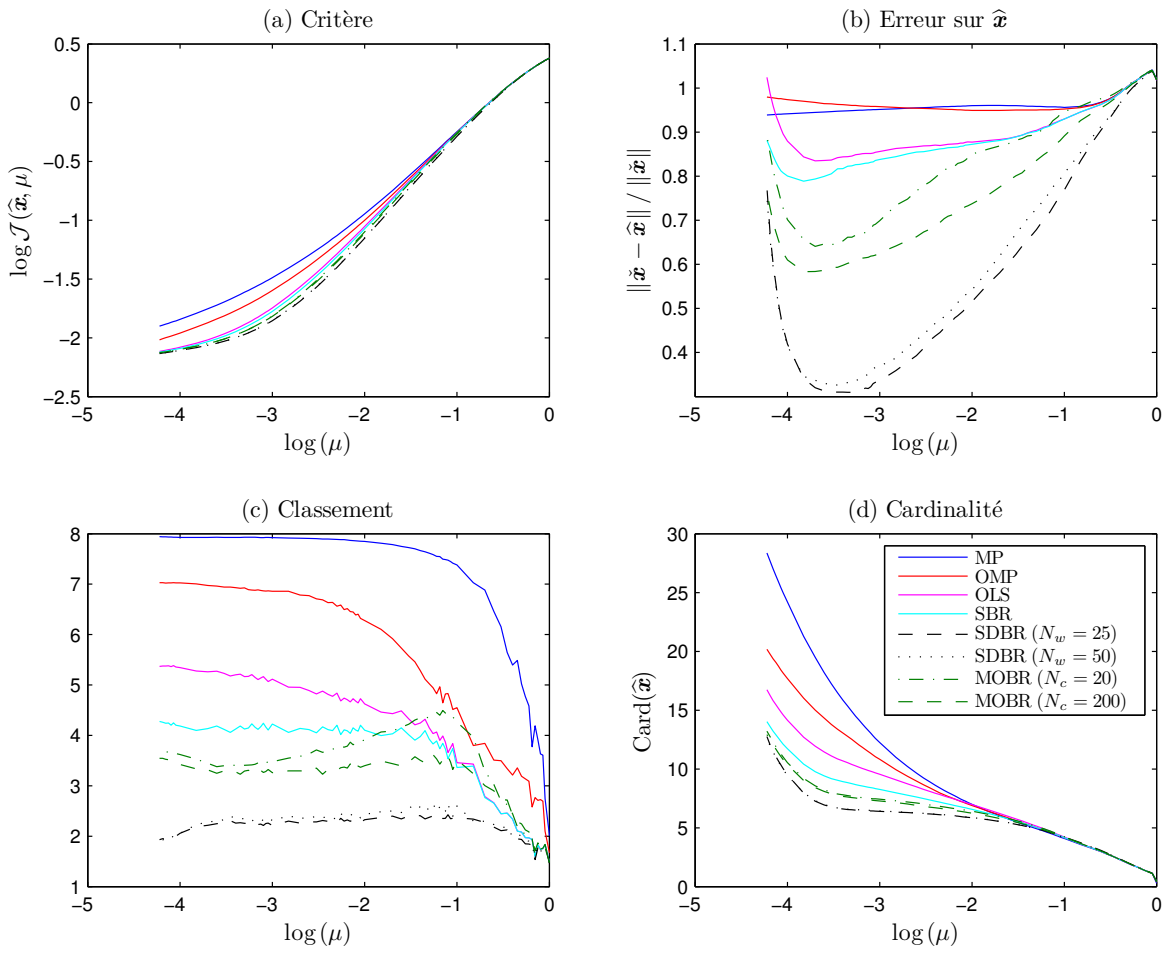


FIGURE 3.13 – Résultats issus de simulations de Monte-Carlo en fonction du paramètre de régularisation μ (en echelle logarithmique). (a) : Critère pénalisé final $\mathcal{J}(\widehat{\boldsymbol{x}}, \mu)$, (b) : erreur de $\widehat{\boldsymbol{x}}$ par rapport à $\check{\boldsymbol{x}}$, (c) : classement des algorithmes en fonction du critère pénalisé, (d) : cardinalité des solutions $\widehat{\boldsymbol{x}}$.

tère pour chaque algorithme, un classement moyen est établi sur la figure 3.13c (le premier ayant la plus faible valeur de critère). Comme attendu avec les valeurs des critères, l'ordre du classement est le suivant : SDBR, MOBR, SBR, OLS, OMP, MP. Sur la figure 3.13b, nous traçons l'erreur de $\widehat{\boldsymbol{x}}$ par rapport à $\check{\boldsymbol{x}}$ en fonction de μ. Ces courbes respectent les résultats établis précédemment. Pour les méthodes OLS, SBR, MOBR et SDBR, on remarque que les valeurs optimales de μ se situent à peu près au même endroit ($\sim 10^{-3.5}$). On peut distinguer quatre classes de méthodes : SDBR, MOBR, SBR/OLS et OMP/MP. Les cardinalités des solutions sont également tracées sur la figure 3.13d et baissent quand la complexité de l'algorithme augmente. Un algorithme peu performant a en effet tendance à favoriser de nombreuses fausses détections.

Sur les figures 3.14a et 3.14b sont tracés le temps de calcul ainsi que le nombre de combinaisons testées en fonction de μ. On remarque que les deux algorithmes MOBR ont un temps de calcul intermédiaire entre SBR et SDBR. Le nombre de combinaisons testées est lui du même ordre de grandeur que SBR. Nous traçons également, sur les figures 3.14c et 3.14d, l'erreur sur $\widehat{\boldsymbol{x}}$ en fonction du temps de calcul et du nombre de combinaisons testées.

Pour $N_c = 20$, on remarque que les performances de MOBR sont légèrement inférieures à

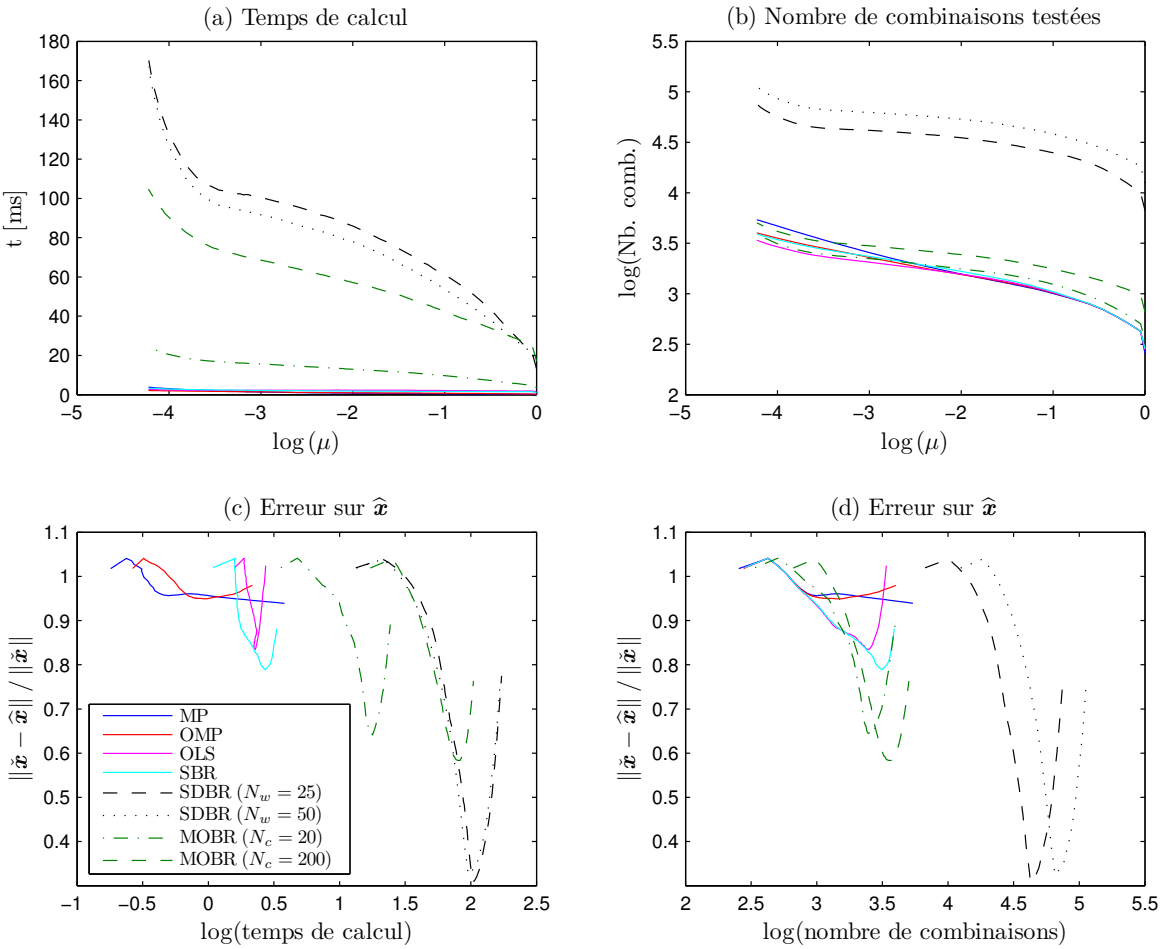


FIGURE 3.14 – Résultats des temps de calcul et du nombre de combinaisons testées issus de simulations de Monte-Carlo pour chaque algorithme. (a) : Temps de calcul est fonction de μ, (b) : nombre de combinaisons testées en fonction de μ, (c) : Erreur sur $\widehat{\boldsymbol{x}}$ en fonction du temps de calcul, (d) : erreur sur $\widehat{\boldsymbol{x}}$ en fonction du nombre de combinaisons testées.

celles de SDBR, mais pour un temps de calcul inférieur et un nombre de combinaisons testées de l'ordre de SBR ou OLS. Pour $N_c = 200$, le temps de calcul est légèrement inférieur à celui de SDBR, alors que le nombre de combinaisons testées est bien inférieur. Nous attribuons cette différence à l'implémentation sous Matlab. Comme évoqué plus haut, les recherches et indexations des différentes positions dans MOBR sont plus lentes que pour SDBR. Ce dernier teste en effet de façon brute des plages « continues » d'indices alors que MOBR exploite des listes d'indices. De plus, l'algorithme MOBR fonctionne pour n'importe quelle valeur de K alors que SDBR est adapté pour $K = 2$. Nous sommes convaincus qu'une implémentation sous un autre langage serait bénéfique pour les approches de type MOBR.

Nous avons donc montré qu'il est possible d'obtenir des performances plus élevées que SBR pour un nombre de combinaisons testées du même ordre de grandeur. L'approche MOBR explore en effet une quantité limitée de supports grâce à la proposition de mouvements adaptés basée sur la connaissance *a priori* de la fonction d'auto-corrélation multi-dimensionnelle, qui ne dépend que de la réponse impulsionnelle.

Chapitre 4

Déconvolution parcimonieuse sur-échantillonnée

Sommaire

Introduction **101**
4.1 Modèle sur-échantillonné et MISO **102**
4.1.1 Convolution discrète sur-échantillonnée 102
4.1.2 Système MISO 103
4.2 Facteur de sur-échantillonnage **104**
4.3 Algorithmes de déconvolution **105**
4.3.1 Calcul rapide de la convolution discrète 106
4.3.2 Détails de mise en œuvre des algorithmes 107
4.4 Résultats **108**
4.4.1 Outils de mesure de l'erreur d'estimation 108
4.4.2 Résultats issus de données simulées 110
4.4.3 Simulations de Monte-Carlo 112
4.4.4 Résultats expérimentaux 113

Introduction

Dans ce chapitre, nous nous plaçons dans le cas d'un modèle de convolution continue entre un train d'impulsions et la réponse instrumentale, le but étant d'identifier les temps d'arrivée et les amplitudes des échos. Le train d'impulsions contient donc des pics qui ont des positions temporelles continues. Grâce à un modèle de convolution discrète, l'approche classique permet de restituer un train d'impulsions à la résolution des données, *i.e.* la période d'échantillonnage. Nous proposons dans ce chapitre de discrétiser la convolution continue de façon plus précise grâce à un sur-échantillonnage du modèle. On peut alors estimer le train d'impulsions à une résolution plus fine que celle des données.

Dans la section 4.1, le modèle sur-échantillonné est présenté. Nous montrons qu'il est équivalent à un système à entrées multiples et sortie unique (*Multiple Input Single Output*),

où chaque voie est un filtre numérique de réponse impulsionnelle finie. Dans la troisième section, nous donnons un éclairage sur le réglage du facteur de sur-échantillonnage. Nous proposons ensuite d'adapter quelques algorithmes de déconvolution parcimonieuse pour les systèmes MISO dans la section 4.3. Enfin, la section 4.4 présente des résultats de déconvolution parcimonieuse avec des données synthétiques et réelles.

Ce chapitre est en partie tiré des publications [Carcreff *et al.* 2012], [Carcreff *et al.* 2013a] et [Carcreff *et al.* 2013b].

4.1 Modèle sur-échantillonné et système MISO

4.1.1 Convolution discrète sur-échantillonnée

Pour un modèle sans atténuation, nous avons montré dans la section 2.2 que les données pouvaient être modélisées par la convolution continue

$$y(t) = \int_{\tau} h(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{4.1}$$

où $h(t)$ est la réponse instrumentale[1] et $x(t)$ est le train d'impulsions à estimer. Pour des données à temps discret $y[n] = y(nT_S)$ avec T_S la période d'échantillonnage, une discrétisation de l'intégrale par la méthode des rectangles avec un pas Δ_t aboutit à

$$y[n] = \Delta_t \sum_m h(nT_S - m\Delta_t)x(m\Delta_t). \tag{4.2}$$

Dans le modèle classique de convolution discrète, Δ_t est égal à la période d'échantillonnage. Le vecteur $\boldsymbol{x}$ a alors la même résolution que les données. Il est néanmoins possible de considérer un pas de discrétisation plus précis $\Delta_t = T_S/K$ où $K > 1$ est un facteur de sur-échantillonnage. En incluant la constante Δ_t dans x, on peut dans ce cas écrire le modèle des données à temps discret sous la forme

$$y[n] = \sum_m h[nK - m]x[m]. \tag{4.3}$$

Cette écriture a une forme compacte

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{H}\boldsymbol{x}. \tag{4.4}$$

Pour $K = 1$, la matrice $\mathbf{H}$ a une structure de Toeplitz[2] [Gray 2006]. Pour $K \neq 1$, elle est équivalente à la concaténation des K matrices de Toeplitz que nous notons $\overset{\star}{\mathbf{H}}{}^k$, pour $k = 1, \ldots, K$. Sur la figure 4.1, un exemple de matrices $\mathbf{H}$ pour $K = 1$ et $K = 4$ est montré. La matrice pour $K = 4$ a K fois plus de colonnes que celle correspondant à $K = 1$. Le modèle est par conséquent équivalent à

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \overset{\star}{\mathbf{H}}{}^1 & \ldots & \overset{\star}{\mathbf{H}}{}^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}^K \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{K} \overset{\star}{\mathbf{H}}{}^k \boldsymbol{x}^k, \tag{4.5}$$

[1] Pour davantage de clarté dans ce chapitre, la réponse instrumentale $h_i(t)$ sera notée $h(t)$ et la matrice $\mathbf{H}_i$, $\mathbf{H}$.

[2] Nous notons $\overset{\star}{\mathbf{H}}$ une matrice $\mathbf{H}$ de Toeplitz qui est donc une matrice de convolution.

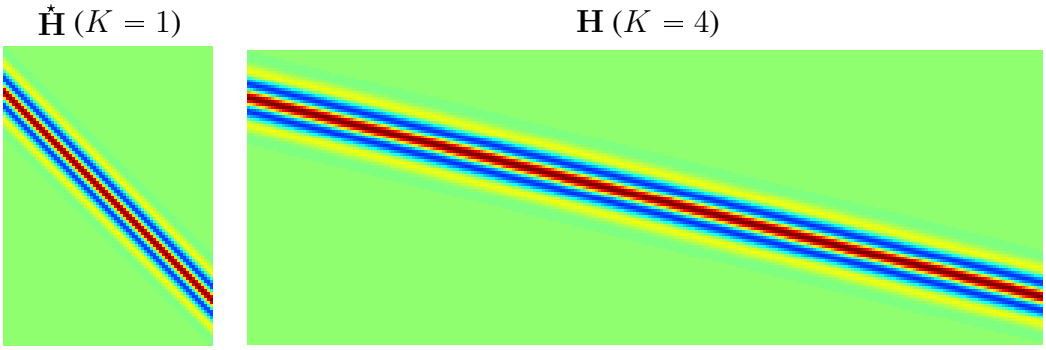


FIGURE 4.1 – Exemple de matrices $\mathbf{H}$ pour $K = 1$ et pour $K = 4$.

où chaque matrice $\overset{\star}{\mathbf{H}}^k$ est de Toeplitz. Une matrice de convolution $\overset{\star}{\mathbf{H}}^k$ est associée à un filtre de réponse impulsionnelle $\boldsymbol{h}^k$. Les vecteurs $\boldsymbol{h}^k$ et $\boldsymbol{x}^k$ sont donc à la résolution de $\boldsymbol{y}$. Les données peuvent par conséquent être modélisées par K produits de convolution

$$y[n] = \sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{h}^k * \boldsymbol{x}^k = \sum_{k=1}^{K} \sum_{m} h^k[n-m]x^k[m], \tag{4.6}$$

où chaque vecteur $\boldsymbol{h}^k$ est défini par

$$h^k[\ell] = h[K\ell + k - 1] = h\left(\ell T_S + (k-1)\Delta_t\right). \tag{4.7}$$

Sur la figure 4.2, un exemple de lien entre $\boldsymbol{h}$ et les $\boldsymbol{h}^k$ est exposé pour $K = 3$.

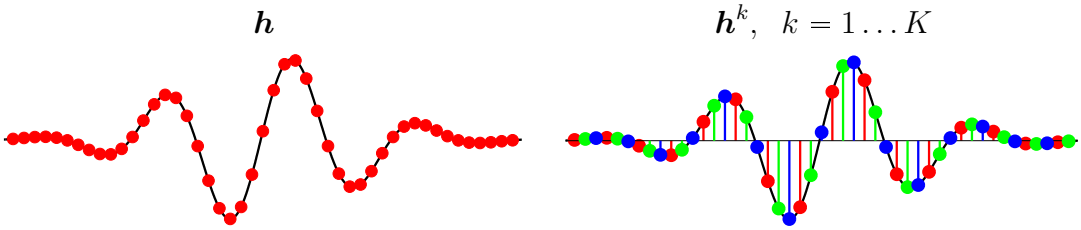


FIGURE 4.2 – Exemple de désentrelacement de $\boldsymbol{h}$ pour obtenir les $\boldsymbol{h}^k$ avec $K = 3$.

En pratique, les $\boldsymbol{h}^k$ peuvent être obtenus par sur-échantillonnage de la réponse instrumentale mesurée, qui est échantillonnée à la fréquence F_S. Le sur-échantillonnage peut-être effectué dans le domaine temporel en insérant $K - 1$ zéros entre chaque échantillon, puis en appliquant un filtre passe-bas de fréquence de coupure $Fs/2$.

4.1.2 Système MISO

D'après la partie précédente, les données peuvent être définies par K produits de convolution discrète

$$\boldsymbol{y} = \sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{h}^k * \boldsymbol{x}^k. \tag{4.8}$$

De façon générique, cette écriture se rapporte à un système à entrées multiples et sortie unique où chaque voie correspond à un filtre de réponse impulsionnelle finie $\boldsymbol{h}^k$. Le schéma d'un tel système est représenté sur la figure 4.3. Dans la suite de ce chapitre, le but est

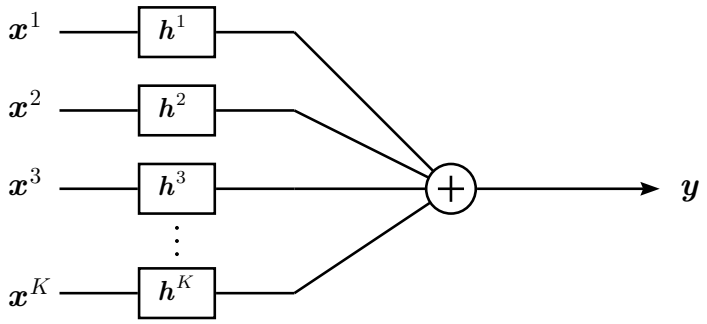


FIGURE 4.3 – Schéma d'un système *Multiple Input Single Output* (MISO).

de retrouver les entrées $\boldsymbol{x}^k$ du système MISO composé de K filtres $\boldsymbol{h}^k$ ($k = 1, \ldots, K$). Même si notre application est la super-résolution de la déconvolution parcimonieuse, les algorithmes développés peuvent s'adapter à d'autres types de problèmes où les filtres n'ont pas de lien entre eux.

4.2 Facteur de sur-échantillonnage

Nous nous intéressons au réglage du facteur de sur-échantillonnage K. En effet, le coût de calcul des algorithmes d'estimation va naturellement augmenter en fonction de K. Il faut donc trouver un compromis entre coût de calcul et résolution de reconstruction. De surcroît, la qualité de l'estimation des temps de retard est limitée par le contenu fréquentiel de l'écho recherché et par le niveau de bruit [Quazi 1981, Demirli et Saniie 2001a]. Par exemple, dans [Quazi 1981], la variance minimale sur l'estimation d'un temps de retard pour un signal à temps continu est

$$\sigma^2 = \frac{3}{8\pi^2 T}\frac{1}{\mathrm{RSB}}\frac{1}{f_2^3 - f_1^3}, \tag{4.9}$$

où T est la durée d'observation, f_1 et f_2 sont les bornes de la bande passante du signal et RSB est le Rapport Signal à Bruit.

Pour illustrer cette partie, nous nous plaçons dans le cas discret d'une seule forme d'onde gaussienne de fréquence centrale 5 MHz et de 40 % de facteur de bande passante (figure 4.4a). Les données sont composées de cette forme d'onde retardée d'un temps continu et d'un bruit additif gaussien de RSB $= 0$ dB, échantillonnées à 50 MHz (figure 4.4b). Nous estimons alors de façon optimale la position de l'écho par un calcul d'intercorrélation entre la forme d'onde et les données, pour 100000 réalisations de bruit. Les histogrammes de l'estimation du temps de retard, pour respectivement $K = 1, 4, 10, 20$, sont tracés respectivement sur les figures 4.4c, 4.4d, 4.4e et 4.4f. Pour chaque valeur de K, la grille de reconstruction est également représentée sur les figures. La dispersion intrinsèque à ce problème, donnée par l'équation (4.9) est de $\pm\sigma = \pm 3.43$ ns. Pour $K = 1$, l'erreur est importante comparée à σ alors que pour les modèles sur-échantillonnés, l'estimation est davantage en accord avec σ.

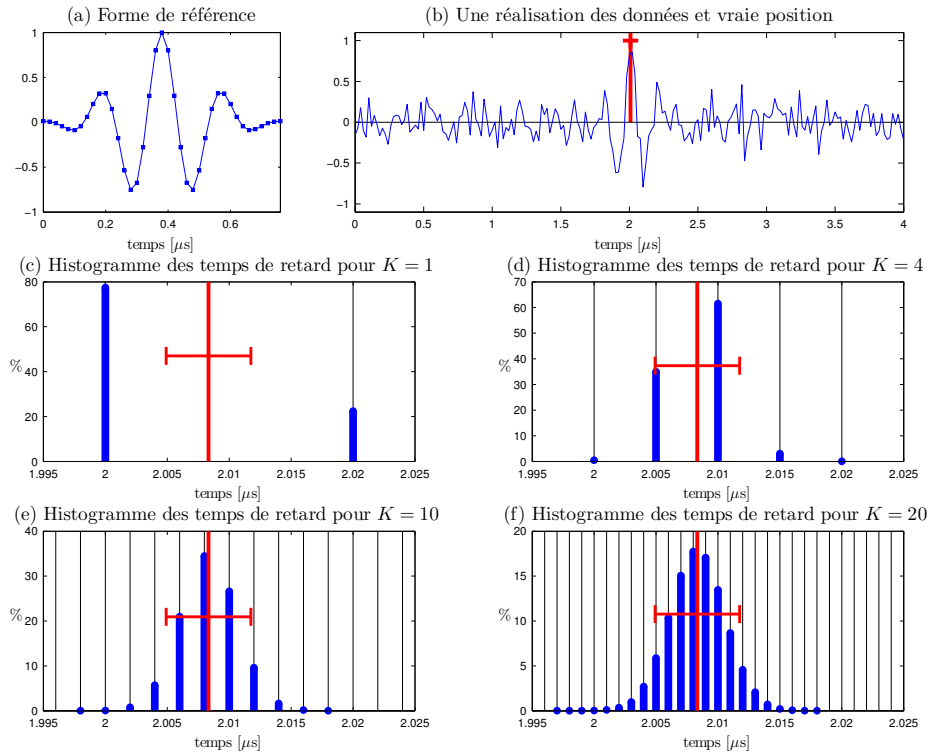


FIGURE 4.4 – Estimation du temps de retard d'un écho (RSB $= 0$ dB). (a) : Forme d'onde, (b) : vrai temps (+) et données (–). Distribution des temps de retard estimés par filtre adapté pour (c) $K = 1$, (d) $K = 4$, (e) $K = 10$ et (f) $K = 20$. Les traits rouges représentent le vrai temps de retard et les barres d'erreur $\pm\sigma$ où l'écart est donné par l'équation (4.9).

Pour cet exemple, il serait raisonnable de régler $K = 10$, afin que la dispersion d'écart-type σ couvre quelques éléments de la grille sur-échantillonnée de résolution T_S/K.

4.3 Algorithmes de déconvolution parcimonieuse pour les systèmes MISO

Pour identifier les entrées du système MISO de l'équation (4.8), nous proposons d'utiliser des algorithmes reconnus d'approximation parcimonieuse des signaux, et qui ont montré de bons résultats dans le cas d'un problème de déconvolution classique ($K = 1$) [Bourguignon *et al.* 2011, Selesnick et Bayram 2014]. Les algorithmes originaux (*i.e.* $K = 1$) sont détaillés dans la partie 3.3.2. Ici, le but est d'approcher le signal $\boldsymbol{y}$ par K vecteurs parcimonieux $\boldsymbol{x}^k, k = 1 \dots K$ d'après la connaissance des K filtres à réponse impulsionnelle finie $\boldsymbol{h}^k$. La contribution de ce travail consiste à prendre en compte le caractère générique MISO dans les algorithmes de déconvolution parcimonieuse. Nous proposons ici de revisiter cinq algorithmes :

- trois algorithmes gloutons : *Matching Pursuit* (MP), *Orthogonal Matching Pursuit* (OMP) et *Orthogonal Least Squares* (OLS) [Blumensath et Davies 2007],
- l'algorithme *Single Best Replacement* (SBR) [Soussen *et al.* 2011], qui effectue la

minimisation locale du critère des moindres carrés pénalisé par une pseudo-norme ℓ_0

$$J(\boldsymbol{x}, \mu) = \|\boldsymbol{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{x}\|^2 + \mu\|\boldsymbol{x}\|_0, \tag{4.10}$$

où $\|\boldsymbol{x}\|_0$ est le nombre d'éléments non nuls de $\boldsymbol{x}$; chaque itération calcule la valeur minimale du critère pour l'ajout ou la suppression d'une composante, le meilleur mouvement étant alors exécuté,

- et un algorithme de déconvolution par pénalisation de norme ℓ_1 qui minimise

$$J(\boldsymbol{x}, \lambda) = \|\boldsymbol{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{x}\|^2 + \lambda\|\boldsymbol{x}\|_1, \tag{4.11}$$

l'optimisation étant effectuée par méthode homotopique [Malioutov *et al.* 2005, Maria et Fuchs 2006], de complexité analogue à celle de OMP, ℓ_1-H faisant référence à cet algorithme.

La mise en œuvre de chaque algorithme a été accélérée pour les systèmes MISO, notamment grâce aux calculs de convolution effectués par des algorithmes de transformée de Fourier rapides.

4.3.1 Calcul rapide de la convolution discrète

L'intérêt du produit de convolution discrète est d'être implémentable de façon rapide dans le domaine de Fourier [Golub et Van Loan 1996, p. 193]. En effet, la convolution circulaire a une équivalence temporelle/fréquentielle

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h} * \boldsymbol{x} \quad \rightleftharpoons \quad \tilde{\boldsymbol{y}} = \tilde{\boldsymbol{h}} \cdot \tilde{\boldsymbol{x}}, \tag{4.12}$$

où le symbole $\tilde{}$ désigne la transformée de Fourier discrète. Ce calcul peut être implémenté par

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h} * \boldsymbol{x} = \mathrm{FFT}^{-1}\left(\mathrm{FFT}(\boldsymbol{h}) \cdot \mathrm{FFT}(\boldsymbol{x})\right), \tag{4.13}$$

où FFT est un algorithme rapide de transformée de Fourier discrète (*Fast Fourier Transform*) [Cooley et Tukey 1965]. Le calcul est réalisé sur N_f points fréquentiels et est historiquement adapté pour des puissances entières de deux. Le nombre de points doit respecter $N_f > Nx + Nh - 1$ pour éviter de tronquer $\boldsymbol{h}$ et $\boldsymbol{x}$. La complexité de cet algorithme est en $\mathcal{O}(N_f \ln N_f)$ alors que la complexité du calcul de base de la transformée de Fourier discrète s'exprime en $\mathcal{O}(N_f^2)$. Un calcul de convolution est par conséquent équivalent à trois algorithmes de type FFT.

Nous définissons également le calcul d'inter-corrélation $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, qui peut également être effectué par ce type de calcul, défini par

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} * \boldsymbol{y}^*_-, \tag{4.14}$$

où $\boldsymbol{y}^*_-$ est le conjugué retourné temporellement de $\boldsymbol{y}$.

4.3.2 Détails de mise en œuvre des algorithmes

Algorithmes MP et OMP

A chaque itération, l'étape de sélection des algorithmes MP et OMP fait appel au produit $\mathbf{H}^T\boldsymbol{r}$, où $\boldsymbol{r}$ est le résidu entre les données $\boldsymbol{y}$ et l'approximation $\mathbf{H}\widehat{\boldsymbol{x}}_i$ [Blumensath et Davies 2007]. Pour un système MISO, ce calcul revient à effectuer K produits $(\overset{\star}{\mathbf{H}}^k)^T\boldsymbol{r}$ où les matrices $\overset{\star}{\mathbf{H}}^k$ sont de Toeplitz. Chaque produit correspond à un calcul d'intercorrélation entre $\boldsymbol{h}^k$ et $\boldsymbol{r}$, équivalent à trois calculs de type FFT. En pratique, nous calculons les K FFT des $\boldsymbol{h}^k$ à l'avance. Ensuite, à chaque itération, la FFT de $\boldsymbol{r}$ et les K IFFT de $(\overset{\star}{\mathbf{H}}^k)^T\boldsymbol{r}$ sont calculées pour l'étape de sélection. En termes de coût de calcul, l'accroissement est proportionnel à K.

Pour MP, l'étape de mise à jour du résidu est identique à un algorithme standard (*i.e.* $K = 1$). Pour OMP, le calcul de chaque solution est défini par $\widehat{\boldsymbol{x}}_i = (\mathbf{H}_\mathcal{Q}^T\mathbf{H}_\mathcal{Q})^{-1}\mathbf{H}_\mathcal{Q}^T\boldsymbol{y}$, où $\mathbf{H}_\mathcal{Q}$ représente les colonnes de $\mathbf{H}$ sélectionnées à une itération donnée. Dans notre mise en œuvre, nous utilisons une factorisation de Cholesky de $\mathbf{H}_\mathcal{Q}^T\mathbf{H}_\mathcal{Q}$ pour effectuer l'inversion à moindre coût [Golub et Van Loan 1996]. L'inversion du système revient ici à l'inversion de deux systèmes triangulaires de complexité $\mathcal{O}(n^2)$, où n est le nombre d'indices actifs.

Algorithmes OLS et SBR

Pour sélectionner l'élément à rajouter, les algorithmes OLS et SBR utilisent de façon intensive les éléments de la matrice de Gram $\mathbf{H}^T\mathbf{H}$ (cf. partie 3.3.2). Ce sont en fait les éléments des matrices $(\overset{\star}{\mathbf{H}}^k)^T\overset{\star}{\mathbf{H}}^\ell$ qui peuvent être calculés préalablement à partir des séquences d'intercorrélation entre $\boldsymbol{h}^k$ et $\boldsymbol{h}^\ell$. Nous avons donc besoin des $K(K+1)/2$ intercorrélations entre les K filtres $\boldsymbol{h}^k$ et $\boldsymbol{h}^\ell$, dans le domaine de Fourier. Pour OLS et SBR, le coût de calcul dans l'algorithme lui-même reste approximativement constant en fonction de K, l'accroissement du coût étant très majoritairement associé aux pré-calculs d'intercorrélation.

Le test des retraits de SBR est effectué sur le support actif et n'est donc pas concerné par l'aspect multi-voies.

Algorithme de déconvolution par pénalisation ℓ_1

L'algorithme ℓ_1-H minimise le critère (4.11) en faisant progressivement décroître les valeurs du paramètre λ [Malioutov *et al.* 2005]. La solution optimale est alors calculée pour chaque saut de λ, signifiant un changement de support de la solution d'un élément. On a donc un comportement similaire aux stratégies gloutonnes. A chaque itération, l'ajout d'un élément nécessite deux produits $\mathbf{H}^T\boldsymbol{r}$, ce qui correspond à $2(K+1)$ FFT. Le test des retraits requiert lui l'inversion de deux systèmes $\mathbf{H}_\mathcal{Q}^T\mathbf{H}_\mathcal{Q}$, effectuée également par une factorisation de Cholesky. En termes de complexité, ℓ_1-H est donc à peu près équivalent au double de l'algorithme OMP.

Résumé de mise en œuvre des algorithmes

Tous les algorithmes exigent les K pré-calculs des $\tilde{\boldsymbol{h}}^k$. Pour résumer, les algorithmes MP, OMP et ℓ_1-H ont une complexité proportionnelle à K pour les pré-calculs et pour chaque itération de l'algorithme. D'un autre côté, OLS et SBR nécessitent seulement les pré-calculs

de FFT, et le cœur de l'algorithme reste à peu près le même quand K augmente. Le détail des coûts de calcul en termes de FFT est récapitulé dans le tableau 4.1.

Algorithmes	MP	OMP	ℓ_1-H	OLS	SBR
Pré-calculs	$\tilde{\boldsymbol{h}}^k$	$\tilde{\boldsymbol{h}}^k$	$\tilde{\boldsymbol{h}}^k$ $\tilde{\boldsymbol{y}}$ $(\overset{\star}{\mathbf{H}}^k)^T\boldsymbol{y}$	$\tilde{\boldsymbol{h}}^k$ $\tilde{\boldsymbol{y}}$ $(\overset{\star}{\mathbf{H}}^k)^T\boldsymbol{y}$ $(\overset{\star}{\mathbf{H}}^k)^T\overset{\star}{\mathbf{H}}^\ell$	$\tilde{\boldsymbol{h}}^k$ $\tilde{\boldsymbol{y}}$ $(\overset{\star}{\mathbf{H}}^k)^T\boldsymbol{y}$ $(\overset{\star}{\mathbf{H}}^k)^T\overset{\star}{\mathbf{H}}^\ell$
Nb. total de FFT	K	K	$1{+}2K$	$1{+}2K{+}(K^2{+}K)/2$	$1{+}2K{+}(K^2{+}K)/2$
cœur	$\tilde{\boldsymbol{r}}$ $(\overset{\star}{\mathbf{H}}^k)^T\boldsymbol{r}$	$\tilde{\boldsymbol{r}}$ $(\overset{\star}{\mathbf{H}}^k)^T\boldsymbol{r}$	$2\times\tilde{\boldsymbol{r}}$ $2\times(\overset{\star}{\mathbf{H}}^k)^T\boldsymbol{r}$	$\sim$*idem*	$\sim$*idem*
Nb. total de FFT	$K{+}1$	$K{+}1$	$2(K{+}1)$	0	0

TABLE 4.1 – Pré-calculs et calculs dans le cœur des algorithmes de déconvolution pour les systèmes MISO.

4.4 Résultats

4.4.1 Outils de mesure de l'erreur d'estimation

Les trains d'impulsions ont dans la réalité des positions temporelles continues. En revanche, l'estimation place les pics sur une grille discrète. Si nous considérons respectivement $\breve{x}(t)$ et $\widehat{x}(t)$ comme la vérité et l'estimation, le calcul de l'erreur basé sur une différence entre ces deux signaux mène irrémédiablement à une mauvaise approche, $\breve{x}(t)$ et $\widehat{x}(t)$ ne coïncidant jamais. Il est de ce fait nécessaire d'utiliser des outils de mesure de la différence entre deux trains d'impulsions.

Les références sont relativement nombreuses dans le domaine des neurosciences où l'on parle de distance entre des trains d'impulsions binaires. Dans ce domaine, les trains sont des stimuli électriques du système nerveux, dont les valeurs varient continûment. Victor et Purpura [1996; 1997] proposent des distances métriques au sens d'une approximation discrète par intervalle. Van Rossum [2001] utilise plutôt la distance euclidienne entre les deux trains convolués par une exponentielle décroissante causale. On a dans ce cas un paramètre de décroissance τ qui joue le rôle de tolérance temporelle pour la comparaison des trains. Il est également possible d'utiliser une gaussienne dans laquelle l'écart-type σ est équivalent à τ [Schreiber *et al.* 2003]. Dans [Paiva *et al.* 2010], les auteurs établissent une revue des distances fréquemment utilisées et proposent d'autres noyaux : triangle, rectangle et laplacien. Le noyau laplacien est une exponentielle décroissante symétrique.

Nous trouvons ces mesures de distance intéressantes et adaptées à nos travaux. Afin de disposer de noyaux symétriques, nous choisissons l'utilisation des noyaux laplacien et gaussien. Nous les définissons respectivement par

$$\kappa(t) = e^{-\frac{|t|}{\tau}} \quad \text{et} \quad \kappa(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \tag{4.15}$$

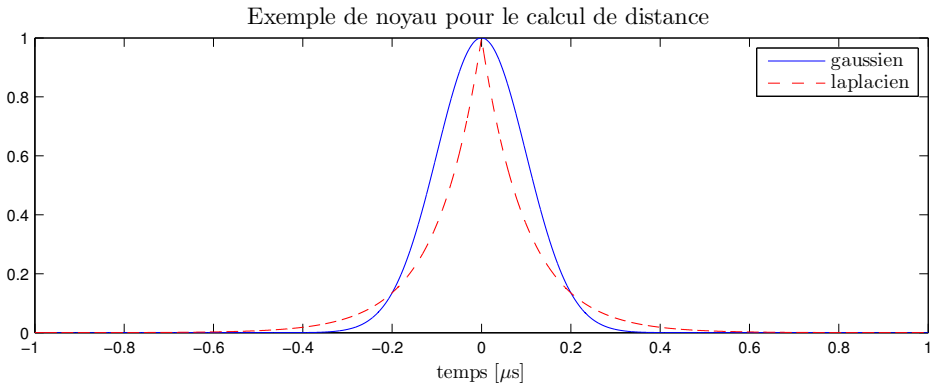


FIGURE 4.5 – Exemple de noyaux gaussien et laplacien pour le calcul de distance ($\tau = \sigma = 0.1\,\mu$s).

Sur la figure 4.5, un exemple de ces deux noyaux est donné. Les paramètres τ et σ définissent la précision temporelle de comparaison et nous choisissons de les fixer à $\tau = \sigma = T_S$, de sorte que la précision de reconstruction soit de l'ordre de la période d'échantillonnage des données. Le signal filtré correspondant à un train d'impulsions $x(t)$ de N pics est calculé par

$$f(t) = x(t) * \kappa(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i \kappa(t - t_i), \tag{4.16}$$

où les a_i et les t_i sont respectivement les amplitudes et les temps d'arrivée des pics. La distance entre les trains $x_1(t)$ et $x_2(t)$ est ensuite définie par la distance euclidienne

$$d_{x_1,x_2} = \int_0^\infty \left(f_1(t) - f_2(t)\right)^2 \mathrm{d}t. \tag{4.17}$$

Cette distance peut se calculer analytiquement ou numériquement en discrétisant l'intégrale par la méthode des rectangles avec un pas très petit par rapport à T_S.

Dans la figure 4.6, nous montrons un exemple de calcul de distance pour deux trains d'impulsions $x_1(t)$ et $x_2(t)$. Trois différences sont apparentes : une erreur d'amplitude pour le premier pic, une erreur de position pour le deuxième et une erreur d'amplitude et de position pour le troisième. Quatre paramétrages sont étudiés :

1. amplitudes inchangées et noyau laplacien,
2. amplitudes binarisées et noyau laplacien,
3. amplitudes inchangées et noyau gaussien,
4. amplitudes binarisées et noyau gaussien.

Nous utilisons l'aspect binaire car c'est la formulation notamment utilisée en neurosciences. Comme attendu, on remarque que l'erreur d'amplitude sur le premier pic n'est pas prise en compte lorsqu'on binarise. Elle crée une seule forme à l'emplacement du pic. Les erreurs de position du deuxième pic crée deux formes symétriques et sont plus marquées avec le noyau gaussien car sa forme est moins resserrée que le noyau laplacien. Les erreurs d'amplitude et de position sur le troisième pic créent deux formes non symétriques.

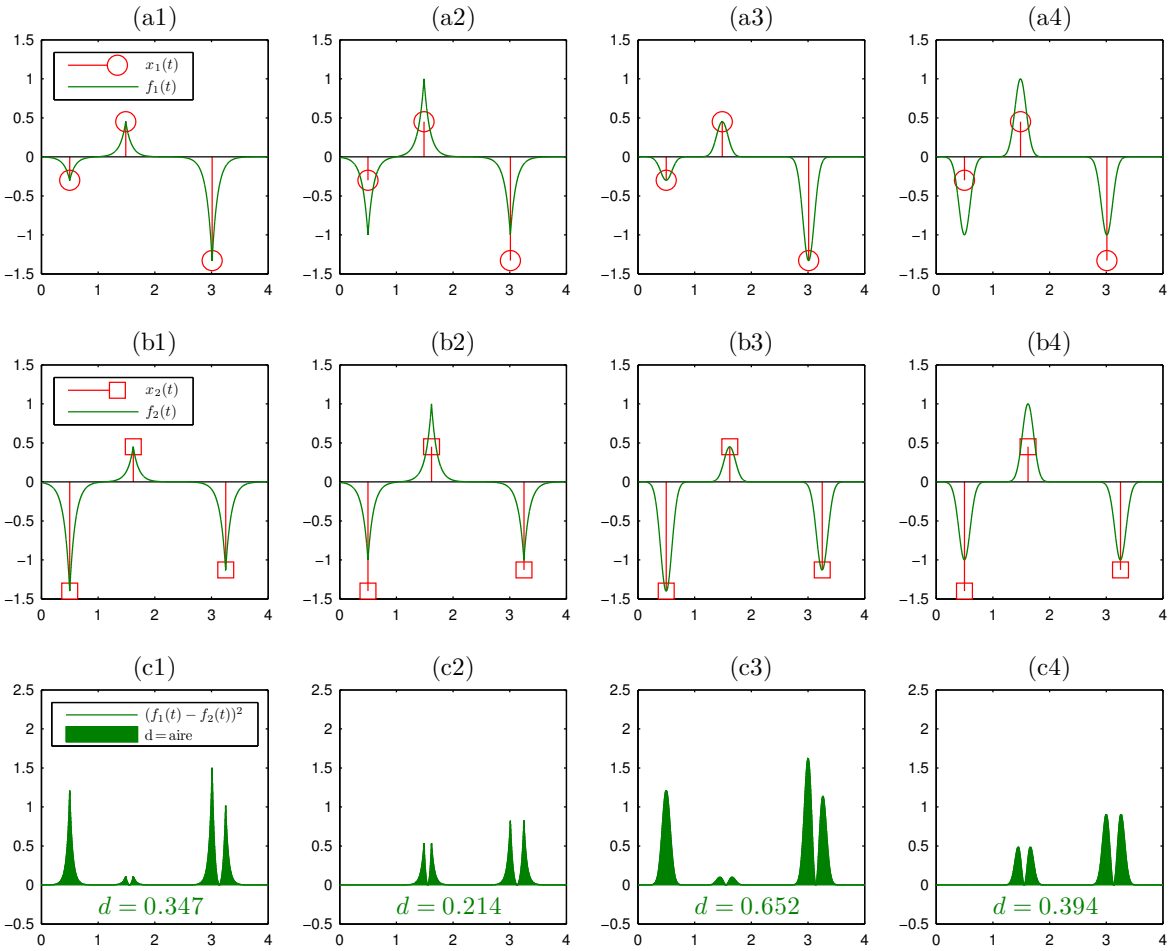


FIGURE 4.6 – Exemple de calcul de distance entre trains d'impulsions. Les lettres indiquent (a) le train $x_1(t)$ et la fonction $f_1(t)$ associée, (b) le train $x_2(t)$ et la fonction $f_2(t)$ associée et (c) la distance euclidienne. Les indices correspondent à (1) amplitudes inchangées et noyau laplacien, (2) amplitudes binarisées et noyau laplacien, (3) amplitudes inchangées et noyau gaussien et (4) amplitudes binarisées et noyau gaussien.

4.4.2 Résultats issus de données simulées

On considère les données présentées sur la figure 4.7c. Elles sont composées de six échos dont les temps d'arrivée sont choisis de façon continue sur toute la durée du signal : $[0,\ 8]\,\mu$s. On ne peut donc jamais retrouver les vraies positions, mais on peut s'en approcher du mieux possible. La forme d'onde de convolution est une gaussienne modulée par une sinusoïde de 5 MHz et de 40 % de facteur de bande passante (voir figure 4.7a). Les données sont échantillonnées à 25 MHz et le rapport signal à bruit est de 12 dB. Il y a dans ces données trois problèmes de superposition d'échos difficiles.

La déconvolution est effectuée de façon classique ($K = 1$) et avec sur-échantillonnage ($K = 6$). Les algorithmes sont arrêtés lorsque la cardinalité est de l'ordre de celle de la vérité. Les résultats sont présentés respectivement sur les figures 4.7-d et 4.7-e. Nous voyons que, pour tous les algorithmes, le sur-échantillonnage permet de mieux résoudre un certain nombre de problèmes de pics proches par rapport à l'approche classique. OLS et SBR aboutissent à de bons résultats mais ne parviennent pas à détecter les deux pics centraux qui

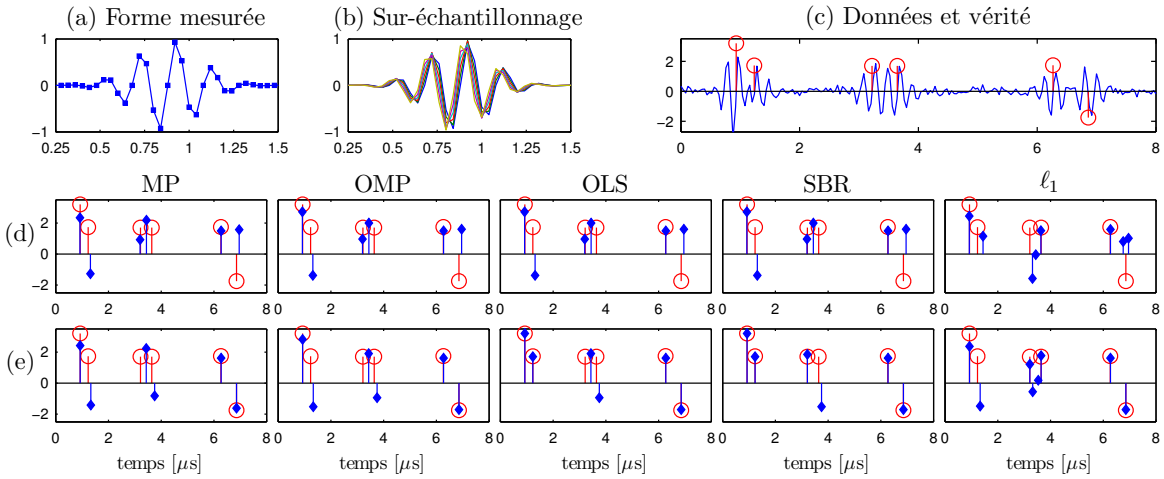


FIGURE 4.7 – Exemple de déconvolution de données synthétiques. (a) : Forme d'onde initiale, (b) : formes d'onde utilisées pour la déconvolution $K = 6$, (c) : données (–) et vrais pics (○), ligne (d) : résultats avec $K = 1$, ligne (e) : résultats avec $K = 6$. Vrais pics (○) et pics estimés (⧫).

interfèrent de manière très critique. SBR réussit néanmoins à détecter un des deux pics. D'un autre côté, la déconvolution sur-échantillonnée par ℓ_1-H permet de retrouver ces deux pics, mais au prix de quelques fausses détections de faibles amplitudes, comportement typique de la pénalisation ℓ_1.

Nous nous intéressons également aux calculs de distance développés dans la partie précédente. Les résultats de ces calculs sont présentés dans les tableaux 4.2 et 4.3, pour respectivement $K = 1$ et $K = 6$. D'une manière générale, le fait de binariser est défavorable aux

Algorithmes	MP	OMP	OLS	SBR	ℓ_1-H
d (laplacien)	0.9166	0.8889	0.8889	0.8889	**0.7638**
d (laplacien/bin)	**0.3015**	**0.3015**	**0.3015**	**0.3015**	0.4129
d (gaussien)	1.5799	1.5245	1.5245	1.5245	**1.2723**
d (gaussien/bin)	**0.5144**	**0.5144**	**0.5144**	**0.5144**	0.6776

TABLE 4.2 – Résultats des calculs de distance pour l'exemple de la figure 4.7 avec $K = 1$.

Algorithmes	MP	OMP	OLS	SBR	ℓ_1-H
d (laplacien)	0.7545	0.7117	0.4322	**0.2665**	0.3302
d (laplacien/bin)	0.2788	0.2788	0.1753	**0.1005**	0.1815
d (gaussien)	1.3226	1.2373	0.7703	**0.4356**	0.5498
d (gaussien/bin)	0.4793	0.4793	0.3065	**0.1650**	0.3140

TABLE 4.3 – Résultats des calculs de distance pour l'exemple de la figure 4.7 avec $K = 6$.

résultats issus de la pénalisation ℓ_1. En effet, cette pénalisation favorise les pics de faibles

amplitudes et crée donc des solutions avec une cardinalité plus élevée par rapport aux approches gloutonnes et à SBR. Pour $K = 1$, dans le cas binaire, les distances les plus faibles correspondent de ce fait aux méthodes gloutonnes et à SBR. Dans le cas non binaire, c'est la pénalisation ℓ_1 qui donne les meilleurs résultats. Le sur-échantillonnage fait baisser les distances pour toutes les méthodes et pour toutes les métriques. Les diminutions sont plus significatives pour les méthodes OLS, SBR et ℓ_1-H, avec notamment une baisse d'un facteur deux pour OLS et ℓ_1-H, et d'un facteur trois pour SBR. La méthode SBR donne les distances les plus faibles en super-résolution.

Cet exemple montre qu'un modèle plus précis ne permet pas seulement d'affiner la position des pics, mais permet également d'éviter des erreurs importantes. Les algorithmes l'utilisant aboutissent à des solutions plus précises en limitant les erreurs dues aux modes locaux.

4.4.3 Simulations de Monte-Carlo

Nous présentons maintenant des simulations de Monte-Carlo. Les paramètres de l'exemple précédent sont repris : $F_S = 25\,\text{MHz}$, $f_0 = 5\,\text{MHz}$, $\text{BWR}_{-3} = 0.3$, $\text{RSB} = 12\,\text{dB}$, durée $8\,\mu\text{s}$, 6 pics aléatoirement placés et d'amplitudes uniformes. Nous appliquons les cinq algorithmes sur 1000 réalisations aléatoires en faisant varier K de 1 à 8 pour chaque réalisation. Les algorithmes sont arrêtés quand la norme du résidu $\|\boldsymbol{y} - \mathbf{H}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2$ est au niveau de la norme du bruit $\|\boldsymbol{b}\|^2 \approx N_y \sigma_b^2$ (cf. partie 3.2.4). Les calculs de distances sont présentés sur les figures 4.8a et 4.8b. Le noyau laplacien est utilisé avec et sans binarisation des pics. D'une manière générale, les distances baissent quand K augmente. La plus faible distance avec amplitudes inchangées est clairement celle calculée à partir de la pénalisation ℓ_1. Pour cette distance, les approches gloutonnes et SBR donnent à peu près les mêmes résultats, avec un léger avantage pour OLS et SBR. En ce qui concerne la distance calculée avec les amplitudes binaires, l'ordre de performance croissante des méthodes est nettement : MP, OMP, ℓ_1-H, OLS et SBR. Ces résultats confirment les conclusions partielles tirées de l'exemple de la partie 4.4.2.

En ce qui concerne les temps de calcul exposés en figure 4.8c, ceux-ci augmentent avec K, mais de façon maîtrisée. Ces résultats sont à mettre en relation avec le nombre de pics estimés par chaque méthode (figure 4.8d). En effet, pour une méthode donnée, un plus grand nombre de pics estimés, faisant écho à un nombre d'itérations plus important, impose un temps de calcul plus élevé. Le nombre de pics obtenus baisse avec K, prouvant la meilleure performance du modèle quand K augmente. Les algorithmes les plus rapides sont MP et OMP malgré des solutions ayant une cardinalité élevée, mais avec un effet moins important pour OMP. Les méthodes ayant le plus grand temps de calcul sont SBR et ℓ_1-H. Ce dernier est censé être plus rapide que SBR, mais produit des solutions avec un plus grand nombre de pics. Les méthodes qui présentent les solutions ayant les plus faibles nombres de pics sont SBR et OLS, ce qui fait apparaître une meilleure représentation du signal avec moins de pics. La méthode OLS semble être un bon compromis entre temps de calcul et nombre de pics produits.

Cette étude montre que la déconvolution sur-échantillonnée permet de réduire les distances entre la vraie séquence et la séquence estimée. Ceci est dû à un modèle plus précis grâce à une discrétisation plus fine. Cette approche provoque un surcoût de calcul limité par rapport à la déconvolution classique grâce à une implémentation efficace.

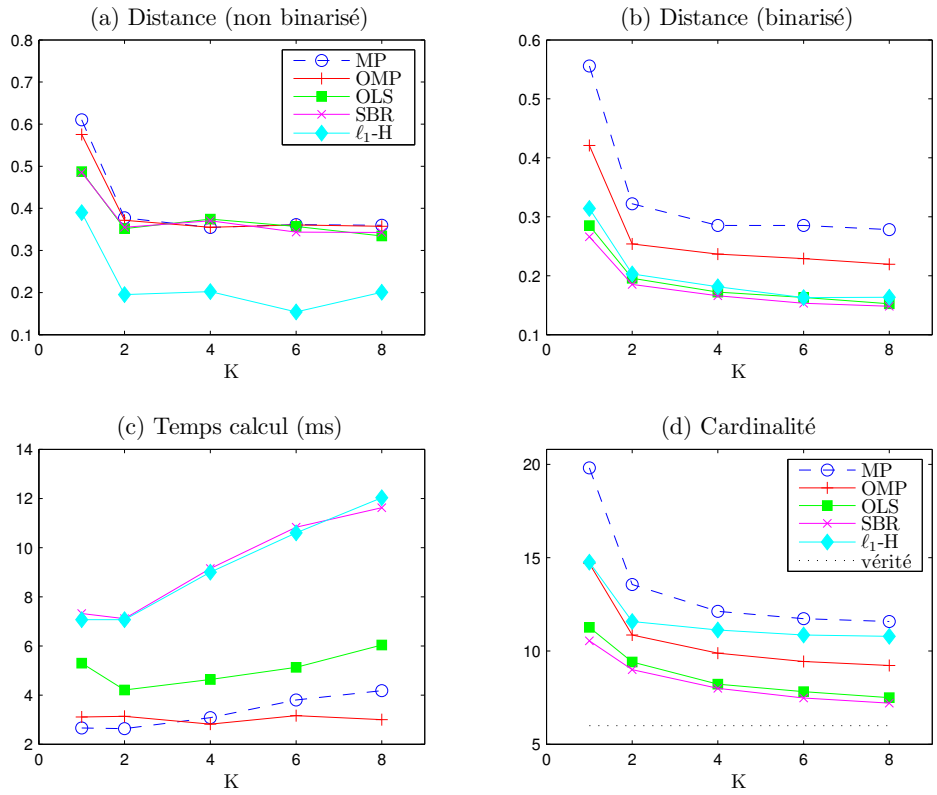


FIGURE 4.8 – Résultats de simulations de Monte-Carlo pour cinq méthodes de déconvolution en fonction du facteur de sur-échantillonnage K. (a) distance basée sur un noyau laplacien, (b) distance basée sur un noyau laplacien avec amplitudes binaires, (c) temps de calcul, (d) cardinalité.

4.4.4 Résultats expérimentaux

Pour illustrer l'approche de déconvolution sur-échantillonnée, nous appliquons les algorithmes développés aux données acquises à partir de plaques d'aluminium. Le transducteur utilisé est à surface plane circulaire de diamètre 12.7 mm et de fréquence centrale 2.25 MHz. Les plaques sont insonifiées en incidence normale et dans le champ lointain du transducteur. Deux épaisseurs qui créent le chevauchement des échos sont utilisées : 4 et 2 mm. La section 5.2 explique plus en détail la procédure expérimentale utilisée pour acquérir ce type de données.

Les données sont échantillonnées à 25 MHz, valeur qui est choisie volontairement faible pour montrer la capacité du modèle à résoudre des problèmes de chevauchement pour des fréquences d'échantillonnage basses. Dans la réalité, la fréquence d'échantillonnage pour cette fréquence de transducteur est plutôt de l'ordre de 50 ou 100 MHz. Nous choisissons un facteur de sur-échantillonnage $K = 4$ de manière à reconstruire des signaux à 100 MHz. La réponse instrumentale est mesurée à partir d'une plaque épaisse (20 mm) dans les mêmes conditions (voir figure 4.9a). Les filtres de déconvolution, représentés sur la figure 4.9b, sont obtenus en sur-échantillonnant la réponse instrumentale par un facteur quatre. Les données et la séquence de réflectivité théorique pour la plaque de 4 mm sont représentées sur la figure 4.10a. Cette séquence est obtenue par le calcul des coefficients de réflexion et de transmission avec la connaissance de l'épaisseur, de la vitesse des ondes et de la masse

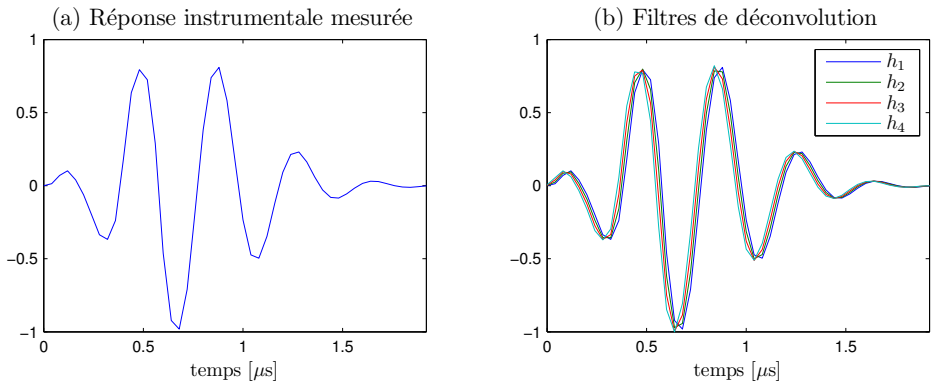


FIGURE 4.9 – Réponse instrumentale mesurée et filtres de déconvolution obtenus par sur-échantillonnage.

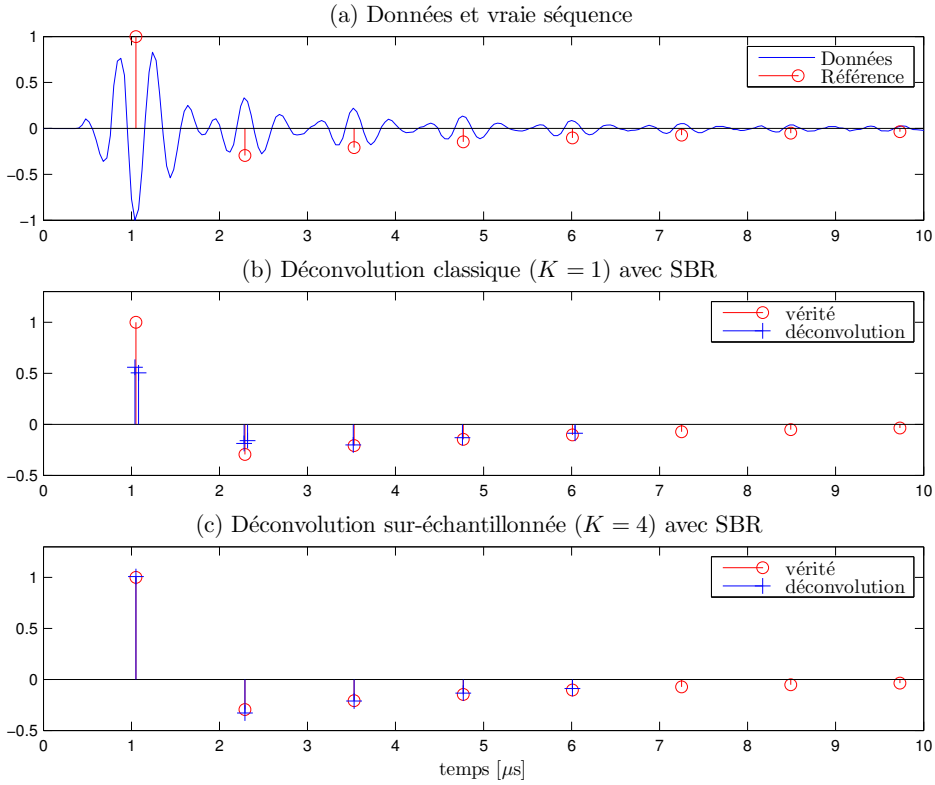


FIGURE 4.10 – Déconvolution classique ($K = 1$) et sur-échantillonnée ($K = 4$) pour des données acquises à partir d'une plaque d'aluminium de 4 mm d'épaisseur. (a) données et vraie séquence, (b) vraie séquence et déconvolution classique, (c) vraie séquence et déconvolution sur-échantillonnée.

volumique (pour plus de détails, se rapporter à la section 5.2). Le premier pic est négatif et correspond à la réflexion à la surface de la plaque. Les pics suivants correspondent aux allers-retours dans la plaque. Le but est donc d'obtenir un train d'impulsions le plus proche possible de cette séquence. Les résultats de déconvolution classique ($K = 1$) et sur-échantillonnée ($K = 4$), obtenus avec l'algorithme SBR, sont respectivement représentés sur les figures 4.10b et 4.10c. On remarque que la solution de la déconvolution classique aboutit

à une solution proche de la vérité mais avec des pics doubles, dus à l'imprécision temporelle du modèle. Ces fausses détections produisent également des erreurs d'amplitude. D'un autre côté, la déconvolution sur-échantillonnée produit une solution sans pics doubles, avec des positions et des amplitudes proches de la séquence réelle. On peut expliquer ce résultat par une plus grande résolution temporelle du modèle. La sélection des formes d'onde est plus proche de la réalité grâce au choix plus large défini par les filtres du système MISO.

Les données et les résultats pour la plaque de 2 mm d'épaisseur sont représentés sur la figure 4.11. Les conclusions sont à peu près les mêmes que précédemment. La différence

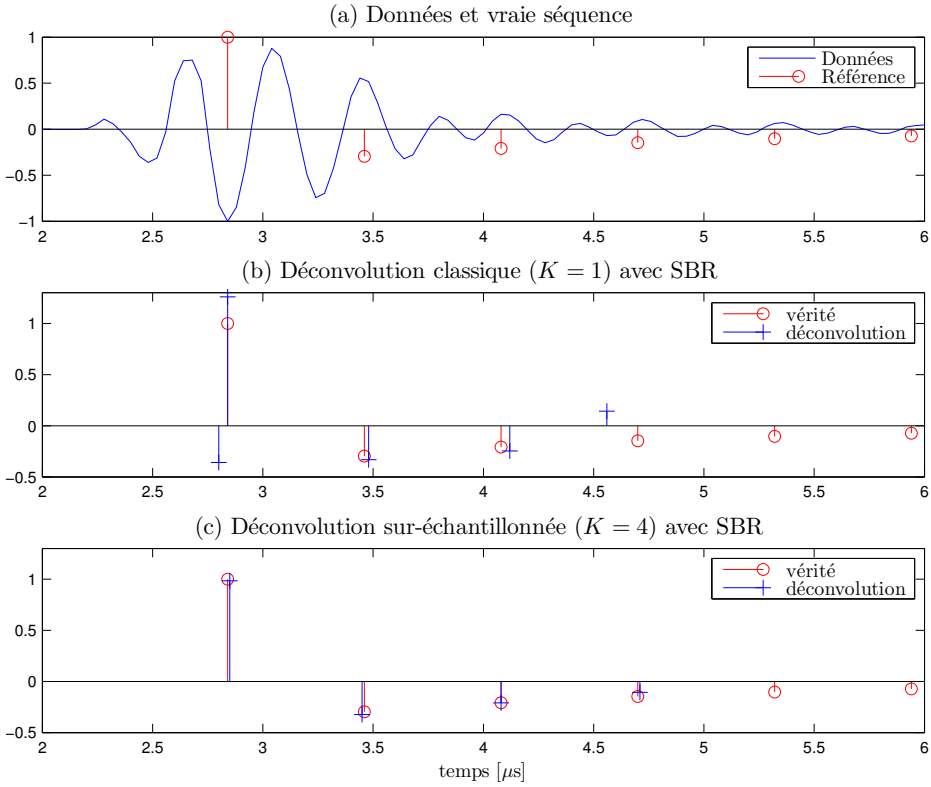


FIGURE 4.11 – Déconvolution classique ($K = 1$) et sur-échantillonnée ($K = 4$) pour des données acquises à partir d'une plaque d'aluminium de 2 mm d'épaisseur. (a) données et vraie séquence, (b) vraie séquence et déconvolution classique, (c) vraie séquence et déconvolution sur-échantillonnée.

du positionnement temporel est encore plus flagrante dans ce cas. On voit que dans le cas classique, les erreurs de détection sont importantes, dès le troisième pic, et ne permettent pas de retrouver la séquence théorique. La déconvolution sur-échantillonnée parvient à détecter quatre pics en accord avec la vérité et ce aussi bien en amplitude que temporellement.

Les résultats de déconvolution sur-échantillonnée nous montrent ainsi qu'il est possible de réaliser le contrôle non destructif de matériaux – en l'occurrence le calcul d'épaisseur de plaques – à partir de signaux échantillonnés à des fréquences plutôt basses. Cette modalité peut répondre à des problématiques de vitesse d'exécution, de codage et de stockage des données.

Chapitre 5

Application au contrôle non destructif par ultrasons

Sommaire

Introduction **117**

5.1 Estimation de la forme d'onde **118**

5.1.1 Mesure d'un écho isolé 118

5.1.2 Estimation par connaissance de la séquence de réflectivité 118

5.1.3 Moyennage dans le domaine homomorphique 119

5.1.4 Construction d'un dictionnaire ou apprentissage 120

5.2 Plaque de matériau homogène **120**

5.2.1 Généralités 120

5.2.2 Calcul d'incertitude 122

5.2.3 Estimation du temps de vol moyen par moindres carrés 123

5.2.4 END d'une plaque épaisse 123

5.2.5 CND d'une plaque fine 126

5.3 Matériaux atténuants **127**

5.4 Plaques avec trous à fond plat **129**

5.4.1 Cas d'un Ascan 129

5.4.2 Cas d'un Bscan 130

Introduction

Ce chapitre présente des résultats expérimentaux de déconvolution parcimonieuse. Les acquisitions ont été réalisées pour la majeure partie au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine. Nous abordons en préambule, dans la section 5.1, l'estimation de la forme d'onde de référence. Même si les techniques présentées ici n'ont pas toutes été utilisées en situation réelle, l'état de l'art sur celles-ci demeure intéressant pour l'utilisateur. Dans la section 5.2, nous traitons le cas de plaques homogènes. Une méthode de calcul de temps de vol

pour les plaques par minimisation d'un critère des moindres carrés est proposée. Plusieurs méthodes de déconvolution sont comparées pour réaliser, dans un premier temps, le calcul de la vitesse des ondes, et dans un second temps, le calcul d'épaisseur de plaques fines. La déconvolution de matériaux atténuants est ensuite abordée dans la section 5.3. Le but ici est de détecter l'écho de fond d'un matériau très atténuant menant à un rapport signal à bruit très faible et à une distorsion importante liée à l'atténuation dispersive. Nous montrons dans cet exemple l'importance d'utiliser un modèle qui prend en compte l'atténuation dispersive. Pour finir, nous nous intéressons à la détection de trous à fond plat dans la section 5.4. La difficulté provient du mélange entre les échos du trou et du fond. Un cas de matériau atténuant contenant un trou est traité. Nous montrons également le résultat d'une image obtenue par déconvolutions successives des A-scans pour une plaque d'aluminium percée par quatre trous. Ce chapitre répond de façon pragmatique à des problèmes réels de contrôle non destructif.

5.1 Estimation de la forme d'onde de référence ou construction du dictionnaire

5.1.1 Mesure d'un écho isolé

La méthode la plus simple pour obtenir la forme de référence est de réaliser une mesure en incidence normale avec une plaque de grande épaisseur placée en champ lointain [Krautkramer et Krautkramer 1990]. On obtient dans ce cas un écho de surface isolé. Lorsque le milieu de transmission entre le transducteur et la plaque est faiblement atténuant (de l'eau par exemple), on obtient la réponse instrumentale du système [Olofsson et Stepinski 2000].

Pour corriger les effets de diffraction, il est possible de modéliser la propagation entre le transducteur et la plaque grâce à une fonction de diffraction [Stephanishen 1971, Lingvall *et al.* 2003]. On peut ensuite retrouver la réponse instrumentale par déconvolution ou filtrage inverse [Cassereau *et al.* 1988]. En champ lointain, on peut montrer que la fonction de diffraction est proche d'une impulsion de Dirac. Par conséquent, l'écho de surface est équivalent à la réponse impulsionnelle instrumentale retardée du temps de propagation dans l'eau.

Lorsque la mesure d'un écho isolé est impossible et qu'on dispose de signaux contenant des échos mélangés, il est nécessaire d'estimer la forme d'onde. Nous exposons quelques approches possibles comme l'estimation par connaissance de la séquence de réflectivité ou par moyennage dans le domaine homomorphique. Il est également possible de proposer un plus grand nombre de formes d'onde dans un dictionnaire. Dans ce cas, il est nécessaire de construire le dictionnaire suivant un modèle ou d'apprendre un jeu de représentations.

5.1.2 Estimation par connaissance de la séquence de réflectivité

Sous un modèle de convolution, les données sont $y(t) = h_i(t) * x(t)$, où $x(t)$ représente la séquence de réflectivité ou de transmittivité. Dans le domaine fréquentiel, on a donc $Y(f) = H_i(f)X(f)$. Si on suppose $x(t)$ connue, pour une pièce étalon par exemple, il est possible d'estimer la réponse instrumentale $\widehat{h}_i(t)$ par transformée de Fourier inverse de $Y(f)/X(f)$. Cette inversion est bien conditionnée grâce au caractère très large bande de

$X(f)$, qui est la transformée de Fourier d'une somme d'impulsions de Dirac. Nous montrons sur la figure 5.1 un exemple simulé d'estimation de la réponse instrumentale pour trois RSB : 30 dB, 20,dB et 10 dB. Comme attendu, l'estimation de la réponse instrumentale est plutôt

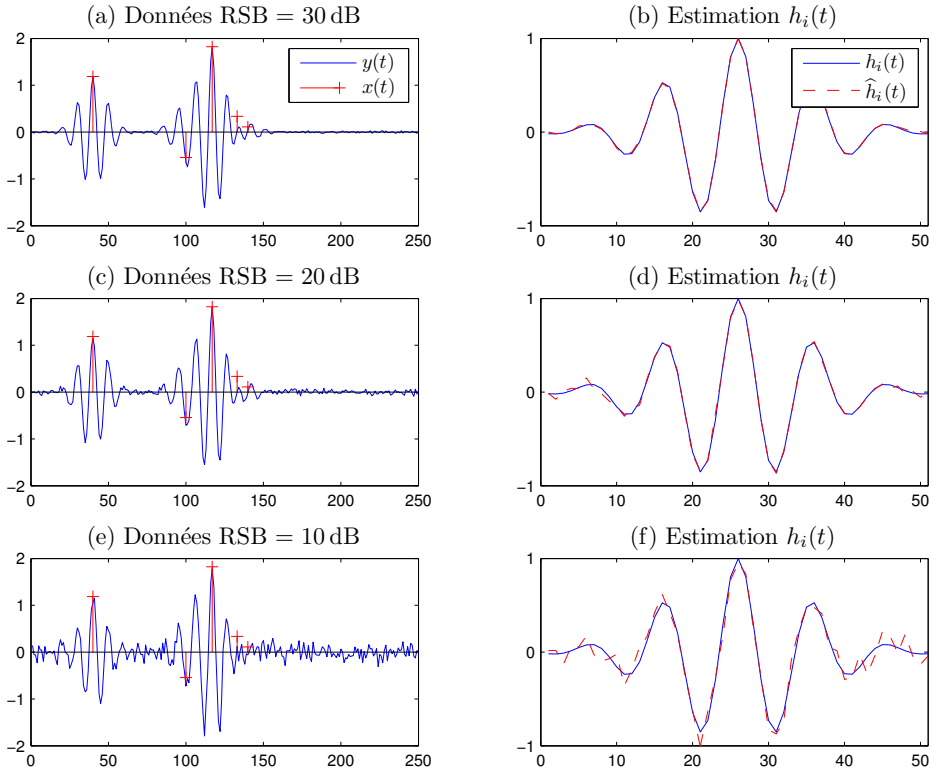


FIGURE 5.1 – Exemple d'estimation de la réponse instrumentale par connaissance de $x(t)$ pour trois niveaux de bruit. Colonne de gauche : Données $y(t)$ (–) et séquence $x(t)$ (+), colonne de droite : vérité $h_i(t)$ et estimation $\widehat{h}_i(t)$. Haut : RSB $= 30$ dB, milieu : RSB $= 20$ dB, bas : RSB $= 10$ dB.

bonne, même pour le cas le plus défavorable. Cette estimation peut être appliquée concrètement au cas des plaques par exemple. Nous verrons dans la section 5.2 que la séquence $x(t)$ a un modèle relativement simple et prédictif pour les plaques.

5.1.3 Moyennage dans le domaine homomorphique

Le moyennage dans le domaine homomorphique est basé sur le cepstre d'un signal $s(t)$ qui correspond au logarithme naturel de sa transformée de Fourier [Oppenheim *et al.* 1968]

$$\ln S(f) = \ln\left(|S(f)|e^{j\arg(S(f))}\right) = \ln|S(f)| + j\arg(S(f)). \tag{5.1}$$

Pour un modèle convolutif, les données sont modélisées par $y(t) = h_i(t) * x(t)$. En prenant le logarithme naturel dans le domaine fréquentiel, on obtient

$$\ln Y(f) = \ln H_i(f) + \ln X(f). \tag{5.2}$$

Le principe consiste à utiliser une certaine quantité de signaux $y_n(t),\ n = 1 \ldots N$ pour lesquelles on considère $h_i(t)$ invariant et $x(t)$ comme une réalisation aléatoire. C'est le cas

lorsqu'on utilise un unique transducteur pour effectuer un grand nombre de mesures. La moyenne des cepstres réceptionnés est alors

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\ln Y_n(f) = \ln H_i(f) + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\ln X_n(f). \tag{5.3}$$

Tria *et al.* [2007] suppose que, pour $n = 1 \dots N$ et pour chaque fréquence, $\ln|X_n(f)|$ suit une même loi de probabilité de moyenne M et de variance σ, et que $\arg(X_n(f))$ suit une loi uniforme sur $[-\pi, \pi]$ de moyenne nulle. La loi des grands nombres indique que, pour un grand nombre de réalisations, les paramètres moyennés tendent vers les paramètres de la loi de probabilité. On a par conséquent

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\ln X_n(f) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\ln|X_n(f)| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} M \\ \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\arg(X_n(f)) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases} \tag{5.4}$$

L'estimation de la réponse instrumentale est par conséquent

$$\hat{h}_i(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\exp\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\ln Y_n(f)\right)\right\}, \tag{5.5}$$

où $\mathcal{F}^{-1}$ est l'opérateur de transformée de Fourier inverse. Un exemple synthétique d'estimation est présenté sur la figure 5.2 pour plusieurs nombres de réalisations. Chaque séquence $x(t)$ est générée aléatoirement avec un nombre de pics allant de un à vingt, une loi uniforme pour les positions des pics et des amplitudes de loi gaussienne centrée. Le rapport signal à bruit de chaque jeu de données est fixé à 40 dB. Comme attendu, plus le nombre de réalisations augmente, plus l'estimation de la réponse instrumentale est bonne.

5.1.4 Construction d'un dictionnaire ou apprentissage

L'approche par dictionnaire consiste à considérer le modèle linéaire $\boldsymbol{y} = \mathbf{D}\boldsymbol{x}$ où $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{N_y \times N_x}$ est un dictionnaire avec beaucoup plus de colonnes que de lignes ($N_x \gg N_y$).

Il est possible d'utiliser un modèle d'écho particulier (voir partie 3.1.1 du chapitre 3) et de discrétiser les paramètres pour construire le dictionnaire [Lu et Michaels 2008]. Ce principe est inspiré de la construction des dictionnaires d'ondelettes utilisés en représentation parcimonieuse [Mallat et Zhang 1993, Mallat 1999].

Une autre technique pour construire le dictionnaire $\mathbf{D}$ et limiter sa taille consiste à réaliser un apprentissage à partir de plusieurs jeux de données [Lewicki et Sejnowski 2000, Kreutz-Delgado *et al.* 2003, Aharon *et al.* 2006, Zhang *et al.* 2008; 2012].

5.2 Plaque de matériau homogène

5.2.1 Généralités

Les matériaux considérés homogènes ne présentent ni atténuation ni dispersion. La vitesse des ondes est de ce fait indépendante de la fréquence et donc constante. Elle est notée c_0. Nous considérons ici des mesures en *pulse-echo* en incidence normale par rapport à une

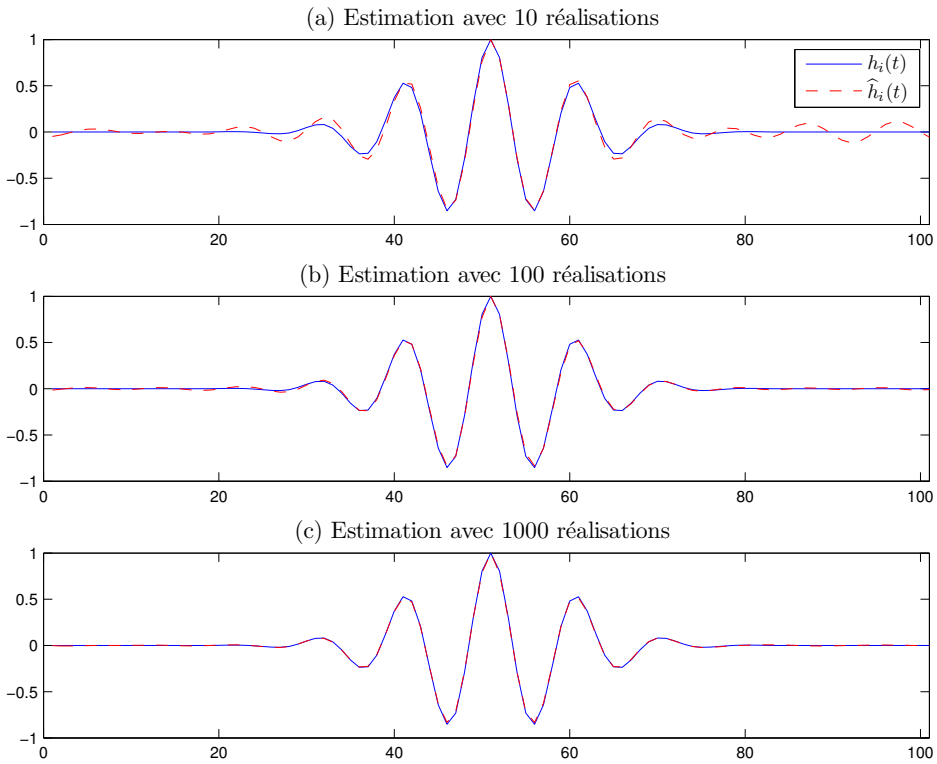


FIGURE 5.2 – Exemple d'estimation de la réponse instrumentale par moyennage dans le domaine homomorphique. (a) : vérité $h_i(t)$ et estimation $\widehat{h}_i(t)$ pour 10 réalisations, (b) : vérité $h_i(t)$ et estimation $\widehat{h}_i(t)$ pour 100 réalisations, (c) : vérité $h_i(t)$ et estimation $\widehat{h}_i(t)$ pour 1000 réalisations.

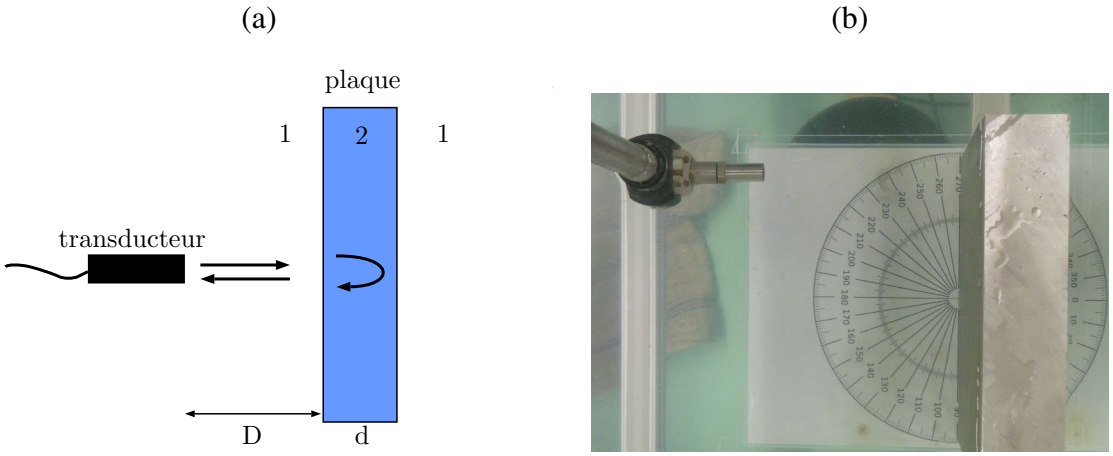


FIGURE 5.3 – (a) Schéma et (b) photo d'une mesure en pulse-echo réalisée en incidence normale avec une plaque homogène immergée.

plaque homogène, comme illustré sur la figure 5.3. La photo de la figure 5.3 montre une mesure effectuée avec une plaque d'aluminium. En incidence normale, seules les ondes longitudinales se propagent dans le matériau inspecté. A partir de ce type d'inspection, nous nous intéressons seulement à ce type d'ondes. Le temps de vol est équivalent à un aller-

retour dans la plaque

$$T = \frac{2d}{c_0}. \tag{5.6}$$

Le modèle des données est alors défini par une répétition des réponses instrumentales tous les $2T$ [Saniie et Nagle 1989]

$$y(t) = \alpha_{12} h_i \left(t - \frac{2D}{c_0} \right) + \beta_{12}\beta_{21} \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{21})^{2k-1} h_i \left(t - \frac{2D}{c_0} - kT \right), \tag{5.7}$$

avec, respectivement, α_{ij} et β_{ij} les coefficients de réflexion et de transmission entre un milieu i et un milieu j (voir aussi la partie 1.2.1 du chapitre 1). Le coefficient de réflexion définit le rapport entre les pressions réfléchie et incidente, tandis que le coefficient de transmission traduit le rapport des pressions transmise et incidente [Krautkramer et Krautkramer 1990, chap. 2]. Ceux-ci sont définis par

$$\alpha_{ij} = \frac{Z_j - Z_i}{Z_i + Z_j} \qquad \text{et} \qquad \beta_{ij} = \frac{2Z_j}{Z_i + Z_j}. \tag{5.8}$$

avec l'impédance acoustique $Z_i = \rho_i c_i$. On a alors $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$ et $\beta_{ij} = 1 + \alpha_{ij}$ [Zala 1992]. Par ailleurs, on trouve dans [Saniie et Nagle 1989] la convention $Z_i = 1/\rho_i c_i$, qui n'est pas une impédance acoustique mais une admittance acoustique. Dans ce cas, Z_i et Z_j sont intervertis dans les expressions de α_{ij} et β_{ij}.

Dans un cas de plaque immergée où $Z_1 < Z_2$, les coefficients de réflexion respectent $\alpha_{12} > 0$ et $\alpha_{21} < 0$. En se référant à l'équation (5.7), on remarque que le premier écho - l'écho provenant de la surface – a une amplitude positive α_{12} et que tous les autres échos, qui sont des allers-retours dans la plaque, ont des amplitudes négatives α_{21}^{2k-1}.

Nous présentons deux exemples avec des plaques d'aluminium de même composition. Le premier est un problème d'évaluation non destructive (END), où il convient d'identifier la vitesse à partir de l'estimation de T et de la connaissance de l'épaisseur. Le deuxième exemple est le contrôle non destructif (CND) de la plaque où le but est d'identifier l'épaisseur de la plaque à partir de l'estimation de T et de la connaissance de la vitesse. Dans un contexte pratique d'inspection, l'étape d'END est généralement réalisée avant tout contrôle.

5.2.2 Calcul d'incertitude

La méthode des dérivées partielles indique que l'incertitude absolue Δf d'une fonction $f(x_1, x_2, \ldots)$ est

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 + \ldots, \tag{5.9}$$

où Δx_2, Δx_2, ... sont les incertitudes absolues sur les variables de f.

Calcul d'incertitude sur la vitesse

Le calcul de la vitesse s'effectuant par $c_0 = 2d/T$, on peut écrire le logarithme

$$\ln c_0 = \ln 2d - \ln T. \tag{5.10}$$

En prenant la dérivée de cette fonction, on obtient l'incertitude relative

$$\frac{\Delta c_0}{c_0} = \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta T}{T}. \tag{5.11}$$

Calcul d'incertitude sur l'épaisseur

D'une façon similaire, l'incertitude relative sur le calcul de l'épaisseur s'écrit

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta c_0}{c_0} + \frac{\Delta T}{T}. \tag{5.12}$$

5.2.3 Estimation du temps de vol moyen par moindres carrés

Pour les matériaux homogènes, on peut considérer un modèle de convolution invariant (se reporter à la section 2.2 du chapitre 2). Le modèle de signal pour une plaque définie par l'équation (5.7) est une répétition de la réponse instrumentale tous les T [Saniie et Nagle 1989]. Pour K échos, on peut écrire un modèle équivalent

$$y(t) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k h_i(t - kT). \tag{5.13}$$

où les a_k correspondent aux amplitudes de chaque écho, définies dans la partie 5.2.1. Pour les signaux discrets, il est alors possible d'écrire le modèle

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{H}_T \boldsymbol{x}, \tag{5.14}$$

où la matrice $\mathbf{H}_T$ est composée des K réponses $\boldsymbol{h}_i$ retardées de kT et $\boldsymbol{x}$ est constitué des a_k. L'estimation du temps de vol $\widehat{T}$ est réalisée par minimisation des moindres carrés

$$\widehat{T} = \arg\min_T \left\| \boldsymbol{y} - \mathbf{H}_T \boldsymbol{x} \right\|^2. \tag{5.15}$$

La solution optimale $\widehat{\boldsymbol{x}}$ est obtenue par inverse généralisée (voir partie 3.2.2 du chapitre 3) et s'écrit

$$\widehat{\boldsymbol{x}} = \left(\mathbf{H}_T^T \mathbf{H}_T\right)^{-1} \mathbf{H}_T^T \boldsymbol{y}. \tag{5.16}$$

La résolution de l'équation (5.15) revient donc à

$$\widehat{T} = \arg\max_T \boldsymbol{y}^T \mathbf{H}_T \left(\mathbf{H}_T^T \mathbf{H}_T\right)^{-1} \mathbf{H}_T^T \boldsymbol{y}. \tag{5.17}$$

Cette optimisation scalaire peut être effectuée en discrétisant T sur une grille. Cette méthode est dédiée au calcul d'un temps de vol moyen pour les plaques. Nous l'utilisons dans la suite pour réaliser l'évaluation et le contrôle d'épaisseur de plaques d'aluminium. A la différence des méthodes de déconvolution classique, elle ne peut être utilisée pour détecter des défauts.

5.2.4 END d'une plaque épaisse

Les mesures sont réalisées en incidence normale avec un transducteur plan circulaire de diamètre 12.7 mm et de fréquence centrale 2.25 MHz. Les données reçues sont échantillonnées à 100 MHz. Nous étudions plusieurs plaques d'aluminium de même composition mais d'épaisseurs différentes. Le principe est de calculer la vitesse des ondes c_0 à partir de la connaissance de l'épaisseur d

$$c_0 = \frac{2d}{T}. \tag{5.18}$$

Habituellement, T est déterminé par seuillage, passage par zéro ou détection de maximum [Krautkramer et Krautkramer 1990, chap. 11]. Ces méthodes se révèlent peu précises et difficilement applicables lorsque les échos se mélangent, même partiellement. La déconvolution peut être une méthode efficace et précise pour estimer T. Nous utilisons pour cela les méthodes

- par pénalisation ℓ_1 : méthode homotopique [Malioutov *et al.* 2005],
- par pénalisation ℓ_0 : algorithme bi-directionnel SBR [Soussen *et al.* 2011],
- par minimisation des moindres carrés par rapport au temps de vol.

Nous montrons tout d'abord les résultats obtenus à partir de données acquises avec une plaque de 20.5 mm d'épaisseur sur la figure 5.4. La réponse instrumentale est obtenue à

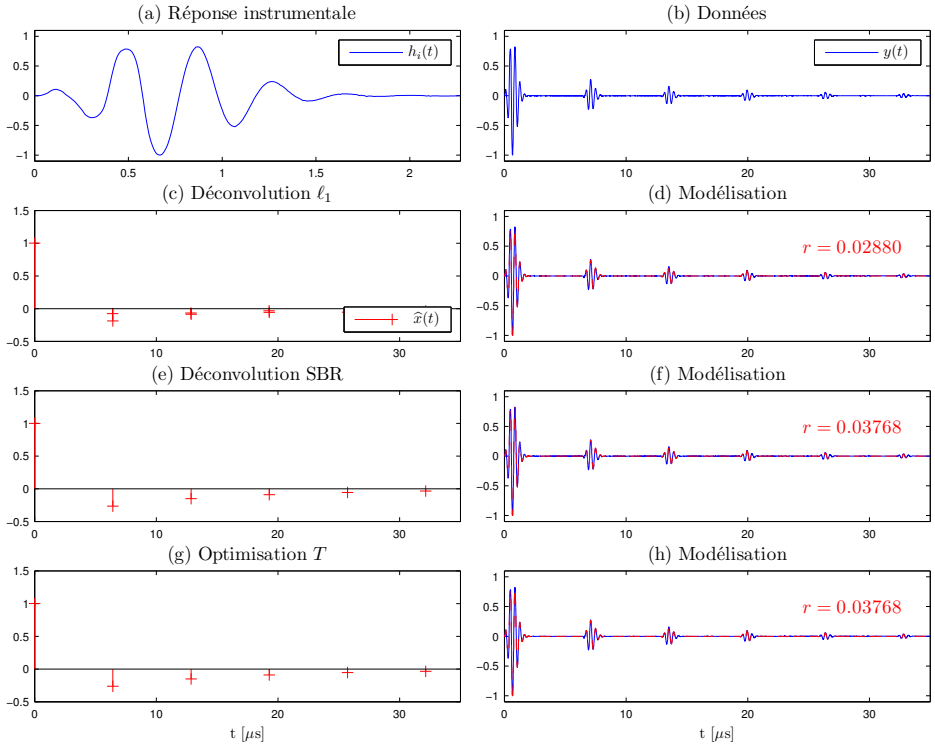


FIGURE 5.4 – Déconvolution pour l'END d'une plaque d'aluminium de 20.5 mm d'épaisseur. (a) réponse instrumentale, (b) données, (c) déconvolution par pénalisation ℓ_1 et (d) adéquation aux données, (e) déconvolution par SBR et (f) adéquation aux données, (g) optimisation T et (h) adéquation aux données.

partir de l'écho de surface et est tracée sur la figure 5.4a. Sur la figure 5.4b, les échos contenus dans les données sont bien séparés et correspondent aux allers-retours des ultrasons dans la plaque. Les résultats de déconvolution sont représentés sur les figures 5.4c-e-f. Les paramètres de régularisation sont réglés de façon à obtenir un maximum de bonnes détections. La déconvolution par pénalisation ℓ_1 parvient à détecter tous les échos mais au prix de pics doubles. La déconvolution par SBR et par optimisation sur le temps de vol aboutissent aux mêmes résultats, sans pics doubles, en accord avec la séquence attendue. Nous traçons également les données modélisées $\widehat{\boldsymbol{y}} = \mathbf{H}\widehat{\boldsymbol{x}}$ par chaque méthode et affichons la norme du

résidu $r = \|\boldsymbol{y} - \mathbf{H}\hat{\boldsymbol{x}}\|^2$. La pénalisation ℓ_1 parvient à une meilleure adéquation aux données grâce à sa cardinalité plus élevée. Dans un contexte d'END, où il s'agit de retrouver des temps de vol, la déconvolution par pénalisation ℓ_1 n'est cependant pas adaptée car elle est sujette à produire des doublons ou des pics de faibles amplitudes. Ceci est dû à la pénalisation des amplitudes et non de la cardinalité.

Les résultats de l'estimation de la vitesse pour quatre plaques sont affichés dans le tableau 5.1. La méthode utilisée pour la déconvolution est l'optimisation sur le temps de vol.

épaisseur d (mm)	temps de vol moyen T (μs)	vitesse c_0 (m.s^{-1})
60.4 ± 0.2	18.98 ± 0.04	6370 ± 35
39.1 ± 0.2	12.20 ± 0.04	6410 ± 54
20.5 ± 0.1	6.43 ± 0.04	6380 ± 71
4.0 ± 0.05	1.24 ± 0.04	6370 ± 285
moyenne		6383

TABLE 5.1 – Estimation des vitesses des ondes longitudinales dans l'aluminium et calcul d'incertitude pour plusieurs épaisseurs de plaques d'aluminium.

Les valeurs obtenues sont du même ordre de grandeur. Nous affichons également l'incertitude due aux imprécisions de la mesure d'épaisseur et au calcul des temps de vol (voir partie 5.2.2). Les incertitudes absolues sur l'épaisseur ont été obtenues en mesurant l'épaisseur au pied à coulisse à plusieurs endroits des plaques. Celle sur le temps de vol moyen a été arbitrairement fixée à $4T_S = 0.04\,\mu$s. Les valeurs des vitesses et des incertitudes sont en adéquation avec la littérature [Selfridge 1985] car, suivant la composition de l'aluminium, la vitesse des ondes longitudinales peut varier entre 6200 et 6500 m.s^{-1}. Même pour une épaisseur de 4 mm, pour laquelle les échos se mélangent partiellement, on parvient à détecter les temps de vol et à en déduire correctement une vitesse. La valeur moyenne est celle que nous utiliserons pour le contrôle non destructif de ce matériau.

Le problème de l'estimation de l'impédance et de la masse volumique

Les amplitudes des pics permettent de calculer l'impédance acoustique, dont on déduit la masse volumique. Concrètement, à partir de l'équation (5.7), on calcule α_{21} pour chaque pic détecté. Ensuite, à partir de l'impédance de l'eau Z_1, l'impédance de l'aluminium est donnée par

$$Z_2 = Z_1 \left(\frac{1 - \alpha_{21}}{1 + \alpha_{21}} \right). \tag{5.19}$$

Une fois les valeurs moyennées, on peut estimer l'impédance acoustique et la masse volumique, dont les valeurs sont récapitulées dans le tableau 5.2 pour plusieurs épaisseurs de plaques (pour la méthode d'optimisation sur le temps de vol). D'après les données fournies par le constructeur, l'impédance théorique[1] de cet aluminium se situe plutôt autour de 16.9 MPa.s.m^{-1} et la masse volumique vers 2660 kg.m^{-3}. Cette différence provient de l'atténuation qui, même si elle est très faible, crée un affaiblissement de l'amplitude de la

[1] L'impédance théorique $Z = \rho c$ est calculée à partir de la vitesse des ondes longitudinales $c = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}$, où E est le module d'Young et ν est le coefficient de Poisson du matériau.

épaisseur d (mm)	impédance Z_2 (MPa.s.m^{-1})	ρ_2 (kg.m^{-3})
60.4	9.3	1462
39.1	10.7	1671
20.5	12.1	1891
4.0	13.7	2154

TABLE 5.2 – Estimation de l'impédance et de la masse volumique pour plusieurs épaisseurs de plaques d'aluminium, avec les vitesses du tableau 5.1.

forme $a(z) = a_0 \exp(-\alpha z)$, où z est la distance de propagation dans le matériau (voir la partie 2.1.3 page 30 pour l'analogie fréquentielle). En accord avec ce modèle, on remarque que les estimations de Z_2 et de ρ_2 se rapprochent des valeurs théoriques lorsque l'épaisseur diminue. Ce comportement est logique car l'atténuation est plus faible quand la distance de propagation diminue. Cette décroissance due à l'atténuation n'étant pas facile à quantifier, l'estimation de l'impédance, et donc de la masse volumique, est difficile à réaliser. Malgré tout, Zala [1992] utilise cette formulation pour retrouver les impédances lors de l'inversion, en réglant empiriquement les valeurs de a_0 et α.

5.2.5 CND d'une plaque fine

Nous nous intéressons au contrôle d'une plaque fine d'aluminium où le but est d'estimer l'épaisseur d à partir de la connaissance de la vitesse c_0

$$d = \frac{c_0 T}{2}. \tag{5.20}$$

La vitesse c_0 est obtenue grâce à l'évaluation non destructive réalisée précédemment. Nous utilisons une plaque fine d'épaisseur 2 mm inspectée par le même transducteur que dans la partie 5.2.4. Les données sont représentées sur la figure 5.5b. Dans ce cas de figure, les échos sont fortement mélangés et il est nécessaire d'utiliser une méthode de séparation d'échos. Les résultats par déconvolution avec les trois approches présentées dans la partie précédente sont affichés sur les figures 5.5c-e-g. La modélisation des signaux ainsi que les résidus d'estimation sont représentés sur les figures 5.5d-f-h. Comme dans l'exemple précédent, la déconvolution par pénalisation ℓ_1 ne fournit pas de solution acceptable car elle produit de nombreuses fausses détections. Ce surplus de pics aboutit par conséquent à une meilleure adéquation aux données et à un plus faible résidu d'estimation. La solution de SBR est acceptable et permet d'identifier quatre pics en conformité avec la vérité [Saniie et Nagle 1989]. Cette solution est néanmoins moins bonne que celle fournie par l'optimisation en fonction du temps de vol. L'*a priori* de pics régulièrement espacés fonctionne bien ici et aboutit à une plus grande capacité de bonnes détections (huit pics). Les résultats du calcul d'épaisseur avec SBR et l'optimisation en T sont représentés dans le tableau 5.3. A partir de la partie 5.2.2, les incertitudes de mesure sont également calculées. La déconvolution par pénalisation ℓ_1 ne permet pas d'estimer une épaisseur à cause des mauvaises détections. Une telle estimation nécessiterait un post-traitement des résultats de déconvolution afin de sélectionner, par exemple, les pics régulièrement espacés. L'optimisation en fonction du temps de vol donne l'épaisseur la plus proche de la vraie valeur.

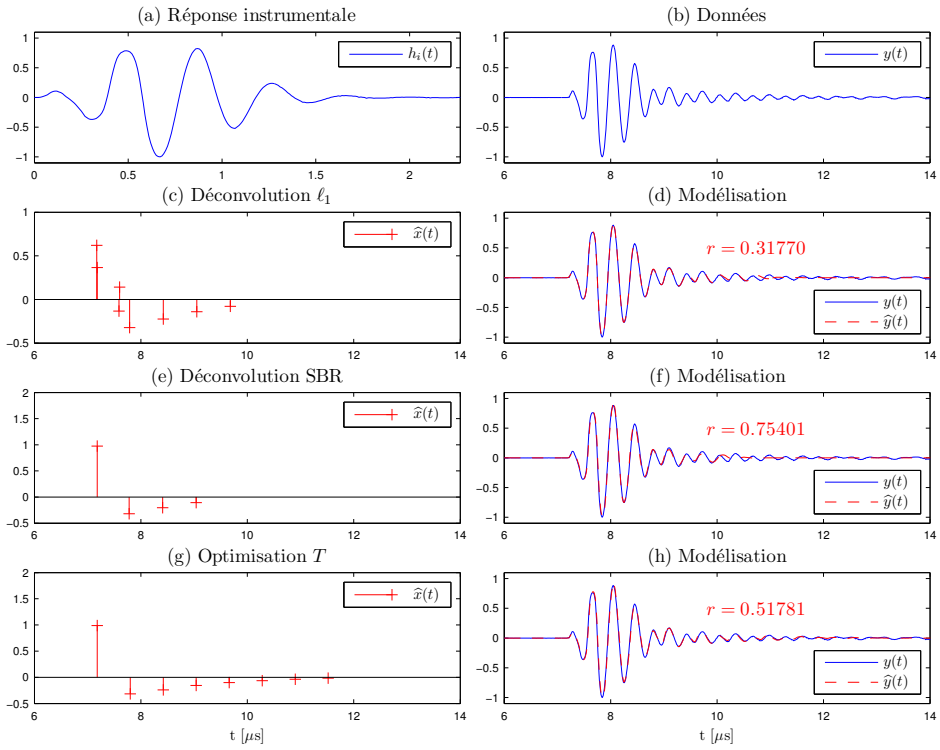


FIGURE 5.5 – Déconvolution pour le CND d'une plaque d'aluminium de 2 mm d'épaisseur. (a) réponse instrumentale, (b) données, (c) déconvolution par pénalisation ℓ_1 et (d) adéquation aux données, (e) déconvolution par SBR et (f) adéquation aux données, (g) optimisation T et (h) adéquation aux données.

méthode	temps de vol moyen (μs)	épaisseur (mm)
SBR	0.612 ± 0.1	1.952 ± 0.34
optimisation T	0.620 ± 0.1	1.979 ± 0.34

TABLE 5.3 – Mesure d'épaisseur dans l'aluminium par déconvolution avec $c_0 = 6383 \pm 50\,\mathrm{m.s^{-1}}$.

5.3 Matériaux atténuants

Nous utilisons ici des données acquises à partir d'une plaque de polycarbonate immergée dans l'eau. Le système instrumental emploie un transducteur non focalisé de 12.7 mm de diamètre et centré à 5 MHz. Les données sont représentées sur la figure 5.6a, les deux cadres correspondant à des dynamiques différentes pour mieux visualiser l'écho de fond. Elles sont constituées d'un écho de surface et d'un écho de fond très fortement atténué. La déconvolution est utile dans ce cas de figure pour deux raisons. Premièrement, l'écho de fond est très atténué et presque noyé dans le bruit, ce qui peut rendre sa détection visuelle difficile par un opérateur. Deuxièmement, la distorsion de la phase due à la dispersion rend compliqué le positionnement précis du temps de vol de l'écho. Pour pallier ces deux problèmes, la déconvolution prenant en compte le modèle de propagation développé au chapitre 2 permet dans cet exemple la prédiction et la détection de l'écho. Nous utilisons ici l'algorithme OLS. Le

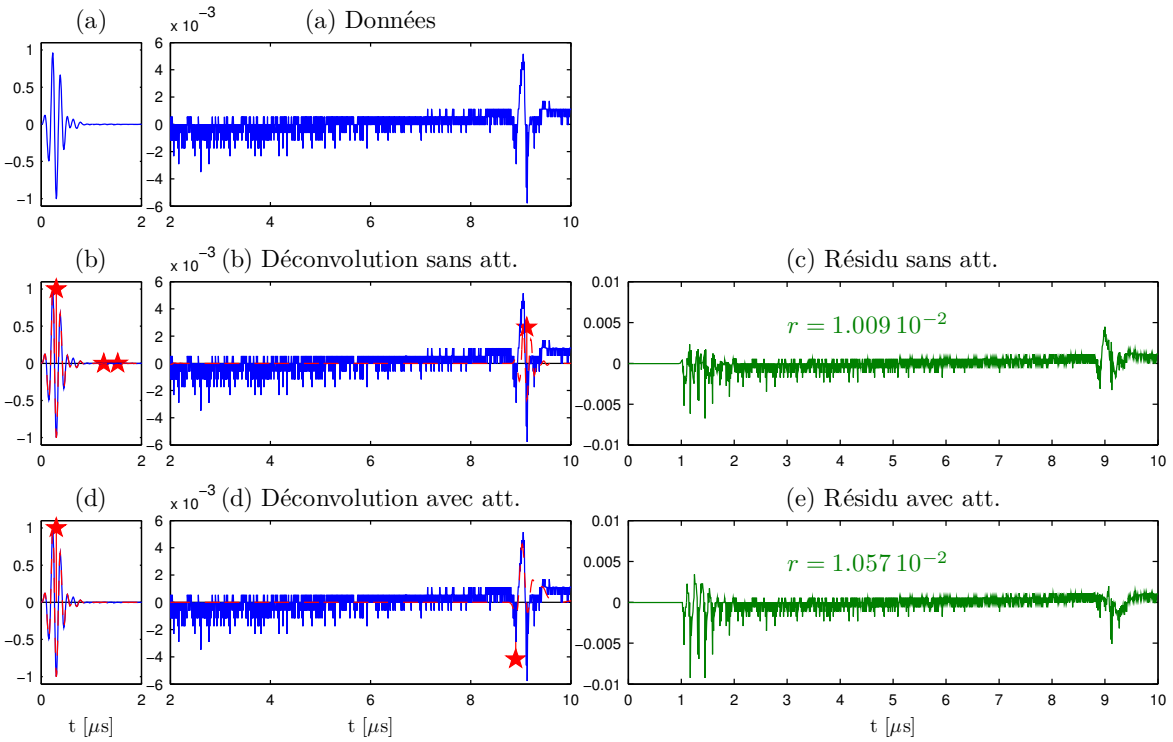


FIGURE 5.6 – Déconvolution pour le CND d'une plaque de polycarbonate de 10.2 mm d'épaisseur. (a) : données, (b) : données (–), déconvolution sans atténuation ($\star$) et modélisation (- -), (c) : résidu, (d) : données (–), déconvolution avec atténuation ($\star$) et modélisation (- -), (e) : résidu.

paramètre de régularisation est réglé de façon à détecter un pic dans la région de l'écho de fond. Nous nous attendons à trouver un pic positif pour la surface et un pic négatif pour le fond (voir partie 5.2.1).

Pour construire les matrices $\mathbf{G}$, nous utilisons deux modèles : un modèle sans atténuation où la matrice $\mathbf{G}$ est construite à partir de la réponse instrumentale seule et un modèle avec atténuation linéaire et phase dispersive (se rapporter à la section 2.2 du chapitre 2 pour plus d'explications). Nous utilisons les paramètres obtenus dans la partie 2.3.4 du chapitre 2 : $c_0 = 2273\,\text{m.s}^{-1}$, $c_\infty = 2280\,\text{m.s}^{-1}$ et $\alpha_0 = 53.5\,\text{Np.MHz}^{-1}\text{.m}^{-1}$.

Les résultats de déconvolution sans et avec atténuation sont respectivement représentés sur les figures 5.6b et 5.6d. Nous traçons également les résidus d'estimation $\boldsymbol{y} - \mathbf{G}\hat{\boldsymbol{x}}$ sur les figures 5.6c et 5.6e. Les résultats numériques sont récapitulés dans le tableau 5.4. La

Vérité	Sans atténuation	Avec atténuation
0 +	0 +	0 +
	1.08 –	
	1.40 –	
10.2 –	10.02 +	10.23 –

TABLE 5.4 – Positions spatiales en mm et signes des pics obtenus pour la déconvolution des données de la plaque de polycarbonate de 10.2 mm d'épaisseur.

solution sans atténuation contient quatre pics dont un dans la zone de l'écho de fond. Il est positionné à 9.12 μs et est de signe positif, ce qui est contraire à la vérité. La position du fond correspondante est 10.02 mm. Il y a également deux fausses détections entre 1 μs et 2 μs. Ces erreurs sont dues à l'imprécision du modèle sans atténuation. Le résultat de déconvolution avec atténuation dispersive présente seulement deux pics, pour la surface et pour le fond, et de signes conformes à la réalité. L'estimation de l'épaisseur est dans ce cas plus juste : 10.23 mm. Il est à noter que l'erreur quadratique est légèrement plus faible pour le modèle sans atténuation. Ceci est dû au fait que les deux fausses détections se situent dans une zone où le bruit a une énergie importante. L'erreur résiduelle est en revanche plus faible dans la zone de l'écho de fond pour le modèle avec atténuation.

5.4 Plaques avec trous à fond plat

5.4.1 Cas d'un Ascan

Dans cet exemple, le signal est acquis avec un transducteur plan circulaire de diamètre 12.7 mm et de fréquence centrale 2.25 MHz. La pièce de test est une plaque de polyméthacrylate de méthyle (PMMA[2]) d'épaisseur 23.9 mm qui contient un trou à fond plat (*Flat Bottom Hole*, FBH) de diamètre 10 mm et de longueur percée 0.5 mm. Ce matériau possède des propriétés d'atténuation linéaire [Selfridge 1985]. Le transducteur est placé en incidence normale par rapport à la plaque, du coté non débouchant du FBH. La proximité du FBH et du fond crée le mélange des deux échos autour de 18 μs (cf. Figure 5.7a). Le but est alors de détecter les positions du trou et du fond de la plaque. Dans ce cas de figure, la déconvolution peut permettre de retrouver les positions précises des échos mélangés. Le signal $\hat{\boldsymbol{x}}$ est supposé avoir un pic positif pour la surface et deux pics négatifs pour le FBH et le fond. Comme précédemment, un modèle invariant (sans atténuation) est utilisé ainsi qu'un modèle avec atténuation linéaire et phase dispersive. Les paramètres des modèles sont $c_0 = 2771\,\text{m.s}^{-1}$, $c_\infty = 2805\,\text{m.s}^{-1}$ et $\alpha_0 = 12.3\,\text{Np.MHz}^{-1}\text{.m}^{-1}$ [Carcreff *et al.* 2014b].

Pour cet exemple, nous utilisons un algorithme issu de SBR avec détection simultanée de deux pics à chaque itération (voir algorithme SDBR section 3.4). Cette démarche est particulièrement adaptée ici afin d'obtenir la meilleure sélection de deux pics lorsque les échos sont fortement recouvrants, alors que OLS et SBR localisent plus souvent un minimum local. Les résultats sont représentés dans les figures 5.7b et 5.7d. Les résidus sont tracés sur les figures 5.7c et 5.7e, et les résultats numériques sont reportés dans le tableau 5.5. Nous

Vérité	Sans atténuation	Avec atténuation
0 +	0 +	0 +
23.4 −	23.26 +	22.99 −
23.9 −	23.51 +	23.77 −

TABLE 5.5 – Positions spatiales en mm et signes des pics obtenus pour les deux exemples de déconvolution des données de la plaque de PMMA contenant un trou à fond plat.

observons que les deux méthodes détectent deux pics dans la zone de mélange [17 μs, 19 μs]. Le premier pic correspond à l'écho du FBH alors que le deuxième correspond au fond de

[2]Le PMMA est également connu sous le nom de la marque Plexiglas®.

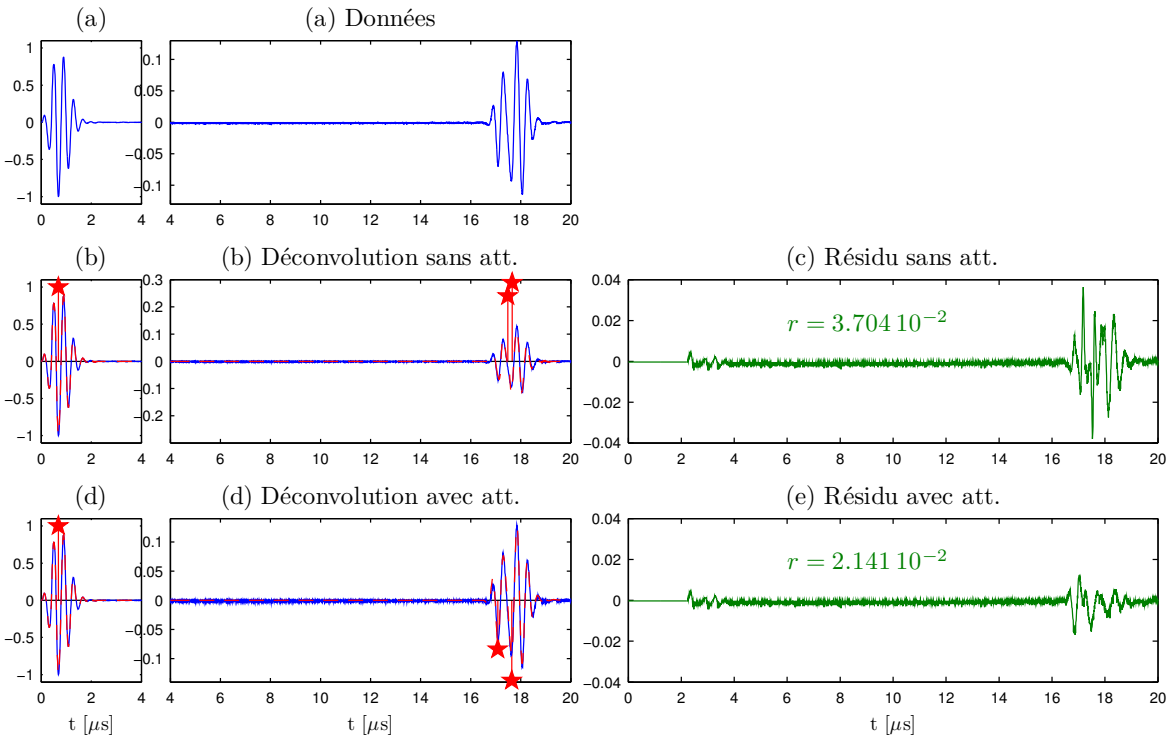


FIGURE 5.7 – Déconvolution pour le CND d'une plaque de PMMA contenant un FBH. (a) : données, (b) : données (–), déconvolution sans atténuation ($\star$) et modélisation (- -), (c) : résidu, (d) : données (–), déconvolution avec atténuation ($\star$) et modélisation (- -), (e) : résidu.

la plaque. Le résidu plus élevé et les pics positifs obtenus par déconvolution sans atténuation montrent bien que l'approche avec le modèle d'atténuation est plus adaptée. En effet, les deux pics détectés sont négatifs et permettent une meilleure adéquation aux données. En termes de modélisation, on remarque que la différence majeure provient de l'écho provenant du trou, l'écho de fond étant relativement bien modélisé. Comme cela a été mis en évidence dans la partie 2.3.5 du chapitre2, la signature de diffraction n'est pas prise en compte dans le modèle, et mène inévitablement à une mauvaise modélisation. La prise en compte de l'atténuation dans le modèle permet néanmoins d'assurer une bonne adéquation et de détecter correctement la position du trou. Cet exemple montre qu'il est nécessaire, dans certains cas, d'allier un modèle précis avec un algorithme plus évolué. Des améliorations pourraient cependant être réalisées en intégrant des profils de diffraction des trous à fond plat.

5.4.2 Cas d'un Bscan

Nous utilisons maintenant une plaque d'aluminium de 40 mm d'épaisseur percée par quatre trous à fond plat de profondeurs 10, 4, 2 et 1 mm comme illustré sur la figure 5.8. Un transducteur diamètre 12.7 mm et de fréquence centrale 5 MHz est placé en incidence normale du côté non débouchant des trous. Plusieurs A-scans sont acquis en suivant un balayage horizontal du bras mécanique portant le transducteur pour former un B-scan. Il est représenté sur la figure 5.9a. Sur chaque ligne verticale, on peut identifier les échos provenant respectivement de la surface, du FBH le cas échéant et du fond de la plaque. Pour la déconvolution, la réponse est identifiée avec l'écho de surface de façon à former un modèle invariant. Un



FIGURE 5.8 – Photo des quatre trous à fond plat de diamètre 10 mm percés dans la plaque d'aluminium d'épaisseur 40 mm. Les profondeurs des trous sont respectivement 10, 4, 2 et 1 mm.

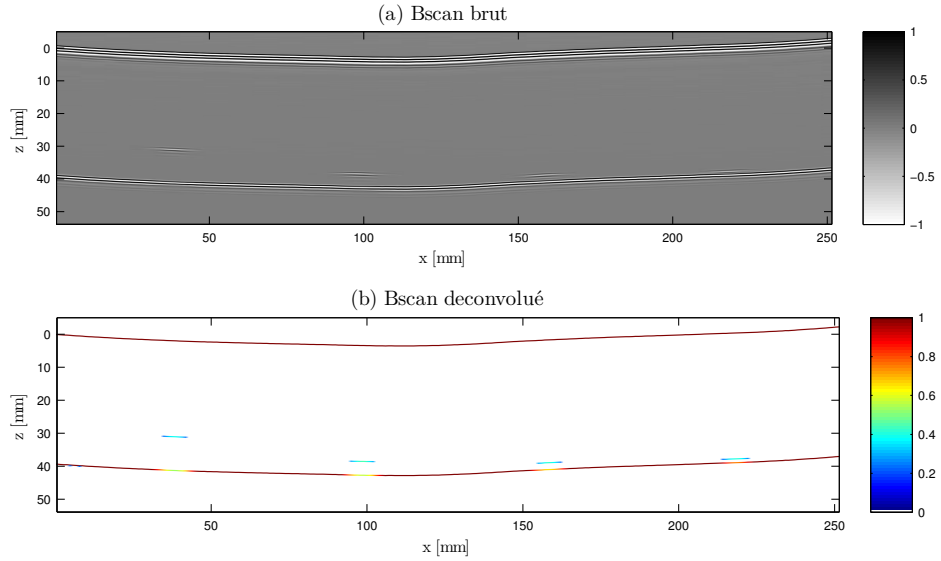


FIGURE 5.9 – Déconvolution d'un B-scan issu d'une plaque d'aluminium contenant quatre trous à fond plat. (a) B-scan brut, (b) B-scan déconvolué en valeur absolue.

algorithme de type OMP est ensuite utilisé sur chaque A-scan. Grâce à la vitesse des ondes mesurée dans cet aluminium dans la partie 5.2.4 – $c_0 = 6383\,\mathrm{m.s}^{-1}$ – il est possible de créer une image spatiale à partir des résultats de déconvolution (voir figure 5.9a). Cette image à haute résolution permet d'identifier la géométrie de la pièce et de localiser précisément chaque trou.

Conclusion et perspectives

Conclusion générale

Dans ce travail de thèse, nous nous sommes intéressés à la détection de discontinuités en contrôle non destructif ultrasonore. Dans le chapitre 1, nous avons montré que cette démarche pouvait se formuler comme un problème inverse où il s'agit d'identifier les temps de vol et les amplitudes d'échos reçus par le capteur. Plusieurs problèmes rendent difficile cette inversion, auxquels nous avons tenté d'apporter des solutions.

Tout d'abord, le modèle direct est souvent formulé par un modèle linéaire invariant : le produit de convolution entre une réponse instrumentale et un train d'impulsions. Ce dernier est composé de pics placés aux positions des discontinuités et avec des amplitudes traduisant les changements d'impédance acoustique. Ce modèle est invariant en fonction de la distance de propagation et n'est pas adapté en présence d'atténuation. En effet, ce phénomène provoque la perte des hautes fréquences au fur et à mesure que la distance de propagation augmente. Dans le chapitre 2, nous avons par conséquent développé un modèle qui prend en compte une atténuation en loi de puissance dans le domaine fréquentiel. C'est un modèle physique à deux paramètres, qui a démontré sa capacité à modéliser correctement plusieurs types de matériaux. Dans ce modèle, la dispersion est calculée à partir des paramètres de l'atténuation de façon à respecter la causalité des signaux. Dans ce cas, nous avons en particulier proposé un calcul analytique de la dispersion lorsque la loi d'atténuation est linéaire. Le modèle reste linéaire, mais ne s'écrit plus comme un produit de convolution. Dans ce modèle, la forme des signaux change en fonction de la distance de propagation et permet de prédire la forme d'un écho pour une distance donnée. À partir de données expérimentales acquises avec des matériaux atténuants (polycarbonate, huile de ricin, mousse poreuse), nous avons montré que le modèle développé est plus performant qu'un modèle ne prenant pas en compte l'atténuation. Il est également comparé au modèle empirique d'atténuation d'Olofsson et Stepinski [2001], et fournit de meilleurs résultats. Ce modèle a été exploité pour réaliser l'évaluation non destructive de matériaux. Par une procédure de type filtre adapté, nous obtenons des estimations relativement précises du coefficient d'atténuation et de la célérité des ondes longitudinales. À la fin du chapitre 2, par l'intermédiaire de mesures réalisées sur une plaque comportant un trou à fond plat, une des limites du modèle est abordée. En effet, la diffraction due à la réflexion sur le trou a une signature particulière non prise en compte par le modèle.

Le chapitre 3 se consacre aux méthodes d'estimation des temps de vol et des amplitudes des échos. Le problème inverse peut être abordé par une approche de minimisation des moindres carrés non linéaires. Il s'agit alors d'estimer un jeu de paramètres pour chaque écho défini par un modèle spécifique. Dans le chapitre 3, avec des signaux synthétiques suivant un modèle d'écho gaussien, nous mettons en évidence les difficultés des approches

d'optimisation non-linéaire (Gauss-Newton, Levenberg-Marquardt, SAGE), pourtant couramment utilisées en contrôle non destructif. Celles-ci sont très sensibles aux initialisations des paramètres, et mènent souvent à une convergence vers des minima locaux. Ces méthodes ne semblent de ce fait pas adaptées à l'identification de plusieurs échos, de surcroît s'ils sont mélangés. D'autres méthodes utilisent un modèle linéaire, comme celui que nous avons développé. Nous montrons que le caractère mal posé du problème inverse associé ne permet pas d'utiliser une inversion directe. En effet, celle-ci a pour effet d'amplifier les hautes fréquences dues au bruit contenu dans les données. Il est donc nécessaire d'introduire une régularisation qui stabilise l'inversion et favorise une connaissance *a priori* de la solution. Dans notre étude, les trains d'impulsions recherchés sont des solutions piquées ou parcimonieuses, c'est-à-dire contenant un grand nombre de valeurs nulles. Nous détaillons quelques fonctions de régularisation dans le chapitre 3, notamment la norme ℓ_1 qui est très utilisée en déconvolution parcimonieuse. Cette approche est efficace et a souvent été utilisée en contrôle non destructif, mais produit des solutions avec des pics dédoublés et des pics de faibles amplitudes, à cause de la pénalisation linéaire des amplitudes. Pour cette raison, nous préférons nous intéresser à la régularisation par la pseudo-norme ℓ_0, qui pénalise la cardinalité des solutions. Cette pénalisation n'offre pas de solution algorithmique rapide et optimale, et requiert des heuristiques d'exploration des solutions. Nous détaillons quelques méthodes comme les algorithmes gloutons et l'algorithme *Single Best Replacement* (SBR), qui surpasse les méthodes gloutonnes. Nous avons mis en évidence les performances limitées de ces méthodes à détection simple lorsque les échos interfèrent. Nous avons proposé alors plusieurs algorithmes issus de SBR qui réalisent une exploration plus complexe. Dans un premier temps, nous présentons un algorithme réalisant des mouvements multiples dans une fenêtre. La taille de la fenêtre influe directement sur les performances, mais également sur le temps de calcul. Avec des exemples simulés, nous montrons qu'il est plus efficace que SBR, mais nécessite un temps de calcul important. Nous proposons alors de restreindre le nombre de combinaisons à tester grâce à un calcul d'auto-corrélation multidimensionnelle. Ce calcul permet de proposer les positions qui produisent les estimations les plus corrélées à l'écho de référence, cherchant ainsi à éviter les minima locaux. L'algorithme associé que nous proposons permet d'obtenir des performances nettement supérieures à SBR, pour une augmentation limitée du coût de calcul et un nombre de combinaisons testées équivalent.

La discrétisation à la période d'échantillonnage du modèle de convolution continue définissant notre problème, peut mener à des approximations du modèle discret. En effet, le train d'impulsions réel à retrouver est à temps continu. Dans le chapitre 4, nous avons pour cela proposé de discrétiser plus finement le produit de convolution continu. Nous avons utilisé un facteur de sur-échantillonnage qui permet d'avoir une résolution temporelle multiple de la période d'échantillonnage. Dans un cadre sans atténuation, le modèle obtenu n'est plus un produit de convolution, mais équivalent à une somme de convolutions discrètes. Nous avons montré que ce modèle a une forme générique de système à entrées multiples et sortie unique (MISO). Dans ce chapitre, nous avons mis en œuvre plusieurs algorithmes d'approximation parcimonieuse adaptés pour les systèmes MISO. Ceux-ci sont accélérés par des calculs efficaces dans le domaine de Fourier. Pour comparer les solutions obtenues avec la véritable séquence continue, nous avons utilisé un calcul de distance inspiré du domaine des neurosciences. Un exemple simple et des simulations de Monte-Carlo ont mis en évidence l'augmentation de la qualité des solutions quand le facteur de sur-échantillonnage augmente, avec un accroissement maîtrisé du coût de calcul. Nous avons enfin appliqué ces méthodes au

calcul d'épaisseur de plaques minces d'aluminium, où les échos se mélangent. On parvient à une meilleure estimation de l'épaisseur grâce aux méthodes de déconvolution utilisant un modèle sur-échantillonné.

Le chapitre 5 est dédié au traitement de données réelles avec des applications concrètes de contrôle non destructif. Une partie de ce chapitre est consacrée à l'estimation de la réponse instrumentale. Celle-ci peut être obtenue par mesure directe ou par des méthodes indirectes comme le moyennage dans le domaine homomorphique. Le premier cas réel abordé ensuite est le traitement des plaques homogènes dans un but d'évaluation ou de contrôle. Nous proposons pour cela une approche par moindres carrés à une inconnue, pour estimer un temps de vol moyen. Elle peut être vue comme une approche avec la contrainte d'un espacement régulier des pics. Cette méthode, spécialement adaptée aux plaques, permet d'obtenir de meilleurs résultats que la déconvolution par pénalisation ℓ_1 ou SBR. Dans un premier temps, nous appliquons les algorithmes par pénalisation ℓ_1, SBR et par minimisation par rapport au temps de vol à l'évaluation de plaques d'aluminium, où il s'agit d'estimer la vitesse des ondes longitudinales. Ensuite, le but est d'estimer l'épaisseur de plaques d'aluminium de faibles épaisseurs. Dans ce cas, les échos se superposent et les méthodes de déconvolution apportent des solutions efficaces pour identifier l'épaisseur. Le deuxième cas auquel nous nous sommes intéressés est le contrôle de matériaux atténuants. Suite à la partie expérimentale développée au chapitre 2, nous montrons ici l'intérêt du modèle avec atténuation dispersive pour la détection d'échos atténués dans le polycarbonate. Ce modèle a, de par son caractère prédictif, une capacité plus importante de détection dans des environnements atténuants. La dernière partie s'intéresse à la détection de trous à fond plat dans des plaques d'aluminium et de plexiglas. Pour le plexiglas, nous avons montré ici l'intérêt d'allier un modèle adapté (notre modèle avec atténuation dispersive) à un algorithme performant à détections multiples. Dans le cas contraire, on aboutit à une mauvaise localisation du trou. Pour finir, nous formons une image B-scan à partir de plusieurs A-scan déconvolués. Ce type d'image parcimonieuse ou à haute résolution permet une meilleure interprétation, et une meilleure distinction des échos originellement mélangés.

Perspectives

Ce travail de recherche ouvre la voie à d'autres travaux sur les modèles ultrasonores, les méthodes d'inversion et les applications en contrôle non destructif.

En ce qui concerne le modèle direct, la prise en compte des effets de diffraction est un verrou important des approches de déconvolution. Pour illustrer ce point, nous avons vu, à la fin du chapitre 2, que la réflexion sur un trou à fond plat a un effet passe-haut sur l'écho reçu. Or, ce phénomène n'est pas considéré dans le modèle développé, car nous prenons en compte l'atténuation qui a une nature passe-bas. Il sera donc intéressant de prendre en compte des signatures expérimentales dans le modèle linéaire. La difficulté de ce problème reste la multitude de signatures possibles dans un contexte de détection de défauts inconnus. Une solution consistera à proposer un certain nombre de signatures, cumulées à l'atténuation dispersive, dans un dictionnaire (à la manière des travaux de Lu et Michaels [2008]). Cette approche peut également être utilisée pour s'adapter aux réflexions multiples dans un matériau multi-couches. Une telle démarche offre l'avantage de la linéarité. Néanmoins, de par la taille importante du dictionnaire, il se pourrait que l'utilisation des algorithmes d'optimisation performants, comme OLS, SBR ou les extensions que nous avons développées, ne

soient pas envisageables. L'emploi de méthodes peu coûteuses comme MP ou OMP serait sans doute incontournable. Le développement de méthodes performantes et rapides pour la détection de défauts est également un enjeu important concernant ce premier point.

Pour revenir aux matériaux multi-couches, il est possible d'étendre le modèle linéaire avec atténuation pour prendre en compte plusieurs milieux successifs d'atténuations différentes. Dans un contexte d'évaluation, ceci pourrait être appliqué pour identifier les paramètres d'atténuation des différents milieux, à condition que les épaisseurs des couches soient connues et que les échos soient séparés. A la suite de cette procédure, on peut envisager de construire le modèle de propagation pour réaliser le contrôle du matériau multi-couches.

Les modèles et méthodes testés dans ce travail concernent les ondes longitudinales, car nous avons réalisé nos mesures en incidence normale. Il sera donc intéressant de les tester avec des ondes transversales, qui apparaissent dans les milieux solides lorsque l'incidence est oblique. Le modèle pourrait être celui de deux systèmes concaténés, car il y aura deux types de réponses instrumentales. Cette approche pourra être appliquée dans un cadre de contrôle non destructif avec des tirs d'angle, où les deux types d'ondes se propagent, voire se mélangent. Cette perspective trouve écho pour le traitement des matériaux poreux, abordé au chapitre 2. Il sera intéressant d'étudier les modèles applicables, en termes d'atténuation et de dispersion, aux matériaux biphasiques (matériaux poreux par exemple). Ensuite, les méthodes d'inversion pourront être appliquées lorsque plusieurs types d'ondes se mélangent.

Au chapitre 3, nous avons montré que les méthodes des moindres carrés non-linéaires sont intéressantes pour leur flexibilité. Par conséquent, elles permettent de s'adapter à des phénomènes difficiles à prendre en compte dans un modèle linéaire (atténuation, dispersion, diffraction). Malheureusement, elles sont sensibles aux initialisations et sont difficiles à appliquer en situation réelle. Des approches d'optimisation globale pourront pas conséquent être envisagées. Celles-ci pourraient également être couplées à des méthodes d'optimisation linéaire comme OLS ou SBR, pour raffiner l'estimation.

L'étude des algorithmes de minimisation du critère des moindres carrés pénalisé par une pseudo-norme ℓ_0 effectuée au chapitre 3 mérite d'être poursuivie. Elle a en effet montré son efficacité pour des problèmes simulés (chapitre 3) et des problèmes réels de CND (chapitre 5). Les progrès récents en programmation en nombres entiers pour réaliser l'optimisation globale pourront également fournir des outils efficaces de comparaison des méthodes développées. Par ailleurs, nous avons vu qu'il est possible de restreindre le nombre de candidats par une procédure d'auto-corrélation temporelle. Cette approche mène malheureusement à une implémentation logicielle non optimale avec Matlab, à cause des recherches d'indices et d'indexations qui sont lentes à effectuer. Il sera avantageux de comparer les algorithmes avec une implémentation faite sous un autre langage.

D'un point de vue applicatif, les sondes multi-éléments sont très utilisées actuellement. L'approche de déconvolution parcimonieuse pourra par conséquent être adaptée à ce type de transducteurs. Cela nécessitera par exemple d'utiliser une réponse instrumentale par élément ou des réponses inter-éléments [Kerbrat *et al.* 2002]. Des extensions pourront être nécessaires à l'adaptation des méthodes inverses aux spécificités des multi-éléments, comme la focalisation, le tir avec angle, *etc.* De nos jours, les méthodes d'imagerie *Synthetic Aperture Focusing Technique* (SAFT) [Karaman *et al.* 1995, Lingvall *et al.* 2003] ou Focalisation en Tout Point (FTP) [Holmes *et al.* 2005] sont très utilisées et demandées par les industriels. Ces méthodes d'imagerie, couplées aux approches de déconvolution parcimonieuse, pourront fournir des performances supérieures en termes de reconstruction. Elles seront notamment intéressantes

pour réduire le bruit de structure grâce à la capacité de débruitage de la déconvolution. L'application des modèles et méthodes est également possible pour d'autres techniques d'imagerie, notamment dans le domaine biomédical, comme la tomographie ultrasonore [Glover et Sharp 1977, Greenleaf et Bahn 1981] ou la restauration d'images biomédicales [Fatemi et Kak 1980, Jensen 1991].

Annexe A

Relations de causalité

A.1 Relation entre la partie réelle et imaginaire d'une fonction continue causale

Tout signal $h(t)$ réel[1] peut être considéré comme la somme d'un signal pair $h_e(t)$ et d'un signal impair $h_o(t)$ [Papoulis 1962, Oppenheim et Schafer 1989]

$$h(t) = h_e(t) + h_o(t), \tag{A.1}$$

avec

$$h_e(t) = \frac{h(t) + h(-t)}{2}, \tag{A.2}$$

et

$$h_o(t) = \frac{h(t) - h(-t)}{2}. \tag{A.3}$$

Si la transformée de Fourier de $h(t)$ est $H(f) = R(f) + jX(f)$ alors

$$\begin{cases} h_e(t) & \Longleftrightarrow R(f), \\ h_o(t) & \Longleftrightarrow X(f). \end{cases} \tag{A.4}$$

Si $h(t)$ est causale alors $h(t) = 0$ pour $t < 0$ et réciproquement $h(-t) = 0$ pour $t > 0$. $h(t)$ et $h(-t)$ ne se superposant pas, excepté pour $t = 0$, on peut écrire

$$h(t) = 2h_e(t)\gamma(t) - h_e(0)\delta(t), \tag{A.5}$$

où $\gamma(t)$ est la fonction échelon telle que

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ 1 & \forall t \geqslant 0. \end{cases} \tag{A.6}$$

La transformée de Fourier de $\gamma(t)$ est $\Gamma(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$. D'après l'équation (A.5), on peut écrire l'expression de la transformée de Fourier de $h(t)$

$$\begin{aligned} H(f) &= 2R(f) * \Gamma(f) - h_e(0) \\ &= 2R(f) * \left(\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}\right) - h_e(0) \\ &= R(f) + jR(f) * -\frac{1}{\pi f} - h_e(0). \end{aligned} \tag{A.7}$$

[1] Il est possible de généraliser pour des signaux complexes (voir [Oppenheim et Schafer 1989]).

La partie imaginaire de $H(f)$ s'écrit donc

$$X(f) = R(f) * -\frac{1}{\pi f} = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R(f)}{f-s}\mathrm{d}s. \tag{A.8}$$

Cette dernière expression qui permet de déduire la partie imaginaire d'une fonction analytique à partir de sa partie réelle n'est autre que la transformée de Hilbert de $R(f)$ [Papoulis 1962, Oppenheim et Schafer 1989]. Notons également que

$$h(0) = h_e(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R(f)\mathrm{d}f. \tag{A.9}$$

A.2 Relation entre le module et la phase d'une fonction discrète causale

Pour plus de clarté nous posons $\omega = 2\pi f$, où ω est la pulsation en rad/s. Oppenheim et Schafer étendent le calcul précédent à des signaux à temps discret [Oppenheim et Schafer 1989]. Nous définissons le signal échelon à temps discret $\gamma[n] = \gamma(nT_S)$, où T_S est la période d'échantillonnage. La transformée de Fourier de $\gamma[n]$ est

$$\Gamma(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\pi\delta(\omega+2k\pi) + \frac{1}{1-e^{-j\omega}}. \tag{A.10}$$

Le terme $\frac{1}{1-e^{-j\omega}}$ peut être réécrit

$$\frac{1}{1-e^{-j\omega}} = \frac{1}{1-\cos\omega+j\sin\omega} = \frac{1}{2}\frac{1-\cos\omega-j\sin\omega}{1-\cos\omega} = \frac{1}{2}\left(1-j\cot\frac{\omega}{2}\right). \tag{A.11}$$

D'après l'équation (A.5), la transformée de Fourier de $h(t)$ s'écrit

$$\begin{aligned}
H(\omega) &= 2R(\omega) * \Gamma(\omega) - h[0] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2R(\theta)\Gamma(\omega-\theta)\mathrm{d}\theta - h[0] \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R(\omega) * \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\pi\delta(\theta+2k\pi) + \frac{1}{2}\left(1-j\cot\frac{\omega-\theta}{2}\right)\right]\mathrm{d}\theta - h[0] \\
&= R(\omega) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R(\theta)\mathrm{d}\theta - j\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R(\theta)\cot\frac{\omega-\theta}{2}\mathrm{d}\theta - h[0] \\
&= R(\omega) - j\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R(\theta)\cot\frac{\omega-\theta}{2}\mathrm{d}\theta.
\end{aligned} \tag{A.12}$$

La partie imaginaire de $H(\omega)$ pour des signaux à temps discret s'écrit alors

$$X(\omega) = -\frac{1}{2\pi}\mathcal{P}\int_{-\pi}^{\pi} R(\theta)\cot\left(\frac{\theta-\omega}{2}\right)\mathrm{d}\theta, \tag{A.13}$$

où $\mathcal{P}$ est la valeur principale de Cauchy. Pour une singularité en a, cette dernière est définie par

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{a-\epsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a+\epsilon}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x\right). \tag{A.14}$$

Dans l'équation A.13, la singularité est en $\theta = \omega$. Si une réponse a pour transformée de Fourier $H(\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}$, alors $\ln H(\omega) = \ln|A(\omega)| + j\phi(\omega)$. Si on considère que $\ln H(\omega)$ est le spectre d'une fonction causale, l'équation (A.13) devient

$$\phi(\omega) = -\frac{1}{2\pi}\mathcal{P}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|A(\omega)| \cot\left(\frac{\theta-\omega}{2}\right)\mathrm{d}\theta. \tag{A.15}$$

Dans le cas d'un module fonction de la fréquence, de la forme $A(f) = e^{-\alpha(f)}$, on aboutit à

$$\phi(f) = \frac{1}{f_S}\,\mathcal{P}\int_{-\frac{f_S}{2}}^{\frac{f_S}{2}} \alpha(g)\cot\left(\frac{\pi}{f_S}(f-g)\right)\mathrm{d}g, \tag{A.16}$$

où f_S est la fréquence d'échantillonnage.

A.2.1 Calcul de la phase dispersive pour une atténuation linéaire

Avec une atténuation linéaire $\alpha(f) = \alpha_0|f|$, le terme de phase (2.33) est $\epsilon(f) = -\frac{\alpha_0 f_S}{4\pi^2}\mathcal{J}\left(\frac{2\pi f}{f_S}\right)$, avec

$$\mathcal{J}(\omega) = \mathcal{P}\int_{-\pi}^{\pi} |v| \cot\left(\frac{\omega - v}{2}\right)\mathrm{d}v,\ \omega \in [-\pi, \pi]. \tag{A.17}$$

La fonction $\mathcal{J}(\omega)$ est impaire avec $\mathcal{J}(\pi) = 0$. Nous considérons $\omega \in]0, \pi[$. En posant $u = \omega - v$, nous obtenons

$$\mathcal{J}(\omega) = \mathcal{P}\int_{\omega-\pi}^{\omega} (\omega - u)\cot\frac{u}{2}\mathrm{d}u - \int_{\omega}^{\omega+\pi} (\omega-u)\cot\frac{u}{2}\mathrm{d}u, \tag{A.18}$$

où la valeur principale de Cauchy de la première intégrale exclut 0 du domaine. Soit $F_\omega(u)$ la primitive de $(\omega - u)\cot\frac{u}{2}$. La primitive de $\cot\frac{u}{2}$ est $2\ln\left|\sin\frac{u}{2}\right|$. De ce fait, une intégration par parties aboutit pour $u \in]-2\pi, 2\pi[$, $u \neq 0$ à

$$F_\omega(u) = 2(\omega - u)\ln\left|\sin\frac{u}{2}\right| + 2\int_0^u \ln\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|\mathrm{d}\varphi. \tag{A.19}$$

La dernière intégrale respecte alors

$$\int_0^u \ln\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|\mathrm{d}\varphi = -\mathrm{Cl}_2(u) - u\ln(2), \tag{A.20}$$

où $\mathrm{Cl}_2(u) = -\int_0^u \ln\left|2\sin\frac{\varphi}{2}\right|\mathrm{d}\varphi$ est la fonction de Clausen à l'ordre 2, *i*.e., la partie imaginaire du dilogarithme de e^{ju} [Maximon 2003]. A partir de (A.18)-(A.20), on peut montrer que

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\omega) &= 2\mathrm{Cl}_2(\omega+\pi) + 2\mathrm{Cl}_2(\omega-\pi) - 4\mathrm{Cl}_2(\omega)\\ &= 4\left(\mathrm{Cl}_2(\omega+\pi) - \mathrm{Cl}_2(\omega)\right).\end{aligned} \tag{A.21}$$

Finalement, on peut montrer que (A.21) est également valide pour $w \in [-\pi, 0]$.

Annexe B

Modèle de réponse impulsionnelle instrumentale

B.1 Modèle d'écho gaussien

Nous avons vu que la réponse impulsionnelle instrumentale peut être modélisée par un écho gaussien

$$h_i(t, \boldsymbol{\theta}) = Ae^{-\frac{(t-\tau)^2}{2\sigma_t^2}} \cos\left(2\pi f_0(t-\tau) + \phi\right), \tag{B.1}$$

où A est l'amplitude de l'écho, τ est le temps de vol, σ_t^2 est la variance de l'enveloppe gaussienne, f_0 est la fréquence centrale et ϕ est le décalage de phase. On définit alors le vecteur de paramètres $\boldsymbol{\theta} = [\sigma_t\ \tau\ f_0\ \phi\ A]$.

B.2 Facteur de bande passante

B.2.1 Définition

Il est d'usage de définir un transducteur par son facteur de bande passante (*bandwidth ratio*, BWR) :

$$\mathrm{BWR}_p = \frac{\Delta_f(p)}{f_0}, \tag{B.2}$$

où $\Delta_f(p)$ est la largeur de bande fréquentielle pour une perte de p dB. Un facteur proche de zéro indique un signal à bande étroite tandis qu'un facteur supérieur à un correspond à un signal large bande. La perte p est définie comme le rapport des puissances en décibels

$$p = 10 \log \pi_p = 20 \log \pi_a, \tag{B.3}$$

où π_p désigne le rapport en puissance et π_a le rapport en amplitude. Quelques correspondances sont récapitulées dans le tableau B.1. La convention la plus adoptée est de prendre la bande passante à mi-puissance maximale (*half power bandwidth*, HPBW) [Lingvall 2004b], c'est-à-dire $p = -3$ dB.

π_p	π_a	p (dB)
$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$	$\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 0.84$	-1.5
$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$	-3
$\frac{1}{4} = 0.25$	$\frac{1}{2} = 0.5$	-6
$\frac{1}{16} = 0.0625$	$\frac{1}{4} = 0.25$	-12

TABLE B.1 – Exemples de correspondance entre le rapport de puissance π_p, le rapport d'amplitude π_a et la perte en décibels p.

B.2.2 Application à la forme d'onde gaussienne

Le module de la transformée de Fourier de la forme temporelle (B.1) est la somme de deux gaussiennes centrées en $-f_0$ et f_0. En considérant $f_0 \gg 0$, on peut négliger la contribution de la gaussienne en $-f_0$ sur la gaussienne en f_0. Cette dernière s'écrit

$$|H_i(f)| = A' e^{\frac{(f-f_0)^2}{2\sigma_f^2}} \tag{B.4}$$

avec $A' = A\sigma_t\sqrt{2\pi}$ et $\sigma_f = 1/(2\pi\sigma_t)$. Nous cherchons ensuite la largeur de bande qui correspond à $e^{\frac{(f-f_0)^2}{2\sigma_f^2}} = \pi_a$. Après quelques manipulations, il vient

$$\Delta_f(p) = 2\sqrt{2\sigma_f^2 \ln(1/\pi_a)}. \tag{B.5}$$

Le facteur de bande passante est donc

$$\mathrm{BWR}_p = \frac{\Delta_f(p)}{f_0} = 2\sqrt{2\ln(1/\pi_a)}\frac{\sigma_f}{f_0}, \tag{B.6}$$

et permet d'obtenir la variance fréquentielle

$$\sigma_f^2 = \frac{(\mathrm{BWR}_p f_0)^2}{8\ln(1/\pi_a)} = -\frac{(\mathrm{BWR}_p f_0)^2}{8\ln(10^{p/20})}. \tag{B.7}$$

Ce calcul permet donc de générer des échos gaussiens grâce à un paramètre physique de largeur de bande . Dans la réalité, les transducteurs ultrasonores ont des facteurs BWR_{-3} compris entre 0.1 et 0.9. Plusieurs exemples de signaux avec des facteurs BWR_{-3} différents sont représentés sur la figure B.1.

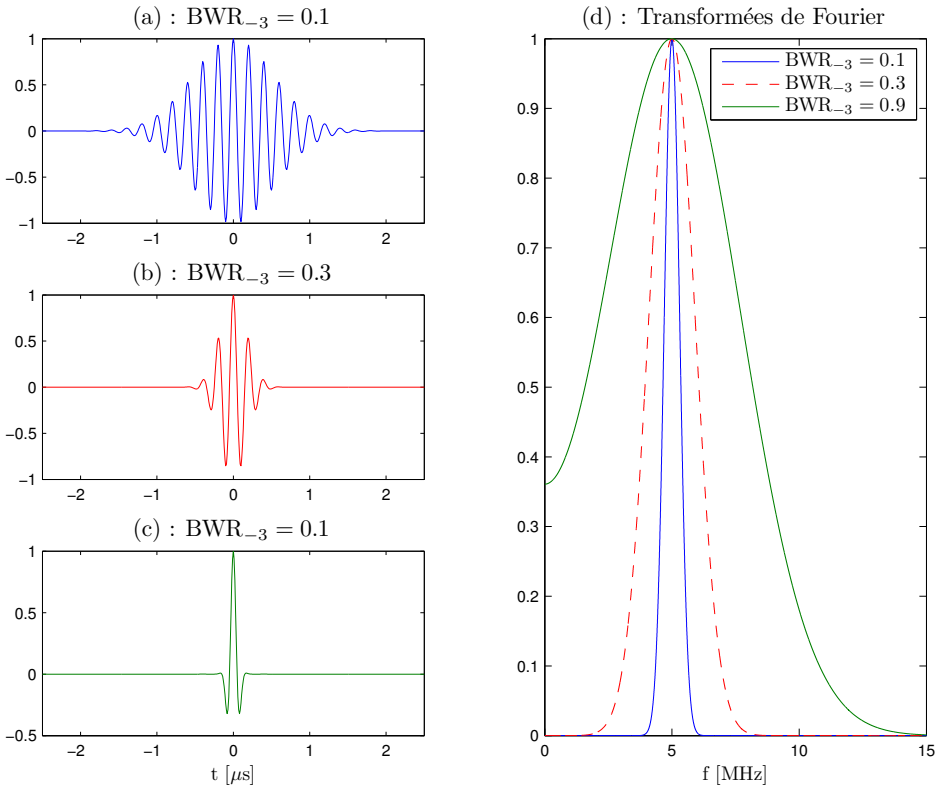


FIGURE B.1 – Exemples de formes d'onde gaussiennes pour trois valeurs de BWR$_p$ (a-b-c) avec $p = -3$ et transformées de Fourier normalisées correspondantes (d). Paramètres : $A = 1$, $t_0 = 0\,\mu$s, $f_0 = 5\,$MHz, $\phi = 0$.

Annexe C

Détails des calculs algorithmiques

C.1 Critère d'ajout pour OLS et SBR

Il s'agit d'ajouter d'une composante $n \notin \mathcal{Q}_{i-1}$ à l'itération courante i telle que $\mathbf{G}_i = [\mathbf{G}_{i-1},\ \boldsymbol{g}_n]$ où $\boldsymbol{g}_n$ est une colonne de $\mathbf{G}$. On calcule alors la différence de critère

$$\Delta\mathcal{J}^{+n}_{\mathcal{Q}_{i-1}} = \mu + \left\|\boldsymbol{y} - \mathbf{G}_i \left(\mathbf{G}_i^T\mathbf{G}_i\right)^{-1}\mathbf{G}_i^T\boldsymbol{y}\right\|^2 - \left\|\boldsymbol{y} - \mathbf{G}_{i-1} \left(\mathbf{G}_{i-1}^T\mathbf{G}_{i-1}\right)^{-1}\mathbf{G}_{i-1}^T\boldsymbol{y}\right\|^2. \quad \text{(C.1)}$$

Notons que

$$\begin{aligned}\left\|\boldsymbol{y} - \mathbf{G}\left(\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right)^{-1}\mathbf{G}^T\boldsymbol{y}\right\|_2^2 &= \left(\boldsymbol{y}^T - \boldsymbol{y}^T\mathbf{G}\left(\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right)^{-1}\mathbf{G}^T\right)\left(\boldsymbol{y} - \mathbf{G}\left(\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right)^{-1}\mathbf{G}^T\boldsymbol{y}\right)\\ &= \|\boldsymbol{y}\|^2 - 2\boldsymbol{y}^T\mathbf{G}\left(\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right)^{-1}\mathbf{G}^T\boldsymbol{y} + \\ &\qquad \boldsymbol{y}^T\mathbf{G}\left(\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right)^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{G}\left(\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right)^{-1}\mathbf{G}^T\boldsymbol{y}\\ &= \|\boldsymbol{y}\|^2 - \boldsymbol{y}^T\mathbf{G}\left(\mathbf{G}^T\mathbf{G}\right)^{-1}\mathbf{G}^T\boldsymbol{y}. \quad \text{(C.2)}\end{aligned}$$

La différence de critère est alors

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{J}^{+n}_{\mathcal{Q}_{i-1}} &= \mu + \|\boldsymbol{y}\|^2 - \boldsymbol{y}^T\mathbf{G}_i\left(\mathbf{G}_i^T\mathbf{G}_i\right)^{-1}\mathbf{G}_i^T\boldsymbol{y} - \|\boldsymbol{y}\|^2 + \boldsymbol{y}^T\mathbf{G}_{i-1}\left(\mathbf{G}_{i-1}^T\mathbf{G}_{i-1}\right)^{-1}\mathbf{G}_{i-1}^T\boldsymbol{y}\\ &= \mu + \boldsymbol{y}^T\left(\mathbf{G}_{i-1}\left(\mathbf{G}_{i-1}^T\mathbf{G}_{i-1}\right)^{-1}\mathbf{G}_{i-1}^T - \mathbf{G}_i\left(\mathbf{G}_i^T\mathbf{G}_i\right)^{-1}\mathbf{G}_i^T\right)\boldsymbol{y}. \quad \text{(C.3)}\end{aligned}$$

Nous utilisons ensuite la décomposition Cholesky qui permet de poser $\mathbf{G}_i^T\mathbf{G}_i = \mathbf{L}_i\mathbf{L}_i^T$ avec

$$\mathbf{L}_i = \begin{bmatrix}\mathbf{L}_{i-1} & 0\\ \boldsymbol{v}_n^T & a_n\end{bmatrix}, \quad \text{(C.4)}$$

où $\boldsymbol{v}_n = \mathbf{L}_{i-1}^{-1}\mathbf{G}_{i-1}^T\boldsymbol{g}_n$ et $a_n = \sqrt{\|\boldsymbol{g}_n\|^2 - \|\boldsymbol{v}_n\|^2}$. $\mathbf{L}_i\mathbf{L}_i^T$ devient alors

$$\mathbf{L}_i\mathbf{L}_i^T = \begin{bmatrix}\mathbf{L}_{i-1}\mathbf{L}_{i-1}^T & \mathbf{L}_{i-1}\boldsymbol{v}_n\\ \boldsymbol{v}_n^T\mathbf{L}_{i-1}^T & \|\boldsymbol{g}_n\|^2\end{bmatrix}. \quad \text{(C.5)}$$

En utilisant le lemme d'inversion d'une matrice partitionnée, son inverse s'écrit

$$\left(\mathbf{L}_i\mathbf{L}_i^T\right)^{-1} = \begin{bmatrix}\left(\mathbf{L}_{i-1}\mathbf{L}_{i-1}^T\right)^{-1} + \frac{(\mathbf{L}_{i-1}^T)^{-1}\boldsymbol{v}_n\boldsymbol{v}_n^T\mathbf{L}_{i-1}^{-1}}{\|\boldsymbol{g}_n\|^2 - \|\boldsymbol{v}_n\|^2} & -\frac{(\mathbf{L}_{i-1}^T)^{-1}\boldsymbol{v}_n}{\|\boldsymbol{g}_n\|^2 - \|\boldsymbol{v}_n\|^2}\\ -\frac{\boldsymbol{v}_n\mathbf{L}_{i-1}^{-1}}{\|\boldsymbol{g}_n\|^2 - \|\boldsymbol{v}_n\|^2} & \frac{1}{\|\boldsymbol{g}_n\|^2 - \|\boldsymbol{v}_n\|^2}\end{bmatrix}. \quad \text{(C.6)}$$

En insérant cette expression dans l'équation (C.3), on obtient

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{J}^{+n}_{\mathcal{Q}_{i-1}} &= \mu + \boldsymbol{y}^T\left(\mathbf{G}_{i-1}\left(\mathbf{G}_{i-1}^T\mathbf{G}_{i-1}\right)^{-1}\mathbf{G}_{i-1}^T - \mathbf{G}_i\left(\mathbf{G}_i^T\mathbf{G}_i\right)^{-1}\mathbf{G}_i^T\right)\boldsymbol{y}\\ &= \mu + \boldsymbol{y}^T\left(\mathbf{G}_{i-1}\left(\mathbf{L}_{i-1}\mathbf{L}_{i-1}^T\right)^{-1}\mathbf{G}_{i-1}^T - [\mathbf{G}_{i-1},\ \boldsymbol{g}_n]\left(\mathbf{L}_i\mathbf{L}_i^T\right)^{-1}[\mathbf{G}_{i-1},\ \boldsymbol{g}_n]^T\right)\boldsymbol{y}\\ &= \frac{1}{\|\boldsymbol{g}_n\|^2-\|\boldsymbol{v}_n\|^2}\left(\boldsymbol{y}^T\mathbf{G}_{i-1}(\mathbf{L}_{i-1}^T)^{-1}\boldsymbol{v}_n\boldsymbol{v}_n^T\mathbf{L}_{i-1}^{-1}\mathbf{G}_{i-1}^T\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{g}_n\boldsymbol{v}_n^T\mathbf{L}_{i-1}^{-1}\mathbf{G}_{i-1}^T\boldsymbol{y}\right.\\ &\qquad\left. -\boldsymbol{y}^T\mathbf{G}_{i-1}(\mathbf{L}_{i-1}^T)^{-1}\boldsymbol{v}_n\boldsymbol{g}_n^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{g}_n\boldsymbol{g}_n^T\boldsymbol{y}\right)\\ &= \frac{\left(\boldsymbol{v}_n^T\mathbf{L}_{i-1}^{-1}\mathbf{G}_{i-1}^T\boldsymbol{y} - \boldsymbol{g}_n^T\boldsymbol{y}\right)^2}{\|\boldsymbol{g}_n\|^2 - \|\boldsymbol{v}_n\|^2}.\end{aligned} \tag{C.7}$$

En posant $\boldsymbol{u}_{i-1} = \mathbf{L}_{i-1}^{-1}\mathbf{G}_{i-1}^T\boldsymbol{y}$, la différence de critère est [Chen *et al.* 1989, Soussen *et al.* 2011] :

$$\Delta\mathcal{J}^{+n}_{\mathcal{Q}_{i-1}} = \mu - \frac{\left(\boldsymbol{v}_n^T\boldsymbol{u}_{i-1} - \boldsymbol{g}_n^T\boldsymbol{y}\right)^2}{\|\boldsymbol{g}_n\|^2 - \|\boldsymbol{v}_n\|^2}. \tag{C.8}$$

C.2 Critère de retrait pour SBR

Ici, on retire une colonne $\boldsymbol{g}_m$ de $\mathbf{G}_{i-1}$ avec $m \in \mathcal{Q}_{i-1}$: $\mathbf{G}_{i-1} = [\mathbf{G}_i,\ \boldsymbol{g}_m]$. Le critère à calculer est toujours

$$\Delta\mathcal{J}^{-m}_{\mathcal{Q}_{i-1}} = -\mu + \boldsymbol{y}^T\left(\mathbf{G}_{i-1}\left(\mathbf{G}_{i-1}^T\mathbf{G}_{i-1}\right)^{-1}\mathbf{G}_{i-1}^T - \mathbf{G}_i\left(\mathbf{G}_i^T\mathbf{G}_i\right)^{-1}\mathbf{G}_i^T\right)\boldsymbol{y}. \tag{C.9}$$

On a alors

$$\mathbf{G}_{i-1}^T\mathbf{G}_{i-1} = \begin{bmatrix}\mathbf{G}_i^T\mathbf{G}_i & \mathbf{G}_i^T\boldsymbol{g}_m\\ \boldsymbol{g}_m^T\mathbf{G}_i & \|\boldsymbol{g}_m\|^2\end{bmatrix}, \tag{C.10}$$

qui, grâce au lemme d'inversion de matrice partitionnée, a pour inverse

$$\left(\mathbf{G}_{i-1}^T\mathbf{G}_{i-1}\right)^{-1} = \begin{bmatrix}\mathbf{W}_m & \boldsymbol{w}_m\\ \boldsymbol{w}_m^T & \gamma_m\end{bmatrix}, \tag{C.11}$$

avec

$$\mathbf{W}_m = \left(\mathbf{G}_i^T\mathbf{G}_i\right)^{-1} + \left(\mathbf{G}_i^T\mathbf{G}_i\right)^{-1}\mathbf{G}_i^T\boldsymbol{g}_m\gamma_m\boldsymbol{g}_m^T\mathbf{G}_i\left(\mathbf{G}_i^T\mathbf{G}_i\right)^{-1}, \tag{C.12}$$

$$\boldsymbol{w}_m = -\left(\mathbf{G}_i^T\mathbf{G}_i\right)^{-1}\mathbf{G}_i^T\boldsymbol{g}_m\gamma_m, \tag{C.13}$$

et

$$\gamma_m = \left(\|\boldsymbol{g}_m\|^2 - \boldsymbol{g}_m^T\mathbf{G}_i\left(\mathbf{G}_i^T\mathbf{G}_i\right)^{-1}\mathbf{G}_i^T\boldsymbol{g}_m\right)^{-1}. \tag{C.14}$$

Par identification, on obtient

$$\mathbf{W}_m = \left(\mathbf{G}_i^T\mathbf{G}_i\right)^{-1} + \boldsymbol{w}_m\gamma_m^{-1}\boldsymbol{w}_m^T. \tag{C.15}$$

On peut alors écrire

$$\left(\mathbf{G}_{i-1}^T\mathbf{G}_{i-1}\right)^{-1}\mathbf{G}_{i-1} = \begin{bmatrix}\mathbf{W}_m & \boldsymbol{w}_m\\ \boldsymbol{w}_m^T & \gamma_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{G}_i^T\\ \boldsymbol{g}_m^T\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{W}_m\mathbf{G}_i^T + \boldsymbol{w}_m\boldsymbol{g}_m^T\\ \boldsymbol{w}_m^T\mathbf{G}_i^T + \gamma_m\boldsymbol{g}_m^T\end{bmatrix}, \tag{C.16}$$

et ensuite, grâce à l'expression de $\mathbf{W}_m$ dans l'équation (C.15)

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_{i-1}\left(\mathbf{G}_{i-1}^T\mathbf{G}_{i-1}\right)^{-1}\mathbf{G}_{i-1}^T &= \mathbf{G}_i\mathbf{W}_m\mathbf{G}_i^T + \mathbf{G}_i\boldsymbol{w}_m\boldsymbol{g}_m^T + \boldsymbol{g}_m\boldsymbol{w}_m^T\mathbf{G}_i^T + \boldsymbol{g}_m\gamma_m\boldsymbol{g}_m^T \\ &= \mathbf{G}_i\left(\mathbf{G}_i^T\mathbf{G}_i\right)^{-1}\mathbf{G}_i^T + \mathbf{G}_i\boldsymbol{w}_m\gamma_m^{-1}\boldsymbol{w}_m^T\mathbf{G}_i^T + \mathbf{G}_i\boldsymbol{w}_m\boldsymbol{g}_m^T \\ &\quad + \boldsymbol{g}_m\boldsymbol{w}_m^T\mathbf{G}_i^T + \boldsymbol{g}_m\gamma_m\boldsymbol{g}_m^T. \end{aligned} \tag{C.17}$$

Le critère s'écrit alors

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{J}_{\mathcal{Q}_{i-1}}^{-m} &= -\mu + \boldsymbol{y}^T\left(\mathbf{G}_{i-1}\left(\mathbf{G}_{i-1}^T\mathbf{G}_{i-1}\right)^{-1}\mathbf{G}_{i-1}^T - \mathbf{G}_i\left(\mathbf{G}_i^T\mathbf{G}_i\right)^{-1}\mathbf{G}_i^T\right)\boldsymbol{y} \\ &= -\mu + \gamma_m^{-1}\left(\boldsymbol{y}^T\mathbf{G}_i\boldsymbol{w}_m\boldsymbol{w}_m^T\mathbf{G}_i^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^T\mathbf{G}_i\boldsymbol{w}_m\gamma_m\boldsymbol{g}_m^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{g}_m\gamma_m\boldsymbol{w}_m^T\mathbf{G}_i^T\boldsymbol{y}\right. \\ &\qquad \left. + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{g}_m\gamma_m^2\boldsymbol{g}_m^T\boldsymbol{y}\right) \\ &= -\mu + \gamma_m^{-1}\left(\boldsymbol{w}_m^T\mathbf{G}_i^T\boldsymbol{y} + \gamma_m\boldsymbol{g}_m^T\boldsymbol{y}\right)^T\left(\boldsymbol{w}_m^T\mathbf{G}_i^T\boldsymbol{y} + \gamma_m\boldsymbol{g}_m^T\boldsymbol{y}\right) \\ &= -\mu + \gamma_m^{-1}\left(\boldsymbol{w}_m^T\mathbf{G}_i^T\boldsymbol{y} + \gamma_m\boldsymbol{g}_m^T\boldsymbol{y}\right)^2. \end{aligned} \tag{C.18}$$

A partir de l'équation (C.16), le m-ème terme de la solution $\hat{\boldsymbol{x}}_{i-1} = \left(\mathbf{G}_{i-1}^T\mathbf{G}_{i-1}\right)^{-1}\mathbf{G}_{i-1}^T\boldsymbol{y}$ apparaît. Le critère pour le retrait d'un élément s'écrit alors [Reeves 1999, Miller 2002, Soussen *et al.* 2011]

$$\Delta\mathcal{J}_{\mathcal{Q}_{i-1}}^{-m} = \frac{\hat{\boldsymbol{x}}_{i-1}^2[m]}{\gamma_m} - \mu. \tag{C.19}$$

Bibliographie

AHARON, M., ELAD, M. et BRUCKSTEIN, A. (2006). K-SVD : An Algorithm for Designing Overcomplete Dictionaries for Sparse Representation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 54(11):4311–4322. 22, 120

AKAIKE, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions of automatic control*, 19:716–723. 80

BAZARAA, M. S., SHERALI, H. D. et SHETTY, C. M. (2013). *Nonlinear programming : theory and algorithms*. John Wiley & Sons. 69

BIOT, M. A. (1956a). Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 28(2): 168–178. 56

BIOT, M. A. (1956b). Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 28(2): 179–191. 56

BLUMENSATH, T. et DAVIES, M. E. (2007). On the difference between Orthogonal Matching Pursuit and Orthogonal Least Squares. Rapport technique, University of Edinburgh. 80, 105, 107

BOSSMANN, F., PLONKA, G., PETER, T., NEMITZ, O. et SCHMITTE, T. (2012). Sparse Deconvolution Methods for Ultrasonic NDT. *Journal of Nondestructive Evaluation*, 31(3):225–244. 22

BOURGUIGNON, S., SOUSSEN, C., CARFANTAN, H. et IDIER, J. (2011). Sparse deconvolution : Comparison of statistical and deterministic approaches. *In IEEE Statistical Signal Processing Workshop*, pages 317–320. 23, 105

BRUNEAU, M. (1998). *Manuel d'acoustique fondamentale*. Hermes, Paris. 14, 15

CARCREFF, E., BOURGUIGNON, S., IDIER, J. et SIMON, L. (2012). High-resolution deconvolution applied to non destructive testing. *In Acoustics 2012*, Nantes, France. 42, 102

CARCREFF, E., BOURGUIGNON, S., IDIER, J. et SIMON, L. (2013a). Algorithmes de déconvolution impulsionnelle à résolution augmentée. *In Actes du 24^e colloque GRETSI*, Brest, France. 42, 102

CARCREFF, E., BOURGUIGNON, S., IDIER, J. et SIMON, L. (2013b). Resolution enhancement of ultrasonic signals by up-sampled sparse deconvolution. *In Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pages 6511–6515, Vancouver, Canada. 42, 102

CARCREFF, E., BOURGUIGNON, S., IDIER, J. et SIMON, L. (2014a). Contrôle non destructif des matériaux attńuants et dispersifs par dćonvolution impulsionnelle. *In Actes du 12^e Congrès Français d'Acoustique*, Poitiers, France. 26

CARCREFF, E., BOURGUIGNON, S., IDIER, J. et SIMON, L. (2014b). A linear model approach for ultrasonic inverse problems with attenuation and dispersion. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 61(7):1191–1203. 26, 36, 129

CARCREFF, E., BOURGUIGNON, S., IDIER, J., SIMON, L. et DUCLOS, A. (2013c). Including frequency-dependent attenuation for the deconvolution of ultrasonic signals. *In 19th International Congress on Acoustics*, Montréal, Québec, Canada. 26

CARSTENSEN, E. L. et SCHWAN, H. P. (1959). Acoustic properties of hemoglobin solutions. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 31(3):305–311. 34

CASSEREAU, D., GUYOMAR, D. et FINK, M. (1988). Time deconvolution of diffraction effects - application to calibration and prediction of tranducer waveforms. *The Journal of Acoustical Society of America*, 84(3):1073–1085. 62, 118

CHAMPAGNAT, F., GOUSSARD, Y. et IDIER, J. (1996). Unsupervised deconvolution of sparse spike trains using stochastic approximation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 44(12):2988–2998. 23

CHEN, C.-H., HSU, W.-L. et SIN, S.-K. (1988). A comparison of wavelet deconvolution techniques for ultrasonic NDT. *In IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, volume 2, pages 867–870, New-York, USA. 23, 26

CHEN, S., BILLINGS, S. et LUO, W. (1989). Orthogonal least squares methods and their application to non-linear system identification. *International Journal of Control*, 50(5): 1873–1896. 23, 80, 82, 148

CHEN, S. S., DONOHO, D. L. et SAUNDERS, M. A. (1998). Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM J. Sci. Comput.*, 20(1):33–61. 23, 76, 80

CHOUZENOUX, E. (2010). *Recherche de pas par Majoration-Minoration. Application à la résolution de problèmes inverses*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes. 69

CHUNG, P. J. et BÖHME, J. F. (2001). Comparative convergence analysis of EM and SAGE algorithms in DOA estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 49(12):2940–2949. 71

COOLEY, J. W. et TUKEY, J. W. (1965). An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Mathematics of computation*, 19(90):297–301. 106

COUVREUR, C. et BRESLER, Y. (2000). On the optimality of the backward greedy algorithm for the subset selection problem. *The SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 21(3):797–808. 85

DAVIES, M. et DAUDET, L. (2003). Sparsifying subband decompositions. *In IEEE Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics*, pages 107–110. 76

DEMIRLI, R. et SANIIE, J. (2000). Model based time-frequency estimation of ultrasonic echoes for NDE applications. *In IEEE International Ultrasonics Symposium*, volume 1, pages 785–788. 66

DEMIRLI, R. et SANIIE, J. (2001a). Model-based estimation of ultrasonic echoes. Part I : Analysis and algorithms. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 48(3):787–802. 10, 22, 23, 66, 71, 72, 104

DEMIRLI, R. et SANIIE, J. (2001b). Model-based estimation of ultrasonic echoes. Part II : Nondestructive evaluation applications. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 48(3):803–811. 22, 67, 72, 73

DEMIRLI, R. et SANIIE, J. (2009). A generic parametric model for ultrasonic signal analysis. *In IEEE International Ultrasonics Symposium*, pages 1522–1525. 22, 67

DEMIRLI, R. et SANIIE, J. (2010). Asymmetric gaussian chirplet model for ultrasonic echo analysis. *In IEEE International Ultrasonics Symposium*, pages 124–128. 67

DEMOMENT, G., REYNAUD, R. et HERMENT, A. (1984). Range resolution improvement by a fast deconvolution method. *Ultrasonic Imaging*, 6(4):435–451. 76

DONOHO, D. L. et ELAD, M. (2003). Optimally sparse representation in general (non-orthogonal) dictionaries via ℓ_1 minimization. *In Proc. Natl Acad. Sci.*, volume 100, pages 2197–2202, USA. 80

DROIN, P., BERGER, G. et LAUGIER, P. (1998). Velocity dispersion of acoustic waves in cancellous bone. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 45(3):581–592. 34

DUCK, F. A. (1990). *Physical properties of tissue*. Academic Press, London. 29

EFRON, B. T., HASTIE, T., JOHNSTONE, L. et TIBSHIRANI, R. (2002). Least angle regression. *Annals of Statistics*, 32:407–499. 76

ELAD, M. (2010). *Sparse and Redundant Representations : From Theory to Applications in Signal and Image Processing*. Springer. 75, 76, 81

FATEMI, M. et KAK, A. C. (1980). Ultrasonic B-scan imaging : Theory of image formation and a technique for restoration. *Ultrasonic Imaging*, 2(1):1–47. 76, 137

FEDER, M. et WEINSTEIN, E. (1988). Parameter estimation of superimposed signals using the EM algorithm. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 36(4): 477–489. 71

FESSLER, J. et HERO, A. (1993). Complete-data spaces and generalized EM algorithms. *In IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, volume 4, pages 1–4, Minneapolis, USA. 22

FESSLER, J. A. et HERO, A. O. (1994). Space-alternating generalized expectation-maximization algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(10):2664–2677. 71

FINK, M. et CARDOSO, J.-F. (1984). Diffraction effects in pulse-echo measurement. *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics*, 31(4):313–329. 26, 27, 62

FITZGIBBON, L. J., DOWE, D. L. et VAHID, F. (2004). Minimum message length autoregressive model order selection. *In International Conference on Intelligent Sensing and Information Processing*, pages 439–444. 80

FORTIER, N. (1990). *Détermination des hyperparamètres dans les méthodes linéaires de restauration d'image*. Thèse de doctorat, Université de Paris Sud, Centre d'Orsay. 79

GLOVER, G. H. et SHARP, J. C. (1977). Reconstruction of ultrasound propagation speed distributions in soft tissue : Time-Of-Flight tomography. *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics*, 24(4):229–234. 137

GOLUB, G. H., HEATH, M. et WAHBA, G. (1979). Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter. *Technometrics*, 21:215–223. 80, 83

GOLUB, G. H. et VAN LOAN, C. F. (1996). *Matrix Computations*, volume 3. The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London. 106, 107

GOUSSARD, Y., DEMOMENT, G. et IDIER, J. (1990). A new algorithm for iterative deconvolution of sparse spike trains. *In IEEE International Conference on Acoustic, Speech and Signal Processing*, pages 1547–1550, Albuquerque, NM, USA. 23, 84

GRAY, R. M. (2006). *Toeplitz and circulant matrices : A review*. now publishers inc. 40, 102

GREENLEAF, J. F. et BAHN, R. C. (1981). Clinical imaging with transmissive ultrasonic computerized tomography. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 28(2):177–185. 137

GURUMURTHY, K. V. et ARTHUR, R. M. (1982). A dispersive model for the propagation of ultrasound in soft tissue. *Ultrasonic Imaging*, 4(4):355–377. 24, 35, 36

HAIAT, G., PADILLA, F., CLEVELAND, R. et LAUGIER, P. (2006). Effects of frequency-dependent attenuation and velocity dispersion on in vitro ultrasound velocity measurements in intact human femur specimens. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 53(1):39–51. 34

HALE, D. (1981). An inverse Q-filter. *Stanford Exploration Project*, 26:231–244. 23, 43

HARGREAVES, N. et CALVERT, A. (1991). Inverse Q-filtering by Fourier transform. *Geophysics*, 56:519–527. 30

HARRIS, G. R. (1981). Review of transient field theory for a baffled planar piston. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 70(1):10–20. 27

HARRIS, G. R., HERMAN, B. A., SMITH, S. W. et BODINE, W. J. (1983). Through transmission technique for ultrasonic attenuation measurement using broadband, plane wave pulses. *In Ultrasonics Symposium*, pages 778–781. 29

HE, H., IDIER, J., BALTAZART, V. et WANG, Y. (2011). Déconvolution impulsionnelle par optimisation combinatoire exacte et application au CND radar. *In Actes du 23^e colloque GRETSI*, Bordeaux. 23

HE, P. (1999). Experimental verification of models for determining dispersion from attenuation. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 46(3):706–714. 10, 24, 29, 35, 36, 53

HOLMES, C., DRINKWATER, B. W. et WILCOX, P. (2005). Post-processing of the full matrix of ultrasonic transmit-receive array data for non-destructive evaluation. *NDT&E International*, 38(8):701–711. 136

HONG, J.-C., SUN, K. H. et KIM, Y. Y. (2006). Waveguide damage detection by the matching pursuit approach employing the dispersion-based chirp functions. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 53(3):592–605. 22

HONG, X., SHARKEY, P. et WARWICK, K. (2003). Automatic nonlinear predictive model-construction algorithm using forward regression and the PRESS statistic. *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, 150:245–254. 80

IDIER, J. (2001). *Approche bayésienne pour les problèmes inverses*. Traité IC2, Série traitement du signal et de l'image, Hermès, Paris. 19, 21, 22, 40, 41, 74, 76, 78

JENSEN, J. A. (1991). Estimation of pulses in ultrasound B-scan images. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 10(2):164–172. 137

JENSEN, J. A. (1992). Deconvolution of ultrasound images. *Ultrasonic Imaging*, 14(1):1–15. 76

JONSCHER, A. K. (1983). *Dielectric relaxation in solids*. Chelsea Dielectrics Press, London. 14

KAARESEN, K. F. (1997). Deconvolution of sparse spike trains by iterated window maximization. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 45(5):1173–1183. 23, 89

KAARESEN, K. F. (1998). Evaluation and applications of the iterated window maximization method for sparse deconvolution. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 46(3):609–624. 23, 89

KAARESEN, K. F. et BOLVIKEN, E. (1999). Blind deconvolution of ultrasonic traces accounting for pulse variance. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 46(3):564–573. 23

KAK, A. C. et DINES, K. A. (1978). Signal processing of broadband pulsed ultrasound : Measurement of attenuation of soft biological tissues. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 25(4):321–344. 24, 29, 34

KARAMAN, M., LI, P.-C. et O'DONNELL, M. (1995). Synthetic aperture imaging for small scale systems. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 42(3):429–442. 136

KELLY, J. F., MCGOUGH, R. J. et MEERSCHAERT, M. M. (2008). Analytical time-domain Green's functions for power-law media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 124(5):2861–2872. 29, 35

KERBRAT, E., PRADA, C., CASSEREAU, D. et FINK, M. (2002). Ultrasonic nondestructive testing of scattering media using the decomposition of the time-reversal operator. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 49(8):1103–1113. 136

KJARTANSSON, E. (1979). Constant Q-Wave Propagation and Attenuation. *Journal of Geophysical Research*, 84(B9):4737–4748. 23, 30

KORMYLO, J. J. et MENDEL, J. M. (1982). Maximum likelihood detection and estimation of Bernoulli - Gaussian processes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 28(3):482–488. 23, 79, 84

KRAMERS, H. A. (1927). La diffusion de la lumière par les atomes. *In Atti del Congresso Internatzionale dei Fisici*, volume 2, pages 545–557, Como-Pavia-Roma, Italy. Zanichelli. 34

KRAUTKRAMER, J. et KRAUTKRAMER, H. (1990). *Ultrasonic Testing of materials*. Springer-Verlag, Berlin. 9, 14, 15, 16, 17, 28, 118, 122, 124

KREUTZ-DELGADO, K., MURRAY, J. F., RAO, B. D., ENGAN, K., LEE, T. W. et SEJNOWSKI, T. J. (2003). Dictionary learning algorithms for sparse representations. *Neural Computation*, 15:592–396. 22, 120

KRONIG, R. d. L. (1926). On the theory of dispersion of x-rays. *Journal of the Optical Society of America*, 12(6):547–556. 34

KUC, R. (1983). Generating a minimum-phase digital filter model for the acoustic attenuation of soft tissue. *In Ultrasonics Symposium*, pages 794–796. 29, 35, 36

KUC, R. (1984). Modeling acoustic attenuation of soft tissue with a minimum-phase filter. *Ultrasonic Imaging*, 6(1):24–36. 24, 29, 35, 36

KUC, R., SCHWARTZ, M. et MICSKY, L. V. (1976). Parametric estimation of the acoustic attenuation coefficient slope for soft tissue. *In Ultrasonics Symposium*, pages 44–47. 29, 30

LEE, C., LAHHAM, M. et MARTIN, B. (1990). Experimental verification of the Kramers-Kronig relationship for acoustic waves. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 37(4):286–294. 34

LEWICKI, M. S. et SEJNOWSKI, T. J. (2000). Learning overcomplete representations. *Neural Computation*, 12:337–365. 22, 120

LHEMERY, A. (1991). Impulse-response method to predict echo-responses from targets of complex geometry. Part I : Theory. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 90(5):2799–2807. 27

LINGVALL, F. (2004a). The DREAM toolbox. http ://www.signal.uu.se/Toolbox/dream. 15

LINGVALL, F. (2004b). *Time-domain Reconstruction methods for ultrasonic array imaging*. Thèse de doctorat, Signals and systems, Uppsala University, Sweden. 143

LINGVALL, F., OLOFSSON, T. et STEPINSKI, T. (2003). Synthetic aperture imaging using sources with finite aperture : Deconvolution of the spatial impulse response. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 114(1):225–234. 43, 118, 136

LU, Y., DEMIRLI, R., CARDOSO, G. et SANIIE, J. (2006). A successive parameter estimation algorithm for chirplet signal decomposition. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 53(11):2121–2131. 22, 67

LU, Y. et MICHAELS, J. (2008). Numerical implementation of matching pursuit for the analysis of complex ultrasonic signals. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 55(1):173–182. 22, 120, 135

MAHAUT, S., DARMON, M., CHATILLON, S., JENSON, F. et CALMON, P. (2009). Recent advances and current trends of ultrasonic modelling in CIVA. *Insight : Non-Destructive Testing & Condition Monitoring*, 51(2):78. 15, 62

MALIOUTOV, D. M., CETIN, M. et WILLSKY, A. S. (2005). Homotopy continuation for sparse signal representation. *In IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, volume 5, pages 733–736, Philadelphia, USA. 76, 77, 79, 106, 107, 124

MALLAT, S. (1999). *A wavelet tour of signal processing*. Academic press. 120

MALLAT, S. et ZHANG, Z. (1993). Matching pursuits with time-frequency dictionaries. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(12):3397–3415. 22, 23, 80, 81, 120

MARGRAVE, F. (1998). The theory of non-stationary linear filtering in the Fourier domain with application to time-variant filtering. *Geophysics*, 63(1):244–259. 43

MARIA, S. et FUCHS, J.-J. (2006). Application of the global matched filter to stap data : an efficient algorithmic approach. *In IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, volume 4, Toulouse, France. 76, 106

MAXIMON, L. C. (2003). The dilogarithm function for complex argument. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 459(2039):2807–2819. 37, 141

MCGOUGH, R. J. (2014). Fast Object-oriented C++ Ultrasound Simulator (FOCUS). http ://www.egr.msu.edu/ fultras-web. 15

MENDEL, J. M. (1983). *Optimal Seismic Deconvolution : an Estimation Based Approach*. Academic Press, New York. 23, 84

MILLER, A. J. (2002). *Subset Selection in Regression*, volume 2nd ed. Chapman & Hall, London, U.K. 80, 85, 149

MOR, E., AZOULAY, A. et ALADJEM, M. (2010). A matching pursuit method for approximating overlapping ultrasonic echoes. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 57(9):1996–2004. 22

MOULIN, P. et LIU, J. (1999). Analysis of multiresolution image denoising schemes using generalized gaussian and complexity priors. *IEEE Transactions on Information Theory*, 45(3):909–919. 23, 76, 77

NANDI, A. K. (1995). On the subsample time delay estimation of narrowband ultrasonic echoes. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 42(6): 993–1001. 22

NARAYANA, P. A. et OPHIR, J. (1983). A closed form method for the measurement of attenuation in nonlinearly dispersive media. *Ultrasonic Imaging*, 5:117–21. 24, 29, 30

NATARAJAN, B. (1995). Sparse approximate solutions to linear systems. *SIAM Journal on Computing*, 24(2):227–234. 80

NEAL, S. P., SPECKMAN, P. L. et ENRIGHT, M. A. (1993). Flaw signature estimation in ultrasonic nondestructive evaluation using the wiener filter with limited prior information. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 40(4):347–353. 23

O'BRIEN, M. S., SINCLAIR, A. N. et KRAMER, S. M. (1990). High resolution deconvolution using least-absolute-values minimization. *In Ultrasonics Symposium*, volume 2, pages 1151–1156. 23

O'BRIEN, M. S., SINCLAIR, A. N. et KRAMER, S. M. (1994). Recovery of a sparse spike time series by ℓ_1 norm deconvolution. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(12): 3353–3365. 10, 23, 41, 76

O'DONNELL, M., JAYNES, E. T. et MILLER, J. G. (1978). General relationships between ultrasonic attenuation and dispersion. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 63(6):1935–1937. 35, 36

OLOFSSON, T. et STEPINSKI, T. (2000). Maximum a posteriori deconvolution of ultrasonic signals using multiple transducers. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 107(6):3276–3288. 41, 75, 118

OLOFSSON, T. et STEPINSKI, T. (2001). Minimum entropy deconvolution of pulse-echo signals acquired from attenuative layered media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 109(6):2831–2839. 10, 23, 43, 45, 133

OPHIR, J. et JAEGER, P. (1982). Spectral shifts of ultrasonic propagation through media with nonlinear dispersive attenuation. *Ultrasonic Imaging*, 4:282–289. 10, 24, 29

OPPENHEIM, A. et SCHAFER, R. (1989). *Discrete-time signal processing*. Prentice-Hall signal processing series. Prentice Hall. 35, 36, 139, 140

OPPENHEIM, A. V., SCHAFER, R. W. et STOCKHAM, T. G. (1968). Nonlinear filtering of multiplied and convolved signals. *Proceedings of the IEEE*, 56(8):1264–1291. 119

PAIVA, A. R. C., PARK, I. et PRÍNCIPE, J. C. (2010). A comparison of binless spike train measures. *Neural Computing and Applications*, 19(3):405–419. 108

PAPOULIS, A. (1962). *The Fourier integral and its applications*. McGraw-Hill electronic sciences series. McGraw-Hill. 34, 35, 36, 139, 140

PATI, Y., REZAIIFAR, R. et KRISHNAPRASAD, P. (1993). Orthogonal matching pursuit : recursive function approximation with applications to wavelet decomposition. *In Conference Record of The Twenty-Seventh Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, volume 1, pages 40–44. 23, 80, 81

PINKERTON, J. M. M. (1949). The absorption of ultrasonic waves in liquids and its relation to molecular constitution. *Proceedings of the Physical Society. Section B*, 62(2):129. 29

QUAZI, A. (1981). An overview on the time delay estimate in active and passive systems for target localization. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 29(3):527–533. 22, 104

RAO, B. D. et KREUTZ-DELGADO, K. (1999). An affine scaling methodology for best basis selection. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47(1):187–200. 23, 77, 80

RASMUSSEN, K. (1994). Maximum likelihood estimation of the attenuated ultrasound pulse. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(1):220–222. 23

RAYLEIGH, J. W. S. (1945). *Theory of sound*, volume 2. Dover, New-York. 27

REEVES, S. J. (1999). An efficient implementation of the backward greedy algorithm for sparse signal reconstruction. *IEEE Signal Processing Letters*, 6(10):266–268. 85, 149

RHYNE, T. L. (1977). Radiation coupling of a disk to a plane and back or disk to a disk : an exact solution. *The Journal of Acoustical Society of America*, 61(2):318–324. 27, 62

RISSANEN, J. (1983). A universal prior for integers and estimation by minimum description length. *The Annals of statistics*, pages 416–431. 80

ROKHLIN, S. I., LEWIS, D. K., GRAFF, K. F. et ADLER, L. (1986). Real-time study of frequency dependence of attenuation and velocity of ultrasonic waves during the curing reaction of epoxy resin. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 79(6):1786–1793. 29

ROLLAND, G. (2014). Algorithmes d'optimisation pour l'estimation des paramètres d'ondes ultrasonores en contrôle non destructif. Rapport de stage de 2ème année d'école d'ingénieur ESEO. 66

SACHSE, W. et PAO, Y.-H. (1978). On the determination of phase and group velocities of dispersive waves in solids. *Journal of Applied Physics*, 49(8):4320–4327. 28

SANIIE, J. et NAGLE, D. (1989). Pattern recognition in the ultrasonic imaging of reverberant multilayered structures. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 36(1):80–92. 17, 122, 123, 126

SCHREIBER, S., FELLOUS, J. M., WHITMER, D., TIESINGA, P. et SEJNOWSKI, T. J. (2003). A new correlation-based measure of spike timing reliability. *Neurocomputing*, 52-54:925–931. 108

SELÉN, Y. et LARSSON, E. G. (2006). Parameter estimation and order selection for linear regression problems. *In IEEE European Signal Processing Conference*, Florence, Italy. 80

SELESNICK, I. et BAYRAM, I. (2014). Sparse signal estimation by maximally sparse convex optimization. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 62(5):1078–1092. 23, 105

SELFRIDGE, A. R. (1985). Approximate material properties in isotropic materials. *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics*, 32(3):381–394. 29, 48, 51, 60, 61, 125, 129

SERABIAN, S. (1967). Influence of attenuation upon the frequency content of a stress wave packet in graphite. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 42(5):1052–1059. 29

SIN, S.-K. et CHEN, C.-H. (1992). A comparison of deconvolution techniques for the ultrasonic nondestructive evaluation of materials. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1(1):3–10. 22, 28

SOUSSEN, C., IDIER, J., BRIE, D. et DUAN, J. (2011). From Bernoulli Gaussian Deconvolution to Sparse Signal Restoration. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 59(10):4572–4584. 10, 23, 77, 79, 80, 81, 83, 84, 105, 124, 148, 149

SOUSSEN, C., IDIER, J., CARCREFF, E., SIMON, L. et POTEL, C. (2012). Ultrasonic non destructive testing based on sparse deconvolution. *Journal of Physics : Conference Series*, 353:012018 (10 pages). 22, 23, 76, 80

STEPHANISHEN, P. R. (1971). Transient radiation from pistons in an infinite baffle. *The Journal of American Society of America*, 49(5):1629–1638. 27, 118

STOICA, P. et SELÉN, Y. (2004). Model-order selection : a review of information criterion rules. *IEEE Signal Processing Magazine*, 21(4):36–47. 72, 80

SZABO, T. (1994). Time domain wave equations for lossy media obeying a frequency power law. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 96:491–500. 35, 36

SZABO, T. L. (1995). Causal theories and data for acoustic attenuation obeying a frequency power law. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 97:14–24. 24, 29, 35, 53

TAYLOR, H. L., BANKS, S. C. et MCCOY, J. F. (1979). Deconvolution with the ℓ_1 norm. *Geophysics*, 44(1):39–52. 10, 23, 76

TIBSHIRANI, R. (1994). Regression shrinkage and selection via the lasso. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 58:267–288. 76

TRIA, M., Van der BAAN, M., LARUE, A., et J., M. (2007). Wavelet estimation in homomorphic domain by spectral averaging for deconvolution of seismic data. *In 5th international conference in Physics in signal and image processing*, Mulhouse, France. 120

TROPP, J. et WRIGHT, S. (2010). Computational methods for sparse solution of linear inverse problems. *Proceedings of the IEEE*, 98(6):948–958. 23, 76

VAN ROSSUM, M. C. W. (2001). A novel spike distance. *Neural Computation*, 13(4):751–763. 108

VAN TREES, H. L. (1968). *Detection, estimation and modulation, part I*. Wiley, New-York. 53

VICTOR, J. D. et PURPURA, K. P. (1996). Nature and precision of temporal coding in visual cortex : a metric-space analysis. *Journal of neurophysiology*, 76(2):1310–1326. 108

VICTOR, J. D. et PURPURA, K. P. (1997). Metric-space analysis of spike trains : theory, algorithms and application. *Network : computation in neural systems*, 8(2):127–164. 108

WAHBA, G. (1977). Practical approximate solutions to linear operator equations when the data are noisy. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 14(4):651–667. 80

WANG, Y. (2009). *Seismic Inverse Q-filtering*. ISTE Ltd and John Wiley & Sons Inc, London, U.K. 23, 30, 35

WEAR, K. (2000). The effects of frequency-dependent attenuation and dispersion on sound speed measurements : applications in human trabecular bone. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 47(1):265–273. 23, 30, 34

YARLAGADDA, R., BEDNAR, J. et WATT, T. (1985). Fast algorithms for ℓ_p deconvolution. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 33(1):174–182. 76, 77

ZALA, C. (1992). High-resolution inversion of ultrasonic traces. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 39(4):458–463. 10, 22, 23, 80, 122, 126

ZHANG, G.-M. et HARVEY, D. M. (2013). Contemporary ultrasonic signal processing approaches for nondestructive evaluation of multilayered structures. *Nondestructive testing and evaluation*, 27(1):1–27. 9, 21, 23

ZHANG, G.-M., HARVEY, D. M. et BRADEN, D. R. (2008). Signal denoising and ultrasonic flaw detection via overcomplete and sparse representations. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 124(5):2963–2972. 22, 120

ZHANG, G.-M., ZHANG, C.-Z. et HARVEY, D. M. (2012). Sparse signal representation and its applications in ultrasonic NDE. *Ultrasonics*, 52(3):351–363. 22, 120

ZISKIND, I. et WAX, M. (1988). Maximum likelihood localization of multiple sources by alternating projection. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 36(10):1553–1560. 22, 71

Thèse de Doctorat

Ewen CARCREFF

Déconvolution adaptative pour le contrôle non destructif par ultrasons

Adaptative deconvolution for ultrasonic non destructive testing

Résumé

Nous nous intéressons au contrôle non destructif par ultrasons des matériaux industriels. En pratique, les signaux réceptionnés par le transducteur ultrasonore sont analysés pour détecter les discontinuités de la pièce inspectée. L'analyse est néanmoins rendue difficile par l'acquisition numérique, les effets de la propagation ultrasonore et la superposition des échos lorsque les discontinuités sont proches. La déconvolution parcimonieuse est une méthode inverse qui permet d'aborder ce problème afin de localiser précisément les discontinuités. Ce procédé favorise les signaux parcimonieux, c'est à dire ne contenant qu'un faible nombre de discontinuités. Dans la littérature, la déconvolution est généralement abordée sous l'hypothèse d'un modèle invariant en fonction de la distance de propagation, modalité qui n'est pas appropriée ici car l'onde se déforme au cours de son parcours et en fonction des discontinuités rencontrées.
Cette thèse développe un modèle et des méthodes associées qui visent à annuler les dégradations dues à l'instrumentation et à la propagation ultrasonore, tout en résolvant des problèmes de superposition d'échos. Le premier axe consiste à modéliser la formation du signal ultrasonore en y intégrant les phénomènes propres aux ultrasons. Cette partie permet de construire un modèle linéaire mais non invariant, prenant en compte l'atténuation et la dispersion. L'étape de modélisation est validée par des acquisitions avec des matériaux atténuants. La deuxième partie de cette thèse concerne le développement de méthodes de déconvolution efficaces pour ce problème, reposant sur la minimisation d'un critère des moindres carrés pénalisé par la pseudo-norme L0. Nous avons développé des algorithmes d'optimisation spécifiques, prenant en compte, d'une part, un modèle de trains d'impulsions sur-échantillonné par rapport aux données, et d'autre part le caractère oscillant des formes d'onde ultrasonores. En utilisant des données synthétiques et expérimentales, ces algorithmes associés à un modèle direct adapté aboutissent à de meilleurs résultats comparés aux approches classiques pour un coût de calcul maîtrisé. Ces algorithmes sont finalement appliqués à des cas concrets de contrôle non destructif où ils démontrent leur efficacité.

Mots clés

Contrôle non destructif, ultrasons, modélisation acoustique, atténuation dispersive, problème inverse, déconvolution, parcimonie.

Abstract

This thesis deals with the ultrasonic non destructive testing of industrial parts. During real experiments, the signals received by the acoustic transducer are analyzed to detect the discontinuities of the part under test. This analysis can be a difficult task due to digital acquisition, propagation effects and echo overlapping if discontinuities are close. Sparse deconvolution is an inverse method that aims to estimate the precise positions of the discontinuities. The underlying hypothesis of this method is a sparse distribution of the solution, which means there are a few number of discontinuities. In the literature, deconvolution is addressed by a linear time-invariant model as a function of propagation distance, which in reality does not hold.
The purpose of this thesis is therefore to develop a model and associated methods in order to cancel the effects of acquisition, propagation and echo overlapping. The first part is focused on the direct model development. In particular, we build a linear time-variant model that takes into account dispersive attenuation. This model is validated with experimental data acquired from attenuative materials. The second part of this work concerns the development of efficient sparse deconvolution algorithms, addressing the minimization of a least squares criterion penalized by a L0 pseudo-norm. Specific algorithms are developed for up-sampled deconvolution, and more robust exploration strategies are built for data containing oscillating waveforms. By using synthetic and experimental data, we show that the developed methods lead to better results compared to standard approaches for a competitive computation time. The proposed methods are then applied to real non destructive testing problems where they confirm their efficiency.

Key Words

Non destructive testing, ultrasound, acoustic modeling, dispersive attenuation, inverse problem, deconvolution, sparsity.