

# Focalisation non linéaire des ondes de choc de cisaillement dans les solides incompressibles

Bruno Giammarinaro

▶ **To cite this version:**

Bruno Giammarinaro. Focalisation non linéaire des ondes de choc de cisaillement dans les solides incompressibles. Acoustique [physics.class-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2016. Français. NNT : 2016PA066054 . tel-01368090

**HAL Id: tel-01368090**

**https://theses.hal.science/tel-01368090**

Submitted on 19 Sep 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Université Pierre et Marie Curie

École Doctorale de Sciences Mécaniques, Acoustique, Électronique et Robotique de Paris (ED391, SMAER)

Institut D'Alembert, Équipe Modélisation, Propagation et Imagerie Acoustique


# Focalisation non linéaire des ondes de choc de cisaillement dans les solides incompressibles


Par **Bruno GIAMMARINARO**


Thèse de doctorat d'Acoustique Physique

Dirigée par : François COULOUVRAT

et co-encadrée par : Gianmarco PINTON

Soutenance le : *5 janvier 2016*

devant un jury composé de :

Stefan CATHELINE, Directeur de recherche INSERM ..... *Rapporteur*

François COULOUVRAT, Directeur de recherche CNRS ..... *Directeur de thèse*

Vitali GOUSSEV, Professeur Université du Maine ..... *Examinateur*

Quentin GRIMAL, Professeur UPMC ..... *Examinateur*

Bruno LOMBARD, Chargé de recherche CNRS ..... *Rapporteur*

Gianmarco PINTON, Assistant Professor, University of North Carolina *Encadrant*

# Remerciements

Je remercie François Coulouvrat pour son accueil et nos longues discussions lors de cette thèse. Je remercie aussi Gianmarco Pinton pour m'avoir proposé ce sujet et pour son apport sur les connaissances techniques. Mais je n'oublierai pas non plus son accueil ni celui de sa petite famille lors de mon séjour aux Etats-Unis ainsi que ses capacités culinaires.

J'adresse tous mes remerciements à Stefan Catheline pour avoir accepté de rapporter mon manuscrit,et pour toutes les discussions informelles sur les effets non linéaires des ondes de cisaillement, mais aussi pour la découverte du vieux Lyon. Merci pareillement à Bruno Lombard pour avoir accepté de rapporter mon manuscrit. Je remercie également Vitali Goussef et Quentin Grimal pour leur participation au Jury.

Je remercie enfin mes parents pour m'avoir soutenu et surtout supporté durant ce travail, et cela ne devait pas être simple. Je n'oublierai pas non plus tous mes amis pour m'avoir épaulé, m'avoir permis de m'évader un peu, que ce soit lors d'activités ludiques (je pense à vous Mélanie et Tina) ou d'activités associatives (oui cette fois c'est vous Alexis, Gaëlle, Kevin, ... ). Et je remercie tout particulièrement Lauriane pour ses grandes capacités d'écoute, et les discussions sur tous les sujets possibles que nous avons pu avoir.

# Table des matières

**1. Introduction** **1**
1.1. Un type d'ondes non linéaires peu exploré . . . . . 1
1.2. Une application potentielle : les lésions traumatiques cérébrales . . . 3
1.2.1. Un enjeu de santé publique . . . . . 3
1.2.2. Un phénomène complexe . . . . . 4
1.2.3. Le point de vue mécanique . . . . . 5
1.3. Plan de la thèse . . . . . 7

**2. Propagation des ondes de cisaillement non linéaires dans les solides incompressibles** **9**
2.1. Rappels de mécanique des milieux continus . . . . . 9
2.1.1. Cinématique dans les solides . . . . . 9
2.1.1.1. La représentation de Lagrange . . . . . 9
2.1.1.2. Description des déformations . . . . . 10
2.1.1.3. Changement d'échelle : du bilan global au bilan local 13
2.1.2. Lois de bilan en représentation de Lagrange . . . . . 15
2.1.2.1. Conservation de la masse . . . . . 15
2.1.2.2. Conservation de la quantité de mouvement . . . . . 16
2.1.2.3. Conservation de l'énergie en variable d'Euler . . . . . 17
2.1.2.4. Conservation de l'énergie en représentation de Lagrange . . . . . 18
2.2. Elastodynamique . . . . . 20
2.2.1. Loi de comportement d'un milieu élastique . . . . . 20
2.2.2. Densité d'énergie interne en élasticité linéaire . . . . . 22
2.2.3. Densité d'énergie interne en élasticité non linéaire . . . . . 23
2.2.4. Densité d'énergie interne en élasticité non linéaire : cas d'un milieu isotrope . . . . . 24
2.2.5. Cas d'un milieu incompressible . . . . . 26

2.2.6. Contrainte de cisaillement en milieu incompressible . . . . . 28
2.3. Équations des ondes non linéaires en milieu incompressible . . . . . 29
2.3.1. L'équation de propagation pour une onde à polarisation linéaire transverse . . . . . 29
2.3.2. L'approximation parabolique . . . . . 31
2.3.3. L'équation de conservation non linéaire cubique . . . . . 33
2.3.3.1. Cas des ondes planes . . . . . 33
2.3.3.2. Solution de Poisson et distance de choc . . . . . 34
2.3.3.3. Vitesse du choc . . . . . 37
2.3.3.4. Condition d'entropie . . . . . 38
2.3.3.5. Le problème de Riemann . . . . . 40
2.3.4. Visco-élasticité dans les solides . . . . . 41
2.3.4.1. Cas des petites déformations . . . . . 41
2.3.4.2. Equation de Burgers modifiée . . . . . 43
2.3.4.3. Corrections non linéaires . . . . . 44

**3. Numerical simulation of focused shock shear waves in soft solids and the brain 47**
3.1. Theoretical and numerical model . . . . . 49
3.2. Validation . . . . . 55
3.2.1. 1D nonlinear case . . . . . 55
3.2.2. 2D linear case . . . . . 57
3.2.3. 2D nonlinear validation : Guiraud's self-similarity law . . . . . 60
3.3. Nonlinear focused shear waves in brain . . . . . 65
3.3.1. Model configuration . . . . . 65
3.3.2. Blunt impact . . . . . 67
3.4. Conclusion . . . . . 72

**4. Propagation non linéaire des ondes planes de cisaillement et mesure des paramètres du gel 75**
4.1. Protocole expérimental . . . . . 76
4.1.1. Montage global . . . . . 76
4.1.2. Le gel . . . . . 78
4.1.3. Le système d'émission . . . . . 79
4.1.3.1. La source . . . . . 79
4.1.3.2. Effets de bord et de diffraction . . . . . 80

4.1.3.3. Le pot vibrant . . . . . 81
4.1.3.4. Limites du couplage . . . . . 83
4.1.4. Système d'acquisition par imagerie ultra-rapide . . . . . 84
4.1.5. Traitement des données . . . . . 86
4.1.5.1. Estimation adaptative des déplacements . . . . . 86
4.1.5.2. Moyennage du signal . . . . . 88
4.1.5.3. Discussion sur le second harmonique . . . . . 90
4.1.5.4. Elimination de la composante continue . . . . . 92
4.2. Détermination des paramètres du gel . . . . . 93
4.2.1. Dispersion . . . . . 93
4.2.1.1. Méthode fréquentielle . . . . . 93
4.2.1.2. Méthode temporelle de corrélation . . . . . 95
4.2.2. Atténuation . . . . . 97
4.2.2.1. Introduction . . . . . 97
4.2.2.2. Méthode générale . . . . . 97
4.2.2.3. Application . . . . . 98
4.2.3. Coefficient non linéaire . . . . . 100
4.2.3.1. Théorie : cas faiblement non linéaire . . . . . 100
4.2.3.2. Observation des non-linéarités . . . . . 103
4.3. Conclusion : comparaison des paramètres du gel . . . . . 105

**5. Focalisation des ondes de choc de cisaillement dans un gel 107**
5.1. Observation expérimentale de la focalisation des ondes de choc de cisaillement . . . . . 107
5.1.1. Protocole expérimental . . . . . 107
5.1.2. Mise en évidence de la focalisation . . . . . 109
5.1.3. Signaux temporels et spectres . . . . . 113
5.1.4. Cartes des harmoniques . . . . . 119
5.2. Comparaison des simulations et des résultats expérimentaux . . . . . 121
5.2.1. Méthode . . . . . 122
5.2.2. Vitesse de propagation en régime linéaire . . . . . 124
5.2.3. Comparaisons . . . . . 127
5.2.3.1. Amplitude . . . . . 127
5.2.3.2. Signaux temporels . . . . . 128
5.2.3.3. Comparaison des spectres . . . . . 130

5.2.3.4. Formation des harmoniques . . . . . 133
5.3. Conclusion . . . . . 137

**6. Conclusion** **143**

**A. Validation du schéma numérique et solution de Riemann** **147**

**Bibliographie** **149**

# 1. Introduction

## 1.1. Un type d'ondes non linéaires peu exploré

La focalisation est un processus majeur d'utilisation des ondes dans de multiples applications. Pour les ondes acoustiques, la focalisation peut être obtenue géométriquement avec des sources incurvées [107, 109, 31] ou des réflecteurs, ou au moyen de lentilles, de réseaux déphasés, de renversement temporel [44] ou de métamatériaux [43]. Les dimensions de la tache focale sont inversement proportionnelles à la longueur d'onde. Ceci implique que les ondes de choc, contenant des hautes fréquences, peuvent être focalisées assez efficacement. La première application de la focalisation des ondes de choc a été la lithotripsie, qui est maintenant la méthode courante (85% des patients) de traitement des calculs rénaux, avec des millions de patients traités depuis le premier essai clinique en 1980 [23]. Au contraire, la focalisation d'une onde de choc en milieu extérieur est un enjeu environnemental important, en particulier dans le cas du bang sonique où la focalisation dans la phase d'accélération transsonique est une contrainte supplémentaire pour la conception d'un avion supersonique [14].

En théorie linéaire des ondes, la focalisation est décrite par la théorie des catastrophes [131, 10] classifiant les caustiques structurellement stables. Les deux caustiques les plus simples sont les caustiques "pli" décrivant par exemple l'arc-en-ciel et la caustique cuspidée. Les formes locales de la diffraction de ces deux caustiques sont données en régime fréquentiel, respectivement par les fonctions d'Airy et de Pearcey. Notons que la focalisation ponctuelle n'est pas décrite par la théorie des catastrophes, étant structurellement instable. Cependant, les ondes de chocs sont des processus ondulatoires intrinsèquement non linéaires. Même pour les chocs de faibles amplitudes, il a été montré que les effets non linéaires jouent un rôle fondamental autour du point focal, en limitant l'amplitude totale du champ [55]. Cela a été étudié en détail, théoriquement, numériquement et expérimentalement en cuve à eau aux

fréquences ultrasonores, pour les caustiques "pli" [83, 85] et les caustiques cuspidées [84]. Plusieurs études se sont intéressées à la focalisation ponctuelle d'ondes de choc, dans le cadre notamment des applications à la lithotripsie [4].

Depuis 2003, un nouveau type d'onde de choc est maintenant accessible à la mesure : les ondes de choc de cisaillement dans les solides mous [20]. En effet, pour la plupart des solides quasi-incompressibles, comme les tissus biologiques, les ordres de grandeur des paramètres élastiques relatifs à la compression sont de six ordres de grandeur (de l'ordre du $GPa$) plus élevés que ceux pour le cisaillement (de l'ordre du $kPa$). Ceci conduit à des différences de trois ordres de grandeur sur la vitesse des ondes de cisaillement comparée à celle des ondes de compression : $c_L$ est de l'ordre de $1500m/s$ pour un milieu majoritairement composé d'eau, et $c_T$ de l'ordre de quelques $m/s$. Cette différence de trois ordres de grandeur, a permis avec le développement des techniques d'imagerie échographique ultrarapides [70], la mesure de la propagation des ondes de cisaillement par le biais de celles de compression, un procédé à la base de l'élastographie ultrasonore [6, 8]. De plus, la faible vitesse de l'onde de cisaillement en fait un candidat idéal pour l'étude des ondes de choc : les effets non linéaires sont proportionnels au carré du nombre de Mach, lui-même inversement proportionnel à $c_T$. En outre, les non-linéarités des ondes planes de cisaillement dans un milieu isotrope s'avèrent cubiques, au lieu de quadratiques pour les ondes de compression [77, 136, 79]. Cela conduit en particulier à l'existence de chocs aussi bien "positifs" que "négatifs" : le champ de vitesse juste avant le choc peut être aussi bien plus grand que plus petit que celui après le choc. Au contraire, seuls les chocs de compression sont thermodynamiquement admissibles pour les ondes de compression. Cette combinaison unique de nouveaux types d'ondes de choc, avec un comportement fondamental spécifique (non-linéarité cubique, nombre de Mach proche de 1), couplé avec les nouvelles techniques expérimentales d'imagerie ultrarapide, a mené aux premières observations expérimentales des ondes de choc planes de cisaillement par Catheline *et al.* [20]. Ce travail a été suivi par une série d'études i) modélisant les ondes de choc de cisaillement en mécanique des milieux continus [60, 137, 133], ii) mesurant les paramètres élastiques non linéaires [49, 117], iii) modélisant les réflexions non linéaire de Mach pour les ondes de choc de cisaillement [110]. Cependant, les observations expérimentales des ondes de choc de cisaillement sont restées rares [69] et, à notre connaissance, la focalisation des ondes de choc de cisaillement n'a jamais été étudiée. C'est cette observation théorique, numérique et expérimentale des chocs de cisaillement focalisés, qui constitue l'objectif du présent

travail.

## 1.2. Une application potentielle : les lésions traumatiques cérébrales

### 1.2.1. Un enjeu de santé publique

Les lésions cérébrales liées à des traumatismes crâniens représentent un enjeu majeur de santé publique mondial. En Europe, entre 1980 et 2003, les lésions cérébrales traumatiques ayant mené à une hospitalisation concernent en moyenne 235 personnes sur 100.000, avec un taux de mortalité de 11% [127]. Des études récentes indiquent que, chaque année aux Etats-Unis, 1.1 million de personnes sont soignées aux urgences pour des traumatismes crâniens, 235.000 sont hospitalisées pour des lésions cérébrales non mortelles, et 50.000 cas de décès sont enregistrés [30]. Cependant, le nombre de traumatismes signalés ne pourrait représenter qu'une petite partie du total. Par exemple, jusqu'à 3,8 millions de traumatismes se produisent chaque année aux USA à l'occasion d'activités sportives [57]. En général, l'épidémiologie des traumatismes crâniens est un exercice difficile, le résultat dépendant fortement de la méthode choisie. Les résultats s'avèrent assez disparates suivant les lieux et les méthodes retenus. Les études, synthétisées dans la référence [127], se basent sur les différents symptômes référencés suivant les normes [105] :

— ICD-9 code 800-804 : fracture du crâne.
— ICD-9 code 850-854 : lésions intracrâniennes.

Si les traumatismes crâniens ont une prévalence aussi importante dans la population, cela vient de leurs causes. En effet, ils résultent majoritairement d'accidents de la vie courante [29, 87]. Les cas les plus graves sont dus aux accidents de la circulation (cf Tab. 1.1) tandis que pour les cas de plus faible gravité, les chutes et les activités sportives représentent un nombre équivalent (cf Tab. 1.2). Au niveau mondial, l'incidence des lésions traumatiques cérébrales est en forte augmentation, principalement en raison de l'utilisation croissante de véhicules motorisés [82]. Ces lésions représentent une proportion importante des décès résultant de traumatismes [95]. Chez les enfants et les jeunes adultes, elles sont responsables de 25% des incapacités de longues durées [25]. Etant donné cette prévalence chez les populations jeunes, ces lésions sont responsables d'un grand nombre des incapacités à long terme

dans l'ensemble de la population, et ce dans des proportions plus importantes que n'importe quelle autre cause [82]. Ainsi, la prévalence des résidents des Etats-Unis avec des incapacités liées à ces lésions est de 3,2 millions [30].

| Cause | Représentation |
|---|---|
| Accident de la circulation | 72% |
| Accidents du travail | 4% |
| Chutes | 8% |
| Chutes dues au sport | 1% |

**Table 1.1.** – Causes principales des traumatismes crâniens graves en Europe [29]

| Cause | Représentation |
|---|---|
| Accident de la circulation | 42% |
| Chutes | 23% |
| Agression | 14% |
| Activités sportives | 12% |
| Divers | 9% |

**Table 1.2.** – Causes principales des traumatismes crâniens de faible gravité en Europe [29]

### 1.2.2. Un phénomène complexe

L'étude des traumatismes crâniens est rendue difficile car les mécanismes des lésions cérébrales sont complexes, et peuvent induire des effets différents, sur les cellules du cerveau : dérèglement fonctionnel, modification de la pression osmotique, problèmes de perméabilité des parois, etc [52]. Cependant, ils se caractérisent tous par une charge mécanique sur la tête, donnant lieu à une déformation des tissus, qui crée ensuite une cascade neurochimique au niveau cellulaire [47, 96]. Ces voies de formation des lésions posent des difficultés d'analyse et de modélisation car elles mettent en jeu des échelles totalement différentes [28, 27, 90]. Ainsi, il existe des études se concentrant sur la modélisation du cerveau par la mécanique des milieux continus (avec une ou plusieurs phases), et des modèles prenant également en compte la chimie du cerveau. Si l'on ne prend en compte que les hypothèses mécaniques, les lésions cérébrales traumatiques peuvent ainsi être le résultat d'un mouvement du cerveau, tel que la compression, la tension ou le cisaillement dus à un impact direct sur la tête, ou à une accélération violente. La mesure de la dynamique du

cerveau durant l'impact est une tâche compliquée. L'accélération de la tête pouvant être facilement obtenue avec des accéléromètres, les études des cinquante dernières années ont été principalement basées sur le seul mouvement global de la tête. Ainsi, les critères actuels de gravité des lésions reposent sur les accélérations mesurées lors de l'impact. Le mouvement est ensuite résumé par un indice appelé Head Injury Criterion (HIC) [101]. Les accélérations linéaire et rotationnelle sont parfois considérées séparément [118, 54]. Cependant, les contributions de ces différentes accélérations n'ont pas encore été établies [56].

### 1.2.3. Le point de vue mécanique

En considérant uniquement le problème du point de vue mécanique, la modélisation des lésions cérébrales peut s'effectuer sous plusieurs hypothèses, dépendant chacune de l'échelle considérée. En effet, le cerveau peut être vu comme une seule phase solide ou, au contraire, comme un milieu poro-élastique avec une phase liquide. Le modèle monophasique, le plus simple, est le plus souvent utilisé. Ainsi, les premières études biomécaniques ont cherché à caractériser expérimentalement le module complexe de cisaillement d'un cerveau de singe, dans le cadre d'un modèle visco-élastique incompressible en petites [42] puis en grandes [41] déformations. Par la suite, les caractérisations se sont concentrées sur le cerveau humain avec des études rhéologiques du cisaillement [124]. Elles travaillent souvent sur un petit échantillon du cerveau soumis à des déformations pour différentes fréquences et différents taux de déformation. Des tests rhéologiques sur des disques de cerveau, pour des fréquences inférieures à $20Hz$, ont été réalisés par Bilston *et al* [11]. D'autres caractérisations avec parfois des modèles plus complexes, prenant par exemple en compte l'anisotropie du milieu, ont été effectuées. Ainsi, Arbogast *et al* ont présenté en 1998 un calcul du module de cisaillement complexe du tronc cérébral pour des fréquences de 20 à $200Hz$, à des déformations de 2.5, 5 et 7.5% [1]. Ce type d'études peut aussi prendre en compte les non-linéarités du milieu comme avec les tests de cisaillement de 0.5 à $200Hz$ effectués par Darvish *et al* [35]. La synthèse de ces résultats montre une très grande disparité dans les propriétés mécaniques du cerveau [21], celles-ci pouvant dépendre de l'espèce étudiée, ou de l'âge de l'organe. Afin de passer outre ces difficultés, certains travaux essaient d'effectuer des études statistiques. Par exemple, Jin *et al* ont réalisé des tests de compression, tension et cisaillement sur 240 cerveaux humains (96 seulement dans le cas du cisaillement) à des taux de déformation

différents [72].

Il faut cependant noter que les tests rhéologiques sont nécessairement effectués *in vitro*. Or, des études récentes ont montré que les différences entre les propriétés mécaniques *in vivo*, *in situ* (sur animal mort) et *in vitro* du cerveau sont possiblement différentes [93, 46]. Dans tous les cas, les expérimentations ont montré un comportement non linéaire pour le cisaillement [38, 67]. Les résultats ont été confirmés sur des cerveaux de porcs et d'humains adultes pour la compression, et mesurés pour le cisaillement (modèle viscoélastique non linéaire) [114]. Les différences de comportement mécanique entre *in vivo* et *in vitro* d'une part, et les difficultés à caractériser le cerveau en fonctionnement d'autre part, ont amené à ne plus seulement utiliser des méthodes de mesure *in vitro* mais aussi à développer des méthodes de caractérisation des tissus *in vivo*. De nos jours, les études mécaniques s'appuient de plus en plus sur des méthodes d'élastographie par résonance magnétique du cerveau. Cette méthode a été développée par Muthupillai *et al* en 1995 [99], et a rapidement été améliorée pour le cerveau [120, 53, 141].

Notons que toutes ces études ne donnent pas nécessairement des résultats concluants pour l'étude de la propagation des ondes de cisaillement non linéaires. En effet, les tests rhéologiques sont effectués sur des échantillons très petits, ne donnant pas lieu à une propagation d'ondes. De plus, les fréquences utilisées sont généralement inférieures à $200Hz$, en-deçà des hautes fréquences présentes en cas de chocs. Dans les cas de l'élastographie par résonance magnétique, les déplacements utilisés sont très faibles et ne permettent ainsi que de mesurer les paramètres linéaires du milieu. Toutefois, des mesures des caractéristiques mécaniques pour les ondes de cisaillement dans le cerveau ont été effectuées très récemment au moyen de méthodes d'imagerie échographique à haute cadence [71].

Il y a cependant peu de recherches sur les déplacements dans le cerveau et leurs relations aux lésions. Les mesures précédentes de ces déplacements se faisaient en plaçant les cerveaux étudiés dans des gels optiquement transparents avec maillage et filmés avec une caméra ultra-rapide [86, 91], ou bien avec des marqueurs implantés *ex vivo* dont les mouvements étaient suivis par rayon X à haute cadence [61]. Plus récemment, l'imagerie par résonance magnétique a été également utilisée pour des mesures non invasives de faibles déplacements du cerveau [5, 26]. L'imagerie à résonance magnétique de la tête est complètement non invasive et utilisable pour l'imagerie *in vivo* du corps humain. Cependant, cette technique a une faible cadence

d'imagerie. De plus, l'excitation de la tête (impact par exemple) doit être répétée pour chaque ligne d'acquisition. De plus grandes cadences d'imagerie sont donc nécessaires pour observer des événements rapides, dont les échelles de temps sont plus courtes que l'intervalle de temps entre deux acquisitions. Les études expérimentales les plus récentes concernent même des ondes de souffle. Ainsi, Shridharani *et al.* présentent en 2012 des expériences utilisant des tubes à choc [123] auxquels des porcs sont soumis, afin de vérifier l'impact et les effets des ondes de choc sur les cerveaux.

Dans le même temps, les études expérimentales sont couplées à des études numériques basées sur différents modèles du cerveau. Les méthodes numériques pour les modèles biomécaniques de la tête sont dominées par les méthodes d'éléments finis, celles-ci permettant de modéliser précisément et facilement les structures détaillées du crâne et du cerveau en supposant des modèles mécaniques plus ou moins complexes. Dans les premières études, les déformations de cisaillement étaient ainsi modélisées par des méthodes d'éléments finis dans le cadre de l'élasticité linéaire [125, 66]. Certaines modélisations de traumatismes crâniens ont ensuite été basées sur des modèles de viscoélasticité linéaire combinés à des approches en grandes déformations [139, 130], et d'autres sur des modèles hyperélastiques de milieu quasi-incompressible en grandes déformations[104, 94]. Certaines études ont essayé d'inclure des phénomènes de viscoélasticité non linéaire [16]. Cependant, la plupart de ces modèles ne semblent pas prendre en compte la formation des ondes de choc de cisaillement, la plupart se restreignant aux non-linéarités géométriques dues aux grandes déformations dans le cas du cisaillement. L'étude de la formation d'ondes de choc de cisaillement dans le cerveau reste donc à entreprendre. En raison de la géométrie de la boîte crânienne, une propagation en ondes planes apparaît peu réaliste, et les effets de focalisation peuvent entrer en jeu. C'est dans cet objectif que la présente étude a été entreprise.

## 1.3. Plan de la thèse

Dans une première partie (chapitre 2) essentiellement bibliographique, le modèle mécanique de propagation d'ondes de choc de cisaillement focalisées sera établi. On rappellera les équations générales de la mécanique des milieux continus en variables de Lagrange adaptées à la mécanique des solides, puis les principes de l'élastodynamique, notamment dans le cas des milieux isotropes incompressibles. Ceci nous

conduira à l'établissement d'une équation d'ondes non linéaire bidimensionnelle dans le cas d'une onde à polarisation transverse linéaire. Au moyen d'une approximation paraxiale, on obtiendra finalement l'équation modèle qui sera utilisée dans la suite de l'étude. Le chapitre 3 présentera l'algorithme de résolution de cette équation, et sa validation au moyen de différents tests, linéaires et non linéaires. Un exemple de simulation pour une configuration représentative d'un traumatisme sera ensuite présenté. Il est à noter que ce chapitre se présente sous la forme d'un article soumis pour publication à une revue internationale à comité de lecture. Le chapitre suivant est dédié à la présentation du dispositif expérimental de génération et de mesure des ondes de choc de cisaillement dans un gel. Les méthodes de fabrication du gel, d'excitation des ondes de cisaillement par une plaque insérée dans le gel et couplée à un pot vibrant, d'acquisition du déplacement de micro-particules dans le gel par imagerie ultrasonore ultra-rapide, et de traitement des données, seront détaillées. Dans un second temps, le dispositif sera appliqué au cas de l'onde plane afin de mesurer les paramètres (vitesse de propagation, absorption, paramètre de non-linéarité) du gel. Le cinquième chapitre est consacré à l'observation, la mesure et la simulation des ondes de choc de cisaillement focalisées dans le gel au moyen du dispositif expérimental présenté précédemment. Dans un premier temps, l'observation portera sur la cartographie générale du champ focalisé pour différents paramètres (vitesse, énergie, accélération et composantes harmoniques), l'étude du champ axial et l'analyse de quelques signaux temporels et de leur spectre. Dans un second temps, une analyse quantitative sera réalisée en comparant mesures et simulations numériques. Le meilleur rapport signal sur bruit obtenu dans le cas d'une onde focalisée de plus grande amplitude que dans le cas de l'onde plane, nous permettra d'affiner l'estimation des paramètres du milieu et notamment du paramètre non linéaire. Une valeur relativement précise de celui-ci sera proposée et, pour cette valeur, l'ensemble des données synthétisées dans la phase d'observation, sera comparée à la simulation. Le manuscrit sera complétée par une conclusion générale de l'analyse et quelques perspectives d'études ultérieures.

# 2. Propagation des ondes de cisaillement non linéaires dans les solides incompressibles

## 2.1. Rappels de mécanique des milieux continus

### 2.1.1. Cinématique dans les solides

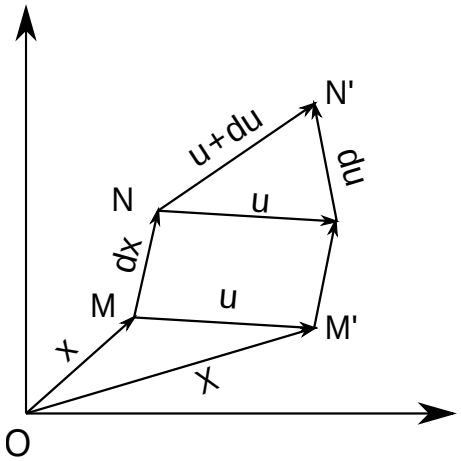



**Figure 2.1.** – Représentation lagrangienne

#### 2.1.1.1. La représentation de Lagrange

En mécanique des milieux continus, il y a deux représentations usuelles [51] : la représentation d'Euler qui correspond à un point d'observation fixe, et la repré-

sentation de Lagrange qui suit les particules étudiées dans leur mouvement. Cette dernière est généralement utilisée en mécanique des solides car les particules solides se déplacent relativement peu (comparativement au cas fluide). Ainsi, les particules dans un solide peuvent être caractérisées par leur position dans un état de référence, fréquemment choisi comme l'état d'équilibre en l'absence de toute contrainte extérieure. Soit $M$ un point matériel dont la position à l'équilibre est $\vec{x}$, sa position à un instant $t$ est donnée par la fonction $\vec{X}(\vec{x},t)$. Ainsi, le déplacement de la particule par rapport à la position d'équilibre est :

$$\vec{u}(\vec{x},t) = \vec{X}(\vec{x},t) - \vec{x}, \tag{2.1}$$

et la vitesse de la particule $\vec{v}$ est donnée par :

$$\vec{v}(\vec{x},t) = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}. \tag{2.2}$$

#### 2.1.1.2. Description des déformations

La déformation du solide se définit en étudiant deux points assez proches, M et N (cf Fig. 2.1), déterminés par leur position à l'état d'équilibre $\vec{x}$ et $\vec{x} + d\vec{x}$. Après déformation, les deux points sont respectivement à l'instant $t$ aux positions $\vec{X}(\vec{x},t)$ (point M' sur la figure) et $\vec{X}(\vec{x}+d\vec{x},t)$ (point M' sur la figure). La déformation du milieu est ainsi $d\vec{X} = \vec{X}(\vec{x}+d\vec{x},t) - \vec{X}(\vec{x},t)$. En considérant un écart infinitésimal, on obtient donc que la déformation est donnée par :

$$d\vec{X} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \vec{x}}.d\vec{x} = F.d\vec{x} \quad \left(dX_i = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dx_j\right), \tag{2.3}$$

où l'on a utilisé la convention de sommation sur l'indice muet. On appelle gradient des déformations le tenseur $F = {}^{\partial \vec{X}}/_{\partial \vec{x}}$. En utilisant comme grandeur principale le déplacement des particules, il se définit, avec $I$ le tenseur identité de rang 2, par :

$$F = I + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{x}} \quad \left(F_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right). \tag{2.4}$$

Il est possible de calculer la variation de longueur de l'écart $d\vec{x}$ entre les points M et N, qui après déformation est donnée par l'écart $d\vec{X}$ entre les points M' et N'. La longueur de ce dernier peut se déterminer par $d\vec{X}^2 = \left(d\vec{x}^2 + d\vec{u}\right)^2$. Le développement

donne ainsi :

$$d\vec{X}^2 - d\vec{x}^2 = 2\frac{\partial u_i}{\partial x_k}dx_k dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}dx_k dx_l. \tag{2.5}$$

Les indices du terme $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}dx_k dx_i$ étant muets, ce dernier peut s'écrire sous une forme symétrique [76] :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k}dx_k dx_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)dx_k dx_i. \tag{2.6}$$

L'introduction de la relation Eq.(2.6) dans Eq.(2.5) mène ainsi à :

$$d\vec{X}^2 - d\vec{x}^2 = 2S_{ij}dx_i dx_j, \tag{2.7}$$

avec

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right), \tag{2.8}$$

le tenseur (symétrique) des déformations de Green-Lagrange qui permet de décrire les variations de longueur d'un élément de solide. Ce tenseur des déformations peut s'exprimer en fonction du gradient des déformations $F$ sous la forme :

$$S = \frac{1}{2}\left(F^T.F - I\right) \tag{2.9}$$

où $F^T$ est la transposée de $F$.

Il est possible de continuer à étudier les variations des paramètres géométriques du milieu entre un état de référence et un état déformé. Soient trois vecteurs $d\vec{A}$, $d\vec{B}$ et $d\vec{C}$ dans l'état de référence. Après déformation, ils sont respectivement décrits par :

$$d\vec{X} = F.d\vec{A} \quad d\vec{Y} = F.d\vec{B} \quad d\vec{Z} = F.d\vec{C}. \tag{2.10}$$

Les volumes formés par les trois vecteurs dans l'état de référence et après déformation sont respectivement $dV_a = (d\vec{A}\wedge d\vec{B}).d\vec{C}$ et $dV = (d\vec{X}\wedge d\vec{Y}).d\vec{Z}$. Le produit vectoriel peut s'écrire en introduisant un tenseur $\epsilon_{ijk}$ dépendant des permutations du triplet

$(1,2,3)$ tel que :

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j,k) \text{ permutation paire de (1,2,3)} \\ -1 & \text{si } (i,j,k) \text{ permutation impaire de (1,2,3)} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{2.11}$$

si bien que le produit vectoriel s'exprime par :

$$(\vec{x} \wedge \vec{y})_i = \epsilon_{ijk} x_j y_k. \tag{2.12}$$

En utilisant Eq.(2.12), le volume peut s'écrire :

$$dV = \epsilon_{ijk} dX_j dY_k dZ_i = \epsilon_{ijk} F_{j\alpha} F_{k\beta} F_{i\gamma} dA_\alpha dB_\beta dC_\gamma. \tag{2.13}$$

Cependant, le déterminant du tenseur $F$ est défini d'après [51] comme :

$$\epsilon_{ijk} F_{j\alpha} F_{k\beta} F_{i\gamma} = det(F) \epsilon_{\gamma\alpha\beta}. \tag{2.14}$$

La substitution de Eq.(2.14) dans Eq.(2.13) permet ainsi d'obtenir :

$$dV = det(F) \epsilon_{\gamma\alpha\beta} dA_\alpha dB_\beta dC_\gamma = det(F)(d\vec{A} \wedge d\vec{B}).d\vec{C}. \tag{2.15}$$

En posant $J = det(F)$, on en déduit que la variation d'un élément de volume noté $dV_a$ dans l'état de référence s'écrit en fonction du gradient des déformations [50] comme :

$$dV = J(t) dV_a. \tag{2.16}$$

Le travail effectué pour quantifier les variations du volume peut être reproduit sur les éléments de surface $d\vec{S}_a = d\vec{A} \wedge d\vec{B}$ et $d\vec{S} = d\vec{X} \wedge d\vec{Y}$. D'après la définition de la déformation Eq.(2.10) et la définition du produit vectoriel Eq.(2.12), il vient :

$$dS_i = \epsilon_{ijk} F_{j\alpha} dA_\alpha F_{k\beta} dB_\beta. \tag{2.17}$$

Afin de faire apparaître le déterminant $J$, Eq.(2.17) est multipliée par le gradient

des déformations :

$$\begin{aligned} F_{i\gamma}dS_i &= \epsilon_{ijk}F_{i\gamma}F_{j\alpha}dA_\alpha F_{k\beta}dB_\beta \\ \Leftrightarrow F_{i\gamma}dS_i &= det(F)\epsilon_{\gamma\alpha\beta}dA_\alpha dB_\beta \\ \Leftrightarrow F^T.d\vec{S} &= det(F)d\vec{A}\wedge d\vec{B} \\ \Leftrightarrow F^T.d\vec{S} &= det(F)d\vec{S}_a. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Eq.(2.18) décrit ainsi la transformation entre l'état de référence et l'état déformé pour un élément de surface à partir du gradient des déformations. Pour une formulation plus simple, on utilise la propriété de commutation entre la transposée et la matrice inverse donnée par $(F^T)^{-1} = (F^{-1})^T$. Ainsi, Eq.(2.18) peut s'écrire avec $G = F^{-1}$ sous la forme :

$$d\vec{S} = JG^T.d\vec{S}_a. \tag{2.19}$$

#### 2.1.1.3. Changement d'échelle : du bilan global au bilan local

La description des différents phénomènes nécessite de passer d'une étude macroscopique des paramètres à une étude locale mésoscopique. Soient une quantité $H$ globale et $h$ sa densité par unité de volume en représentation eulérienne, la relation entre ces deux quantités étant :

$$H = \iiint_V h dV. \tag{2.20}$$

La représentation d'Euler implique que la dérivée de la quantité $H$ lorsque l'on suit le milieu dans son mouvement :

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint_V h dV \neq \iiint_V \frac{\partial h}{\partial t} dV \tag{2.21}$$

car il convient de prendre également en compte la variation du volume de calcul $V$ avec le mouvement du milieu. Par définition de la dérivée, on a :

$$\frac{d}{dt}\iiint_V h dV = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\iiint_{V(t+\Delta t)} h(t+\Delta t)dV - \iiint_{V(t)} h(t)dV\right]. \tag{2.22}$$

On fait maintenant apparaître la variation du volume considéré à densité $h$ constante de la façon suivante :

$$\frac{d}{dt}\iiint_V h dV = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\iiint_{V(t+\Delta t)} h(t+\Delta t)dV - \iiint_{V(t+\Delta t)} h(t)dV + \iiint_{V(t+\Delta t)} h(t)dV - \iiint_{V(t)} h(t)dV\right]. \quad (2.23)$$

Le passage à la limite de la première différence à volume fixé donne :

$$\frac{d}{dt}\iiint_V h dV = \iiint_V \frac{\partial h}{\partial t}dV + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\iiint_{V(t+\Delta t)} h(t)dV - \iiint_{V(t)} h(t)dV\right]. \quad (2.24)$$

Or, le terme

$$\iiint_{V(t+\Delta t)} h(t)dV - \iiint_{V(t)} h(t)dV$$

en deuxième ligne dans Eq.(2.24) correspond à la variation de $H$ associée au changement de volume $\Delta V$ pendant la durée $\Delta t$, $h$ étant par ailleurs constante. Au passage à la limite, ce changement de volume résulte d'un petit déplacement des points de la surface de la quantité $\vec{u} = \vec{v}\Delta t$ où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse. En introduisant le vecteur $\vec{n}$ unitaire normal à la surface $\partial V$, le changement de volume s'écrit :

$$\Delta V = \oiint_{\partial V} \vec{u}.\vec{n}dS. \quad (2.25)$$

Il vient alors :

$$\frac{d}{dt}\iiint_V h dV = \iiint_V \frac{\partial h}{\partial t}dV + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\oiint_{\partial V} h(t)\vec{v}.\vec{n}\Delta t dS\right]. \quad (2.26)$$

En passant Eq.(2.26) à la limite, on trouve ainsi :

$$\frac{d}{dt}\iiint_V h dV = \iiint_V \frac{\partial h}{\partial t}dV + \oiint_{\partial V} h(t)\vec{v}.\vec{n}dS. \quad (2.27)$$

L'application du théorème de la divergence à Eq.(2.27) mène à :

$$\frac{d}{dt}\iiint_V h dV = \iiint_V \left(\frac{\partial h}{\partial t} + div(h\vec{v})\right) dv. \tag{2.28}$$

## 2.1.2. Lois de bilan en représentation de Lagrange

### 2.1.2.1. Conservation de la masse

Soient un volume $V$ et $\rho$ la masse volumique, la loi de la conservation de la masse en représentation d'Euler s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho dV = 0. \tag{2.29}$$

Ceci étant vrai quel que soit le volume $V$ considéré, on en déduit d'après Eq.(2.28) la forme locale de la loi de conservation de la masse en coordonnées eulériennes :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\vec{v}) = 0. \tag{2.30}$$

En coordonnées lagrangiennes, l'équation de conservation devient en utilisant Eq.(2.16) :

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho dV = \frac{d}{dt}\iiint_{V_a} \rho J dV_a = 0. \tag{2.31}$$

Eq.(2.31) revient à considérer que la masse est constante quelle que soit la déformation du solide. La masse totale est donc identique à celle du volume dans l'état de référence. Ainsi, en notant $\rho_a(\vec{x})$ la masse volumique dans l'état de référence, il vient :

$$\iiint_{V_a} \rho J dV_a = \iiint_{V_a} \rho_a dV_a. \tag{2.32}$$

La relation ci-dessus étant vraie pour tout volume $V$, Eq.(2.32) mène ainsi à la relation entre le déterminant du gradient de déformation $J$ et la masse volumique du milieu :

$$J = det(F) = \frac{\rho_a}{\rho}. \tag{2.33}$$

**Lemme :** Soit $g$ une fonction continue et dérivable, il vient en appliquant la loi de conservation de la masse donnée par Eq.(2.30) :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho g + div(\rho g\vec{v}) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\rho + div(\rho\vec{v})\right) g + \rho\frac{dg}{dt} = \rho\frac{dg}{dt} \tag{2.34}$$

où $dg/dt = \partial g/\partial t + \vec{v}.\vec{\nabla}g$ est la dérivée particulaire de la fonction $g$.

#### 2.1.2.2. Conservation de la quantité de mouvement

La loi de conservation de la quantité de mouvement appliquée à un volume $V$ est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho\vec{v}dV + \oiint_{\partial V} \overline{\overline{\sigma}}.d\vec{S} = \iiint_V \rho\vec{f}dV \tag{2.35}$$

où $\overline{\overline{\sigma}}$ est le tenseur des contraintes de Cauchy et $\vec{f}$ les forces extérieures s'exerçant sur le milieu. Cette relation stipule que la variation de quantité de mouvement du milieu résulte de deux contributions : les forces extérieures agissant en volume sur le milieu considéré (par exemple les forces de pesanteur), et les forces internes au milieu exercées sur le volume considéré par le reste du milieu par le biais d'un contact surfacique.

Compte tenu du Lemme 2.34, la forme locale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement en variables d'Euler prend la forme bien connue :

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} - div\overline{\overline{\sigma}} = \rho\vec{f}. \tag{2.36}$$

Notons également que la conservation du moment cinétique implique que le tenseur des contraintes de Cauchy est symétrique : $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

L'utilisation des relations de passage en coordonnées lagrangiennes pour un élément de volume Eq.(2.16) et un élément de surface Eq.(2.19) dans Eq.(2.35) aboutit à la loi de bilan en coordonnées lagrangiennes :

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_a} \rho\vec{v}JdV_a - \oiint_{\partial V_a} \overline{\overline{\sigma}}.(JG^T.d\vec{S_a}) = \iiint_{V_a} \rho\vec{f}JdV_a. \tag{2.37}$$

L'introduction de la relation de conservation de la masse Eq.(2.33) dans Eq.(2.37)

simplifie celle-ci :

$$\iiint_{V_a} \rho_a \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dV_a - \oiint_{\partial V_a} (J\overline{\overline{\sigma}}.G^T).d\vec{S_a} = \iiint_{V_a} \rho_a \vec{f} dV_a. \tag{2.38}$$

Eq.(2.38) permet de définir le premier tenseur de Piola-Kirchhoff $P$, également appelé tenseur de Piola-Lagrange, par :

$$P = J\overline{\overline{\sigma}}.G^T. \tag{2.39}$$

L'application du théorème de Green-Ostrogradski sur Eq.(2.38) donne ainsi l'équation de mouvement en représentation lagrangienne :

$$\rho_a \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - div_a P = \rho_a \vec{f}. \tag{2.40}$$

#### 2.1.2.3. Conservation de l'énergie en variable d'Euler

La variation de l'énergie totale $E_t$ d'un volume $V$ dépend du travail des efforts de surfaces modélisés par le tenseur des contraintes de Cauchy $\overline{\overline{\sigma}}$, du travail des forces de volume à distance $\vec{f}$, des flux de chaleur $\vec{q}$ entre le volume et l'extérieur et du rayonnement $r$. Ainsi, le bilan de l'énergie sur le volume s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \iiint_V E_t dV - \oiint_{\partial V} (\overline{\overline{\sigma}}.\vec{v}) .d\vec{S} - \iiint_V \rho \vec{f}.\vec{v} dV = - \oiint_{\partial V} \vec{q}.d\vec{S} + \iiint_V r dV. \tag{2.41}$$

La densité d'énergie totale par unité de volume $E_t$ se compose de la densité volumique d'énergie cinétique $\frac{1}{2}\rho v^2$ et de la densité volumique d'énergie interne $\rho e$. La variation de l'énergie cinétique est décrite par le théorème de l'énergie cinétique. Pour cela, on part de la conservation de la quantité de mouvement Eq.(2.35) et on effectue un produit scalaire de cette équation avec $\vec{v}$. Cette étape donne :

$$\left(\frac{d}{dt}\rho\vec{v} = div(\overline{\overline{\sigma}}) + \rho\vec{f}\right).\vec{v} \tag{2.42}$$

$$\Leftrightarrow \rho \frac{d}{dt}\frac{v^2}{2} = div(\overline{\overline{\sigma}}).\vec{v} + \rho\vec{f}.\vec{v}. \tag{2.43}$$

Dans Eq.(2.43), la partie provenant des efforts de surface peut se réécrire sous une autre forme en utilisant :

$$div(\overline{\overline{\sigma}}).\vec{v} = \sigma_{ij,j}v_i = (\sigma_{ij}v_i)_{,j} - \sigma_{ij}v_{i,j}. \tag{2.44}$$

Le tenseur $\sigma_{i,j}$ étant symétrique, on peut écrire $\sigma_{ij}v_{i,j} = \sigma_{ij}D_{i,j}$ où $D_{i,j} = \frac{1}{2}(v_{i,j}+v_{j,i})$ est le tenseur des taux de déformations noté $\overline{\overline{D}}$. Ainsi, le théorème de l'énergie cinétique s'écrit sous la forme :

$$\rho\frac{d}{dt}\frac{v^2}{2} = div(\overline{\overline{\sigma}}.\vec{v}) - \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{D}} + \rho\vec{f}.\vec{v}. \tag{2.45}$$

Il est possible de passer à un bilan local de l'énergie déterminé à partir de Eq.(2.41) en utilisant la relation de passage donnée par Eq.(2.28). L'équation de bilan devient ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e+\frac{v^2}{2}\right)\right] + div\left[\rho\left(e+\frac{v^2}{2}\right)\right] = div(\overline{\overline{\sigma}}.\vec{v}) + \rho\vec{f}.\vec{v} - div(\vec{q}) + r. \tag{2.46}$$

Cette nouvelle équation peut se simplifier en utilisant la propriété issue de la conservation de la masse, Lemme 2.34 permet ainsi de simplifier Eq.(2.46) en posant $g = \rho(e + v^2/2)$. L'équation de bilan devient ainsi :

$$\rho\frac{d}{dt}\left(e+\frac{v^2}{2}\right) = div(\overline{\overline{\sigma}}.\vec{v}) + \rho\vec{f}.\vec{v} - div(\vec{q}) + r. \tag{2.47}$$

Il est possible maintenant possible d'écrire une équation d'évolution de l'énergie interne en utilisant le théorème de l'énergie cinétique Eq.(2.45) dans Eq.(2.47). Il s'ensuit :

$$\rho\frac{de}{dt} = \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{D}} - div(\vec{q}) + r. \tag{2.48}$$

#### 2.1.2.4. Conservation de l'énergie en représentation de Lagrange

L'équation de bilan en représentation de Lagrange se déduit à partir de celle en coordonnées eulériennes donnée par Eq.(2.41) en utilisant les relations Eq.(2.16) et

Eq.(2.19) :

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_a} JE_t dV_a - \oiint_{\partial V_a} (\overline{\overline{\sigma}}.\vec{v})\,.\left(JG^T d\vec{S}_a\right) - \iiint_{V_a} \rho J\vec{f}.\vec{v} dV_a = \\ - \oiint_{\partial V_a} \vec{q}.\left(JG^T d\vec{S}_a\right) + \iiint_{V_a} Jr dV_a. \quad (2.49)$$

Dans Eq.(2.49), les termes d'intégration sur une surface fermée peuvent se transformer en une intégrale de volume. A cet effet, soit $\vec{g}$ un vecteur, il vient :

$$\vec{g}.\left(JG^T d\vec{S}_a\right) = Jg_i(G^T)_{ik}(dS_a)_k = JG_{ki}g_i(dS_a)_k = (JG.\vec{g})d\vec{S}_a. \quad (2.50)$$

L'utilisation de la relation Eq.(2.50) dans Eq.(2.49) permet d'établir l'équation de bilan local en utilisant le théorème de Green-Ostrogradki. Eq.(2.49) devient ainsi :

$$\rho_a \frac{\partial}{\partial t}\left(e + \frac{v^2}{2}\right) = div_a\left[J(G.\overline{\overline{\sigma}}).\vec{v}\right] + \rho_a\vec{f}.\vec{v} - div_a\left[JG.\vec{q}\right] + Jr. \quad (2.51)$$

Pour la suite, on pose $\vec{q}_a = JG.\vec{q}$ et $r_a = Jr$ respectivement le flux de chaleur et le rayonnement en représentation lagrangienne.

En appliquant la même méthode que pour trouver Eq.(2.45), mais cette fois à la loi de conservation de la quantité de mouvement Eq.(2.38) en variable de Lagrange, il vient :

$$\frac{\rho_a}{2}\frac{\partial v^2}{\partial t} = (div_a P).\vec{v} + \rho_a\vec{f}.\vec{v}. \quad (2.52)$$

Or, on a :

$$(div_a P).\vec{v} = P_{ij,j}v_i \Leftrightarrow (div_a P).\vec{v} = (P_{ij}v_i)_j - P_{ij}v_{i,j} \Leftrightarrow (div_a P).\vec{v} = div_a(P^T.\vec{v}) - P_{ij}v_{i,j}. \quad (2.53)$$

Pour simplifier l'écriture, on peut remarquer que $P_{ij}v_{i,j} = tr(P.\dot{F}^T)$, ce qui combiné à Eq.(2.53) et introduit dans Eq.(2.52) mène à :

$$\frac{\rho_a}{2}\frac{\partial v^2}{\partial t} = div_a(P^T.\vec{v}) - tr(P.\dot{F}^T) + \rho_a\vec{f}.\vec{v}, \quad (2.54)$$

qui apparaît ainsi comme le théorème de l'énergie cinétique en variables de Lagrange. En soustrayant Eq.(2.54) au bilan local d'énergie Eq.(2.51), on aboutit ainsi à la loi

d'évolution de l'énergie interne :

$$\rho_a \frac{\partial e}{\partial t} = tr(P.\dot{F}^T) - div_a(\vec{q}_a) + r_a. \tag{2.55}$$

## 2.2. Elastodynamique

### 2.2.1. Loi de comportement d'un milieu élastique

Pour un milieu élastique, la densité d'énergie interne $e$ est supposée ne dépendre que de la densité d'entropie $s$ et des déformations décrites par le tenseur des déformations $S$, ce qui s'écrit :

$$de = Tds + \frac{\partial e}{\partial S_{ij}} dS_{ij}, \tag{2.56}$$

où $T$ est la température du milieu. L'introduction de Eq.(2.56) dans la loi de bilan de l'énergie donnée sous la forme Eq.(2.55) mène à :

$$\rho_a T \frac{\partial s}{\partial t} = -\rho_a \frac{\partial e}{\partial S_{ij}} \frac{\partial S_{ij}}{\partial t} + tr(P.\dot{F}^T) - div_a(\vec{q}_a) + r_a. \tag{2.57}$$

En l'absence de flux de chaleur ($\vec{q}_a = 0$) et de rayonnement ($r_a = 0$), un milieu élastique se caractérise par des transformations réversibles ($\partial s/\partial t = 0$) en toute situation. Ceci ne peut donc être satisfait qu'en annulant le terme au second membre de Eq.(2.57) à l'origine des variations de l'entropie. On en déduit que l'on a nécessairement :

$$\rho_a \frac{\partial e}{\partial S_{ij}} \frac{\partial S_{ij}}{\partial t} = tr(P.\dot{F}^T) = P_{ij}(\dot{F}^T)_{ji}. \tag{2.58}$$

Le membre de gauche de Eq.(2.58) peut être réécrit afin d'expliciter le tenseur des contraintes de Piola-Lagrange $P$ en fonction de la densité d'énergie $e$. Ce premier membre peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial S_{ij}} \frac{\partial S_{ij}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial e}{\partial S_{ij}} \left[ (\dot{F}^T)_{ik} F_{kj} + (F^T)_{ik} \dot{F}_{kj}) \right] \\ \Leftrightarrow 2 \frac{\partial e}{\partial S_{ij}} \frac{\partial S_{ij}}{\partial t} &= \frac{\partial e}{\partial S_{ij}} \left[ (\dot{F}^T)_{ik} F_{kj} + F_{ki} (\dot{F}^T)_{jk}) \right]. \end{aligned}$$

En utilisant que le tenseur des déformations de Green-Lagrange $S$ est symétrique, l'équation précédente devient :

$$2\frac{\partial e}{\partial S_{ij}}\frac{\partial S_{ij}}{\partial t} = F_{kj}\frac{\partial e}{\partial S_{ji}}(\dot{F}^T)_{ik} + F_{ki}\frac{\partial e}{\partial S_{ij}}(\dot{F}^T)_{jk} = 2F_{ki}\frac{\partial e}{\partial S_{ij}}(\dot{F}^T)_{jk}. \tag{2.59}$$

Par permutation des indices $i$ et $k$, et comparaison avec Eq.(2.58), il vient :

$$\rho_a\frac{\partial e}{\partial S_{ij}}\frac{\partial S_{ij}}{\partial t} = \rho_a F_{ki}\frac{\partial e}{\partial S_{ij}}(\dot{F}^T)_{jk} = P_{ij}(\dot{F}^T)_{ji}. \tag{2.60}$$

Cette relation devant être satisfaite pour toute déformation, donc quel que soit le tenseur gradient des déformations $F$, Eq.(2.60) permet ainsi de déterminer le premier tenseur de Piola-Kirchhoff en fonction de la densité d'énergie :

$$P = \rho_a F.\frac{\partial e}{\partial S}. \tag{2.61}$$

Cependant, Eq.(2.61) est peu utilisée pour le calcul du tenseur des contraintes. En effet, il est possible de réécrire cette équation en ne la faisant dépendre que du tenseur gradient des déformations $F$ sous la forme $P = \rho_a\frac{\partial e}{\partial F}$. Commençons par exprimer la quantité $\frac{\partial e}{\partial F}$ en fonction du second tenseur de Piola-Kirchhoff :

$$\rho_a\frac{\partial e}{\partial F_{ij}} = \rho_a\frac{\partial e}{\partial S_{kl}}\frac{\partial S_{kl}}{\partial F_{ij}}. \tag{2.62}$$

La définition de $S$ mène à :

$$\frac{\partial S_{kl}}{\partial F_{ij}} = \frac{1}{2}\left(F_{il}\delta_{kj} + F_{ik}\delta_{lj}\right), \tag{2.63}$$

et après introduction dans Eq.(2.62), il vient :

$$\frac{\partial e}{\partial F_{ij}} = \frac{1}{2}\left(F_{il}\frac{\partial e}{\partial S_{jl}} + F_{ik}\frac{\partial e}{\partial S_{kj}}\right) = F_{il}\frac{\partial e}{\partial S_{jl}}, \tag{2.64}$$

la dernière égalité résultant de la symétrie du tenseur $S$. Le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff peut ainsi s'écrire :

$$P = \rho_a\frac{\partial e}{\partial F}. \tag{2.65}$$

Par la suite, la densité volumique d'énergie sera décrite par $W = \rho_a e$.

### 2.2.2. Densité d'énergie interne en élasticité linéaire

Le cas le plus simple est le cas de l'élasticité linéaire en petite déformation qui peut se traduire par une dépendance linéaire de la contrainte avec la déformation. En petite déformation, on peut identifier le premier tenseur de Piola-Kirchoff $P$ avec le tenseur des contraintes de Cauchy $\overline{\overline{\sigma}}$ car au premier ordre $F \approx I$ et donc $J \approx 1$. En élasticité linéaire, on a une relation linéaire entre contrainte et déformation, ce qui implique que l'énergie interne dépend quadratiquement de la déformation. En effet, l'énergie interne est définie à une constante près, sans influence sur le tenseur des contraintes. Un terme linéaire entre énergie et déformation donnerait une contrainte non nulle à déformation nulle. L'énergie interne s'exprime donc au premier ordre sous la forme générale :

$$W = \frac{1}{2} C_{ijkl} S_{ij} S_{kl} \tag{2.66}$$

avec $C_{ijkl}$ les modules élastiques décrivant le comportement du milieu [51]. Ce sont dans le cas le plus général des fonctions de l'espace. Ils ne dépendent cependant pas du temps car ils sont définis dans l'état de référence. Pour un milieu homogène, ils ne dépendent pas du point observé. Les coefficients sont ainsi les constantes caractéristiques de l'élasticité du milieu. Par définition, le tenseur $C_{ijkl}$ est composé de 81 composantes. Cependant, la symétrie des différents tenseurs $S$ et $\overline{\overline{\sigma}}$ implique les identités :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}, \tag{2.67}$$

si bien que les les modules élastiques se réduisent au plus à 36 constantes indépendantes notées $C_{\alpha\beta}$ avec $\alpha$ et $\beta$ décrivant chacun des couples $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,2)$, $(2,3)$ et $(3,3)$. En outre, la relation Eq.(2.66) montre que les modules élastiques sont donnés par :

$$C_{ijkl} = \left( \frac{\partial^2 W}{\partial S_{ij} \partial S_{kl}} \right)_{S=0}. \tag{2.68}$$

D'après les relations thermodynamiques de Maxwell (permutation des dérivées), on en déduit :

$$C_{ijkl} = C_{klij}, \tag{2.69}$$

ce qui réduit à 21 au maximum le nombre de constantes indépendantes pour un cristal du système triclinique. Dans le cas des milieux anisotropes les plus courants, ce nombre de constantes est réduit, par exemple à 3 pour la symétrie cubique, 5 pour l'isotropie transverse et 9 pour un milieu orthorhombique [119]. Dans le cas d'un milieu isotrope, ces constantes se réduisent à deux paramètres. L'énergie s'écrit alors :

$$W(S) = \frac{\lambda}{2} S_{ll}^2 + \mu S_{kl} S_{lk} \tag{2.70}$$

où $\lambda$ et $\mu$ sont les coefficients d'élasticité de Lamé. On note également que le module de compression $K$ est donné par :

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \tag{2.71}$$

### 2.2.3. Densité d'énergie interne en élasticité non linéaire

En élasticité non linéaire, il convient de prendre en compte les effets de grande déformation du milieu, ce qui implique que l'on ne peut plus identifier le tenseur gradient des déformations $F$ avec l'identité, ni le tenseur des contraintes de Cauchy avec le tenseur de Piola-Lagrange $P$. Par ailleurs, l'énergie interne du milieu n'est plus nécessairement une forme quadratique de la déformation $S$. Pour des déformations finies mais restant néanmoins suffisamment petites, on peut effectuer un développement de l'énergie interne aux ordres supérieurs. En poussant ici jusqu'aux non-linéarités cubiques en contrainte donc d'ordre 4 pour l'énergie, on a dans le cas général anisotrope :

$$W = \frac{1}{2!} C_{ijkl} S_{ij} S_{kl} + \frac{1}{3!} C_{ijklmn} S_{ij} S_{kl} S_{mn} + \frac{1}{4!} C_{ijklmnpq} S_{ij} S_{kl} S_{mn} S_{pq} + O(S^5) \tag{2.72}$$

où les constantes élastiques d'ordre 2, 3 et 4 sont définies comme les dérivées partielles de l'énergie interne par rapport aux déformations [17] :

$$C_{ijkl} = \left( \frac{\partial^2 W}{\partial S_{ij} \partial S_{kl}} \right)_{S=0}, \tag{2.73}$$

$$C_{ijklmn} = \left( \frac{\partial^3 W}{\partial S_{ij} \partial S_{kl} \partial S_{mn}} \right)_{S=0}, \tag{2.74}$$

et

$$C_{ijklmnpq} = \left( \frac{\partial^4 W}{\partial S_{ij} \partial S_{kl} \partial S_{mn} \partial S_{pq}} \right)_{S=0}. \tag{2.75}$$

Les différentes relations de symétrie et les relations thermodynamiques de Maxwell réduisent le nombre de constantes élastiques indépendantes à 56 pour $C_{\alpha\beta\gamma}$ et 126 pour $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ dans le cas le plus général.

### 2.2.4. Densité d'énergie interne en élasticité non linéaire : cas d'un milieu isotrope

Dans le cas d'un milieu isotrope, l'énergie interne doit respecter l'isotropie du milieu. Elle doit donc se développer en fonction de quantités scalaires indépendantes de la base dans laquelle sont exprimées les déformations. Ces quantités sont appelées invariants du tenseur des déformations de Green-Lagrange $S$. Différents choix pour ces invariants sont proposés dans la littérature. Les deux choix les plus fréquemment proposés dans la littérature sont : i) les invariants de Landau et Lifshitz [76], ii) les invariants principaux de $S$ proposés par Murnaghan [97, 98]. Les invariants de Landau sont définis par :

$$I_1 = Tr(S) \tag{2.76}$$
$$I_2 = Tr(S^2) \tag{2.77}$$
$$I_3 = Tr(S^3). \tag{2.78}$$

Les invariants principaux sont les coefficients du polynôme caractéristique :

$$det(S - \Lambda I) = 0 \Leftrightarrow -\Lambda^3 + I_S \Lambda^2 - II_S \Lambda + III_S = 0 \tag{2.79}$$

dont les racines $\Lambda$ sont les valeurs propres de $S$. Ces coefficients sont donnés par [40] :

$$I_S = Tr(S) = I_1 \tag{2.80}$$
$$II_S = \frac{1}{2}\left(Tr(S^2) - Tr(S)^2\right) = \frac{1}{2}\left(I_2 - I_1^2\right) \tag{2.81}$$
$$III_S = det(S) = \frac{1}{6}I_1^3 - \frac{1}{2}I_1 I_2 + \frac{1}{3}I_3. \tag{2.82}$$

L'énergie interne peut donc se développer jusqu'à l'ordre 4 en fonction des invariants de Landau. $I_1$ étant d'ordre 1, $I_2$ d'ordre 2 et $I_3$ d'ordre 3, le développement de l'énergie interne à l'ordre 4 apparaîtra comme une combinaison linéaire des termes $I_1^2$ et $I_2$ à l'ordre 2 ; $I_3$, $I_1 I_2$ et $I_1^3$ à l'ordre 3 ; et $I_1^4$, $I_2^2$, $I_1 I_3$ et $I_1^2 I_2$ à l'ordre 4. Elle s'exprime donc sous la forme [13] :

$$W = \mu I_2 + \left(\frac{1}{2}K - \frac{1}{3}\mu\right) I_1^2 + \frac{A}{3} I_3 + B I_1 I_2 + \frac{C}{3} I_1^3 + E I_1 I_3 + F I_1^2 I_2 + G I_2^2 + H I_1^4. \quad (2.83)$$

Ce développement est à l'ordre 4, le développement initialement proposé par Landau et Lifshitz étant à l'ordre 3 [76]. Une extension à l'ordre 4 a été proposée par Zabolotskaya en 1986 [136] mais faisant intervenir l'invariant $I_4 = Tr(S^4)$. Or, il n'existe que trois invariants indépendants à l'ordre 4, si bien que l'invariant $I_4$ peut s'exprimer en fonction des trois autres par la relation [60] :

$$I_4 = \frac{1}{6} I_1^4 - I_1^2 I_2 + \frac{4}{3} I_1 I_3 + \frac{1}{2} I_2^2. \quad (2.84)$$

Les constantes $A$, $B$ et $C$ sont les constantes d'élasticité au troisième ordre introduites par Landau et Lifshitz, et les constantes $E$, $F$, $G$ et $H$ les constantes d'élasticité au quatrième ordre introduites par Hamilton *et al.* [60]. Les constantes $A, B, C, E, F, G, H$ sont notées respectivement $3\nu, \beta, 3\alpha, \omega, \eta, \xi, \zeta$ dans [13].

En inversant les relations Eq.(2.80) à Eq.(2.82), on obtient aisément l'expression de l'énergie en fonction des invariants principaux de $S$ sous la forme [68] :

$$\begin{aligned} W = {} & \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) I_S^2 + 2\mu I I_S \\ & + \frac{1}{3}(A + 3B + C) I_S^3 + (A + 2B) I_S I I_S + A I I I_S \\ & \quad + (E + F + G + H) I_S^4 + 3E I_S I I I_S + (3E + 2F + 4G) I_S^2 I I_S + 4G I I_S^2. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Les quantités du troisième ordre sont notées $l = B + C$, $m = A/2 + B$ et $n = A$ par Murnaghan [98]. Les équivalences avec d'autres notations sont données dans [103].

Notons que les invariants principaux $I_S^2$ et $I I_S$ décrivent respectivement en régime linéaire les ondes longitudinales et les ondes transverses. Le terme $I_S^3$ correspond à un terme de propagation non linéaire quadratique des ondes longitudinales tandis que le terme $I I_S I_S$ correspond à un terme de couplage entre les deux types d'ondes.

### 2.2.5. Cas d'un milieu incompressible

Le cas des milieux quasi-incompressibles nous intéresse plus spécialement ici car les tissus mous tels que la matière grise ou blanche du cerveau rentrent *a priori* dans cette catégorie. Du point de vue linéaire, ces milieux sont caractérisés par des coefficients d'élasticité très différents, les modules de cisaillement étant de l'ordre de quelques $kPa$ alors que les modules de compression sont de l'ordre du $GPa$, soit six ordres de grandeur de différence. Ceci se traduit par des différences de trois ordres de grandeur sur les vitesses de propagation des ondes longitudinales ou transversales. En pratique, le cas incompressible se traduit par des coefficients de compression qui tendent vers l'infini. En élasticité non linéaire, une des difficultés vient du fait que la condition d'incompressibilité ne s'exprime pas de manière simple au moyen des invariants de Landau. En effet, cette condition s'explicite d'après la conservation de la masse Eq.(2.33) sous la forme $det(F) = 1$ ou encore en introduisant le tenseur des dilatations $C = F^T.F$ avec la condition $det(C) = 1$. Dans le cas incompressible, la masse volumique du solide étant constante, on la notera $\rho_a = \rho_0$. En introduisant les invariants principaux du tenseur des dilatations $C$ $I_C = Tr(C)$, $II_C = \frac{1}{2}\left(Tr(C^2) - Tr(C)^2\right)$ et $III_C = det(C)$, la condition d'incompressibilité s'exprime comme $III_C = 1$. Hamilton *et al.* [60] choisissent pour expliciter la condition d'incompressibilité de développer l'énergie $W$ en fonction des invariants indépendants $I_2$, $I_3$ et $III_C$. Ce dernier étant constant dans le cas incompressible, on a alors $W = W(I_2, I_3)$ et un développement à l'ordre 4 conduit à l'expression :

$$W(I_2, I_3) = \mu I_2 + \frac{A'}{3} I_3 + D I_2^2. \tag{2.86}$$

Le coefficient $\mu$ associé au cisaillement linéaire doit évidemment être identique à celui du développement donné Eq.(2.83) dans le cas compressible. Jacob [68] ainsi que Jacob *et al.* [69] expriment l'invariant $III_C$ en fonction des invariants de Landau, ce qui conduit à la condition d'incompressibilité :

$$I_1 = I_2 - I_1^2 - \frac{2}{3} I_1^3 + 2 I_1 I_2 - \frac{4}{3} I_3. \tag{2.87}$$

Tous les termes au second membre étant d'ordre quadratique au moins par rapport au déplacement, $I_1$ s'avère également quadratique dans le cas incompressible. Par récursion, on obtient donc un développement de $I_1$ dans le cas incompressible jusqu'à

l'ordre 4 sous la forme :

$$I_1 = I_2 - \frac{4}{3} I_3 + I_2^2. \tag{2.88}$$

En injectant cette condition dans le développement de l'énergie $W$ Eq.(2.83) et en restant toujours à l'ordre 4, on obtient :

$$W(I_2, I_3) = \mu I_2 + \frac{A}{3} I_3 + \left( \frac{\lambda}{2} + B + G \right) I_2^2. \tag{2.89}$$

Ceci permet d'expliciter les coefficients $A'$ et $D$ apparaissant dans le développement incompressible en fonction des coefficients du développement général :

$$A' = A \tag{2.90}$$

$$D = \frac{\lambda}{2} + B + G. \tag{2.91}$$

Une approche alternative est proposée par Destrade et Ogden [36] en effectuant le développement de l'énergie en fonction non pas des invariants de Landau du tenseur de Green-Lagrange mais en fonction des invariants $Tr(E)$, $Tr(E^2)$ et $Tr(E^3)$ de la déformation logarithmique $E$ définie par :

$$E = \frac{1}{2} ln(I + 2S). \tag{2.92}$$

Dans ce cas, la condition d'incompressibilité s'exprime simplement comme $Tr(E) = 0$. L'avantage de cette formulation est qu'elle permet également de déterminer le comportement asymptotique des coefficients dans le cas limite incompressible. Destrade et Ogden montrent alors que l'on a la hiérarchie suivante des différents termes. En premier, le module de compression $K$ ou de manière équivalente le coefficient de Lamé $\lambda = K - 2\mu/3$ tendent vers l'infini alors que le coefficient de Lamé $\mu$ est fini. Pour les termes non linéaires, on a le comportement asymptotique suivant :

$$(A, D) = O(\mu) \tag{2.93}$$

$$(B, E, G) = O(\lambda) \tag{2.94}$$

$$(C, F) = O(\lambda^2/\mu) \tag{2.95}$$

$$(H) = O(\lambda^3/\mu^2). \tag{2.96}$$

A noter également que les mêmes auteurs soulignent que, toujours dans le cas incompressible, le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff $P$ est désormais donné par la relation [106] :

$$P = -pI + \frac{\partial W}{\partial F}, \tag{2.97}$$

faisant intervenir une pression hydrostatique $p$ comme multiplicateur de Lagrange.

### 2.2.6. Contrainte de cisaillement en milieu incompressible

La densité d'énergie étant déterminée par Eq.(2.86), il devient possible de l'expliciter en fonction des gradients des déformations en coordonnées cartésiennes. Rappelons que, afin de respecter les hypothèses de grandes déformations du milieu, les invariants sont définis en utilisant la forme non linéaire de $S$ donnée par Eq.(2.8). Les invariants peuvent ainsi être développés au quatrième ordre inclus sous la forme [137] :

$$\begin{cases} I_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{1}{2}\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\frac{\partial u_s}{\partial x_i}\frac{\partial u_s}{\partial x_k}\right) \\ I_3 &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_i} + 3\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_m}\frac{\partial u_i}{\partial x_m} + 3\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_s}{\partial x_k}\frac{\partial u_s}{\partial x_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_s}{\partial x_k}\frac{\partial u_s}{\partial x_m}\frac{\partial u_i}{\partial x_m} + \frac{3}{2}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_s}{\partial x_k}\frac{\partial u_s}{\partial x_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right) \\ I_2^2 &= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)^2 + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_l}\right]. \end{cases} \tag{2.98}$$

La substitution des invariants donnés par Eq.(2.98) dans l'expression de l'énergie Eq.(2.86), et l'insertion du résultat dans l'expression de la contrainte Eq.(2.97) donne [137] :

$$\begin{aligned} P_{ik} = &-p\delta_{ik} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial u_s}{\partial x_l}\frac{\partial u_s}{\partial x_k}\right) \\ &+\frac{A}{4}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_m}\frac{\partial u_i}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\frac{\partial u_m}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_s}\frac{\partial u_s}{\partial x_k} + \frac{\partial u_s}{\partial x_k}\frac{\partial u_s}{\partial x_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\right. \\ &\left. +\frac{\partial u_j}{\partial x_l}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l}\frac{\partial u_s}{\partial x_l}\frac{\partial u_s}{\partial x_i} + 2\frac{\partial u_s}{\partial x_k}\frac{\partial u_s}{\partial x_m}\frac{\partial u_i}{\partial x_m} + \frac{\partial u_s}{\partial x_i}\frac{\partial u_s}{\partial x_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_m}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\right) \\ &+ D\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_m}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_m}\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_j}\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right). \end{aligned} \tag{2.99}$$

Remarquons que la référence [137] omet le multiplicateur de Lagrange $-pI$. Rappelons également que dans le cas non linéaire, le tenseur des contraintes de Piola-Lagrange n'est pas symétrique : $P_{ik} \neq P_{ki}$.

## 2.3. Équations des ondes non linéaires en milieu incompressible

### 2.3.1. L'équation de propagation pour une onde à polarisation linéaire transverse

Dans cette partie, nous développons un cas particulier de propagation respectant l'hypothèse de cisaillement pur : la propagation à deux dimensions d'une onde polarisée linéairement. Il s'agit de la configuration ayant permis l'observation par imagerie ultra-rapide des premières ondes de chocs de cisaillement [20]. Elle permet en effet de contrôler que les ondes émises sont majoritairement des ondes de cisaillement et ainsi d'utiliser Eq.(2.99). Nous choisissons pour cette étude une onde polarisée linéairement selon l'axe 1 et se propageant selon les axes transverses 2 et 3. La contrainte de cisaillement donnée par Eq.(2.99) se réduit ainsi à [110] :

$$P_{1k} = -p\delta_{1k} + \mu\frac{\partial u_1}{\partial x_k} + \left(\mu + \frac{A}{2} + D\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_l}\frac{\partial u_1}{\partial x_l}\frac{\partial u_1}{\partial x_k}. \tag{2.100}$$

$$P_{2k} = -p\delta_{2k} + \left(\mu + \frac{A}{4}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_1}{\partial x_k} \tag{2.101}$$

$$P_{3k} = -p\delta_{3k} + \left(\mu + \frac{A}{4}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\frac{\partial u_1}{\partial x_k} \tag{2.102}$$

Nous pouvons d'ores et déjà remarquer que la non-linéarité quadratique introduit des composantes non nulles de la contrainte dans les directions autres que la polarisation initiale.

L'introduction de Eq.(2.100) dans l'équation du mouvement en l'absence de forces

extérieures Eq.(2.40), projetée dans la direction $x_1$ donne :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \mu \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) = \left( \mu + \frac{A}{2} + D \right) \times \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_m} \frac{\partial u_1}{\partial x_m} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_m} \frac{\partial u_1}{\partial x_m} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \right] \quad (2.103)$$

avec la convention de sommation sur l'indice muet $m = \{2, 3\}$. L'équation Eq.(2.103) apparaît ainsi comme une équation de propagation des ondes de cisaillement non linéaire : la partie linéaire (premier membre) correspond à une onde se propageant à la vitesse des ondes de cisaillement $c_T = \sqrt{\mu/\rho_0}$ dans le plan de propagation $(x_2, x_3)$ ; les effets non linéaires (second membre) sont strictement cubiques (proportionnels à $u_1^3$). En revanche, le coefficient non linéaire devant ces termes cubiques combine les trois coefficients $(\mu, A, D)$ intervenant dans le développement de la densité d'énergie Eq.(2.86) puisque le développement Eq.(2.99) de la contrainte fait intervenir en raison des effets de grande déformation des non-linéarités cubiques dès le terme proportionnel à la constante linéaire $\mu$. On remarque que, d'après les relations de limite incompressible Eq.(2.93)-(2.96), ces trois coefficients sont tous du même ordre de grandeur $O(\mu)$ et contribuent donc tous à la non-linéarité cubique de l'équation. Rappelons que la mesure du coefficient $A$ s'opère par acousto-élasticité [49] et celle du coefficient $D$ s'effectue en mesurant le coefficient de non-linéarité cubique [117] de l'onde de cisaillement $\beta$ [137] :

$$\beta = \frac{3}{2} \left( 1 + \frac{A/2 + D}{\mu} \right). \quad (2.104)$$

La projection de l'équation du mouvement dans les deux autres directions aboutirait aux équations du mouvement suivantes :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \frac{\partial p}{\partial x_2} = \left( \mu + \frac{A}{4} \right) \frac{\partial}{\partial x_m} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_m} \right] \quad (2.105)$$

et

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \frac{\partial p}{\partial x_3} = \left( \mu + \frac{A}{4} \right) \frac{\partial}{\partial x_m} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{\partial u_1}{\partial x_m} \right] \quad (2.106)$$

avec la convention de sommation sur l'indice muet $m = \{2, 3\}$. Ces deux équations montrent que même dans le cas d'une polarisation initialement linéaire suivant la

direction $x_1$, les non-linéarités *quadratiques* tendent à créer un mouvement dans les autres directions. Par exemple, même dans le cas d'une onde initialement plane à polarisation linéaire transverse ($u_1(x_3, t)$), la non-linéarité quadratique engendre la composante longitudinale $u_3$. Ceci montre que l'onde de cisaillement non linéaire n'est pas strictement une onde transverse. En outre, en présence de phénomènes de diffraction associés ($u_1(x_2, x_3, t)$), une composante transverse plane ($u_2$) est créée non linéairement. Ces phénomènes de couplage n'ont à notre connaissance que peu été étudiées [133]. A priori, ces effets ne sont pas cumulatifs [**?**]. Pour une onde d'amplitude faible $O(\epsilon)$, on s'attend à ce que les effets restent très petits d'ordre $O(\epsilon^2)$, donc difficilement mesurables. Par ailleurs, la modélisation rigoureuse de ces termes implique probablement d'expliciter le multiplicateur de Lagrange et donc d'introduire le développement complet de l'énergie sans hypothèse d'incompressibilité Eq.(2.83). Un passage à la limite devra ensuite prendre en compte simultanément la très grande différence d'ordre de grandeur des différents coefficients élastiques, et l'amplitude supposée petite de l'onde. En revanche, comme on va le voir par la suite, les effets non linéaires cubiques d'auto-interaction de l'onde transverse avec elle-même sont eux cumulatifs et conduisent sur des distances relativement courtes à la génération d'harmoniques et à la formation de chocs. Ils sont donc *a priori* dominants et beaucoup plus faciles à observer expérimentalement. Dans la suite de l'étude, nous étudierons uniquement ceux-ci.

### 2.3.2. L'approximation parabolique

Afin de distinguer plus facilement les effets de diffraction et non linéaires, il est possible d'effectuer une approximation de propagation paraxiale [110, 133] sur l'équation des ondes non linéaire Eq.(2.103) sous l'hypothèse de petite amplitude de l'onde. A cet effet, on dimensionne le déplacement $u_1$ par son amplitude à la source $u_0$, le temps par l'inverse de la fréquence centrale angulaire $\omega_0$ et les variables d'espace par $c_T/\omega_0 = 1/k_0$ soit $2\pi\lambda_0$ où $\lambda_0$ est la longueur d'onde caractéristique à la fréquence centrale. Dans l'hypothèse des petites perturbations, le nombre de Mach $M_0 = \omega_0 u_0/c_T$ de l'onde est petit. Le dimensionnement de la partie linéaire de diffraction introduit le paramètre usuel pour l'approximation paraxiale $\epsilon = \frac{1}{k_0 a}$ [59] qui compare la taille de la source $a$ à la longueur d'onde. L'approximation paraxiale suppose que ce dernier paramètre est également petit : c'est une approximation haute

fréquence. Le déplacement ainsi adimensionné s'écrit :

$$u_1(x_2, x_3, t) = u_0 U_1 \left( y = \epsilon k_0 x_2, z = \epsilon^2 k_0 x_3, \tau = \omega_0 (t - \frac{x_3}{c_T}) \right). \tag{2.107}$$

L'introduction de Eq.(2.107) dans Eq.(2.103) donne ainsi :

$$\begin{aligned} 2\epsilon^2 M_0 \frac{\partial^2 U_1}{\partial z \partial \tau} - \epsilon^2 M_0 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} - \epsilon^4 M_0 \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} = \frac{2\beta}{3} \times \Bigg[ & \epsilon^2 M_0^3 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U_1}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial U_1}{\partial \tau} \right)^2 \\ & - \epsilon^2 M_0^3 \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial U_1}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial U_1}{\partial \tau} \right)^2 - \epsilon^2 M_0^3 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial U_1}{\partial \tau} \right)^3 \\ & + \epsilon^2 M_0^3 \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial U_1}{\partial \tau} \right) \left( \frac{\partial U_1}{\partial y} \right)^2 + M_0^3 \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial U_1}{\partial \tau} \right)^3 \Bigg] + O(\epsilon^4 M_0^3). \end{aligned} \tag{2.108}$$

Dans le cas haute fréquence d'une source de grande taille devant la longueur d'onde $\epsilon^2 \ll 1$, les termes linéaires en $\epsilon^4 M_0$ sont négligeables devant les termes linéaires en $\epsilon^2 M_0$ et les termes non linéaires en $\epsilon^2 M_0^3$ sont négligeables devant les termes non linéaires en $M_0^3$. De la sorte, Eq.(2.108) se réduit à :

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial z \partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + \frac{\beta}{3} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial U_1}{\partial \tau} \right)^3. \tag{2.109}$$

Cette équation prend la forme de l'équation bien connue dite KZ (d'après l'article de Zabolotskaya et Khokhlov en 1969 [138]) établie pour l'acoustique non linéaire dans les fluides mais dans laquelle la non-linéarité quadratique des fluides est remplacée par une non-linéarité cubique.

Afin de vérifier la validité de l'approximation $\epsilon \ll 1$, on peut estimer ce paramètre à partir des ordres de grandeur déduits de l'expérience de première observation des chocs de cisaillement [20, 19]. Pour ces expériences dans un gel agar/gélatine, on a $c_T = 2m.s^{-1}$. L'onde est émise à la fréquence $f_0 = 100Hz$ par une plaque plane de taille caractéristique $a = 10cm$, ce qui donne $\epsilon \approx 0.03$ et donc $\epsilon^2 \approx 10^{-3} \ll 1$. Les expériences présentées ultérieurement dans ce manuscrit (chapitres 4 et 5) ont été réalisées dans des conditions expérimentales similaires. L'approximation paraxiale sera donc *a priori* bien vérifiée. Notons toutefois que l'hypothèse la moins bien satisfaite est l'hypothèse de petites perturbations $M_0 \ll 1$ qui permet de tronquer le développement de l'énergie interne à l'ordre 4 et les non-linéarités de l'équation des ondes à l'ordre 3. Dans nos expériences, les amplitudes de vitesse mesurées les plus

élevées à la focalisation sont de l'ordre de $0.5m/s$ soit un nombre de Mach de l'ordre de 0.25. Le nombre de Mach au carré est de l'ordre de 0.06. Il reste donc raisonnable de négliger les termes non linéaires en $\epsilon^2 M_0^3$ comparativement aux termes linéaires dominants en $\epsilon^2 M_0$. A notre connaissance, il n'existe aucune théorie développée pour considérer les non-linéarités d'ordre supérieur, théorie qui nécessiterait par ailleurs de déterminer des constantes supplémentaires. La difficulté de la validité de l'approximation $M_0 \ll 1$ a déjà été soulignée dans les études précédentes [68], mais les comparaisons avec les expériences ne semblent pas nécessiter l'ajout de termes supplémentaires à l'équation.

## 2.3.3. L'équation de conservation non linéaire cubique

### 2.3.3.1. Cas des ondes planes

L'étude de la non-linéarité cubique dans le cas des ondes planes peut nous informer sur les caractéristiques des chocs en jeu pour les ondes de cisaillement. Dans le cas plan, l'onde est supposée ne dépendre que du temps $t$ et de la variable dans la direction de propagation $x_3$. L'équation des ondes Eq.(2.103) se simplifie en l'équation des ondes non linéaire cubique à une dimension suivante :

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - c_T^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} = \frac{2}{3}\beta c_T^2 \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^3 . \tag{2.110}$$

Dans le cas où l'on ne considère que les ondes se propageant dans la direction $x_3 > 0$, on peut partir de l'équation paraxiale Eq.(2.109) en omettant la dépendance en $y$, si bien que l'on se ramène à l'équation de conservation ou de transport non linéaire cubique portant sur le déplacement :

$$\frac{\partial U_1}{\partial z} = \frac{\beta}{3}\left(\frac{\partial U_1}{\partial \tau}\right)^3 . \tag{2.111}$$

Une forme équivalente est obtenue en introduisant la vitesse particulaire sans dimension $V(z,\tau) = \partial U_1/\partial\tau$. En dérivant Eq.(2.111) par rapport au temps retardé $\tau$, on obtient alors l'équation :

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\beta}{3}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial V}{\partial \tau}\right)^3 , \tag{2.112}$$

ou encore

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \beta V^2 \frac{\partial V}{\partial \tau}. \tag{2.113}$$

Eq.(2.112) est une équation de conservation non linéaire cubique. Cette dernière équation est similaire à l'équation de Burgers non dissipative usuelle pour les ondes de compression [59] mais avec une non-linéarité cubique au lieu de quadratique. L'équation a été établie à notre connaissance pour la première fois par Zabolotskaya en 1986 [136] mais avec une définition plus complexe du paramètre $\beta$ et par Lee-Bapty et Crighton en 1987 [79] pour une onde électromagnétique. Cette équation est également proposée de manière heuristique par Naugolnykh et Ostrovsky en 1998 [100] et de manière similaire par Catheline *et al.* [20] en 2003. Dans tous ces cas, les auteurs prennent en compte une viscosité classique (que nous discuterons plus loin dans ce chapitre). L'équation est alors parfois appelée équation de Burgers modifiée. La forme avec l'expression du coefficient $\beta$ Eq.(2.104) est proposée par Zabolotskaya et Hamilton en 2004 [137].

#### 2.3.3.2. Solution de Poisson et distance de choc

Commençons par déterminer la solution générale des équations de conservation non linéaires de la forme :

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f(v)}{\partial \tau} = 0. \tag{2.114}$$

Pour se rapporter à Eq.(2.112), il suffit de poser $f(v) = -\beta v^3/3$. En introduisant $\lambda(v) = f'(v) = -\beta v^2$, Eq.(2.114) s'écrit sous la forme quasi-linéaire :

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \lambda(v) \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0. \tag{2.115}$$

La méthode de résolution consiste alors à introduire les courbes caractéristiques [132] de Eq.(2.115). Supposons que $v(z, \tau)$ est dérivable selon ces courbes définies par $\tau(z)$ et que la condition initiale est $v(z = 0, \tau) = v_0(t)$ avec $\tau(z = 0) = t$. Il devient alors possible d'écrire :

$$\frac{dv}{dz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{d\tau}{dz} \frac{\partial v}{\partial \tau}. \tag{2.116}$$

Eq.(2.116) est équivalente à la forme quasi-linéaire donnée par Eq.(2.115) si :

$$\begin{cases} \frac{dv}{dz} = 0, \\ \frac{d\tau}{dz} = \lambda(v). \end{cases} \tag{2.117}$$

La première équation du système Eq.(2.117) montre que la solution est constante le long de la courbe caractéristique :

$$\forall z \quad v(z, \tau(z)) = v_0(t). \tag{2.118}$$

Eq.(2.118) implique que $\frac{d\tau}{dz}$ est constante. Il s'ensuit donc avec la condition initiale :

$$\forall z \quad \tau(z) = z\lambda(v_0(t)) + t. \tag{2.119}$$

Cette solution est connue comme la solution implicite de Poisson pour l'équation de conservation.

Les deux équations Eq.(2.118) et Eq.(2.119) donnent ainsi une forme de solution possible pour Eq.(2.114). Il est nécessaire de vérifier la validité de cette solution. Soit $v(z, \tau)$ une fonction respectant Eq.(2.118) et Eq.(2.119), il vient :

$$\frac{\partial v}{\partial z} = v_0' \frac{\partial t}{\partial z} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial \tau} = v_0' \frac{\partial t}{\partial \tau}. \tag{2.120}$$

Les dérivations de Eq.(2.119) effectuées sur $z$ et $\tau$ donnent respectivement :

$$\frac{\partial t}{\partial z} = \frac{-\lambda(v_0)}{1 + z\lambda'(v_0)v_0'} \quad \text{et} \quad \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{1 + z\lambda'(v_0)v_0'}. \tag{2.121}$$

D'après Eq.(2.121), il vient :

$$v_0' \left( \frac{\partial t}{\partial z} + \lambda(v) \frac{\partial t}{\partial \tau} \right) = 0. \tag{2.122}$$

La fonction $v$ vérifie Eq.(2.115), la forme quasi-linéaire de l'équation de conservation. La fonction de $v$ est ainsi une solution de l'équation de conservation. Cette solution n'est toutefois définie que tant que le dénominateur dans les relations Eq.(2.121) est

non nul :

$$1 + z\lambda'(v_0)v_0' \neq 0. \tag{2.123}$$

Celui-ci étant égal à 1 à la condition initiale $z = 0$, il va rester strictement positif pour des valeurs suffisamment petites de $z$. Par contre, pour des valeurs suffisamment grandes, cette condition ne pourra plus être vérifiée.

Afin de réexprimer le champ $v$ dans l'espace physique $(z, \tau)$, il faut prendre en compte l'ensemble des courbes caractéristiques. Il faut pour cela calculer $t(z, \tau)$, ce qui implique que Eq.(2.119) doit être inversible en $t$. Ceci requiert que $\tau(t)$ soit strictement monotone, ce qui revient à se placer dans le cas de validité de Eq.(2.121).

Dans le cas étudié où $f(v) = -\beta v^3/3$, cela revient à supposer que :

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 - 2\beta v_0 v_0' z > 0 \Leftrightarrow z < \frac{1}{2\beta max(v_0 v_0')}. \tag{2.124}$$

Si la condition précédente n'est pas vérifiée, la solution devient multivaluée. La plus petite distance à laquelle cette condition n'est pas satisfaite est définie comme la distance de formation du choc. Ainsi, nous définissons la distance de formation des chocs sans dimension pour les ondes planes par :

$$l_{sh} = \frac{1}{2\beta max(v_0 v_0')}. \tag{2.125}$$

Dans le cas des ondes planes sinusoïdales définies par $v_0(\tau) = sin(\tau)$, on obtient $v_0 v_0' = \frac{1}{2} sin(2\tau)$. En revenant en variables avec dimensions ($z = M_0 k_0 x_3$), la distance de choc est ainsi donnée par :

$$L_{sh} = \frac{1}{k_0 \beta M_0^2} \tag{2.126}$$

avec $M_0 = V_0/c_T$ le nombre de Mach acoustique associé à l'onde de cisaillement et $k = \omega_0/c_T$ le nombre d'onde. La distance de choc $L_{sh}$ pour les ondes sinusoïdales dépend ici de l'inverse du nombre de Mach au carré $M_0^2$ en raison de la non-linéarité cubique, alors que dans le cas de l'acoustique, la distance de choc est donnée par $L_{sh} = \frac{1}{k\beta M_0}$, inversement proportionnelle au nombre de Mach en raison de la non-linéarité quadratique.

#### 2.3.3.3. Vitesse du choc

La solution de Poisson est la solution continue de l'équation de conservation mais qui devient multivaluée au-delà de la distance de choc. Dans ce cas, pour recouvrer une solution monovaluée, on introduit dans la solution de Poisson une ou plusieurs discontinuités ou chocs, chacune reliant entre elles deux parties de la solution de Poisson monovaluées. L'objet de cette partie est de déterminer les équations gouvernant la position du choc. A cet effet, on reprend la forme Eq.(2.114) de l'équation du mouvement écrite sous forme intégrale [33] :

$$\frac{d}{dz}\int_{\tau_1}^{\tau_2} v(z,\tau)d\tau + f\{v(z,\tau_2)\} - f\{v(z,\tau_1)\} = 0. \tag{2.127}$$

Supposons que la vitesse $v$ n'est pas continue au point $\tau_{sh}(z) \in [\tau_1, \tau_2]$ déterminant la position d'un choc. Il est possible de séparer le domaine en deux sous-domaines $[\tau_1, \tau_{sh}]$ et $[\tau_{sh}, \tau_2]$. Cependant sur ce domaine, Eq.(2.127) est toujours valide et peut s'écrire en séparant le domaine en deux sous-domaines de part et d'autre du choc :

$$\frac{d}{dz}\int_{\tau_1}^{\tau_{sh}} v(z,\tau)d\tau + \frac{d}{dz}\int_{\tau_{sh}}^{\tau_2} v(z,\tau)d\tau + f\{v(z,\tau_2)\} - f\{v(z,\tau_1)\} = 0. \tag{2.128}$$

On introduit dans Eq.(2.128) la valeur des fonctions de part et d'autre du choc. Celles-ci sont définies par :

$$f_{sh}^{-} = \lim_{\tau\to\tau_{sh},\tau<\tau_{sh}} f\{v(z,\tau)\} \quad \text{et} \quad f_{sh}^{+} = \lim_{\tau\to\tau_{sh},\tau>\tau_{sh}} f\{v(z,\tau)\} \tag{2.129}$$

$$v_{sh}^{-} = \lim_{\tau\to\tau_{sh},\tau<\tau_{sh}} v(z,\tau) \quad \text{et} \quad v_{sh}^{+} = \lim_{\tau\to\tau_{sh},\tau>\tau_{sh}} v(z,\tau) \tag{2.130}$$

et on note :

$$[g] = g_{sh}^{+} - g_{sh}^{-} \tag{2.131}$$

l'amplitude de la discontinuité de toute fonction $g$ à travers un choc. Ceci donne :

$$\frac{d}{dz}\int_{\tau_1}^{\tau_{sh}} v(z,\tau)d\tau + \frac{d}{dz}\int_{\tau_{sh}}^{\tau_2} v(z,\tau)d\tau + f\{v(z,\tau_2)\} - f\{v(z,\tau_1)\} - f_{sh}^{+} + f_{sh}^{+} + f_{sh}^{-} - f_{sh}^{-} = 0. \tag{2.132}$$

La vitesse $v$ étant discontinue, il convient d'introduire le déplacement $u$ (qui, lui, est continu) tel que $v = \frac{\partial u}{\partial \tau}$. La substitution de $v$ par $u$ dans Eq.(2.132) donne :

$$\frac{\partial u}{\partial z}(z,\tau_{sh}^-) - \frac{\partial u}{\partial z}(z,\tau_1) + \frac{\partial u}{\partial z}(z,\tau_2) - \frac{\partial u}{\partial z}(z,\tau_{sh}^+) - \left(v(z,\tau_{sh}^+) - v(z,\tau_{sh}^-)\right)\frac{d\tau_{sh}}{dz} + f\{v(z,\tau_2)\} - f\{v(z,\tau_1)\} - f_{sh}^+ + f_{sh}^+ + f_{sh}^- - f_{sh}^- = 0. \quad (2.133)$$

Cette équation devant être satisfaite pour tous les domaines et toutes les positions des chocs, ceci implique que le déplacement vérifie les équations [33] :

$$\frac{\partial u}{\partial z}(z,\tau) + f(v) = 0 \quad (2.134)$$

$$[v]\frac{d\tau_{sh}}{dz} = [f]\,. \quad (2.135)$$

Eq.(2.134) redonne ainsi, dans les cas où $v$ est une fonction continue et dérivable, l'équation de conservation Eq.(2.114) :

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f(v)}{\partial \tau} = 0.$$

Eq.(2.135) détermine l'instant du choc $\tau_{sh}$ en fonction du point d'observation $z$ et des valeurs de part et d'autre du choc :

$$\frac{d\tau_{sh}}{dz} = \frac{[f]}{[v]}. \quad (2.136)$$

Ainsi, dans le cas de l'équation Eq.(2.112), la vitesse des chocs est déterminée par :

$$\frac{d\tau_{sh}}{dz} = -\frac{\beta}{3}\left((v_{sh}^+)^2 + (v_{sh}^-)^2 + v_{sh}^+ v_{sh}^-\right). \quad (2.137)$$

#### 2.3.3.4. Condition d'entropie

Soit une onde plane définie par la vitesse particulaire $v(z,\tau)$, l'énergie de l'onde à la position $z$ est donnée par :

$$E(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}v^2 d\tau. \quad (2.138)$$

L'objectif est de décrire l'évolution de l'énergie $E$. A cet effet, on part de l'équation de conservation cubique Eq.(2.114) et on la multiplie par $v$. Il s'ensuit :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f(v)}{\partial \tau} = 0\right) v \\ \Rightarrow\ &\frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial z} + v\frac{\partial f(v)}{\partial \tau} = 0 \qquad (2.139) \\ \text{ou}\quad &\frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial z} + v\lambda(v)\frac{\partial v}{\partial \tau} = 0. \qquad (2.140) \end{aligned}$$

On introduit le flux d'énergie $I(v)$ tel que :

$$\frac{dI}{dv} = v\lambda(v) \Leftrightarrow I(v) = vf(v) - \int f(v)dv. \qquad (2.141)$$

L'introduction d'une discontinuité à l'instant $\tau_{sh}(z)$ comme dans la partie précédente donne en intégrant Eq.(2.141) sur tout l'intervalle de temps séparé en deux sous-domaines de part et d'autre de la discontinuité :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial z}\frac{v^2}{2}d\tau = \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{+\infty} v^2 d\tau + \frac{d\tau_{sh}}{dz}\left[\frac{v^2}{2}\right] = \\ -\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial I}{\partial \tau}d\tau = I\{v(z,\tau=+\infty)\} - I\{v(z,\tau=-\infty)\} - [I]. \qquad (2.142) \end{aligned}$$

Or, selon la relation de Rankine-Hugoniot donnée par Eq.(2.135), la vitesse des chocs est $\frac{d\tau_{sh}}{dz} = \frac{[f]}{[v]}$. L'introduction de cette expression dans l'équation précédente mène à :

$$\frac{dE}{dz} = I\{v(z,\tau=+\infty)\} - I\{v(z,\tau=-\infty)\} - [I] + \frac{[f]}{[v]}\left[\frac{v^2}{2}\right]. \qquad (2.143)$$

Il est possible de décomposer $[v^2]$ selon

$$[v^2] = (v^+ - v^-)(v^+ + v^-) = (v^+ + v^-)[v]. \qquad (2.144)$$

L'utilisation de cette dernière relation dans Eq.(2.143), sous l'hypothèse de non création d'énergie aux temps infinis, mène à :

$$\frac{dE}{dz} = -[I] + [f]\underline{v} \leq 0 \qquad (2.145)$$

où $\underline{v} = (v^+ + v^-)/2$. L'inégalité provient du fait que l'énergie de l'onde ne peut augmenter en l'absence de sources. Cela implique la condition dite d'entropie sur les chocs :

$$[I] < [f]\underline{v}. \tag{2.146}$$

Dans le cas de Eq.(2.112) où le flux est donné par $f(v) = -\beta v^3/3$, l'intensité est donnée par $I(v) = -\beta v^4/4$. La condition donnée par Eq.(2.146) devient alors :

$$-\frac{\beta}{4}((v^+)^4 - (v^-)^4) < -\frac{\beta}{6}((v^+)^3 - (v^-)^3)(v^+ + v^-) \tag{2.147}$$

$$\Leftrightarrow -(v^+ - v^-)^3(v^+ + v^-) < 0, \tag{2.148}$$

la dernière inégalité supposant que le coefficient non linéaire $\beta$ est positif. Dans le cas contraire, l'inégalité est inversée. La condition d'entropie Eq.(2.148) est ainsi équivalente à [33] :

$$|v^+| > |v^-|. \tag{2.149}$$

On peut noter ici que à la différence des ondes de compression avec une non-linéarité quadratique, les ondes de choc de cisaillement admettent des chocs pour lesquels le champ de vitesse peut être aussi bien croissant à travers la discontinuité ($v^+ > v^-$) ou que décroissant ($v^+ < v^-$). Pour une non-linéarité quadratique, seul le premier cas est thermodynamiquement admissible.

#### 2.3.3.5. Le problème de Riemann

Le problème de Riemann consiste à résoudre l'équation de conservation Eq.(2.112) dans le cas de conditions initiales de type "onde de marche" définies par :

$$v(0,\tau) = \begin{cases} v_r & \tau > 0 \\ v_l & \tau < 0. \end{cases} \tag{2.150}$$

Les solutions de ce problème sont des solutions auto-similaires qui s'écrivent sous la forme $v(z,\tau) = \tilde{v}(\frac{\tau}{z})$. En effectuant le changement de variable dans Eq.(2.112), il

s'ensuit [80] :

$$-\beta\tilde{v}^2\tilde{v}' = \frac{\tau}{z}\tilde{v}'. \tag{2.151}$$

Cette équation montre que les solutions admissibles sont soit $\tilde{v}$ constante ($v_l$ ou $v_r$), soit $-\beta\tilde{v}^2 = \frac{\tau}{z}$. Plusieurs solutions étant possibles, il faut déterminer celles admissibles à partir de la condition d'entropie [80] qui se réduit ici à Eq.(2.149) ou encore $v_l^2 < v_r^2$.

Ainsi, si la condition initiale vérifie Eq.(2.149), la discontinuité initiale correspond à un choc et la solution reste un choc de type marche :

$$v(z,\tau) = \begin{cases} v_r & \frac{\tau}{z} > s \\ v_l & \frac{\tau}{z} < s \end{cases} \tag{2.152}$$

où $s$ est la vitesse du choc de Rankine-Hugoniot définie par $s = -\frac{\beta}{3}\frac{[v^3]}{[v]}$. Si la condition initiale ne satisfait pas la condition d'entropie, la discontinuité initiale donne naissance à une onde simple reliant continûment les deux parties constantes de la solution :

$$v(z,\tau) = \begin{cases} v_r & \frac{\tau}{z} > \lambda(v_r) \\ \sqrt{-\frac{\tau}{\beta z}} & \lambda(v_l) < \frac{\tau}{z} < \lambda(v_r) \\ v_l & \frac{\tau}{z} < \lambda(v_l) \end{cases} \tag{2.153}$$

avec $\lambda(v) = -\beta v^2$. La solution du problème de Riemann fournit en particulier des solutions tests pour les schémas de résolution numérique de l'équation de Burgers modifiée non dissipative (cf. annexe A).

## 2.3.4. Visco-élasticité dans les solides

### 2.3.4.1. Cas des petites déformations

Le modèle élastique développé dans les parties précédentes suppose que les déformations sont réversibles. Cependant, il existe des phénomènes irréversibles de dissipation d'énergie. Les phénomènes de dissipation sont particulièrement complexes dans les solides en général, et à notre connaissance relativement peu modélisés dans les

solides mous. Pour les études qui nous concernent en ondes non linéaires, les auteurs utilisent généralement des lois empiriques linéaires. En termes de modélisation, le modèle le plus simple revient à introduire un modèle visco-élastique de Kelvin-Voigt s'inspirant de l'hypothèse de Navier-Stokes : la contrainte visqueuse dépend linéairement du tenseur des taux des déformations. Il devient ainsi possible d'écrire sous l'hypothèse de déformation infinitésimales une fonction de dissipation quadratique de l'énergie [76] :

$$R = \frac{1}{2}\eta_{iklm} v_{ik} v_{lm} \tag{2.154}$$

avec le tenseur des taux de déformation symétrique :

$$v_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right). \tag{2.155}$$

La contrainte visqueuse $P'$ s'écrit alors :

$$P'_{ik} = \frac{\partial R}{\partial v_{ik}}. \tag{2.156}$$

Nous pouvons remarquer que les hypothèses précédentes sont similaires à celles nécessaires pour l'écriture de la loi de Hooke. La différence est ici l'utilisation du tenseur symétrique des taux de déformations au lieu de celui des déformations. Dans le cadre d'un solide isotrope, il convient d'introduire les invariants du second ordre de $v_{ik}$ :

$$R = \eta v_{ik} v_{ki} + \frac{1}{2}\chi v_{ll}^2. \tag{2.157}$$

La séparation des termes issus de la compression et du cisaillement dans $v_{ik}$ est effectuée par le découpage suivant :

$$v_{ik} = (v_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik} v_{ll}) + \frac{1}{3}\delta_{ik} v_{ll}. \tag{2.158}$$

L'introduction de Eq.(2.158) dans Eq.(2.157) mène ainsi à :

$$R = \eta(v_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik} v_{ll})(v_{ki} - \frac{1}{3}\delta_{ki} v_{ll}) + \frac{1}{2}\zeta v_{ll}^2 \tag{2.159}$$

où $\eta$ et $\zeta$ sont respectivement les coefficients de viscosité en cisaillement et en compression, tous deux positifs pour garantir que la dissipation $R$ est positive. Le tenseur des contraintes visqueuses s'écrit ainsi :

$$P'_{ik} = 2\eta(v_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}v_{ll}) + \zeta v_{ll}\delta_{ik}. \tag{2.160}$$

#### 2.3.4.2. Equation de Burgers modifiée

Le tenseur des contraintes visqueuses Eq.(2.160) a ainsi été écrit sous l'hypothèse de déformations infinitésimales, ce qui correspond à négliger les non-linéarités géométriques de $S$. La première approche pour sortir du cadre de cette hypothèse dans les solides est de remplacer $v_{ik}$ par $\dot{S}_{ik}$. Le tenseur des contraintes visqueuses [103] devient ainsi :

$$P'_{ik} = 2\eta(\dot{S}_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\dot{S}_{ll}) + \zeta\dot{S}_{ll}\delta_{ik}. \tag{2.161}$$

L'introduction de Eq.(2.8) dans Eq.(2.161) donne alors :

$$P'_{ik} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial v_l}{\partial x_k}\right) + \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta\right)\left(\frac{\partial v_l}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_m}\frac{\partial u_l}{\partial x_m}\right)\delta_{ik}. \tag{2.162}$$

Le tenseur des contraintes défini par Eq.(2.162) est ainsi un tenseur quadratique par rapport au déplacement. Pour le cas d'une onde plane de cisaillement à polarisation transverse linéaire définie par $v_3(x_1, t)$, le tenseur des contraintes visqueuses se réduit à :

$$P'_{31} = \eta\frac{\partial v_3}{\partial x_1}. \tag{2.163}$$

L'introduction de $P_{31} + P'_{31}$ dans l'équation du mouvement Eq.(2.40) donne ainsi l'équation de propagation des ondes non linéaire visqueuse [137] :

$$\rho_0\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \mu\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \left(\mu + \frac{A}{2} + D\right)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^3 + \eta\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^2\partial t}. \tag{2.164}$$

On peut ensuite procéder de façon similaire au cas non dissipatif pour obtenir une équation de Burgers modifiée dissipative. On pose à cet effet, le déplacement adimensionné :

$$u_1(x_3,t) = u_0 U_1\left(z = \epsilon^2 k_0 x_3, \tau = \omega_0(t - \frac{x_3}{c_T})\right), \tag{2.165}$$

où le petit paramètre $\epsilon$ est choisi pour équilibrer les termes de propagation au terme non linéaire dominant, soit $\epsilon = k_0^2 u_0^2$. En injectant cette forme dans Eq.(2.164) et en ne conservant que les termes dominants pour la propagation, la non-linéarité et la viscosité, il reste au final l'équation de Burgers modifiée :

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\beta}{3}\frac{\partial v^3}{\partial \tau} + \frac{1}{\Gamma}\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} \tag{2.166}$$

où

$$\Gamma = \frac{2\rho_0\omega_0 u_0^2}{\eta} \tag{2.167}$$

est le nombre de Gol'dberg comparant les effets non linéaires cubiques aux effets dissipatifs linéaires.

A partir de cette dernière équation, il est possible de caractériser le développement des harmoniques lors de la propagation faiblement non linéaire par une méthode perturbative lorsque le nombre de Gol'dberg est petit. Au contraire, pour les grands nombres de Gol'dberg, on pourrait étudier la structure d'un choc par un développement asymptotique raccordé [79].

#### 2.3.4.3. Corrections non linéaires

Le tenseur des contraintes visqueuses donné Eq.(2.161) pose cependant des problèmes théoriques [37]. Il est symétrique contrairement au premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff, ne permettant donc pas la modélisation des effets visqueux antisymétriques. De plus, le tenseur $P'_{ik}$ des contraintes visqueuses ne satisfait pas le principe d'objectivité contrairement au premier tenseur de Piola-Kirchhoff. Les deux tenseurs n'ont pas la même loi de changement de referentiel. Le tenseur de Piola-Kirchhoff dépend du référentiel de l'étude alors que celui des contraintes visqueuses développé précédemment en est indépendant [37]. Pour réconcilier les deux formulations, Destrade *et al.* considèrent que le tenseur des contraintes vis-

queuses développé dans [76] est l'équivalent du second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff. Ils proposent donc de remplacer le tenseur des contraintes visqueuses $P'$ par $F.P'$ selon la même relation qui lie le second tenseur de Piola-Kirchhoff $F^{-1}.P$ (symétrique) au premier tenseur de Piola-Kirchhoff $P$. Ceci conduit à la définition du nouveau tenseur des contraintes visqueuses non linéaire en grande déformation :

$$\begin{aligned} \Pi_{ik} &= F_{ij}P'_{jk} \\ &= \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta\right) F_{ik}\dot{S}_{ll} + 2\eta F_{ij}\dot{S}_{jk}. \end{aligned} \tag{2.168}$$

Afin de comparer les deux définitions du tenseur des contraintes visqueuses, on étudie le cas d'une onde plane polarisée selon l'axe 3 et se propageant selon l'axe 1. L'équation de propagation devient alors [37] :

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \left(\mu + \frac{A}{2} + D\right) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^3 + \eta \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^2 \partial t} \\ + \left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right) \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial t}\right) \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2 \right]. \end{aligned} \tag{2.169}$$

En effectuant la même analyse asymptotique que pour l'équation de Burgers, il est possible d'établir dans ce cadre une équation de Burgers modifiée et augmentée d'un terme de viscosité non linéaire cubique, équation qui s'écrit en vitesse sous la forme :

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\beta}{3} \frac{\partial v^3}{\partial \tau} + \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + \frac{1}{3\Gamma} \left(\frac{4}{3} + \frac{\zeta}{\eta}\right) \frac{\partial^2 v^3}{\partial \tau^2}. \tag{2.170}$$

Malgré son intérêt théorique, cette équation ne sera pas utilisée dans la suite de l'étude car 1) elle nécessite la connaissance d'un paramètre supplémentaire, 2) dans la pratique, la dissipation dans les gels étudiés ne satisfait pas en régime linéaire le modèle visqueux de Kelvin-Voigt avec une dissipation proportionnelle au carré de la fréquence. Les mécanismes de dissipation sont plus complexes, ils donnent lieu en régime linéaire à un coefficient de dissipation variant approximativement linéairement avec la fréquence, et donc nécessitent des modèles plus complexes (par exemple des relaxations multiples). La modélisation non linéaire correcte de ces effets de dissipation reste à entreprendre à notre connaissance. Notons que l'influence de ce terme a déjà été étudiée dans le cas particulier de la propagation d'une onde

progressive compacte [37].

# 3. Numerical simulation of focused shock shear waves in soft solids and the brain

## Introduction

Shear waves in soft solids, such as the brain, have nonlinear properties that are four orders of magnitude larger than in classical solids. Consequently shear waves can transition from a smooth to a shocked profile in less than one wavelength. This extremely nonlinear behavior is largely due to the slow shear wave speed in soft solids, which is approximately $2m/s$ [18] compared to $1540m/s$ [39] for a compressional wave.

We hypothesize that these shear shock waves could be responsible for certain types of traumatic brain injuries (TBI) and that the spherical geometry of the skull bone could focus shear waves, generating shocks. The sharp gradients occurring at shear shock wave front could stretch and damage neurons generating. This mechanism could be responsible for diffuse axonal injuries which occur deep in the brain, far from the impact surface, and appear as focal lesions.

Compared to acoustic shocks, which have been well studied in the context of TBI, very little is known about shear waves because until recently they were difficult to measure at depth in solids. Shear shock waves were observed for the first time in tissue-mimicking soft solids [20] in 2003, when the technology to obtain high frame-rate ultrasond imaging was developed [121]. Following this observation, a model for incompressible media was developed [60, 36] leading to equations that describe nonlinear propagation of plane shear waves for different polarizations in soft solids [137]. The approximation of incompressible media was investigated by Wochner *et al.* in 2008 [133]. The same authors extended the plane wave model by

including diffraction in the paraxial approximation. For a transverse polarization, the model reduces to an equation similar to the well-known Khokhlov-Zabolotskaya-Kustnetsov [74] in acoustics but with a cubic nonlinear term instead of a quadratic one. This leads to the nonlinear generation of odd harmonics ($f_0$, $3f_0$, $5f_0$, ...) [69] and shock waves, which can be used to measure the nonlinear elastic parameters [49, 117]. Nonlinear Mach reflection of shear shock waves has also been studied theoretically and numerically [110]. Hence, there are strong similarities between shear shock waves and classical pressure shock waves. However, the focusing of shear shock waves has never been investigated to our knowledge, while an extensive literature is devoted to compression shock focusing in the context of focused beams used in medical applications [63, 4], or of sonic booms [83, 85]. Due to wave speed differences, the time scales associated with shear shock waves are much longer than acoustical shocks. The objective of the present study is to numerically investigate the focusing of shock shear waves.

Numerical methods used for the biomechanical models of the head are dominated by finite elements (FE) because they can accurately and easily model detailed anatomical structure of the skull and brain in conjunction with complex mechanical models. With respect to shear deformations, the first finite element models assumed linear elasticity [125, 66]. More recent models used linear viscoelasticity combined with large deformation [139, 130, 22]. Nonlinear neo-Hookean constitutive laws have been introduced for the deviatoric part [104, 94] with no other parameter than the linear Young modulus. Mendis [92] use a hyperelastic Mooney-Rivlin with two linear parameters, while Brands *et al.* [16] extend this model with two additional nonlinear parameters. In the present study, we consider exclusively the shear component of elastic deformation and we use the fully nonlinear incompressible elastic model of Hamilton *et al.* [60] in which nonlinear effects combine into a single measurable nonlinear parameter [117]. Unlike FE simulations here the propagation medium is assumed to be homogeneous, which simplifies the analysis of shear shock wave physics that this paper focuses on.

The first part of this paper presents the theoretical model and numerical methods that describe nonlinear polarized shear waves in soft solids such as the brain. This model and numerical solution includes the cubic nonlinearities that are characteristic of soft solids and the specific types of non-classical attenuation and dispersion observed in soft tissues. In this case, shear shock waves can be modeled by a parabolic equation with cubic nonlinearities. Attenuation in soft tissues is described

by a semi-empirical law in the frequency domain. The model is solved numerically with a quasi-second order scheme based on a Strang splitting method. Diffraction is solved with a Crank-Nicolson finite different scheme, nonlinearities by a modified MacDonald-Ambrosiano shock capturing scheme. In the second part several numerical tests are used to validate this scheme. In particular, Guiraud's self-similarity law was used as a demanding numerical test for two dimensional shock waves. This provides the strongest available numerical validation since there are no known analytical solutions of the full equations. The third part presents an idealized case of nonlinear shear wave focusing with initial conditions that are characteristic of TBI's. This allows us to numerically test the hypothesis that some TBI's could be caused by focusing the shear waves to generate shocks. In particular an X-ray CT of a human skull is used as an initial condition surface that sends shear waves into the brain

A two dimensional head configuration for blunt impacts was then investigated. Skull geometry was retrieved from CT images. Mechanical brain properties were found in literature, except the nonlinear parameter which is unknown. Simulations were therefore performed with a value obtained from tissue-mimicking phantom gels.

We demonstrate that under realistic loading scenarios and when the shock wave propagation distance and focal distance coincide nonlinear propagation can easily overcome attenuation to generate shear shocks deep inside the brain. These results suggest that shock wave focusing could be responsible for diffuse axonal injuries.

## 3.1. Theoretical and numerical model

Soft solids such as the white or gray brain matter or gelatin based phantoms can be considered, to the first order, as incompressible since there is a three order of magnitude difference between the shear $c_T$ and compression $c_L$ wave propagation speeds. This corresponds, respectively, to shear moduli on the order of a few $kPa$, and to bulk moduli on the order of a few $GPa$, i.e. a difference of six orders of magnitude. By assuming a perfectly incompressible behavior the energy density $E$, based on Landau and Lifshitz' choice of invariants [75, 60], can be written as :

$$E = \mu I_2 + \frac{A}{3} I_3 + D I_2^2. \tag{3.1}$$

Here $I_2 = tr(\mathbf{S}^2)$, $I_3 = tr(\mathbf{S}^3)$ and $\mathbf{S}$ is the fully nonlinear strain tensor related to the displacement field $\mathbf{u}$ by :

$$\mathbf{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right). \tag{3.2}$$

The shear modulus is $\mu = \rho c_T^2$, $\rho$ is the medium density, $A$ and $D$ are, respectively, the third- and fourth-order elastic constants.

In the case of a perfect linear polarization $u_3(x_1, x_2, t)$, the elastodynamic equations reduce to a nonlinear scalar wave equation [110] :

$$\rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \mu\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}\right) + \left(\mu + \frac{A}{2} + D\right) \times \left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_m}\frac{\partial u_3}{\partial x_m}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_m}\frac{\partial u_3}{\partial x_m}\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\right] \tag{3.3}$$

with a sum on the index $m = 1, 2$. This equation can be further simplified by using the paraxial approximation [133]. Then the wave propagates mainly in the $X = x_1$ direction and it is assumed to be quasi-planar, i.e. it varies smoothly in the transverse direction $Y = x_2$ which simplifies the nonlinearity and diffraction :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial X \partial T} = \frac{c_T}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\beta}{3c_T^3}\frac{\partial^2 V^3}{\partial T^2} + a(T)V \tag{3.4}$$

Here, $V = \partial u_3/\partial t$ is the particle velocity in the direction $Z = x_3$. The variable $T = t - X/c_T$ is the retarded time. A full derivation of the first three terms in this equation can be found in [133]. The first two terms of Eq. (3.4) describe linear propagation and diffraction of a shear wave beam. The third term describes the nonlinear evolution of the wave with propagation. The parameter $\beta$, which determines the magnitude of cubic nonlinearity, is related to the elastic constants defined in Eq. (3.1) by [137] :

$$\beta = \frac{3}{2}\left(1 + \frac{\frac{A}{2} + D}{\mu}\right). \tag{3.5}$$

Note that generally the nonlinear parameter $\beta$ is directly measured based on nonlinear acoustical effects (such as the generation of third and even order harmonics [117]). The third order elastic constant $A$ can be determined by acousto-elasticity [49] thus giving a measurement of the fourth order constant $D$. Compared to the original derivation of [133], Eq. (3.4) has an additional term $a(\tau)V$. It describes an

empirical generalized linear dispersion and absorption operator which is introduced to take into account realistic absorption laws observed in soft media [73]. Unlike classical thermoviscous predictions, which have a quadratic power law dependence, the absorption coefficient observed in the human body has absorption coefficient with a non-quadratic power law that varies between powers of 1 and 2 for both shear waves [18, 117] and compression waves [73, 134].

Eq.(3.4) has a similar form to the Khokhlov-Zabolotskaya-Kutznetsov (KZK) equation which has been extensively studied in acoustics [74]. The principal differences between the compressive waves described by the KZK equation and the shear waves described by Eq.(3.4) are that the nonlinearity is cubic instead of quadratic, and the attenuation is described empirically. Nevertheless the numerical methods that have been previously developed for the nonlinear acoustic case can be modified to solve the nonlinear shear case.

To aid in the definition of the numerical methods Eq.(3.4) can be rewritten by integrating both sides with respect to retarded time [78] and by introducing dimensionless variables that are defined based on cusp caustics [32]. This rescaling is designed for focal geometries :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \int \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} d\tau + \gamma \frac{\partial v^3}{\partial \tau} + Abs(\tau)v \tag{3.6}$$

where

$$Abs(\tau)v = \int_{-\infty}^{\tau} a(\tau')v(\tau')d\tau' \tag{3.7}$$

and

$$x = \frac{X}{L_x} \quad \text{with} \quad L_x = \left(\frac{4a}{27k_0}\right)^{1/2} \tag{3.8}$$

$$y = \frac{Y}{L_y} \quad \text{with} \quad L_y = \left(\frac{a}{27k_0^3}\right)^{1/4} \tag{3.9}$$

$$\tau = \omega_0 T \tag{3.10}$$

$$v = \frac{V}{V_0} \tag{3.11}$$

$$\gamma = \frac{2}{3}\beta M^2 \sqrt{\frac{ka}{27}}, \quad \text{with} \quad M = \frac{V_0}{c_T}. \tag{3.12}$$

These new variables are rescaled by the source properties. $L_x$ and $L_y$ are the diffraction length scales, respectively along and transverse to the x-axis. The variable $a$ is a geometrical parameter that characterizes the focal geometry, $V_0$ is the initial velocity amplitude, $M$ the shear wave Mach number, $k_0$ and $\omega_0$ are respectively the characteristic wave number and angular frequency of the emitted signal.

The numerical method that solves Eq.(3.6) is based on an operator splitting technique, which solves each of the terms on the right hand side separately. Over a small propagation distance defined by the grid size, $\Delta x$, the diffraction, nonlinearity and absorption operators are solved independently. Here, we use a second order Strang splitting scheme [126] so that, in conjunction with second order methods for each of the individual operators, the overall precision of the scheme is preserved at order 2 [81]. This splitting scheme can be written as :

$$v(x + \Delta x) = L_{D,\Delta x/2} \circ L_{A,\Delta x/2} \circ L_{N,\Delta x} \circ L_{A,\Delta x/2} \circ L_{D,\Delta x/2}(v(x)) \tag{3.13}$$

where $L_{O,\Delta x}$ denotes the solution of any sub-equation $\partial v/\partial x = O(v)$ over the propagation distance, $\Delta x$. The operators are thus split into diffraction, $L_{D,\Delta x} = \int \partial^2 v/\partial y^2 d\tau$, nonlinearity, $L_{N,\Delta x} = \gamma \partial v^3/\partial \tau$, and absorption, $L_{A,\Delta x} = Abss(\tau)v$. The symbol $\circ$ denotes the successive ordering of the operations from right to left in the right-hand side of Eq. (3.13). Note that the half steps, over a propagation distance of $\Delta x/2$ are required for the second order splitting scheme. The diffraction operator, at the beginning and end of the expression, is written as two half steps. Numerically, however, the half diffraction step is immediately repeated in the sub-

sequent iteration. Therefore the two diffraction substeps can be merged into a single one over $\Delta x$. Consequently, only the absorption sub-step is performed twice over a half step $\Delta x/2$. In fact, the choice of the operator ordering in Eq.(3.13) has been done purposely, since the absorption step has the smallest numerical cost.

The numerical solution of the diffraction step is performed with a time domain finite difference scheme similar to the one developed for the KZK equation [78]. It consists of a combination of a second order trapezoidal method to solve the integral and an unconditionally stable semi-implicit second order Crank-Nicholson scheme. The absorption step is performed in the frequency domain with a Fast-Fourier Transform (FFT) $\tilde{v}(\omega)$ of the velocity signal $v(\tau)$ and by applying the absorption law assumed to be known theoretically or experimentally in the frequency domain :

$$L_{A,\Delta x}(v(x,y,\tau)) = FFT^{-1}\left[\tilde{v}(x,y,\omega)e^{-\alpha(\omega)\Delta x}\right]. \tag{3.14}$$

Here $\alpha(\omega)$ is the complex linear dispersion/absorption coefficient at angular frequency $\omega$. The numerical advantage of solving this law in the frequency domain is that the exact values of attenuation and dispersion can be defined at each discrete frequency value. The mixing of time domain and frequency domain numerical methods has been used extensively in nonlinear acoustics [34, 73].

The nonlinear operator appears as a conservation law similar to the inviscid Burgers' equation, but in which nonlinearity is cubic instead of quadratic :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \gamma \frac{\partial v^3}{\partial \tau}. \tag{3.15}$$

As is the case for Burgers' equation, the main numerical challenges associated with the cubic equation are related to the description of the shock front. An exact implicit Poisson's solution could be used to solve this equation in a way similar to the method implemented by [78, 135] , but the step size requirements are stringent, requiring a grid sampling that is significantly finer than the shock thickness. Even with fine sampling these implicit numerical methods do not conserve the Rankine-Hugoniot conditions and the correct shock wave speed. Furthermore the handling of shock waves is more complex compared to the quadratic case since the cubic case allows expansion shocks [33]. Therefore a shock capturing method is used here.

In particular we use a scheme that is based on a hybrid method proposed by McDo-

nald and Ambrosiano [89], which combines a dissipative first order scheme very near shock waves, and a dispersive second order scheme away from them. A flux limiter restricts the first order method to a very narrow zone around the shock, so that the overall scheme globally retains its second order properties at the cost of the small numerical dissipation required to numerically stabilize the shocks. The original flux limiter [15] in the McDonald Ambrosiano scheme tends to flatten the signal around the position where the flux switches from first to second order. To avoid this type of error we replaced it with a "minmod" flux limiter [80].

The inviscid cubic Burgers' equation is discretized by letting $V_j^n$ represent velocity field at the discrete time $\tau_j = j\Delta\tau$ and the discrete position $x_n = n\Delta x$ :

$$V_{j,k}^{n+1} = V_{j,k}^n - \frac{\Delta x}{\Delta \tau}\left(H_{j,k}^n - H_{j-1,k}^n\right) \tag{3.16}$$

where $H_j^n$ is a numerical approximation of the function $v^3$. Compared to the conventional quadratic Burgers' equation, the numerical scheme is always upwind because the shock velocity $w = -\gamma v^2$ has a constant negative sign. The first order approximation of $H_j^n$, denoted by $F_j^n$, is given by

$$F_j^n = -\gamma (V_{j+1}^n)^3. \tag{3.17}$$

Similarly, the second order approximation of the flux, denoted as $G_j^n$ is :

$$\begin{aligned} G_j^n = &-\frac{3}{2}\gamma (V_{j+2}^n)^3 + \frac{1}{2}\gamma (V_{j+3}^n)^3 - \gamma^2 \frac{\Delta x}{\Delta \tau} \times \\ &\left[\frac{9}{4}(V_{j+1}^n)^2\left[(V_{j+2}^n)^3 - (V_{j+1}^n)^3\right] - \frac{1}{4}(V_{j+2}^n)^2\left[(V_{j+3}^n)^3 - (V_{j+2}^n)^3\right]\right]. \end{aligned} \tag{3.18}$$

The hybrid scheme combines the first and second order approximations :

$$H_j^n = F_j^n + \phi(\theta_j^n)(G_j^n - F_j^n). \tag{3.19}$$

The "minmod" flux limiter $\phi$ has values between 0 (for the first order scheme near shocks) and 1 (for the second order scheme for smooth regions) :

$$\phi(\theta) = max(0, min(1, \theta)), \tag{3.20}$$

where

$$\theta_j = \frac{V_j - V_{j-1}}{V_{j+1} - V_j}. \tag{3.21}$$

Unlike the diffraction scheme, the nonlinear step is explicit and therefore has to satisfy a CFL stability condition given by [89] :

$$\left| 3\gamma v_{max}^2 \frac{\Delta x}{\Delta \tau} \right| \leq 1 \tag{3.22}$$

where $v_{max}$ is the maximum particle velocity. The stability condition depends on the local velocity amplitude. As a consequence the step size becomes more restrictive in cases where there is strong focusing. Note that the definition of the boundary conditions vary according to the individual cases being investigated and are defined in subsequent sections.

## 3.2. Validation

### 3.2.1. 1D nonlinear case

The shock capturing performance of the proposed numerical scheme is tested in one dimension by solving the inviscid case Eq.(3.15) with a pure sine wave as an input condition $v(x = 0, \tau) = v_0(\tau) = sin(\tau)$. The space variable $x = X/L_s$ is scaled by the shock formation distance $L_s = \frac{c_T^3}{\beta \omega_0 v_0^2}$ which is equivalent to setting : $\gamma = 1/3$. Two flux limiters are compared : the Boris and Book limiter [15] and the proposed "minmod" limiter [80]. The results at $x = 30L_s$ are shown on Fig. 3.1 and compared to the analytical but multivalued Poisson's solution :

$$v(x, \tau) = v_0(\theta) \quad \text{with} \quad \tau = \theta - x v_0^2(\theta). \tag{3.23}$$

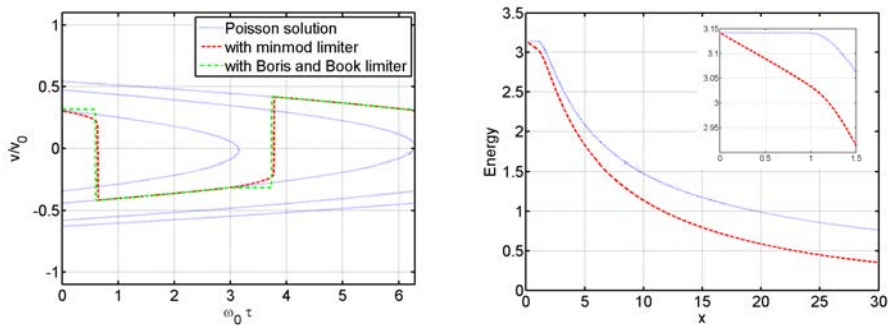



**Figure 3.1.** – Left : Solutions of Eq.(3.15) calculated over one period at position $x = 30$, for an initial sinusoidal plane wave with an angular frequency $\omega_0$. Blue doted line : implicit analytical Poisson's solution. Red dashed line : numerical solution with "minmod" limiter. Green dashed line : numerical solution with Boris and Book limiter. Right : energy as function of distance for $x \in [0\,,30]$ without dissipation (blue doted line) and with dissipation for a Gol'dberg number equal to 60 (red dashed line). Inset figure : zoom for $x \in [0\,,1.5]$.

The overall behavior of the two algorithms is generally similar and leads to the expected nonlinear distortion of the waveform, with a periodic succession of "positive" ($v^+ > v^-$) and "negative" ($v^+ < v^-$) shocks where $v^+$ (resp. $v^-$) is the velocity immediately after (resp. before) the shock. This behavior is typical for cubic nonlinearities, unlike to the quadratic compression case where only compression shocks are thermodynamically admissible. Note however, the Boris and Book limiter leads to the formation of a numerical artifact which can be observed in Fig.3.1(a) as a local flattening of the waveform before each shock. This artifact does not occur when using the "minmod" flux which tends to smooth the solution just before the shock as is visible on the comparison with Poisson's solution. Fig.3.1(b) displays in the same case the total energy of the signal for the "minmod" flux limiter. One can clearly see that energy is conserved up to the shock formation distance $x = 1$ (see especially zoom between $x = 0$ and $x = 1.5$) and then decays because of energy loss at the shock front. The same figure shows the energy in a case with absorption. The absorption coefficient $\alpha(\omega)$ is chosen to be linear with frequency to simulate observations for gel phantoms. The corresponding Gol'dberg number at the input frequency is chosen to be equal to 60 which corresponds to the case that will be further investigated (see section 3). The figure shows that, compared to the inviscid case, the absorption leads to energy losses before the shock formation. Beyond the

shock formation, because the Gol'dberg number is relatively high, the energy losses are dominated by nonlinearities through shocks as in the inviscid case. However, absorption always leads to additional dissipation. The comparison between the inviscid and absorbing cases also shows that physical absorption is properly taken into account and is not dominated by the numerical dissipation which is indeed very small (less than 0.02% at the shock formation distance $x = 1$).

### 3.2.2. 2D linear case

This subsection is devoted to the validation of numerical solutions of the 2D linear diffraction equation :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} d\tau. \tag{3.24}$$

An analytical solution of this equation exists for the case of a caustic cusp [32] which is of particular interest here because : 1) it corresponds to a focused case such the ones we want to investigate, 2) the analytical solution is expressed in the time domain for a transient signal and not only in the frequency domain so it is well adapted to time domain solvers, 3) for a shock wave the analytical solution is singular (due to the $(\tau - 1)^{-1/6}$ term) and therefore especially difficult to capture numerically. Indeed, for a focused shock, either nonlinearities or absorption are necessary for a finite solution.

An N-wave is used as an input waveform :

$$F(\tau) = \begin{cases} -\tau & |\tau| \leq 1 \\ 0 & |\tau| > 1. \end{cases} \tag{3.25}$$

The following input time signal is imposed on the boundaries of the numerical domain surrounding the caustic cusp on a domain that is sufficiently large to support the caustic (as shown in Fig. 3.2) :

$$v(x, y, \tau) = \frac{1}{\sqrt{|6\alpha^2(x, y) - x|}} F(\tau + \alpha(x, y)y + \alpha^2(x, y)x - \alpha^4(x, y)). \tag{3.26}$$

Here $\alpha(x, y)$ is the single real root of the polynomial $4\alpha^3 - 2\alpha x - y = 0$. This specific boundary condition is the exact boundary condition of a perfect cusp caustic of

equation $y^2 = 8x^3/27$ with a geometrical focus at the origin [32]. Note that in catastrophe theory [88], cusp caustics are second simplest after fold caustics. They are produced by an arbitrary curved wavefront that contains a local minimum in the radius of curvature. In this case, the geometrical parameter $a$ introduced in Eqs.(3.8-3.9) is defined as $a = 9R_0(0)^2R_0''(0)/8$ with $R_0(Y)$, which is the radius of curvature of the wavefront as a function of the transverse position $Y$ with a minimum at $Y = 0$, and $R_0''$ is its second order derivative. In the frequency domain, solution of Eq.(3.24) with boundary condition Eq.(3.26) with $F(\tau) = sin(\tau)$ is given by well-established Pearcey function [108].

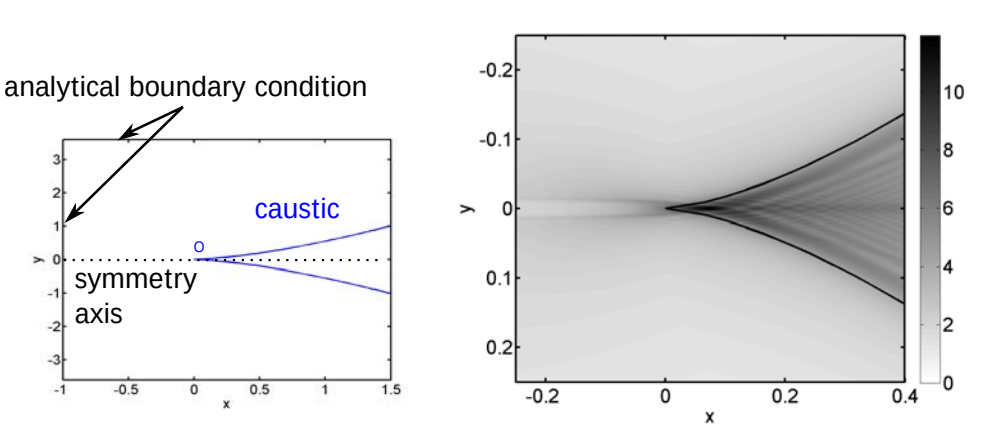
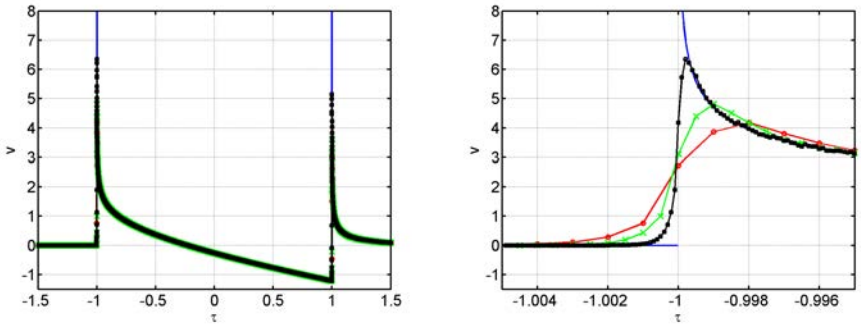



**Figure 3.2.** – Left : schematic diagram of the domain of calculation used for the caustic cusp geometry. $O$ is the geometrical caustic point, at the origin. Right : maximum particle velocity determined by the numerical solution for a focused N-wave for the case $N_\tau = 70001$. The geometrical caustic cusp is shown as a line. The solution is zoomed around the caustic cusp.

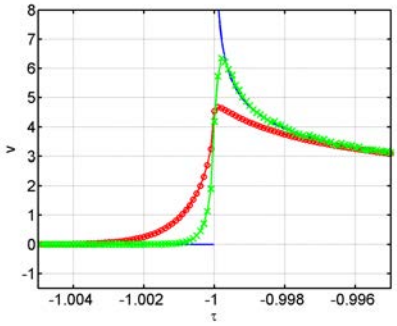
The numerical solution was compared to this analytical solution on the non-dimensional domain $\tau \in [-3 \quad 4]$, $x \in [-1 \quad 1]$ and $y \in [-3.6 \quad 3.6]$ with $\Delta x = 0.001$ and $\Delta y = 0.001$ ($N_x = 2001$ and $N_y = 7201$). The sampling of the time domain is performed with three values $\Delta\tau = 10^{-3}$, $\Delta\tau = 5.10^{-3}$ and $\Delta\tau = 10^{-4}$, so respectively $N_\tau = 7001$, $N_\tau = 14001$ and $N_\tau = 70001$. The right plot in Fig. 3.2 shows the maximum particle velocity at each spatial grid point. Due to focusing effects, the incoming N-wave is amplified by over a factor of 10. The two characteristic branches of the caustic cusp are visible, as well as a complex interference pattern near the cusp. As expected, the position of the maximum of the amplitude is shifted slightly away from the geometrical focus (located at 0 on the y-axis) because of diffraction

effects. This shift varies with frequency as a function of $\omega_0^{-1/2}$ as given by Eq.(3.8). It is only at the high frequency limit that the position of the focus corresponds to the geometrical focus $x = y = 0$. These results qualitatively demonstrate that the numerical scheme successfully describes these challenging caustic cusps.




(a) Particle velocity at the caustic point

(b) First shock of the solution at the caustic point




(c) First shock of the solution at the caustic point : comparison between first and second order schemes

**Figure 3.3.** – Top left : comparison between analytical solution (solid blue line), and numerical solutions with time step $\Delta\tau = 10^{-3}$ (red circles), $\Delta\tau = 5.10^{-4}$ (green crosses) and $\Delta\tau = 10^{-4}$ (black squares) for an N-wave at the theoretical caustic point $O$. Top right : zoom of first plot centered around the first shock. Down : comparison between analytical solution (solid blue line), and numerical solutions for a time step of $\Delta\tau = 10^{-4}$ for first order (red circles) and second order (green crosses) schemes. Only the zoom centered on the first shock is shown.

A quantitative validation is shown in Fig.3.3(a), which compares the computed wa-

veform to the analytical solution [32] at the geometrical cusp. The numerical solution closely follows the analytical result, including the overall signal shape and the two sharp peaks that occur as a result of focusing of the two shocks in the input N-wave. However, the analytical solution is singular at these two peaks since the shocks have an infinite frequency content. These singularities cannot be reproduced numerically and the error is examined in more detail by zooming in on the first shock, which is shown in Fig.3.3(b). As expected, better agreement with the analytical singular solution is obtained by refining the time discretization. The numerical dissipation spreads out the shock slightly and it bounds the peak amplitudes to a finite value. The small oscillations following the focused shock are due to the second order trapezoidal integration that introduces a small amount of numerical dispersion in the diffraction part of the algorithm.

Fig.3.3(c) compares second and first order numerical solutions of Eq.(3.24 ). The first order solution is computed with a rectangular discretization instead of a trapezoidal one. From this plot it is clearly visible that the second order scheme introduces much less numerical dissipation and better captures the sharp variation around the shock. On the other hand, it induces a small amount of numerical dispersion that leads to oscillations behind the shock (barely visible in plot).

### 3.2.3. 2D nonlinear validation : Guiraud's self-similarity law

There are no general solutions to Eq.(3.6) that can be used to validate the entire numerical scheme proposed in this paper. However a strong confirmation of the numerical validity of the total algorithm can be obtained by examining self-similarity properties. Indeed, by ignoring the dissipation term in Eq.(3.6) (e.g. setting $Abs = 0$) and by carefully choosing the initial conditions, self-similar solutions can be found. The invariance of the numerical solution according to these scaling laws can then be used to establish the validity of the scheme. In acoustics these self-similarity laws were established for quadratic nonlinearities, first for fold [55] and then for cusp caustics [32]. They are established here for cubic nonlinearities.

The input signal in the boundary condition Eq.(3.27) is chosen to be a step shock, which has an undefined characteristic time and is inherently invariant with scaling :

$$F(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau \leq 0 \\ 1 & \tau > 0. \end{cases} \tag{3.27}$$

Self-similarity is established by introducing the new scaled variables (denoted with an overbar) :

$$\begin{cases} v &= \gamma^{-1/4}\bar{v} \\ x &= \gamma^{1/2}\bar{x} \\ y &= \gamma^{3/4}\bar{y} \\ \tau &= \gamma\bar{\tau} \\ \alpha &= \gamma^{1/4}\bar{\alpha} \end{cases} \tag{3.28}$$

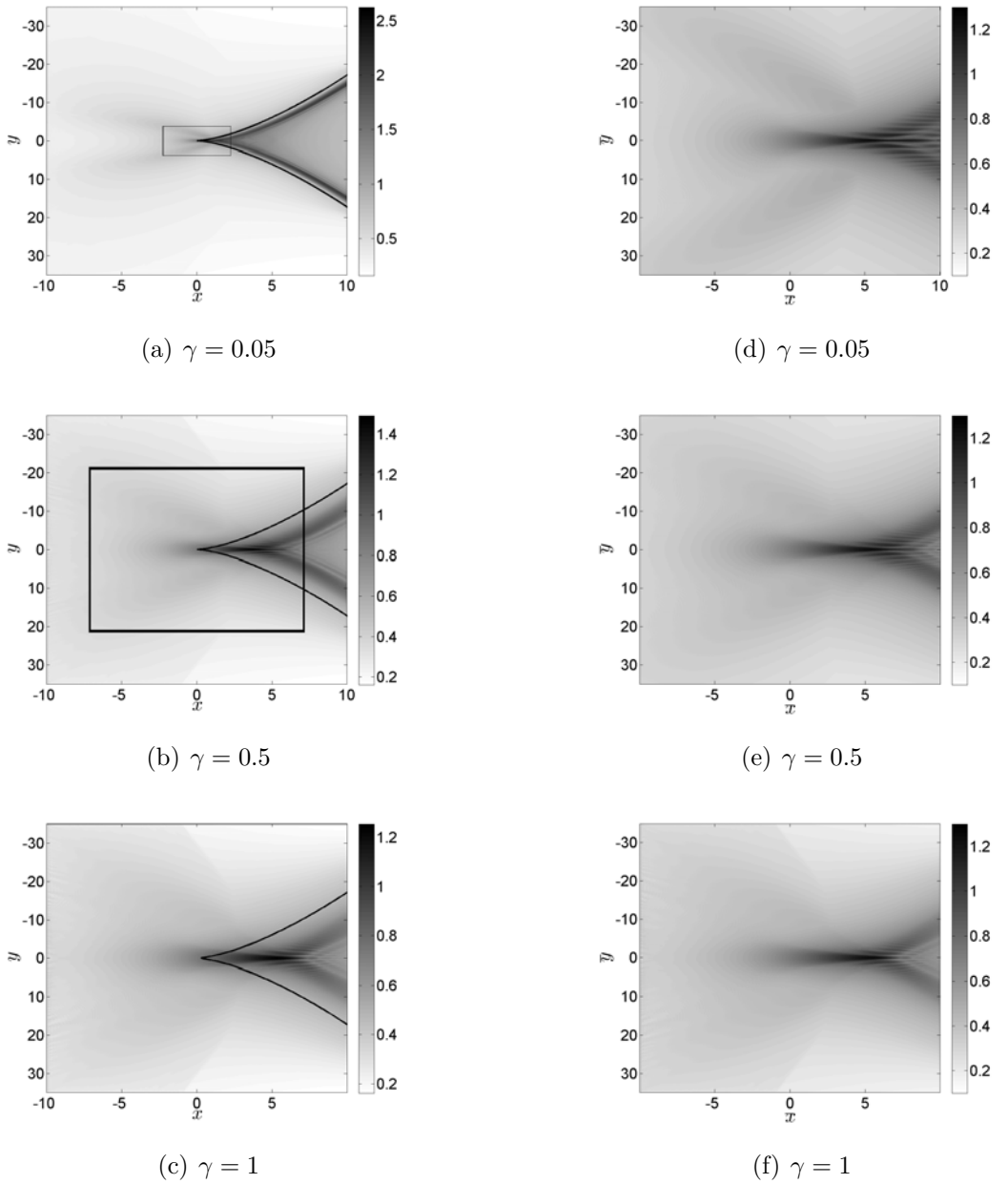
which subsequently make Eq.(3.15) and the boundary conditions in Eq.(3.26) independent of the amplitude parameter $\gamma$. Physically, the first line in Eq.(3.28) shows that the focused velocity field has a power 1/2 dependence on the amplitude of the input field. Note that this is different from the compression wave case with quadratic nonlinearities, for which this power is 2/3 [32]. As expected, increasing the order of the nonlinearity leads to larger deviation from the linear case (which has a power of 1).

| $\gamma$ | $(\Delta x, N_x)$ | $(\Delta y, N_y)$ | $(\Delta t, N_t)$ |
|---|---|---|---|
| 0.05 | $(0.005, 3976)$ | $(0.0190, 3678)$ | $(0.0075, 8001)$ |
| 0.1 | $(0.0071, 2811)$ | $(0.0320, 2187)$ | $(0.0150, 4001)$ |
| 0.25 | $(0.0113, 1778)$ | $(0.0636, 1100)$ | $(0.0375, 1601)$ |
| 0.35 | $(0.0133, 1503)$ | $(0.0819, 855)$ | $(0.0525, 1143)$ |
| 0.5 | $(0.0159, 1258)$ | $(0.1070, 655)$ | $(0.0750, 801)$ |
| 0.75 | $(0.0195, 1027)$ | $(0.1451, 483)$ | $(0.1125, 534)$ |
| 1 | $(0.0225, 889)$ | $(0.1800, 389)$ | $(0.1500, 401)$ |

**Table 3.1.** – Step size and number of points of each parameter used for each parameter $\gamma$

Self-similarity is verified numerically by solving Eq.(3.6) for an inviscid medium and its associated boundary conditions in Eq.(3.26) for different values of the parameter

$\gamma$. The numerical simulation is performed on a fixed domain defined by the dimensionless variables $(x, y, \tau)$ for the different values of the parameter $\gamma$. The number of points in the grid is allowed to increase with $\gamma$ according to Eq.(3.28). The mesh parameters are summarized in Tab. 3.1. The solutions are then rescaled according to the self-similar variables in Eq.(3.28). This entire rescaling process is graphically illustrated in Fig. 3.4 for three values of $\gamma$. The images in the left column are the direct simulation calculated on the fixed domain. The images in the right column are rescaled by the self-similar variables. This allows a direct comparison of the simulations for different values of $\gamma$. Note that $\gamma = 1$ is used as the reference domain. This self-similar domain is outlined by a rectangle on the left column. Images in the right column should theoretically be identical. Consistent with this prediction, the images show that the numerical scheme satisfies the nonlinear self-similarity property. For instance, the shape of the focused field, the location of the maximum of velocity and its amplitude, are clearly similar for different values of $\gamma$. Nevertheless, the second order numerical scheme introduces some numerical dispersion in the diffraction operator, as described in the previous section. This leads to small oscillations behind the caustic which break the perfect self-similarity of the numerical results (these oscillations are difficult to observe in the images).



(a) $\gamma = 0.05$ (d) $\gamma = 0.05$

(b) $\gamma = 0.5$ (e) $\gamma = 0.5$

(c) $\gamma = 1$ (f) $\gamma = 1$

**Figure 3.4.** – Velocity field for different values of $\gamma$ for the self-similar case of a focused step shock with boundary condition given by Eq.(3.26). Left column : direct simulations calculated on a fixed domain. The solid line is the geometrical cusp caustic. Right column : the same simulations rescaled by the self-similar variables. The rectangles on the left column show the rescaled region in the right column.

Fig. 3.5 shows the position, time and amplitude of the maximum of the velocity field,

rescaled according to their respective self-similar transformations Eq.(3.28), for a range of values of $\gamma$ between 0.05 and 1. Note that the location of the maximum is located on the $y = 0$ axis due to symmetry, but not at the geometrical focus $x = 0$ due to diffraction and nonlinear effects.

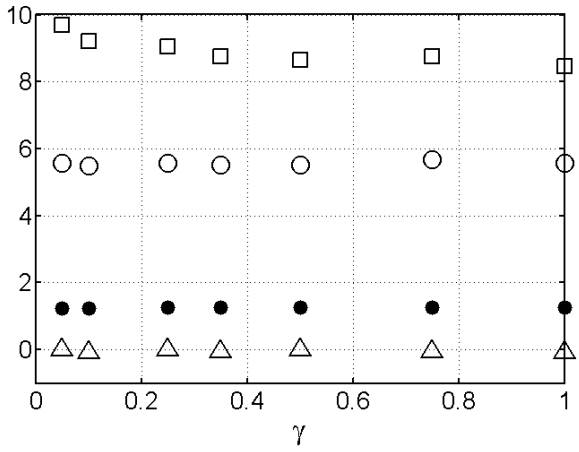
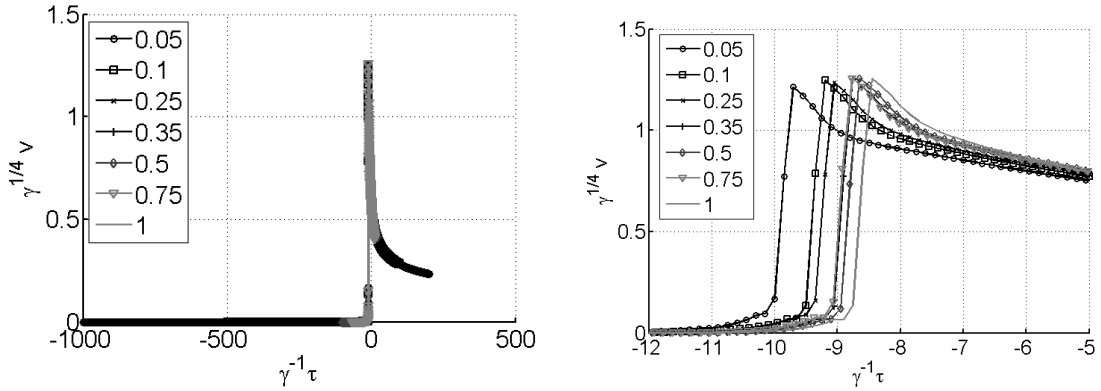



**Figure 3.5.** – Values of self-similar variables $\bar{x}$ (circle), $\bar{y}$ (triangle), $\bar{v}$ (disk), $-\bar{t}$ (square) of the point of maximum amplitude for different values of $\gamma$. In the ideal case each value would follow a horizontal line.

In the ideal case each variable would be independent of $\gamma$ and would thus lay on a horizontal line. The positions and amplitude of the focal point shown in Fig. 3.5 closely follow the self-similarity law. There is however a slight deviation (around 10%) from this law for the time variable (squares) for low values of $\gamma$. Fig. 3.6 illustrates the mechanism behind this discrepancy. It shows the computed time waveforms rescaled in the self-similar variables, at the point of maximum amplitude for $\gamma \in [0.05, 1]$. Preceding the shock front there is a non-physical low slope region that clearly deviates from the expected unperturbed value $\bar{v} = 0$. This precursor is due to numerical dispersion in the diffraction part of the algorithm, and to the numerical dissipation introduced by the nonlinear term–both tend to spread out the high frequency content of the signal. This may explain the small error in the self-similarity of the time variable, which is more sensitive to dispersion errors. Another possible source of error is that the boundary conditions are imposed on a fixed domain while theoretically they are applied at an infinite distance. Therefore, the condition of large distance for the boundary conditions is better satisfied for numerical simulations with small values of $\gamma$. Nevertheless, the overall variability is comparatively low.

The algorithm thus respects the predicted self-similarity scaling and is validated in the strongest possible in the absence of an analytical solution.




(a) Total signal

(b) Zoom centered on shock

**Figure 3.6.** – Velocity as a function of retarded time (self-similar variables) at the point of maximum amplitude for $\gamma$ varying from 0.05 to 1. Left : full time signal. Right : zoom centered on the shock.

## 3.3. Nonlinear focused shear waves in brain

### 3.3.1. Model configuration

The validated simulation tool was used to determine how focused shear shock waves can form in the brain. The initial conditions for this simulation were obtained from an X-ray computed tomography image of an anonymous human skull. The simulation was performed in two dimensions in a plane corresponding to a horizontal cut of the parietal bone (see Fig. 3.7) at the level of the forehead. A globally concave portion of the parietal bone was selected for investigation. To avoid pixelation effects, the interior surface of the skull was interpolated with a $5^{th}$ order polynomial spline method that was then used to define the emitted wavefront. However, due to the retarded time formulation of Eq.(3.4), the simulation can only support initial conditions that are defined on a planar surface. Therefore the source used in the simulation was calculated with a time-shifting method that projects the interior skull surface onto the source plane shown in Fig. 3.7. Each point of the source plane emits a wave with a phase shifted by $\Delta T(Y) = \Delta X(Y)/c_T$, where $\Delta X(Y)$ is the distance

between the point of $Y$-axis and the source plane shown in Fig. 3.7. The geometry investigated here approaches a half-angle of 50° and is therefore beyond the limit of validity of the parabolic approximation, which is 18°. However, the point of this study is to demonstrate that nonlinear effects can be dominant in regimes that are consistent with traumatic brain injury. For the purposes of this study we are therefore willing to accept a parabolic approximation which, in terms of diffraction, changes slightly the location of the focus, to increase the accuracy of shock wave modeling.

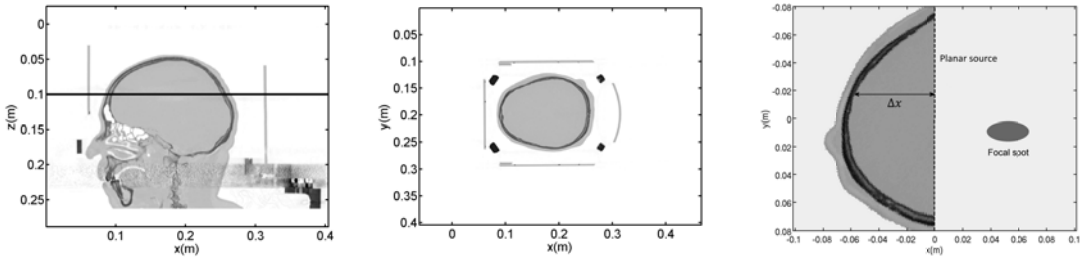



**Figure 3.7.** – CT of a human head. Dark grey : bone. Light grey : soft tissues. Left : vertical central cut. The horizontal line indicates the horizontal cut. Middle : horizontal cut. The arrow indicates the selected parietal area. Right : the selected parietal area. The doted line indicates the input plane for numerical simulations.

The linear elastic material properties of the brain have been investigated by many authors, a recent synthesis being provided by Chatelin et al. [21]. These studies indicate a large variability depending on the measurement process ( for instance *in vitro* or *in vivo*) and whether human or animal (porcine, bovine, calf, monkey...). Age dependence remains poorly understood. Shear behavior of brain matter is clearly viscoelastic with relaxation processes [2, 11]. White matter has been shown anisotropic, while grey matter turns out isotropic [102, 115]. For instance, in their finite element linear modeling of brain response, Zhang et al. [139] use values found in [124] with the shear modulus varying between $6.4kPa$ (long time) and $34kPa$ (short time) for the grey matter and between $7.8kPa$ and $41kPa$ for the white matter.

To our knowledge, the nonlinear elastic parameters $(A, D, \beta)$ of the brain have not yet been measured. Measurements of these specific parameters were performed on gelatin phantoms, with acousto-elastic methods to obtain the third order elastic constant $A$ [49], and by determination of the level of third harmonic to obtain

the nonlinear parameter $\beta$ [117]. In these last two references, the medium was an agar/gelatin gel with 5% gelatin concentration and 3% agar. Its shear modulus is in the range of $6.35 \pm 0.04kPa$ and $6.6 \pm 0.6kPa$, which is very similar to the long time shear modulus measured by [124] in the brain. The gel density is equal to 1.04, the same value reported by Zhang *et al.* [139] for both white and grey matter. This leads to a shear wave speed $c_T = 2.52 \pm 0.12m/s$. The gelatin phantom nonlinear parameter was measured to be $\beta = 4 \pm 0.5$ [117]. The absorption coefficient at a frequency of $f_0 = 100Hz$ was measured as $\alpha(f_0) = 17Np/m$. The absorption law as a function of frequency was empirically determined to be simply proportional to frequency [18] :

$$\alpha(f) = \alpha(f_0)\frac{f}{f_0}. \tag{3.29}$$

Consequently Gol'dberg number, which is a ratio of the nonlinearity and attenuation, is independent of frequency and depends only on the amplitude.

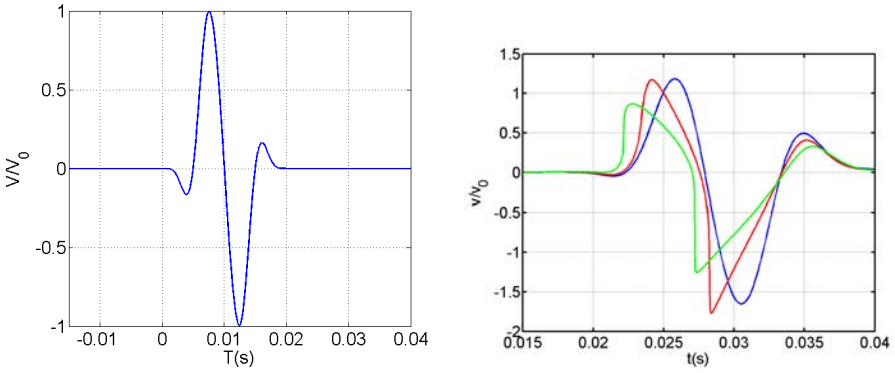
Note that contrary to brain, no relaxation could clearly be observed for the considered gelatin phantom [18]. To our knowledge, the only *in vivo* measurements of nonlinear parameters has been carried out in liver by means of acousto-elastography [9] for the parameter $A$ (see Eq.(3.1) which is only one of the two components of the overall $\beta$ parameter (see Eq.3.5). This measurement exhibits large differences for the $A$ parameter between gelatin phantoms and *in vivo* tissue, while the linear shear modulus are more similar. However, to our knowledge, no similar comparison has been performed for the $\beta$ parameter. Therefore, the relevance of using the nonlinear parameters of gelatin phantoms remains an open question. However, since there are currently no measurements of $\beta$ in soft tissue and in the brain, we use values for tissue mimicking gelatin phantoms instead.

### 3.3.2. Blunt impact

In this section, a blunt head impact that is focused in by the skull into the brain was simulated. A common criterion in the literature to quantifies head impact is the so-called Head Injury Criterion (HIC) [45] proposed by the US National Highway Traffic Safety Administration :

$$HIC = (t_2 - t_1)\left[\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} a dt\right]^{2.5}, \tag{3.30}$$

where $t_1$ is the initial time of contact, $t_2$ the end time of contact, and $a$ the head acceleration. Typical values for the impact duration $t_2 - t_1$ are less than $15ms$ and $HIC$ values go up to a few thousands [54, 22]. Such values correspond to trauma resulting either from well documented motorcyclist accidents [24] or from football head injuries, in both cases with helmets, that lead to severe diffuse axonal injuries. This corresponds to frequencies larger than 66 Hz, velocities of the order of a few meters per second and accelerations on the order of 10 $g$. Higher accelerations of several hundreds of $g$ are reported in cases of ballistic impact [116]. Hence, for typical simulations, we chose as input waveform a sinusoidal signal with a center frequency of $f_0 = 100Hz$, a single cycle envelope (see Fig.(3.8(a))), and an initial amplitude, $V_0$, chosen to be lower than $2m/s$. Note however that such values have been observed for external head motion. The transfer function to the brain tissue shearing is a complex process [139] that depends on the blunt impact orientation and location, the skull mechanical properties and the skull-brain interface that itself is composed of three layers (dura, arachnoid and pia maters). Modeling such process is not in the scope of the present study and for simplicity, we assumed a perfect transfer but with unknown velocity amplitude. Hence, a parametric study was performed by varying this velocity.




(a) (b)

**Figure 3.8.** – Left : Initial waveform. Right : Velocities calculated at the focal spot for different initial amplitudes. Blue : $0.05m/s$. Red : $0.6m/s$. Green : $1m/s$.

To ensure the convergence of the simulation, we used 400 points per wavelengths in time. The mesh on the $x$ axis was chosen according to the stability condition Eq.(3.22), so that the simulations required $N_x = 3155$ points on the $x$ axis with a

step size $\Delta x = 2.3777 \times 10^{-5} m$ . The $y$ axis was discretized with $N_y = 690$ points and a step size $\Delta y = 2.6276 \times 10^{-4} m$. Only the central 490 y-points are shown in the following results. The lateral extent of the numerical domain is about 18 $cm$, which is larger than the size of the selected part of the brain (about 12 $cm$). Combined with the geometrical focusing effect, this prevented lateral reflections from interfering with the focal zone.

Fig. 3.9 shows the total energy, acceleration [123, 116], and shear stress [140] for initial condition amplitudes of $0.05 m/s$, $0.6 m/s$ and $1 m/s$. Fig. 3.9(a)-3.9(c) shows the total energy $E$ of the signal calculated as $E = \rho/2 \sum_k (V_{j,k}^n)^2 \Delta t$ at each point of the numerical domain.The time plot at the focus is shown for each of these three amplitudes in Fig.3.8(b). Fig.3.9(d)-3.9(f) show maps of the maximum acceleration at each point of the spatial domain for the three initial velocities. Since absorption is empirical (see Eq.(3.29)) only the elastic part of the shear stress was calculated. It is defined as :

$$\sigma_{31} = \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \left(\mu + \frac{A}{2} + D\right) \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^3 \tag{3.31}$$

The numerical value for $\sigma_{31}$ is calculated according to Eq.(3.31), by changing the variables from $(t, x_1)$ to $(\tau, X)$. The numerical output of the velocity field is differentiated by a first order scheme so that :

$$\sigma_{jk}^n = -\frac{\mu}{c_T} V_{j,k}^n + \mu \sum_{K=0}^{k} (V_{j,K}^n - V_{j,K}^{n-1}) \frac{\Delta \tau}{\Delta X} - \frac{2\beta}{3 c_T^3} \left(V_{j,k}^n\right)^3 . \tag{3.32}$$

Note that in agreement with Eq.(3.4), only the leading nonlinear term involving partial derivative with respect to retarded time is retained. The shear stress is shown in Fig.3.9(g)-3.9(i).

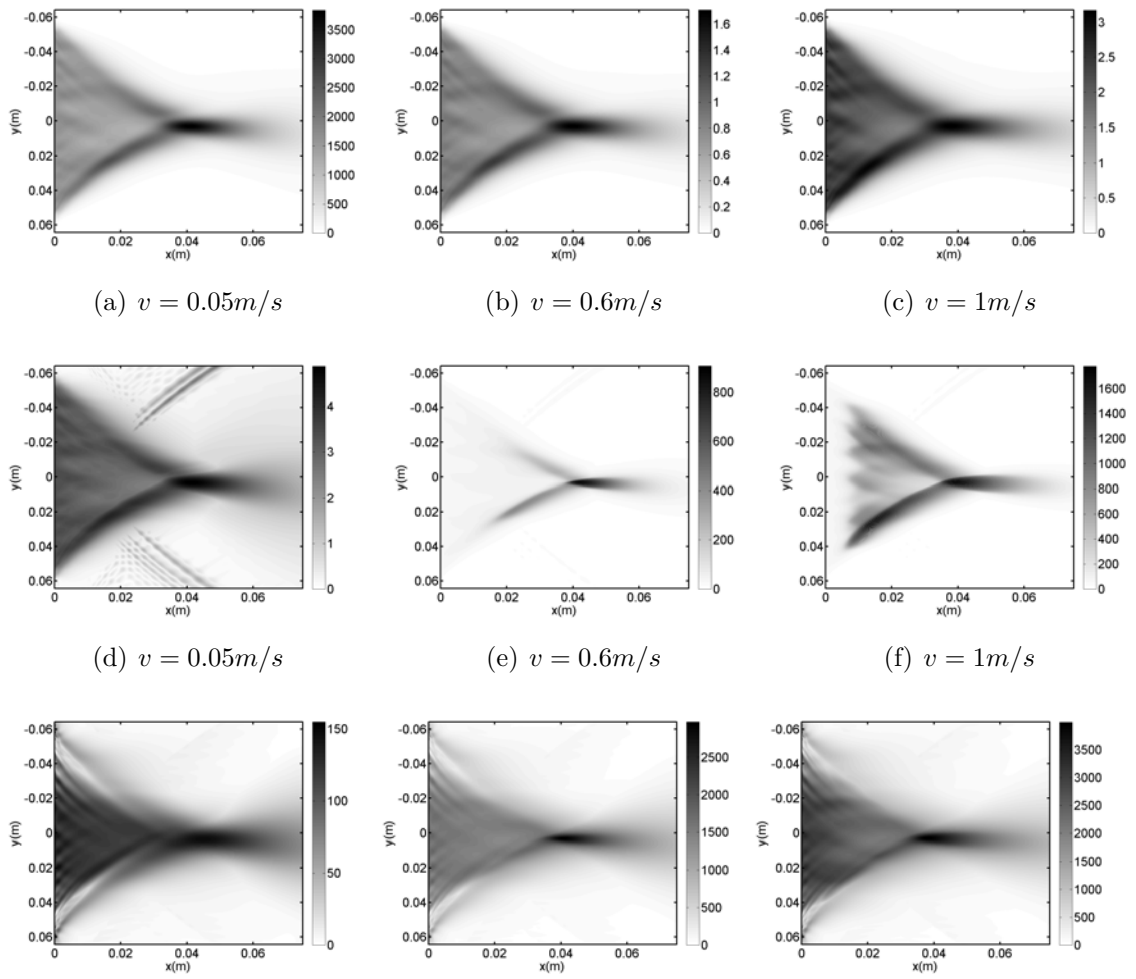
All images in Fig. 3.9 show a clear focal spot that is observable at a depth of about $x = 0.04m$. For an initial velocity $V_0 \lesssim 0.5 m/s$ there is no shock at the focal point. Shock waves appear for higher velocities, first in the negative phase of the shear wave (see the case $V_0 = 0.6 m/s$), then in the positive phase. This shock wave formation distance can be calculated analytically for a plane sinusoidal wave. For the three considered velocities this distance is, respectively, $2.54m$, $0.018m$ and $0.0064m$. Attenuation and diffraction slightly lengthen the plane wave estimates. Nevertheless

the orders of magnitude are correct. Therefore, compared to the $0.04m$ geometrical focus, the three initial conditions correspond to a shock formation distance well past the focus, near the focus, and well before the focus. This leads to three distinct types of behavior.

In the first case, shown as the left column in Fig. 3.9, no shock waves form and the propagation behavior is quasi-linear. There is therefore some focal gain which is reduced by attenuation. Overall there are no strong variations in the fields. In the second case, in the middle column of Fig. 3.9, where the shock formation distance and focal distance are approximately the same, there is a dramatic difference between the behavior at the focus and the rest of the field. In particular, Fig.3.9(e), shows that the maximum acceleration in the focal zone is much higher than anywhere else. The acceleration at the initial condition surface is $60g$ and it is over $800g$ in the focal region. This is due to the focal gain and shock formation which act together in a small region and can thus easily overcome attenuation to generate very high local accelerations. In the third case, the right column of Fig. 3.9, the shock forms in the first few millimeters of propagation, which corresponds to a small fraction of the wavelength. There is therefore a shear shock wave propagating in whole region between the initial condition surface, on the left, and beyond the focal zone. This behavior is particularly clear from the acceleration plot, Fig.3.9(f).

Generally, the results indicate a very efficient increase in maximum acceleration as soon as shock waves appear. Indeed, shock waves in inviscid media would lead to an infinite acceleration. Here acceleration remains finite due to the smoothing effects of absorption. Nevertheless, very high local acceleration values can be reached, up to a few thousand of $g$'s, at the shock front. These high accelerations can be localized in a small region due to focusing.

Focusing in terms of acceleration is much more efficient than in terms of energy or shear stress. The latter two behave in a similar fashion in the sense that there is a clear focusing effect but the local variations in the focal zone are not much larger than in the near field.

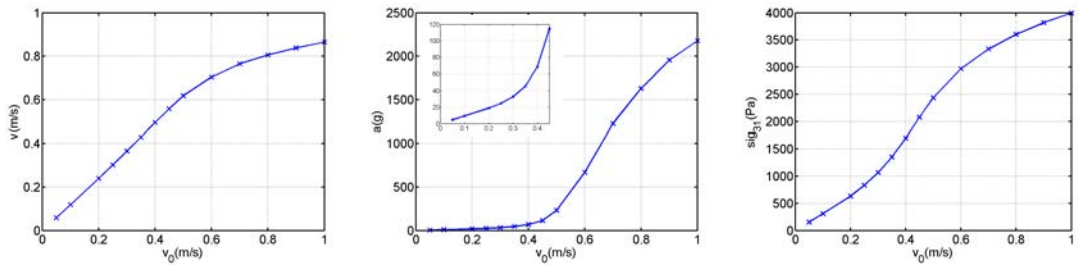



(a) $v = 0.05m/s$ (b) $v = 0.6m/s$ (c) $v = 1m/s$

(d) $v = 0.05m/s$ (e) $v = 0.6m/s$ (f) $v = 1m/s$

(g) $v = 0.05m/s$ (h) $v = 0.6m/s$ (i) $v = 1m/s$

**Figure 3.9.** – Maximum of energy (top), acceleration (middle) and shear stress $\sigma_{31}$ (bottom) on the calculation domain for initial amplitudes of $0.05m/s$ (left), $0.6m/s$ (middle) and $1m/s$ (right). These values correspond to shock formation distances that are, respectively, well past the focus, near the focus, and well before the focus.




(a) Velocity (b) Acceleration (c) Shear stress

**Figure 3.10.** – Maximum particle velocity and shear stress at the focus point the maximum of energy for different initial particle velocities

The transition from the quasi-linear regime to the shock regime can be characterized more finely by considering additional values in the initial condition velocity. Fig. 3.10 shows the maximum amplitudes of velocity, acceleration and shear stress at the focal point, for initial velocities between $0.05m/s$ and $1m/s$. The left plot of Fig. 3.10 shows that when the initial condition velocity increases, the maximum velocity at the focus increases in a linear fashion up to approximately $0.5m/s$. Beyond these values shocks are observed at the focus and the velocity increases in a sub-linear fashion. This is due to energy loss at the shock front. For acceleration, shown in the middle plot of Fig. 3.10, the linear regime ends at approximately $0.3m/s$. This is due to the fact that a shock is not required to increase the acceleration, rather nonlinear steepening increases the acceleration. For initial velocities of $0.5m/s$, when shocks form, there is a dramatic increase in the maximum acceleration observed at the focus. Beyond values of approximately $0.9m/s$ there is a saturation effect which corresponds to nonlinear dissipation. The behavior of the shear stress, shown on the right, is similar but with much less amplification compared to the acceleration.

## 3.4. Conclusion

For soft tissues, the shear wave velocity is so low (on the order of a few $m/s$) that nonlinear effects are very intense and shocks form over distances that are less than one wavelength (on the order of a few cm's). We have developed models and simulation tools that can describe this relatively unexplored behavior to investigate how the spherical skull geometry can influence shear shock formation in the brain.

The results were presented as function of velocities that are relevant to traumatic brain injuries, i.e. brain velocities between $0.05m/s$ to $2m/s$. Within this parameter range three distinct regimes were observed. First, at low amplitudes the shear wave propagation is practically linear. There are therefore some focusing effects due to the skull geometry, but no large differences between the focal region and the rest of the field for acceleration, energy, or shear stress. Second, the regime where the focal zone and shock wave formation distance are comparable exhibited dramatic differences between the focal zone and the rest of the field. In particular for the $0.6m/s$ case the acceleration at the source was $60m/s^2$ and at the focus it was $860m/s^2$. This corresponds to an almost 15 fold increase in the acceleration in a strongly localized area of the brain. This suggests that focused shear shock waves could be a mechanism that causes diffuse axonal injuries. Third, for large velocities the shock formation distance is a fraction of a wavelength (a few mm's). Therefore shocks form near the source and continue to propagate past the focus. Energy at these high displays a saturation effect because of the additional dissipation through shocks. For the largest input velocity values, nonlinearities is so strong that the wave is nonlinearly starting from the skull surface.

This study demonstrates the importance of nonlinear effects in shear wave propagation in the brain, the likeliness of shock wave formation and focusing in the brain volume. Since the simulations were performed in 2D the focal effect may be underestimated compared to the 3D spherical skull geometry which has an even larger focal gain. Nevertheless the study demonstrates a new potential mechanism for diffuse axonal injuries and tissue damage. Further studies will consider removing the paraxial approximation, investigating other polarizations, and comparing the simulations with laboratory experiments.

# 4. Propagation non linéaire des ondes planes de cisaillement et mesure des paramètres du gel

Les premières observations des ondes de chocs de cisaillement ont été effectuées dans un gel de gélatine en 2003, dans le cas d'une propagation en onde plane [20]. Cette observation a été rendue possible grâce à l'utilisation des nouvelles méthodes d'imagerie ultrasonore ultra-rapides [129]. Ce même dispositif a ensuite été utilisé pour caractériser les paramètres linéaires [18, 117] et le coefficient non linéaire $\beta$ [117] des gels. Ce chapitre présente l'étude des paramètres linéaires et non linéaires du gel en utilisant des méthodes similaires pour des configurations de propagation toujours en ondes planes. L'objectif est ainsi de caractériser le gel afin de pouvoir étudier les cas de focalisation présentés dans le chapitre suivant. Les paramètres étudiés ici sont donc l'atténuation, la vitesse de propagation et le coefficient non linéaire $\beta$. Pour chacun des paramètres, plusieurs méthodes sont discutées afin d'estimer l'erreur de mesure.

## 4.1. Protocole expérimental

### 4.1.1. Montage global

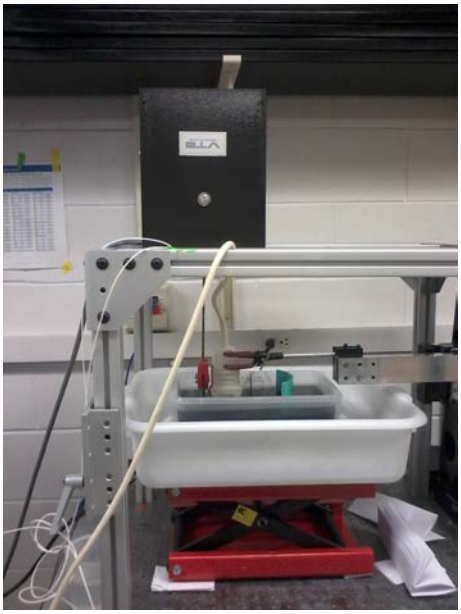


**Figure 4.1.** – Montage expérimental avec le gel, la sonde échographique, le pot vibrant et les platines de translation.

Le montage expérimental (cf photographie du dispositif Fig. 4.1 et schéma du montage Fig. 4.2) est conçu pour permettre une émission contrôlée d'une onde de cisaillement tout en effectuant son acquisition. Le montage se compose de trois parties :

- le système d'émission : un pot vibrant VTS 100 (Dynamic Solution,CA) oscillant avec une forme d'onde contrôlée ;
- le milieu de propagation : un gel de gélatine ;
- le système d'acquisition : un échographe ultra-rapide "Verasonics" placé sur une platine de translation à 3D "NewPort".

L'élément central du système d'acquisition est constitué par une barrette échographique constituée de 128 transducteurs piézoélectriques indépendants disposés linéairement, fonctionnant avec une fréquence centrale de $5MHz$. L'émission et l'acquisition des données sont pilotées par ordinateur via un script "matlab" tandis que la platine de déplacement est contrôlée par un script "LabView". L'émission s'effectue par un contrôle informatique qui détermine la fonction à envoyer au pot

vibrant par le générateur "PicoScope 5000 Series", ainsi que le trigger permettant de déclencher de manière synchrone toutes les autres opérations. Le signal émis par le générateur est au préalable amplifié, la sortie de l'amplificateur (modèle Crown XTI2 de la société Harman) est branchée sur le pot vibrant. Celui-ci est ainsi mis en mouvement selon la forme de l'onde désirée. Durant l'émission, deux systèmes de mesure sont activés :

— un accéléromètre (modèle 35-2 C33 de PCB Piezotronics) mesurant le déplacement vertical du pot vibrant afin de contrôler le signal émis ;
— le système d'acquisition "Verasonics" permettant d'obtenir une image échographique du milieu à différentes profondeurs.

Dans le cas d'une acquisition 3D, les moteurs contrôlant la position de la barrette échographique sont mis en marche afin de déplacer celle-ci dans le plan horizontal à la surface du gel. Notons que, afin de la protéger d'éventuelles vibrations, la barrette n'est pas en contact direct avec le gel, le contact barrette/gel étant assuré par une fine couche d'eau de quelques millimètres. Les propriétés acoustiques des ondes de compression (vitesse du son et densité) de l'eau et du gel étant extrêmement similaires, cette couche d'eau intermédiaire perturbe très peu l'acquisition. Après chaque vibration de la plaque, le système est laissé au repos pendant $2s$ afin de laisser le temps au système 1) de faire l'acquisition et de transférer les données, 2) d'amortir les vibrations mécaniques. La barrette peut alors être déplacée avant une nouvelle phase d'émission/acquisition.

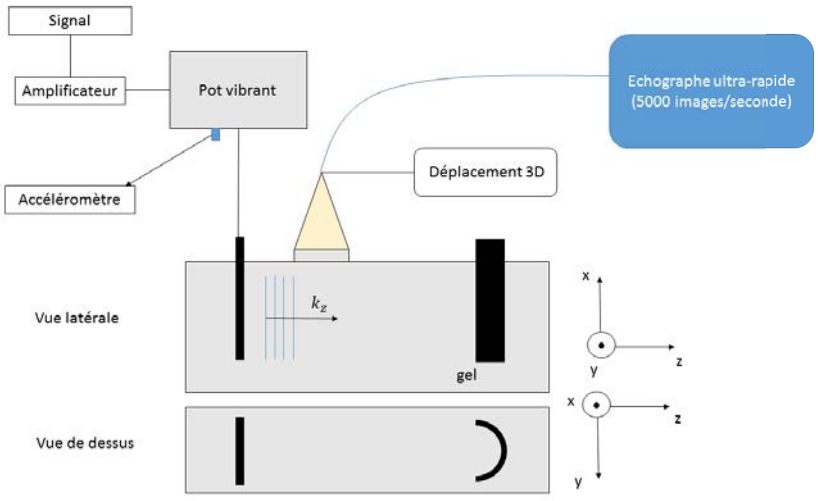



**Figure 4.2.** – Schéma du montage expérimental

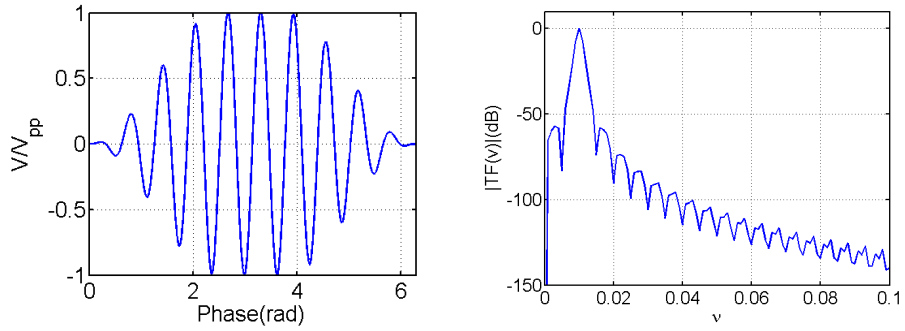
### 4.1.2. Le gel

Le gel choisi est un mélange de gélatine et de graphite, qui s'avère plus homogène et plus stable que les gels gélatine/agar étudiés auparavant. Il est composé en proportion massique de 3.14% de gélatine et de 5% de poudre de graphite. La concentration en gélatine est déterminante pour les propriétés mécaniques du gel [58]. On peut ainsi modifier la concentration pour s'approcher des caractéristiques des différents tissus biologiques. La concentration utilisée ici permet d'obtenir des paramètres similaires à ceux des tissus constituant le cerveau, mesurés dans des études préliminaires. Pour la fabrication du gel, $3.5kg$ d'eau sont chauffés à $50^oC$. Cette température atteinte, on ajoute $110g$ de gélatine à faire fondre dans l'eau, puis, pour stabiliser le mélange, 5% d'isopropanol pur à 99%. Une fois le mélange homogène, on y inclut la poudre de graphite. Le volume total du gel est donc d'environ $4L$. Le mélange effectué contient de l'air qui peut former des bulles interférant avec nos méthodes d'imagerie. Ce problème se résout en effectuant un dégazage du milieu dans une cuve à vide pendant une trentaine de minutes. Pour cette phase de fabrication du gel, j'ai été assisté par Kieira Falbo étudiante en Licence à University of North Carolina at Chapel Hill. Le gel étant encore très liquide, il est mis à refroidir dans de la glace. Une fois que la température du gel est descendue à $24^oC$, nous le coulons dans le moule contenant les plaques servant de source, moule formé d'un parallélépipède de 20cm de longueur, 15cm de largeur et 13cm de profondeur environ. Les deux séries de mesures (ondes planes émises par une plaque plane et ondes focalisées émises par une section de cylindre) sont réalisées dans le *même* gel en coulant celui-ci avec les deux plaques excitatrices positionnées à quelques centimètres de chacune de ses extrémités (cf Fig. 4.1). Il suffit pour passer d'une mesure à l'autre de retourner le moule ! Ceci permet d'utiliser les paramètres du gel mesurés en ondes planes pour le cas de la focalisation. Nous continuons ensuite à faire refroidir le gel avec de la glace jusqu'à atteindre approximativement $10^oC$, température à laquelle le gel devient suffisamment solide. Une fois cette température atteinte, nous le recouvrons avec de l'eau glacée et nous le laissons refroidir au réfrigérateur jusqu'à une température de $5^oC$. Pour la suite des expériences, nous maintenons le gel approximativement à cette température en utilisant de la glace autour du moule et en ajoutant un mélange eau/glace à la surface du gel, mélange qui est renouvelé tout au long de l'expérience.

## 4.1.3. Le système d'émission

### 4.1.3.1. La source

Pour la formation des ondes planes, nous utilisons une plaque plane en acrylique dont les dimensions sont de l'ordre de $14cm$ de largeur et de $10cm$ en profondeur. Le signal émis au générateur a été choisi comme une onde sinusoïdale de 4 périodes que nous émettons à différentes fréquences centrales et à différentes amplitudes. Le nombre choisi de périodes est un compromis entre la durée nécessaire du signal pour l'observer à la fréquence souhaitée, et la nécessité d'une vibration la plus courte possible afin de limiter les vibrations de l'ensemble du dispositif et donc les dommages possibles. Pour obtenir 4 périodes d'amplitude égales, l'onde émise est une sinusoïde fenêtrée par la fenêtre de Tukey [62], comme présentée sur Fig.4.3(a). Son spectre (cf. Fig.4.3(b)) est centré autour de la fréquence de l'onde avec une décroissance très rapide. Ceci permet d'avoir des oscillations de même amplitude sur les 4 périodes souhaitées, tout en diminuant progressivement les amplitudes à émettre par le pot vibrant en début et fin de signal. Les accélérations, de mise en mouvement et d'arrêt du signal, sont ainsi plus faibles, limitant les vibrations parasites. Afin de conserver la forme d'onde lors de l'émission nous avons choisi de modifier la fréquence d'échantillonnage du système d'émission en proportion de sa fréquence centrale. Pour les ondes planes, chaque signal est émis 3 fois afin d'effectuer une moyenne sur les réalisations pour réduire le bruit.




(a) Forme de l'onde (b) Spectre

**Figure 4.3.** – Forme et spectre sans dimension de l'onde émise lors des études de propagation.

Dans le cas des ondes planes, la plus basse fréquence émise est de $25Hz$, puis la gamme de $50Hz$ à $1000Hz$ est balayée par pas de $50Hz$. Cette large gamme est destinée à déterminer les caractéristiques acoustiques du gel (vitesse de phase, absorption) sur une large bande. Nous nous somme limités à $1000Hz$ car au-delà les ondes sont trop rapidement atténuées. Les amplitudes avant amplification sont dans tous ces cas de 100, 200 et $1000mV$ pic à pic, permettant d'étudier des cas de propagation linéaires et non linéaires, et d'estimer le paramètre de non-linéarité du gel.

#### 4.1.3.2. Effets de bord et de diffraction

Les mesures sont effectuées à une seule position de la barrette échographique proche de l'axe de symétrie de la plaque $y = 0$, ceci afin de diminuer les effets de diffraction résultant des bords de la plaque. La plaque étant large de $2a = 14cm$, la longueur caractéristique de diffraction, pour les bords latéraux (verticaux), donnée par la distance de Rayleigh $L_d = {ka^2}/{2}$ pour des ondes à $25Hz$ est $L_d \approx 0.96m$, pour une vitesse de propagation de $c_T = 1.6m/s$. La matrice de transducteurs constituant la barrette est positionné à environ $5mm$ de la plaque. Cela signifie que le dernier élément de la matrice est à environ $5cm$ de la plaque, la partie active de la barrette étant longue de $4cm$, avec une partie inactive de $0.5cm$ environ. La portion observée est ainsi très inférieure à la longueur caractéristique de diffraction. La distance de Rayleigh dépendant linéairement de la fréquence, une augmentation de celle-ci implique une augmentation de la longueur $L_d$, et donc une amélioration de la validité de l'approximation. Pour la diffraction par le bord inférieur de la plaque, celle-ci ayant une profondeur de $8cm$ dans le gel, la distance de Rayleigh correspondante est de $31cm$, donc toujours très grande devant la zone du gel explorée. En conclusion, les effets de taille finie de la plaque excitatrice sont *a priori* négligeables et l'approximation d'onde plane est bien satisfaite du point de vue de la source.

En revanche, la propagation a lieu dans un milieu de dimensions finies, ce qui implique nécessairement des réflexions sur les bords. Le cas le plus critique est la réflexion sur les bords latéraux qui sont les plus proches de la plaque, à environ $0.5cm$ de celle-ci. Une estimation faite à un point de mesure aux trois quarts de la barrette (position approximative du point focal en source courbe, cf. chapitre 5), soit à $4cm$ de la plaque, montre que l'onde issue du bord de la plaque et réfléchie par la paroi latérale arrive environ $0.006s$ après le signal direct de durée environ

$0.05s$, et interagit probablement avec celui-ci. Le cas d'une source focalisée émettant principalement vers l'axe central apparaît donc comme plus favorable pour limiter l'influence des bords latéraux. Concernant la réflexion sur le fond de la cuve de $13cm$ de profondeur, l'extrémité de la plaque de hauteur totale $10cm$ et plongée dans le gel sur une hauteur de $8cm$ environ est donc située à $5cm$ du fond de la cuve. Un point de la barrette situé à la surface du gel et toujours à $4cm$ de la source verra donc le signal réfléchi sur le fond de la cuve arriver à $0.06s$ environ après le signal direct, soit après que l'essentiel du signal direct ait été observé. Le cas de la source focalisante paraît donc comme nettement plus favorable pour limiter les effets de réflexion par les parois de la cuve.

#### 4.1.3.3. Le pot vibrant

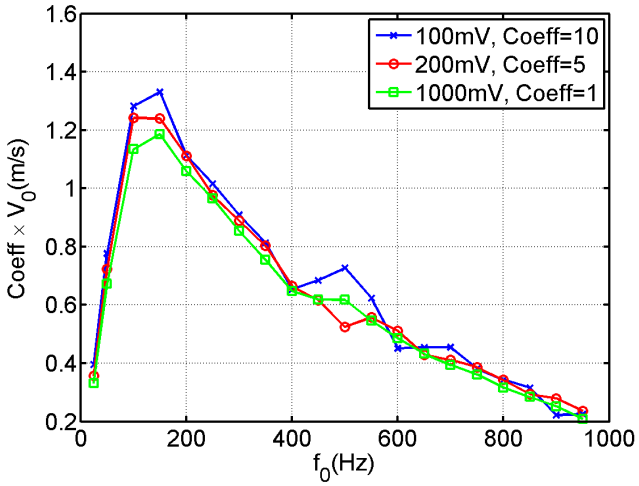
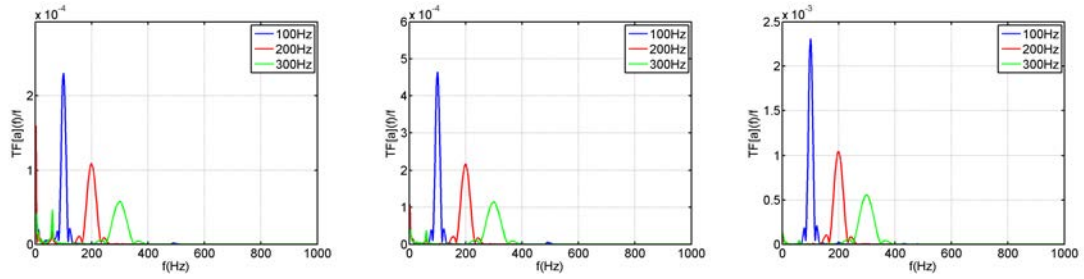



**Figure 4.4.** – Réponse en vitesse du montage formé par le pot vibrant, la plaque et le gel pour des tensions initiales de $100mV$ (croix bleue), $200mV$ (carré rouge) et $1000mV$ (cercle vert) pic à pic. Les réponses sont multipliés par $Coeff$ pour être comparées entre elles.

L'accéléromètre, fixé sous le pot vibrant, permet d'en mesurer le mouvement lors de chaque émission. Pour une fréquence centrale et un voltage d'excitation donnés avant amplification, le signal temporel émis est celui décrit dans la section précédente. Les signaux d'accélération $a_{ac}(t)$ mesurés par l'accéléromètre fournissent une mesure absolue de l'accélération au niveau du pot vibrant. Ils sont intégrés

numériquement soit par la méthode des trapèzes, soit par transformée de Fourier $v_{ac}(t) = TF^{-1}(jTF(a_{ac})/\omega)$ afin d'obtenir la vitesse $v_{ac}(t)$. La valeur maximale de la vitesse $V_0 = max(v_{ac}(t))$ donne ainsi une mesure de l'amplitude en vitesse $V_0 = \omega_0 u_0$ (avec les notations du chapitre 2) en fonction de la fréquence d'émission $f_0 = \omega_0/2\pi$ et de la tension d'excitation. Les amplitudes de chacune de ces acquisitions donnent la courbe d'étalonnage du système d'émission (pot vibrant+plaque+gel), tracée ici en fonction de la fréquence d'émission pour une tension d'excitation donnée sur Fig. 4.4. Les signaux ici mesurés ont une fréquence centrale variant entre $25Hz$ et $1000Hz$ pour des tensions d'excitation de $100mV$, $200mV$ et $1000mV$ pic à pic. Les vitesses mesurées sont affectées d'un coefficient afin de remettre toutes les mesures sur la même échelle, et ainsi évaluer la linéarité du système d'excitation. Le premier constat est que les courbes sont similaires et se superposent quasiment après le changement d'échelle. La source apparaît donc bien comme satisfaisant un comportement linéaire en amplitude quelle que soit la fréquence centrale d'excitation. Cependant, il faut noter aussi que la réponse n'est pas constante en fonction de la fréquence. La vitesse maximale est obtenue pour une fréquence proche de $100Hz$. Le choix du modèle de pot vibrant est ainsi satisfaisant pour les fréquences ici visées. Notons toutefois que selon la courbe d'étalonnage du pot vibrant (données du constructeur), le gain est constant jusqu'à $25kHz$. La comparaison entre les réponses mesurées Fig. 4.4 et la courbe d'étalonnage tendrait donc à montrer que l'élément déterminant n'est pas le pot vibrant mais le couplage avec le gel. En conséquence, une série d'expériences à tension constante n'apparaît pas comme la plus optimale car l'amplitude décroît très fortement pour les plus hautes fréquences. Il aurait fallu corriger les tensions utilisées par la réponse du montage afin de maintenir les vitesses constantes. Toutefois, les expériences ont été menées à des tensions à la limite du domaine d'utilisation du pot vibrant fournie par le constructeur. Continuer à augmenter les amplitudes aurait pu mener à un endommagement du matériel.




(a) (b) (c)

**Figure 4.5.** – Spectres des signaux mesurés à l'accéléromètre pour les fréquences centrales de $100Hz$, $200Hz$ et $300Hz$, et des tensions d'émission de $100mV$ (gauche), $200mV$ (milieu) et $1000mV$ (droite) pic à pic.

Fig. 4.5 présente les spectres des signaux mesurés par l'accéléromètre pour des émissions à $100Hz$, $200Hz$ et $300Hz$, et pour des tensions d'émission de $100mV$, $200mV$ et $1000mV$ pic à pic. Nous pouvons noter que les spectres ne présentent pas du tout de contenu harmonique. Cette mesure confirme dans le domaine spectral l'observation déjà faite en amplitude que la réponse du pot vibrant est parfaitement linéaire.

#### 4.1.3.4. Limites du couplage

La plaque est attachée à la tige la reliant au pot vibrant, par un bloc plastique fabriqué par impression 3D, en rouge sur la photographie Fig. 4.1, et serré par deux vis. Les vibrations du montage au bout d'un certain nombre d'excitations, tendent à desserrer les vis, ce qui induit un bruit de structure dans le montage visible à l'accéléromètre. Afin de limiter ces effets, nous introduisons entre la plaque et le système d'attache à la tige, une lamelle de caoutchouc. Le tout est serré très fort, la lamelle permet ainsi de maintenir les zones de contacts entre les éléments du montage et donc d'éviter la formation des vibrations parasites. Notons que la stabilité du montage est vérifiée par les mesures à l'accéléromètre.

### 4.1.4. Système d'acquisition par imagerie ultra-rapide

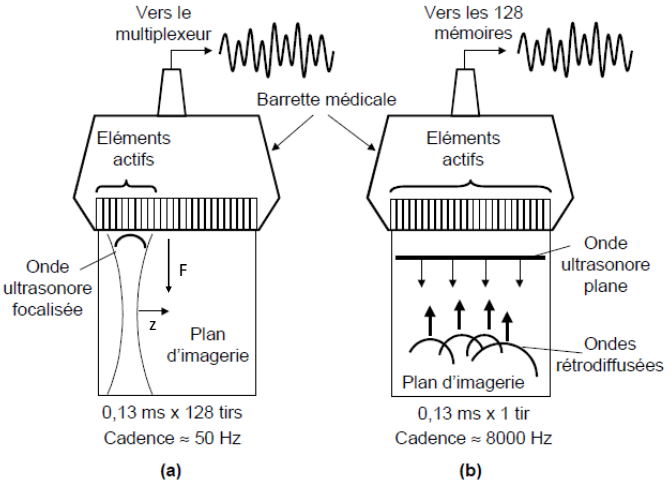



**Figure 4.6.** – Schéma des méthodes [68] d'imagerie classique (a) et d'imagerie ultra-rapide (b)

L'imagerie des ondes de cisaillement se base sur l'observation du déplacement de très faibles hétérogénéités (ici les particules de graphite de taille $10\mu m$ à $100\mu m$) lors de la propagation. Celles-ci servent à diffuser les ondes de compression ultrasonores, permettant ainsi l'étude du déplacement des particules à l'aide de méthodes échographiques.

L'imagerie échographique consiste à cartographier l'impédance acoustique d'un milieu à travers le coefficient de réflexion des ondes acoustiques. Cela nécessite de respecter l'hypothèse de diffusion simple : la diffusion multiple empêcherait de remonter aux hétérogénéités du milieu. L'échographie classique utilisée en médecine utilise une matrice linéaire de transducteurs ultrasonores indépendants. Cette matrice permet la mise en œuvre de méthodes de formation de voie par l'application d'une loi de retard entre les transducteurs à l'émission afin de focaliser à une profondeur donnée. L'image correspondant à la voie est ensuite reconstruite en effectuant une seconde formation de voie sur les signaux en réceptions afin de détecter les sources d'émissions. Le temps d'acquisition d'une ligne est ainsi gouverné principalement par le temps nécessaire à l'onde ultrasonore pour effectuer un aller-retour

entre la barrette et la zone imagée, soit typiquement $80\mu s$ pour une profondeur de $6cm$. Une image échographique classique à deux dimensions est obtenue en répétant séquentiellement cette opération. Ainsi, avec une barrette de 128 éléments, le temps d'acquisition est de l'ordre de $10ms$, soit une cadence d'imagerie théorique maximale de l'ordre de $100Hz$ [6]. Notons qu'en pratique cette cadence est de l'ordre de 25 à 50 images par secondes [68] en temps réel compte tenu du temps de traitement et de sauvegarde des données. Ces cadences sont suffisantes pour de l'imagerie échographique classique, mais insuffisantes pour de l'imagerie 3-D ou pour de l'imagerie de phénomènes dynamiques. Parmi ceux-ci, on peut noter comme applications principales l'imagerie de flux sanguins ou l'élastographie des tissus par mesure de vitesse de propagation des ondes de cisaillement à des fréquences de quelques centaines de Hertz. La solution la plus simple pour augmenter la cadence est de traiter plusieurs voies en parallèles par l'émission de faisceaux plus larges couvrant plusieurs lignes [122]. L'imagerie ultra-rapide ultrasonore revient à pousser cette méthode à son extrême en émettant directement une onde plane sans formation de voies par l'ensemble des transducteurs de la barrette et en enregistrant les signaux reçus par chacun d'eux. La cadence d'imagerie est alors directement déterminée par le temps de vol, $80\mu s$ dans notre exemple, soit $12500Hz$. En pratique, cette cadence est réduite par les différentes contraintes techniques : temps d'acquisition, de transfert, de pause entre les images, *etc.* Mais des valeurs de l'ordre de 8000 images par seconde sont possibles. Pour le dispositif utilisé ici, la cadence était de 5000 images par seconde. Ceci permet par exemple d'imager des ondes de cisaillement jusqu'à des fréquences de $1000Hz$, soit 5 points par période.

## 4.1.5. Traitement des données

### 4.1.5.1. Estimation adaptative des déplacements

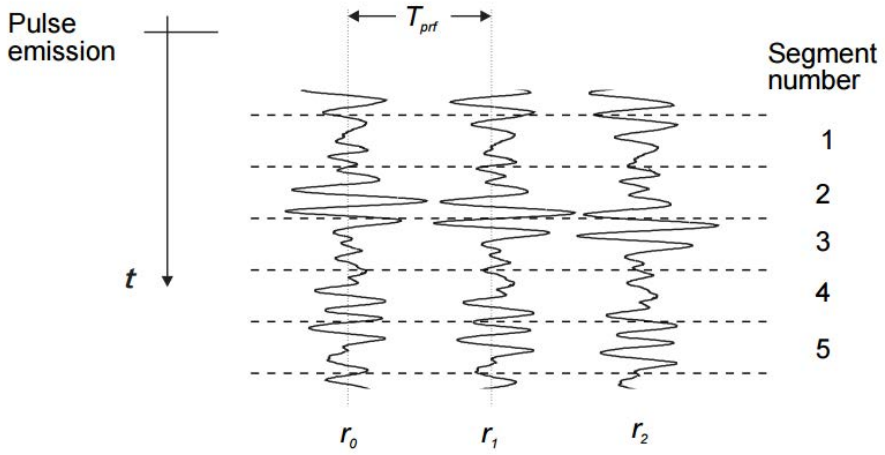



**Figure 4.7.** – Mesure des vitesses de déplacement par corrélation de signaux rétro-diffusés [70]

La contre-partie de la méthode d'imagerie ultra-rapide est que l'on travaille en mode plan plutôt qu'en mode focalisé, ce qui en imagerie classique conduirait à une forte dégradation de la résolution spatiale de l'image. Pour compenser ceci, les mesures par imagerie ultra-rapide détectent le mouvement des hétérogénéités (ici, pour nous, les particules de graphite) supposées disposées aléatoirement et de manière homogène dans le milieu. Cette mesure se fait par estimation du déplacement des hétérogénéités entre deux images successives, ce qui donne la vitesse connaissant la cadence d'imagerie. Les positions des hétérogénéités sont déterminées pour une image donnée par le champ ultrasonore diffusé par celles-ci. Il s'agit ainsi d'une mesure du "speckle". Ces hétérogénéités doivent ainsi être suffisamment petites pour satisfaire les approximations de diffusion simple. L'imagerie ultra-rapide s'avère donc adaptée à la mesure de champs de vitesse, d'où ses applications à la mesure de flux sanguins [7] ou à l'élastographie [128, 3] par mesure de la vitesse de propagation des ondes de cisaillement.

Le principe de la mesure des vitesses de déplacement (à une dimension) repose sur la corrélation des signaux rétro-diffusés par les hétérogénéités [48]. Considérons les signaux rétro-diffusés reçus par le transducteur pour deux tirs successifs, séparés

d'un intervalle $\delta t$ donné (cadence d'imagerie). Pour une profondeur donnée $x$, le temps d'arrivée du signal au premier tir est estimé par $t_1 = 2x/c_L$ avec $c_L$ la vitesse de propagation des ultrasons (environ $1500m/s$). Une fenêtre de durée $\Delta t$ est sélectionnée autour de cet instant. Afin d'estimer le déplacement $\delta x$ du diffuseur supposé présent à cette profondeur, on sélectionne une fenêtre de même durée $\Delta t$ dans le deuxième tir à l'instant $t_2$. Pour différents instants $t_2$, on calcule la corrélation entre les deux fenêtres aux instants $t_1$ et $t_2$. L'instant $t_2$ de corrélation maximale fournit le déplacement $\delta x = c_L(t_2 - t_1)/2$. La vitesse dans la direction $x$ est ainsi $\delta x/\delta t$ . Le principe est illustré sur Fig. 4.7 extraite de [70].

Dans le cas des ondes de choc de cisaillement, deux difficultés supplémentaires sont à prendre en compte : la première est l'amplitude importante des vitesses à mesurer qui peut dépasser $1m/s$, ce qui correspond à des grands déplacements entre deux acquisitions. La seconde est le caractère transitoire des ondes de choc qui nécessite une bande passante significative, typiquement jusqu'au septième harmonique [20]. A cet effet, l'algorithme de traitement décrit ci-dessus a été amélioré pour satisfaire à ces conditions [111]. Afin de s'adapter à la présence de signaux temporels soit réguliers, soit discontinus lorsqu'il y a des chocs, la largeur de la fenêtre $\Delta t$ est réduite de manière itérative. Pour chaque nouvelle largeur de fenêtre, la nouvelle valeur déduite du déplacement n'est conservée que si le coefficient de corrélation est au-dessus d'une valeur seuil (ici 0.75). Afin d'augmenter la précision de la mesure de déplacement, une interpolation des signaux mesurés est nécessaire. Deux méthodes sont utilisées. Dans la première, une interpolation linéaire des signaux temporels est réalisée, leur corrélation est calculée de manière discrète et enfin la fonction de corrélation est interpolée au voisinage de son maximum par une parabole pour obtenir une meilleur estimation de la position de ce maximum [112]. Ces interpolations permettent ainsi de mesurer des déplacements inférieurs à la résolution de l'imagerie échographique. Une méthode alternative consiste à interpoler les signaux par une interpolation *spline cubic*, ce qui permet un calcul analytique de la corrélation [113]. L'interpolation *spline cubic* s'avère meilleure, mais ne permet pas de mesurer les grands déplacements car la corrélation diminue pour ceux-ci. Pour remédier à cet inconvénient, une étape supplémentaire consiste à appliquer un filtre médian pondéré aux corrélations et aux estimations du déplacement [111]. Notons que celui-ci n'est pas applicable aux extrémités de la barrette échographique. En conséquences, les premiers et derniers points de mesure le long de celle-ci ne sont pas exploitables.

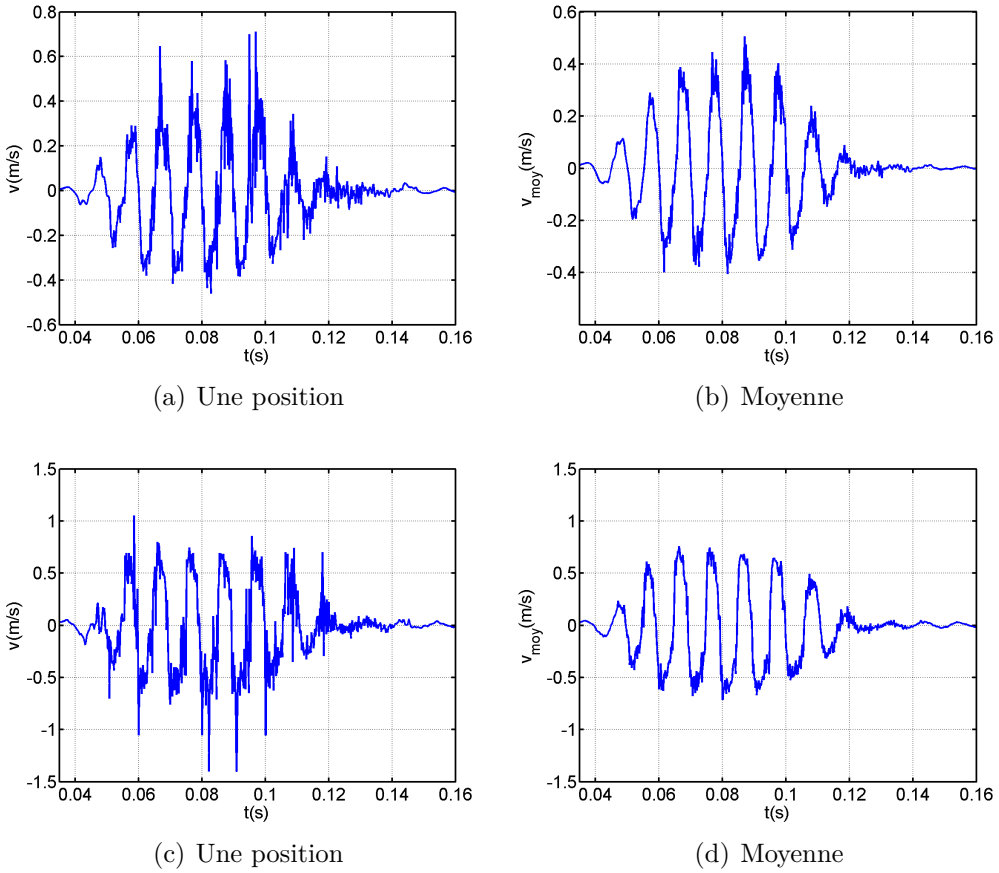
#### 4.1.5.2. Moyennage du signal

La méthode d'acquisition des données décrite ci-dessus permet d'imager le gel en profondeur. Pour un "tir" (une excitation du milieu), les données recueillies sont ainsi des cartes de vitesse particulaire à deux dimensions, dans un plan vertical $y = Cste$. Une cartographie à trois dimensions peut être obtenue en déplaçant la barrette dans la direction horizontale $y$. Ici, toutefois, les sources (plaque plane ou cylindre) sont supposées invariantes dans la direction verticale $x$ (en négligeant les effets de bords). Les mesures obtenues dans cette direction sont en conséquence moyennées, ce qui permet de réduire fortement le bruit lié à la mesure. Cependant, le traitement n'est pas parfait car le bruit n'est pas entièrement aléatoire. Il y a une partie du bruit qui peut s'annuler avec une moyenne mais une autre partie provient de la méthode de détection de mouvement par ultrasons. En effet, les études ont montré que les erreurs sur ces méthodes dépendent :

— des valeurs de corrélation ;
— de la taille de la fenêtre de test ;
— du rapport signal sur bruit.

Cette étape ne diminue ainsi qu'une partie des erreurs. Il faut cependant prendre des précautions. En effet, le risque le plus important avec ce type de traitement vient des défauts d'alignement du montage. Si les temps d'arrivée des ondes ne sont pas strictement identiques à chaque profondeur, une partie du signal sera vu comme incohérent, il y aura donc une perte d'amplitude, un étalement des chocs, voire leur possible disparition.

Fig. 4.8 présente un résultat de ce traitement sur le signal temporel en vitesse résultant d'un cas de focalisation, pour des émissions à $500mV$ (en haut) ou $1000mV$ (en bas), et pour une fréquence centrale d'excitation du pot vibrant de $100Hz$ . Les figures de gauche présentent la mesure "brute" en un point situé en $y = 0$, à $1cm$ du début de la barrette, et à mi-profondeur du gel. Les figures de droite présentent le signal moyenné au même point $(y, z)$ sur 100 positions sur l'ensemble de la profondeur $x$ accessible à la mesure. Pour les deux amplitudes d'émission présentées, on peut observer une diminution significative du bruit après moyennage. Cependant, il convient de noter que le caractère non linéaire des ondes mesurées après l'opération de moyenne est peu affecté par celle-ci. En effet, on peut observer une déformation typique des non-linéarités cubiques pour le cas à $500mV$ avec l'apparition de formes d'onde de type "créneaux" comme observé numériquement (cf chapitre 3).




(a) Une position (b) Moyenne

(c) Une position (d) Moyenne

**Figure 4.8.** – Signaux temporels mesurés pour une émission d'amplitude $500mV$ (haut) ou $1000mV$ (bas) à une fréquence de $100Hz$. A gauche : exemple de signal mesuré en un point. A droite : exemple de signal après moyenne sur la profondeur de mesure.

Pour l'émission à $1000mV$, les signaux moyennés conservent le profil quasi-choqué avec une alternance de chocs positifs et négatifs (cf chapitres 2 et 3). On peut ainsi supposer au vu de cet exemple que la moyenne sur un grand nombre de positions verticales est ici possible car on n'observe pas d'étalement significatif des chocs. Ce point est confirmé par Fig. 4.9 qui présente les spectres fréquentiels des deux signaux précédents pour une émission à $1000mV$. On observe que les différents harmoniques impairs ne sont pas affectés par le processus de moyenne. En particulier, l'harmonique 5 se dégage plus nettement du bruit que pour la mesure en un point.

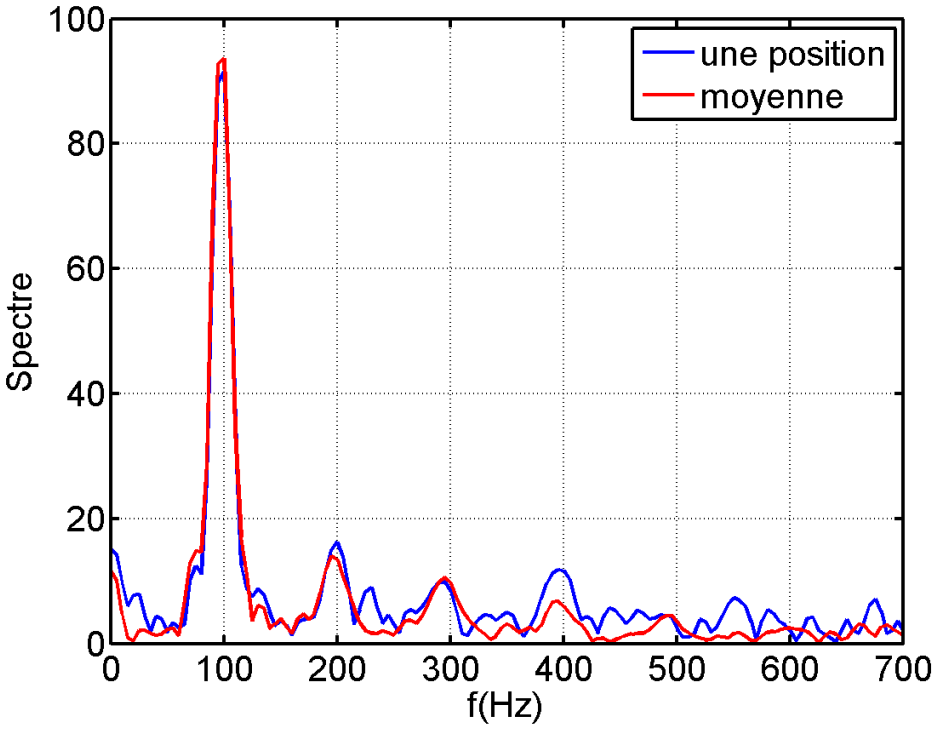


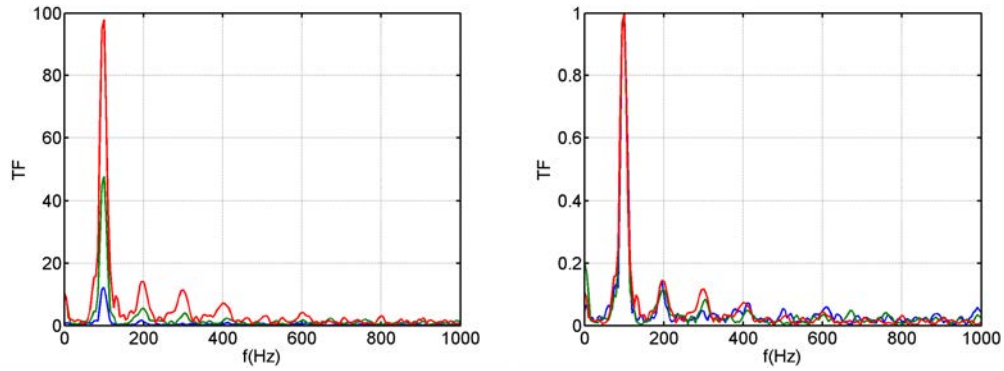

**Figure 4.9.** – Spectres (en unité arbitraire) des signaux mesurés dans le gel Fig. 4.8(c)-(d) à $1000mV$ pour une réalisation (bleu) ou moyennés (rouge).

Dans le cas de l'onde plane, celle-ci étant invariante également dans la direction $y$, une seule mesure est effectuée en plaçant la barrette échographique sur l'axe de symétrie $y = 0$. Pour des valeurs données de l'amplitude et de la fréquence, la même mesure est répétée trois fois et une moyenne supplémentaire sur ces trois tirs est également effectuée de façon à réduire encore le bruit de mesure. Dans le cas focalisé, la barrette est déplacée suivant l'axe $y$ sur une centaine de positions avec un pas de $1.2mm$. La mesure étant alors beaucoup plus longue, pour chaque ligne de mesure selon $z$, un seul tir est réalisé.

#### 4.1.5.3. Discussion sur le second harmonique

La Fig. 4.9 fait apparaître des composantes harmoniques paires à $200Hz$ et $400Hz$. On peut s'interroger sur leur présence dans le spectre. Les mesures à la source (pot vibrant) montrent clairement que celle-ci est parfaitement linéaire. D'autres mesures d'accélération directement sur la plaque non montrées ici conduisent à la

même conclusion.




(a) (b)

**Figure 4.10.** – Spectres des signaux moyennés mesurés dans le gel selon les mêmes conditions que Fig. 4.8 pour trois amplitudes d'émission $200mV$ (bleu), $500mV$ (vert) et $1000mV$ (rouge). A gauche : spectre du signal (unité arbitraire). A droite : spectre normalisé par l'amplitude du fondamental.

La Fig. 4.10 montrant les mêmes spectres moyennés pour trois amplitudes d'émissions $200mV$, $500mV$ et $1000mV$ indique clairement que les composantes harmoniques paires à $200Hz$ et $400Hz$ varient linéairement avec l'amplitude d'excitation. Il semble donc peu probable que ces composantes soient liées ni à la source, ni à la propagation des ondes dans le gel. L'hypothèse la plus probable est que ces composantes résulteraient du système d'acquisition. Ceci est conforté par différents tests actuellement en cours indiquant que le niveau des harmoniques pairs, au contraire de celui des harmoniques impairs, varie avec les paramètres choisis pour le système d'acquisition. Trois pistes sont envisagées. La première serait un effet d'interférence acoustique lié aux réflexions multiples du signal sonde ultrasonore entre la surface et le fond du gel. La seconde serait liée à la méthode de formation de voies de l'image échographique. La dernière pourrait impliquer l'algorithme de suivi du déplacement des particules de graphite jouant le rôle de diffuseur. Les méthodes de correction que nous pouvons ainsi envisager pour les futurs études sont :

— une couche de caoutchouc au fond de la cuve, non parallèle à la barrette afin d'éviter les réflexions ;
— le développement de méthodes d'imagerie qui n'utilisent pas des ondes planes ;
— une amélioration des algorithmes d'estimation des déplacements.

Depuis les expériences présentées ici et réalisées en novembre 2014, le protocole expérimental a été amélioré : la liaison entre le pot vibrant et la plaque a été rendue plus rigide, les réflexions sur les bords de la cuve ont été réduites, et la partie électronique de l'émission a été mieux calibrée. Un exemple de spectre de signal mesuré avec ce nouveau protocole est présenté Fig. 4.11. On observe désormais l'absence presque totale de second harmonique, ce qui confirme que celui-ci ne résulte pas de la propagation dans le gel.

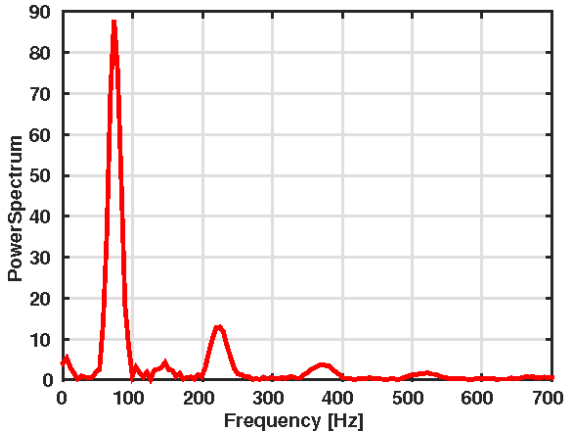
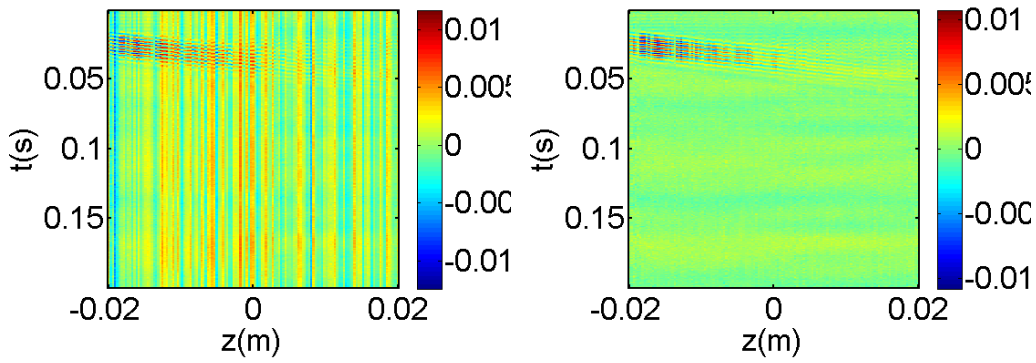



**Figure 4.11.** – Exemple de spectre mesuré avec le nouveau protocole

#### 4.1.5.4. Elimination de la composante continue




(a) (b)

**Figure 4.12.** – Vitesse particulaire (code couleur en $m/s$) d'une onde plane à la fréquence $f = 400Hz$ mesurée dans le gel (à gauche). La moyenne temporelle du signal à chaque position $z$ a été soustraite (à droite).

Fig. 4.12 présente à gauche un exemple de signaux mesurés à une cadence d'imagerie de $5000Hz$ pour une fréquence de $400Hz$ et une amplitude faible (propagation linéaire). Les signaux sont présentés sous forme d'une matrice de 999 points en temps et 135 points sur l'axe de propagation $z$. On peut remarquer la présence d'une composante continue pour tous les signaux temporels dont la valeur varie significativement suivant chaque élément. Cependant, la moyenne d'un signal fini en vitesse particulaire doit être nulle. Dans le cas contraire, cela reviendrait à observer une déformation permanente du milieu, soit une déformation plastique. Chaque traitement d'image commence donc par une soustraction de la moyenne de chaque signal temporel à une position $z$ donnée. Fig. 4.12 montre ainsi un exemple de signaux obtenus après ce traitement. La pente du temps d'arrivée du signal en fonction de la position informe sur la vitesse de propagation de l'onde, tandis que la perte d'amplitude en fonction de la distance $z$ informe sur l'atténuation de celle-ci. Le prochain paragraphe va être consacré à l'estimation quantitative de ces paramètres ainsi que du paramètre de non-linéarité au moyen de l'onde plane.

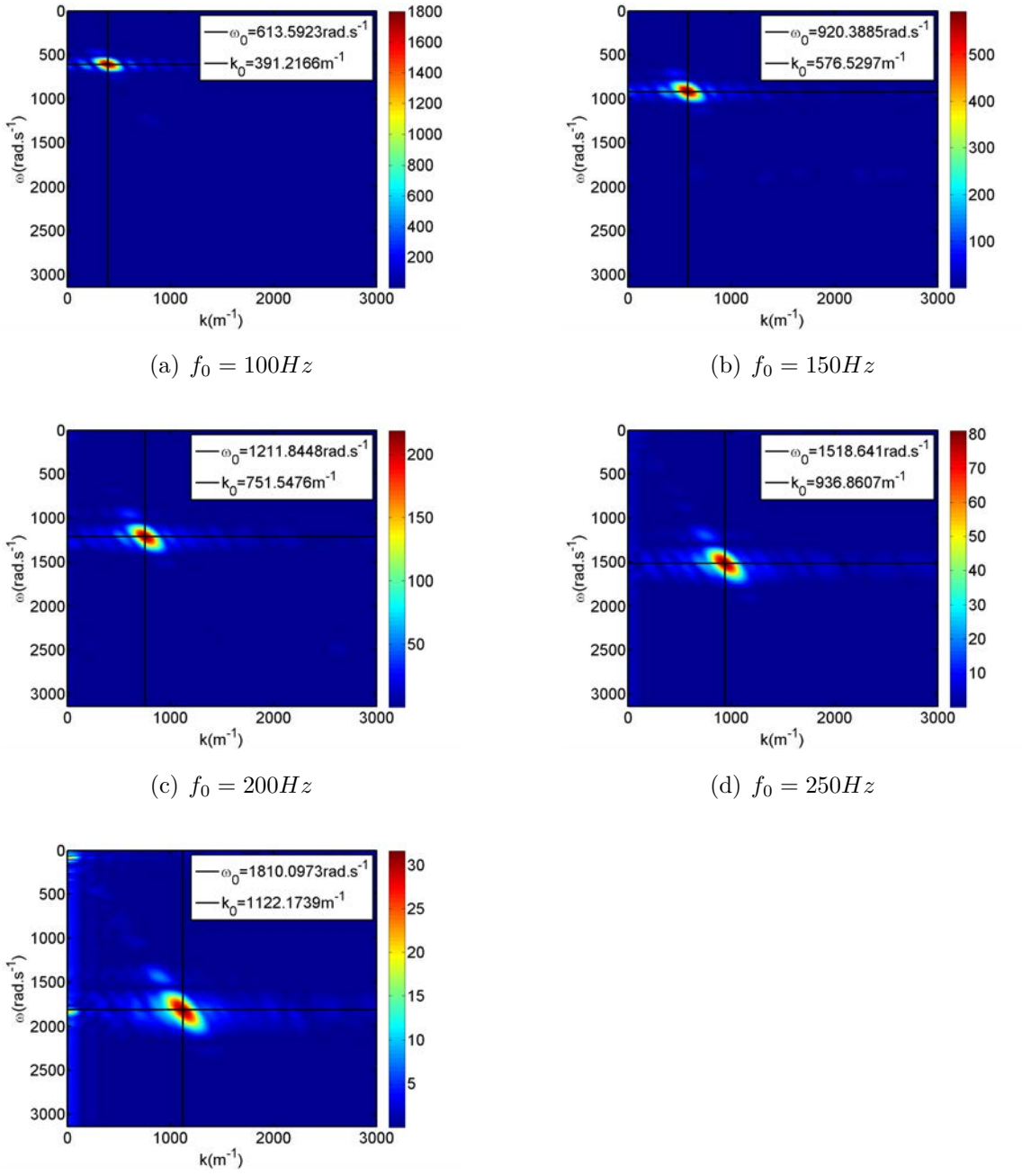
## 4.2. Détermination des paramètres du gel

### 4.2.1. Dispersion

#### 4.2.1.1. Méthode fréquentielle

La première mesure que nous présentons est celle de la vitesse de propagation des ondes de cisaillement dans le gel. Cette caractérisation peut s'effectuer de multiples manières. La plus intuitive serait de se baser sur les signaux temporels comme ceux présentés sur Fig. 4.12. Il serait par exemple possible de détecter les maxima locaux dans le domaine temporel. Ceux-ci forment des droites dont les coefficients directeurs donnent directement la vitesse de propagation. Cependant, cette méthode nécessite des méthodes de traitement d'image qui n'altèrent pas les données, et surtout la phase du signal. La méthode serait particulièrement sensible au bruit qui peut perturber la localisation précise des maxima. La méthode, employée ici, consiste à effectuer la transformée de Fourier discrète à deux dimensions des signaux de vitesse $v(z,t) \rightarrow \tilde{v}(k,\omega)$ où $k$ est le nombre d'onde et $\omega$ la fréquence angulaire. Le maximum d'amplitude de la transformée de Fourier est obtenu pour la fréquence centrale de

l'onde $\omega_0$ et le nombre d'onde correspondant $k_0(\omega_0)$. Les coordonnées de ce point nous donnent ainsi $c_T(\omega_0) = \frac{\omega_0}{k_0}$.




(a) $f_0 = 100Hz$ (b) $f_0 = 150Hz$

(c) $f_0 = 200Hz$ (d) $f_0 = 250Hz$

(e) $f_0 = 300Hz$

**Figure 4.13.** – Transformée de Fourier à deux dimensions des ondes planes mesurées dans le gel. Les lignes noires donnent la position du centre du lobe principal.

Fig. 4.13 montre les résultats de ce processus pour cinq fréquences centrales allant de $100Hz$ à $300Hz$ par pas de $50Hz$. Pour obtenir ces cartes $(k, \omega)$, le calcul est effectué après une étape dite de *zero-padding* ajoutant des zéros après chaque signal mesuré. Ceci permet d'obtenir une puissance de 2 (2048 points) dans chacune des deux dimensions $((z, t))$, les images initiales comptant 999 points en temps et 135 points en espace. Cette étape permet une interpolation du spectre, faisant ainsi ressortir la forme des lobes à détecter. On peut noter que pour chaque fréquence, le lobe de fréquence centrale présente un bon rapport signal sur bruit. La vitesse $c_T$ est présentée en bleu sur Fig. 4.14 pour les fréquences entre $100Hz$ et $300Hz$. On observe que la vitesse de propagation ne dépend que très peu de la fréquence. L'expérience confirme que le milieu se comporte comme un milieu élastique, confirmant les observations dans un gel d'agar/gélatine [18]. Le résultat pour les fréquences de l'ordre de $100Hz$ est constant.

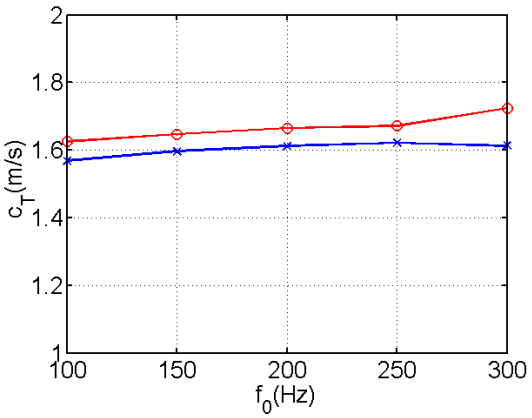



**Figure 4.14.** – Mesures de la dispersion des ondes dans un gel graphite/gélatine avec une méthode fréquentielle (bleu) et une méthode de corrélation de signaux (rouge)

#### 4.2.1.2. Méthode temporelle de corrélation

La méthode temporelle consiste à détecter le maximum de corrélation entre deux signaux temporels émis pour une fréquence centrale $\omega_0$ donnée et mesurés à deux positions différentes. Plus précisément, les signaux temporels sont acquis pour 135 positions $z$ espacées régulièrement de $\delta z$. Pour chacun des écarts spatiaux $\Delta z$ possibles, on identifie tous les couples de signaux séparés de $\Delta z$. Pour chacun d'eux, on cherche le décalage temporel $\Delta t < 0$ à appliquer au signal mesuré au point le

plus éloigné pour que le coefficient de corrélation croisé avec le signal mesuré au point le plus proche soit maximal. Pour une valeur de $\Delta z$ donnée, l'écart temporel $\Delta t$ retenu est l'écart moyen calculé sur l'ensemble des couples possibles. Le coefficient de corrélation retenu est aussi la moyenne des coefficients sur les couples. La précision de la mesure diminuant avec l'écart $\Delta z$ car le nombre de couples possibles diminue, l'écart spatial maximum utilisé est de $70\delta z$. Les courbes $\Delta t$ en fonction de $\Delta z$ sont présentées sur Fig. 4.15 pour trois fréquences centrales d'émission (100, 200 et $300Hz$) ainsi que les coefficients de corrélation correspondants. On observe que les premières sont effectivement presque linéaires, ce qui permet de déterminer la vitesse $c_T = -\Delta z/\Delta t$. On observe que le coefficient de corrélation est également très proche de 1. Comme pour la méthode fréquentielle, la mesure est répétée pour les fréquences centrales entre $100Hz$ et $300Hz$ par pas de $50Hz$. Seul le cas de la fréquence à $300Hz$ montre des coefficients un peu inférieurs pour les décalages $\Delta z$ les plus grands. Ceci s'explique par un rapport signal sur bruit qui devient très faible à cause 1) de l'atténuation plus élevée aux hautes fréquences, et 2) de l'amplitude d'émission plus faible selon Fig. 4.4. Il aurait été préférable pour cette fréquence de choisir des pas $\Delta z$ plus grands.

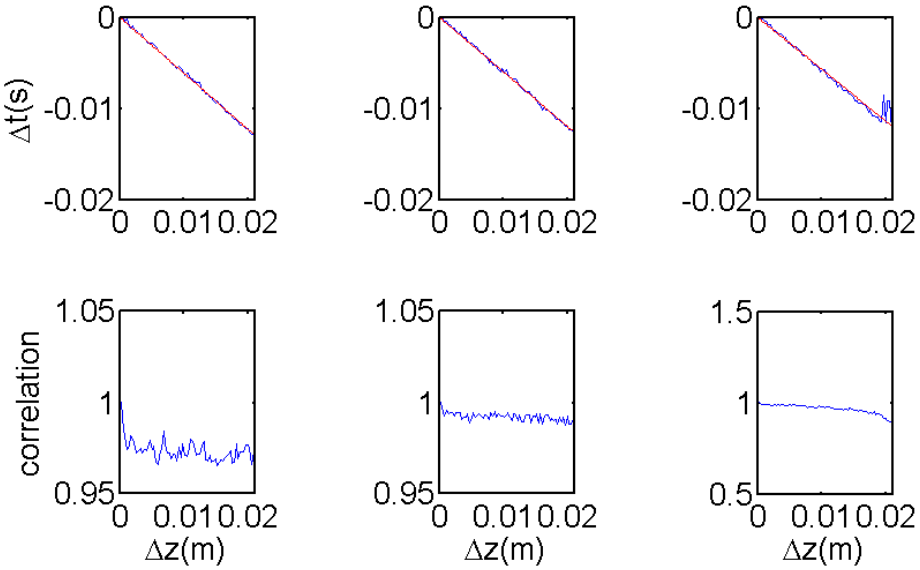



**Figure 4.15.** – Haut : Décalage temporel (ligne bleu) $\Delta t$ mesuré entre les couples écartés de $\Delta z$ pour les fréquences de $100Hz$ (gauche), $200Hz$ (milieu) et $350Hz$ (droite) et régressions linéaires (ligne rouge). Bas : Coefficient de corrélation moyen entre les couples étudiés ci-dessus.

Fig. 4.14 superpose la vitesse des ondes $c_T$ résultant de la méthode de corrélation (en rouge) à celles résultant de la méthode fréquentielle (en bleu). Les deux méthodes donnent des résultats similaires avec une vitesse $c_T$ très proche de $1.6m/s$ et quasi-indépendante de la fréquence. Notons toutefois que la méthode temporelle de corrélation donne une valeur systématiquement un peu plus élevée de 2.5% environ. Elle s'avère également un peu moins précise à haute fréquence (5% d'erreur) comme expliqué plus haut.

## 4.2.2. Atténuation

### 4.2.2.1. Introduction

La partie précédente concernait la mesure de la dispersion. Pour la compréhension des différents phénomènes lors de la propagation, il est nécessaire de caractériser l'atténuation du milieu. En effet, celle-ci joue un rôle très important et s'oppose aux effets non linéaires, modifiant les épaisseurs de chocs et les distances de formation de ceux-ci. Cette opposition est quantifiée par le nombre de Gol'dberg $\Gamma = L_a/L_{sh}$ avec $L_a$ la distance caractéristique d'atténuation et $L_{sh}$ la distance de formation des chocs. Dans cette partie, nous nous attacherons à décrire les mesures d'atténuation dans le gel afin d'en extraire une loi empirique similaire à celle présentée au chapitre 3.

### 4.2.2.2. Méthode générale

L'atténuation dans le gel est modélisée par une loi empirique issue de la généralisation du modèle thermo-visqueux, loi donnée en onde plane par :

$$|\tilde{v}(z,\omega)| = |\tilde{v}(z=0,\omega)|e^{-\alpha(\omega)z} \tag{4.1}$$

avec $|\tilde{v}(z,\omega)|$ l'amplitude de l'onde de fréquence angulaire $\omega$ à la position $z$ et $\alpha(\omega)$ le coefficient d'atténuation à la fréquence angulaire $\omega$. En supposant que le coefficient d'atténuation est donné par une loi de puissance [65, 64] :

$$\alpha(\omega) = \alpha_0\omega^b \tag{4.2}$$

où $b$ est caractéristique du type de dissipation mise en jeu. Pour un milieu visqueux, on a $b = 2$ mais par exemple dans les tissus biologiques [18] on peut avoir $b \approx 1$. Pour la détermination expérimentale de $\alpha(\omega)$, il n'est pas possible d'utiliser des signaux monochromatiques. La méthode utilisée ici consiste à calculer la transformée de Fourier de l'onde en chaque point du domaine afin de mesurer l'amplitude du lobe de fréquence centrale $\omega_0$ :

$$|v(z,\omega_0)| = |\tilde{v}(z=0,\omega_0)|e^{-\alpha(\omega_0)z}. \tag{4.3}$$

En prenant le logarithme népérien de Eq.(4.3), il vient :

$$\ln(|v(z,\omega_0)|) = -\alpha(\omega_0)z + \ln(|\tilde{v}(z=0,\omega_0)|). \tag{4.4}$$

Ainsi, une régression linéaire sur $\ln(|v(z,\omega_0)|)$ donne un coefficient directeur $\alpha(\omega_0)$ qui correspond au coefficient d'atténuation à la fréquence considérée. La détermination des coefficients $\alpha$ à différentes fréquences permet ensuite de remonter aux paramètres de la loi de puissance en prenant le logarithme népérien de Eq.(4.2) :

$$\ln(\alpha) = b\,\ln(\omega) + \ln(\alpha_0). \tag{4.5}$$

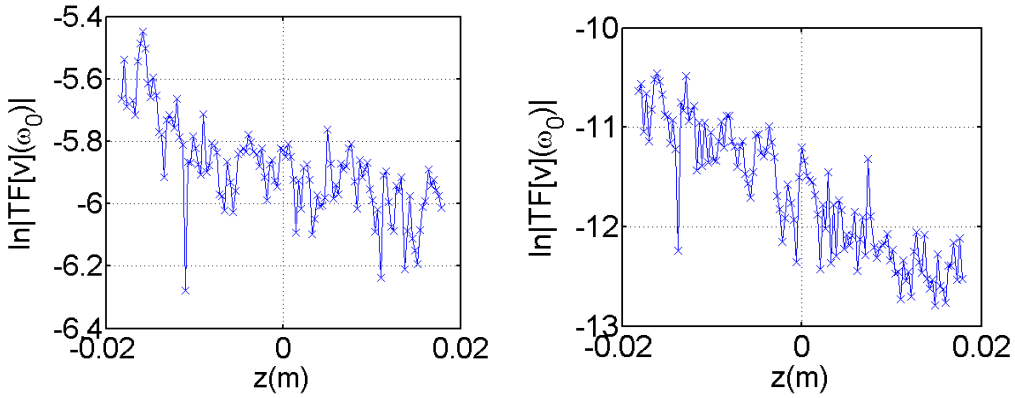
Le coefficient $b$ devient le coefficient directeur de la droite obtenue par régression linéaire des données, tandis que $\ln(\alpha_0)$ est l'ordonnée à l'origine.

#### 4.2.2.3. Application

Pour un tir à une fréquence centrale $\omega_0$ donnée, les signaux en vitesse sont moyennés sur la profondeur. L'obtention des spectres des signaux est effectuée, en chaque point de l'espace $z$, de manière identique au cas de la méthode fréquentielle décrite pour la dispersion (cf Fig. 4.13). Le spectre autour de la fréquence centrale théorique est interpolé par un sinus cardinal et la valeur retenue est la valeur à la fréquence centrale du spectre interpolé. Ceci permet de réduire l'influence du bruit de mesure.

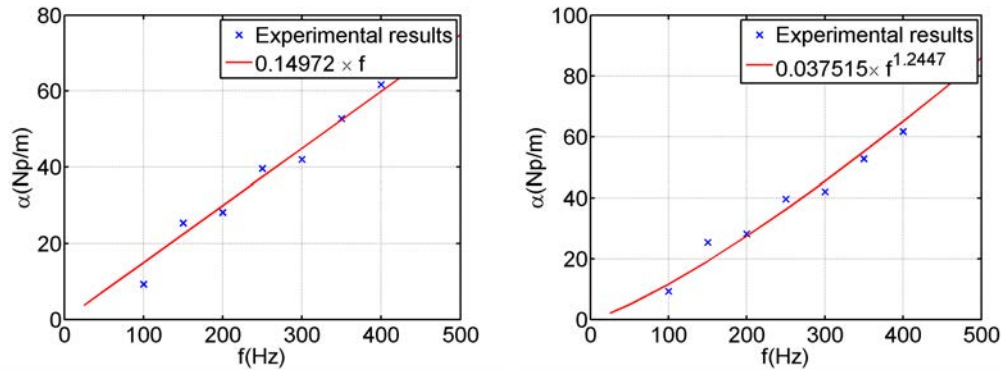
La Fig. 4.16 présente deux exemples de mesure aux fréquence $100Hz$ et $400Hz$. Les amplitudes mesurées sont bien décroissantes avec la distance de propagation, autorisant ainsi le calcul du coefficient d'atténuation. Cependant, les mesures d'amplitude présentent un bruit significatif. Ce bruit n'est pas simplement dû à un bruit blanc sur les mesures, il provient aussi du principe même de la mesure, reposant sur la

détection du mouvement de particules disposées aléatoirement. Une amélioration possible, dans le futur, serait reprendre les mesures en effectuant plusieurs tirs avec un déplacement horizontal selon $y$ de la barrette afin d'augmenter le nombre de points de moyenne.




(a) f=100Hz (b) f=400Hz

**Figure 4.16.** – Maximum du spectre observé en chaque position $z$ pour une onde plane émise à la fréquence $f = 100Hz$ (gauche) et $f = 400Hz$ (droite).




(a) loi linéaire (b) loi générale

**Figure 4.17.** – Mesures des coefficients d'atténuation pour chaque fréquence (croix) des ondes dans un gel graphite/gélatine. Un modèle de loi d'atténuation est aussi présenté (ligne rouge)

Les logarithmes népériens des amplitudes sont ensuite ajustés au modèle de Eq.(4.4) à l'aide d'une régression linéaire, comme montré sur Fig. 4.17. Notons que les courbes

présentées ne montrent pas de résultats aux très basses fréquences ($25Hz$ ou $50Hz$) alors que les amplitudes sont plus facilement décelables (car peu atténuées). Cela vient d'une limite de mémoire du système d'acquisition limitant la durée de l'acquisition, et ne permettant donc pas d'acquérir l'ensemble du signal temporel. En outre, le signal à $50Hz$ présente un comportement aberrant car l'amplitude subit une phase d'amplification après celle d'atténuation. Une explication possible pourrait être un effet d'onde de surface. Dans la gamme étudiée de $100Hz$ à $400Hz$, les coefficients d'atténuation sont du même ordre de grandeur que ceux observés précédemment [18, 117]. Fig.4.17(a) et Fig.4.17(b) présentent l'ajustement des mêmes points expérimentaux avec deux modèles différents. La première figure montre le résultat pour une atténuation proportionnelle à la fréquence $\alpha = 0.14972\, f$ tandis que la seconde présente le cas d'une loi de puissance générale Eq.(4.5) $\alpha = 0.037515\, f^{1.2447}$. Les deux cas donnent un comportement très similaire. Clairement le gel n'est pas un simple milieu visqueux. Notons aussi que les lois obtenues pour les ondes de cisaillement sont très proche, dans le gel, des lois pour les ondes acoustiques. En effet, dans le cas des ondes de compression, on observe également une dépendance quasi-linéaire du coefficient d'atténuation avec la fréquence. Ce comportement pour les ondes de compression se retrouve sur plusieurs ordres de grandeur [134].

## 4.2.3. Coefficient non linéaire

### 4.2.3.1. Théorie : cas faiblement non linéaire

Les milieux visqueux se caractérisent par une loi d'atténuation dépendant quadratiquement de la fréquence. Dans ce cas, l'équation de propagation non linéaire des ondes de cisaillement planes polarisées linéairement s'écrit [137] :

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \alpha_0 \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = \frac{\beta}{3c_T^3} \frac{\partial v^3}{\partial \tau}. \tag{4.6}$$

Cependant dans un cas plus général, il est possible de remplacer le terme d'atténuation $\alpha_0 \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}$ visqueuse par un opérateur linéaire quelconque $A[v]$ donnant, par exemple, en régime fréquentiel la loi d'atténuation expérimentale Eq.(4.2). Cet opérateur est parfois défini comme une dérivée fractionnelle [65, 64, 12]. Dans ce cas

Eq.(4.6) se généralise sous la forme :

$$\frac{\partial v}{\partial z} - A[v] = \frac{\beta}{3c_T^3}\frac{\partial v^3}{\partial \tau}. \tag{4.7}$$

Cette équation peut être résolue numériquement comme détaillé au chapitre 3. Dans le cas faiblement non linéaire, lorsque le nombre de Gol'dberg (cf Eq.(2.167)) est petit devant l'unité, on peut résoudre l'équation de Burgers modifiée par approximations successives. Au second ordre, on peut caractériser la croissance des harmoniques quelle que soit la loi d'atténuation utilisée. Soit une onde initialement sinusoïdale définie par $v(0,\tau) = v_0\cos(\omega\tau)$. Supposons une solution $v^I$ de la partie linéaire avec une perturbation non linéaire $v^{II}$ telle que $|v^I| \gg |v^{II}|$. La solution de l'équation est ainsi définie par $v = v^I + v^{II}$. Son introduction dans Eq.(4.7) mène au système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial v^I}{\partial z} - A[v^I] = 0 \\ \frac{\partial v^{II}}{\partial z} - A[v^{II}] = \frac{\beta}{3c_T^3}\frac{\partial (v^I)^3}{\partial \tau}. \end{cases} \tag{4.8}$$

Le passage en fréquentiel de la première équation conduit à :

$$\frac{\partial \tilde{v}^I}{\partial z} + \alpha(\omega)\tilde{v}^I = 0 \tag{4.9}$$

dont la solution est après transformée inverse :

$$v^I = v_0\cos(\omega\tau)\exp(-\alpha(\omega)z). \tag{4.10}$$

L'injection de Eq.(4.10) dans le seconde membre de Eq.(4.8) pour $v^{II}$ donne :

$$\frac{\partial v^{II}}{\partial z} - A[v^{II}] = -\frac{\beta v_0^3\omega}{4c_T^3}\left[\sin(3\omega\tau) + \sin(\omega\tau)\right]\exp(-3\alpha(\omega)z). \tag{4.11}$$

La solution pour la perturbation $v^{II}$ se décompose donc comme la somme d'une composante de fréquence $3\omega$ (troisième harmonique) et d'une composante de fréquence angulaire $\omega$ qui apparaît comme l'auto-interaction non linéaire du fondamental. Chacune de ces composantes est résolue indépendamment dans le domaine fréquentiel avec la condition aux limites $v^{II}(z=0,\tau) = 0$. Le calcul donne une généralisation

de l'expression proposée dans [137] au cas d'une loi d'atténuation quelconque :

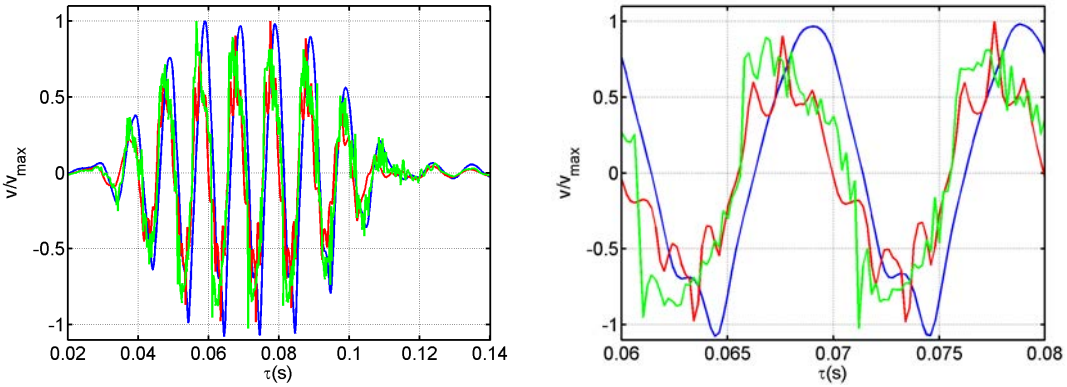
$$v^{II}(z,\tau) = \frac{\beta\omega v_0^3}{4c_T^3}\frac{\exp(-\alpha(3\omega)z) - \exp(-3\alpha(\omega)z)}{\alpha(3\omega) - 3\alpha(\omega)}\sin(3\omega\tau) - \frac{\beta\omega v_0^3}{8c_T^3}\frac{\exp(-\alpha(\omega)z) - \exp(-3\alpha(\omega)z)}{\alpha(\omega)}\sin(\omega\tau). \quad (4.12)$$

La première ligne correspond à la croissance du troisième harmonique dans le cas d'une loi d'atténuation générale, croissance initialement linéaire, ensuite saturée par l'absorption. A grande distance, le troisième harmonique décroît exponentiellement avec un coefficient d'absorption égal à $\min[\alpha(3\omega), 3\alpha(\omega)]$. Dans le cas fréquent où $\alpha(3\omega) > 3\alpha(\omega)$, cas vérifié pour une loi en puissance de la fréquence $f^b$ avec $b > 1$, le troisième harmonique décroît plus lentement en régime non linéaire qu'en régime linéaire car il continue à être entretenu par le fondamental. Le même phénomène est observé pour la non-linéarité quadratique sur le second harmonique [59]. Notons que dans le cas exceptionnel d'une loi d'atténuation proportionnelle à la fréquence, on a $\alpha(3\omega) = 3\alpha(\omega)$ et l'expression du troisième harmonique doit être modifiée en $-z\exp(-3\alpha(\omega)z))\beta v_0^3\omega\sin(3\omega\tau)/4c_T^3$. La deuxième ligne décrit la décroissance du fondamental résultant du transfert d'énergie vers le troisième harmonique. On peut noter que, en zone de saturation, les effets non linéaires reviennent seulement à modifier l'amplitude du fondamental sans changer la loi d'atténuation qui reste la loi linéaire en $\exp(-\alpha(\omega)z)$. Au contraire, pour le troisième harmonique, l'amplitude de celui-ci continue à décroître plus rapidement que celle du fondamental en $\exp(-3\alpha(\omega)z)$. En terme d'intensité, les effets non linéaires sont du même ordre, proportionnels pour les deux à $\beta v_0^3\omega/4c_T^3\alpha$.

En supposant la loi d'atténuation connue, il est alors possible de remonter au coefficient non linéaire $\beta$, par régression des amplitudes soit du troisième harmonique, soit du fondamental. C'est cette méthode qui a été employée par Rénier *el al.* [117] avec un nombre de Mach de l'ordre de 0.125, ce qui conduit à un troisième harmonique de l'ordre de 1/30 du fondamental. Elle n'a pas été utilisée ici car elle ne peut être appliquée qu'en régime faiblement non linéaire lorsque le troisième harmonique est suffisamment petit devant le fondamental. Ceci requiert donc un très bon rapport signal sur bruit pour le troisième harmonique. Or, on a vu précédemment que les niveaux de bruit de nos mesures sont relativement importants. On a donc choisi, ici, une méthode basée sur un régime fortement non linéaire afin de réduire l'influence du bruit sur la détermination du coefficient non linéaire.

#### 4.2.3.2. Observation des non-linéarités

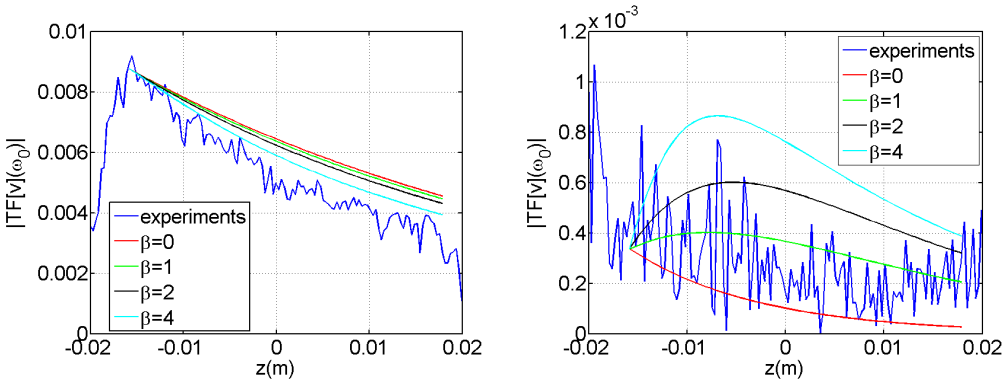
Dans la présente étude, les signaux présentant le caractère le plus non linéaire sont les signaux à $50Hz$ et $100Hz$ pour les émissions à $1000mV$ d'amplitude. Les mesures ne sont cependant pas exploitables car les différentes harmoniques subissent de fortes variations d'amplitude (baisses suivies d'augmentations) sans raisons identifiées. Le choix s'est donc porté sur des fréquences plus élevées à $150Hz$ qui ne semblent pas présenter les mêmes problèmes, sans toutefois que l'absorption soit trop élevée. Cependant, dans ce cas, le rapport signal sur bruit du troisième harmonique s'avère encore assez élevé. En régime plus fortement non linéaire, on compare les données à la solution numérique présentée au chapitre 3.




(a) (b)

**Figure 4.18.** – Ondes planes mesurées dans la gel à la position $z = -1cm$ pour une fréquence centrale de $100Hz$ et des amplitudes de $100mV$ (bleu), $200mV$ (rouge) et $1000mV$ (vert) pic à pic. A gauche : signal complet. A droite : zoom sur 2 périodes.

La détermination du paramètre de non-linéarité $\beta$ est réalisée, ici, en comparant les mesures avec une série de simulations numériques pour différentes valeurs de $\beta$. La valeur finale choisie est celle offrant la meilleure corrélation avec la mesure. La première étape consiste à sélectionner le signal d'entrée des simulations numériques. On le choisit comme le signal mesuré entre la dixième et la vingtième position le long de la barrette car l'amplitude observée est maximale à ces positions. Les signaux sont acquis avec une fréquence d'échantillonnage de 5000 Hz. Pour les simulations, nous réalisons un sur-échantillonnage jusqu'à 20000 Hz. Le maillage sur l'axe de propagation $z$ des simulations dépend ensuite de l'amplitude du signal d'entrée suivant




(a) fondamental (b) harmonique 3

**Figure 4.19.** – Comparaison entre l'amplitude du fondamental pour les expériences à $150Hz$ (ligne bleu) et les simulations avec $\beta = 1$ (ligne rouge), $\beta = 2$ (ligne verte), $\beta = 3$ (ligne noire) et $\beta = 4$ (ligne cyan).

la condition de stabilité du schéma numérique Eq.(3.22). Dans un second temps, on calcule par transformées de Fourier discrètes, les amplitudes du fondamental et du troisième harmonique. Pour la comparaison, l'amplitude obtenue par calcul est interpolée à la position des points de mesures expérimentales, et le paramètre de non-linéarité estimé en minimisant l'écart entre mesures et simulations. Les résultats présentés sur Fig. 4.19 permettent d'en conclure :

— sur le fondamental, on retrouve bien conformément à la théorie quasi-linéaire que le taux de décroissance en amplitude est, suffisamment loin, indépendant du paramètre non linéaire ;
— en revanche, le niveau du fondamental est sensible, suffisamment loin, à la fois au paramètre non linéaire et évidemment aussi à l'amplitude du signal initial ;
— cette dernière étant incertaine en raison du bruit de mesure, la mesure du paramètre de non-linéarité basée sur le fondamental s'avère peu précise ;
— le troisième harmonique présente un rapport signal sur bruit élevé de l'ordre de 1 ;
— en revanche, son amplitude s'avère plus sensible au paramètre $\beta$.

En conclusion l'observation du fondamental montre que toutes les valeurs du paramètre $\beta$ testées entre 1 et 12 sont acceptables compte tenu de l'incertitude sur l'amplitude du signal initial. Pour le troisième harmonique, malgré le fort niveau de bruit, seules les plus faibles valeurs (entre 0 et 4) conduisent à un niveau moyen acceptable au regard de l'observation. Les plus fortes valeurs supérieures à 4 paraissent

donc peu probables. En revanche, l'incertitude induite par le bruit de mesure est telle qu'il est difficile de déterminer une valeur plus précise du paramètre $\beta$.

## 4.3. Conclusion : comparaison des paramètres du gel

Après avoir décrit le protocole expérimental :

- principe de l'expérience,
- fabrication du gel,
- système d'excitation,
- système de mesure,
- traitement des données,

le chapitre était consacré dans un second temps à la caractérisation du gel. Les étapes de détermination des paramètres acoustiques du gel indiquent que l'atténuation pour une fréquence de $100Hz$ est de l'ordre de $15Np/m$ et que la vitesse de propagation des ondes de cisaillement est de $1.6m/s$. Le coefficient non linéaire mesuré en utilisant le fondamental est $\beta \leq 4$. Les résultats de la littérature, tous à $100Hz$, pour un gel composé en masse de 5% de gélatine, sont assez variés même s'ils s'avèrent de cet ordre de grandeur. Dans le cas des premières observations de 2003 [20], la vitesse de propagation était de $1.6m/s$ et l'atténuation de $17Np/m$. Le coefficient non linéaire n'était pas directement fourni. Cependant, en utilisant les nombres de Gol'dberg donnés, la longueur d'atténuation et l'ordre de grandeur des vitesses particulaires, il est possible d'estimer ce coefficient non linéaire de l'ordre de $2 \pm 1$. Les résultats de Jacob *et al.* [69] montrent une vitesse de propagation de $2.1m/s$ et une atténuation de $13.4Np/m$. Le coefficient non linéaire est compris entre 8.5 et 10. L'étude de Rénier *et al.* [117] conduit à des vitesses de propagation de $2.52m/s$ et une atténuation de $17Np/m$. Le coefficient non linéaire est de $4 \pm 0.5$. Cette étude bibliographique indique ainsi que les paramètres linéaires mesurés sont voisins de ceux déterminés ici dans le cas du gel de gélatine/graphite. Ceci permet d'avoir une confiance raisonnable en leur valeur. En revanche, les valeurs du paramètre de non-linéarité varient sensiblement suivant les auteurs et les cas étudiés. La précision que nous avons obtenue ici s'avère insuffisante pour fournir plus qu'une borne maximale. Une des causes du bruit résulte notamment des réflexions sur les bords latéraux de la cuve. Ces effets de réflexion sont *a priori* réduits dans le cas d'une source focalisée. En outre, on peut s'attendre à ce que l'amplitude de l'onde soit plus élevée dans ce cas, augmentant ainsi le rapport signal sur bruit. Ces deux effets conjugués font de

l'expérience de focalisation une méthode à explorer pour estimer le paramètre de non-linéarité. Dans la suite de l'étude, ces expériences seront réalisées. Le paramètre sera dans un premier temps laissé libre et les mesures seront systématiquement comparées à des simulations paramétriques, en balayant sur les différentes valeurs de $\beta$.

# 5. Focalisation des ondes de choc de cisaillement dans un gel

Dans le chapitre précédent, le gel a été caractérisé en utilisant des cas de propagation en ondes planes, avec un montage expérimental similaire à celui utilisé dans [20, 18, 117]. Dans ce chapitre, nous présentons les résultats des premières expériences de focalisation d'ondes de chocs de cisaillement réalisées à notre connaissance. Les avantages de la configuration focalisée par rapport au cas de l'onde plane sont principalement : 1) les amplitudes en déplacements et en vitesses sont nettement plus importantes au foyer, et donc présentent un meilleur rapport signal sur bruit ; 2) dans la perspective d'une application biomécanique aux traumatismes crâniens, elle correspond mieux à la géométrie du crâne. Nous commencerons par une analyse des comportements non linéaires observés en focalisation pour trois amplitudes d'émission permettant de couvrir différents régimes. Différentes quantités seront regardées : vitesse maximale, énergie, accélération, signature temporelle et spectre, et ceci sur l'axe, dans la zone focale, dans un plan transverse et dans l'ensemble du domaine. La seconde partie s'attachera à comparer ces observations expérimentales avec les résultats de simulations résultant de l'algorithme numérique développé au chapitre 3. En particulier, la valeur du paramètre non linéaire $\beta$ sera déterminée afin d'obtenir le meilleur accord simulation/expérience.

## 5.1. Observation expérimentale de la focalisation des ondes de choc de cisaillement

### 5.1.1. Protocole expérimental

Les expériences ont été réalisées avec le montage présenté dans le chapitre précédent. La seule différence est que la source plane est cette fois remplacée par une section

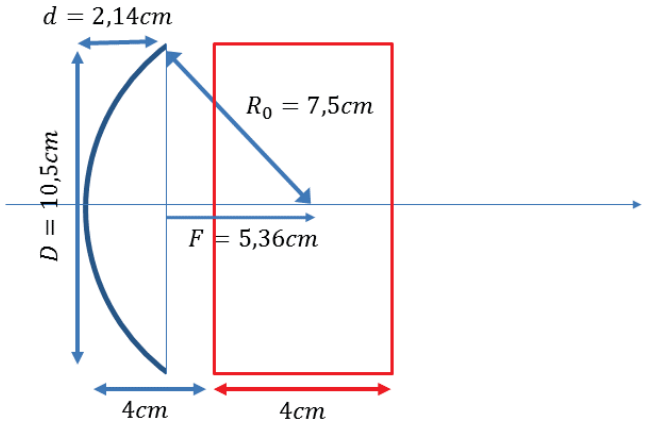



**Figure 5.1.** – Schéma de la source cylindrique (en bleu) et du domaine de mesure (en rouge)

de cylindre afin de focaliser géométriquement les ondes (cf Fig. 5.1). Elle est formée à partir d'une section de tube en PVC, caractérisée par un rayon $R_0 = 7.5cm$, une corde $D = 10.5cm$ donnant ainsi un arc d'ouverture $90^o$. La hauteur totale du cylindre est de $13cm$, dont environ $11cm$ sont insérés dans le gel. La géométrie de la source donne une distance focale $F = \sqrt{R_0^2 - \frac{D^2}{4}} \approx 5.36cm$ mesurée depuis le plan contenant les bords de la section de cylindre (cf Fig. 5.1). Le rapport $F/D$ est ainsi de 0.51. La barrette échographique est orientée parallèlement à l'axe de propagation principal selon $z$. Rappelons que la zone active de la barrette fait $4cm$ de long. La barrette a été positionnée à une distance de l'ordre de $d = 4cm$ du plan tangent au fond de la section (cf Fig. 5.1) permettant de placer le point focal géométrique à environ $3.5cm$ du début du domaine de mesure, et donc de capturer le point focal et la zone le précédent. Toutefois, la mesure précise de la distance $d$ n'a pu être effectuée en raison de l'encombrement du système d'attache de la section de cylindre. La mesure du champ de vitesse du gel dans l'ensemble du domaine est obtenue en déplaçant la barrette selon l'axe $y$ et en réalisant un tir pour chacune des positions $y$ de cette barrette. Notons que pour réaliser les deux campagnes

d'expériences planes et focalisées dans le même milieu, les deux sources ont été installées dans le même bloc de gel, chacune à une extrémité différente de la cuve afin de n'avoir qu'à retourner celle-ci pour changer de source. Les acquisitions ont, ici, été réalisées pour des ondes émises à la fréquence centrale $f_0 = 100Hz$ avec trois amplitudes d'excitation avant amplification $200mV$, $500mV$ et $1000mV$ pic à pic. Ce choix permet d'observer des cas de focalisation faiblement à fortement non linéaire. Le signal temporel émis est identique à celui utilisé pour l'onde plane, à savoir une onde sinusoïdale bornée par une fenêtre de Tukey comme présentée sur Fig. 4.3. Le dispositif de mesure et de traitement des données (système d'acquisition ultra-rapide, algorithme adaptatif d'estimation de mouvement, moyennage et filtrage de la fréquence nulle) est strictement identique au cas plan.

### 5.1.2. Mise en évidence de la focalisation

Nous montrons dans un premier temps les cartes, dans le plan horizontal, des champs de vitesse, d'énergie et d'accélération de l'onde. Ces cartes ont été obtenues en moyennant sur l'ensemble de la profondeur $x$ les signaux temporels pour une position $y$ donnée de la barrette orientée selon l'axe $z$. Puis, la barrette est déplacée suivant $y$ d'un pas $1.2mm$, un nouveau tir et une nouvelle acquisitions sont réalisées, et l'opération est répétée pour couvrir l'ensemble du domaine de taille $y \in [-6cm, 6cm]$ et $z \in [-2cm, 2cm]$ avec les origines des axes fixées à $z = 0$ au premier point de la barrette et $y = 0$ l'axe de symétrie. L'image contenant 135 points selon $z$, les cartes comptent au total 13500 points de mesure. On rappelle que, par ailleurs, les expériences sont réalisées pour trois niveaux d'excitations $200mV$, $500mV$ et $1000mV$ pic à pic. L'ensemble de l'acquisition dure au total environ 4 heures. En raison de cette durée, la campagne de mesure en focalisation a été effectuée le lendemain de celle pour les ondes planes. Dans l'intervalle, le gel a été conservé dans un réfrigérateur à une température de $5^oC$. Les données échographiques brutes sont mémorisées pendant la campagne de mesure mais traitées postérieurement.

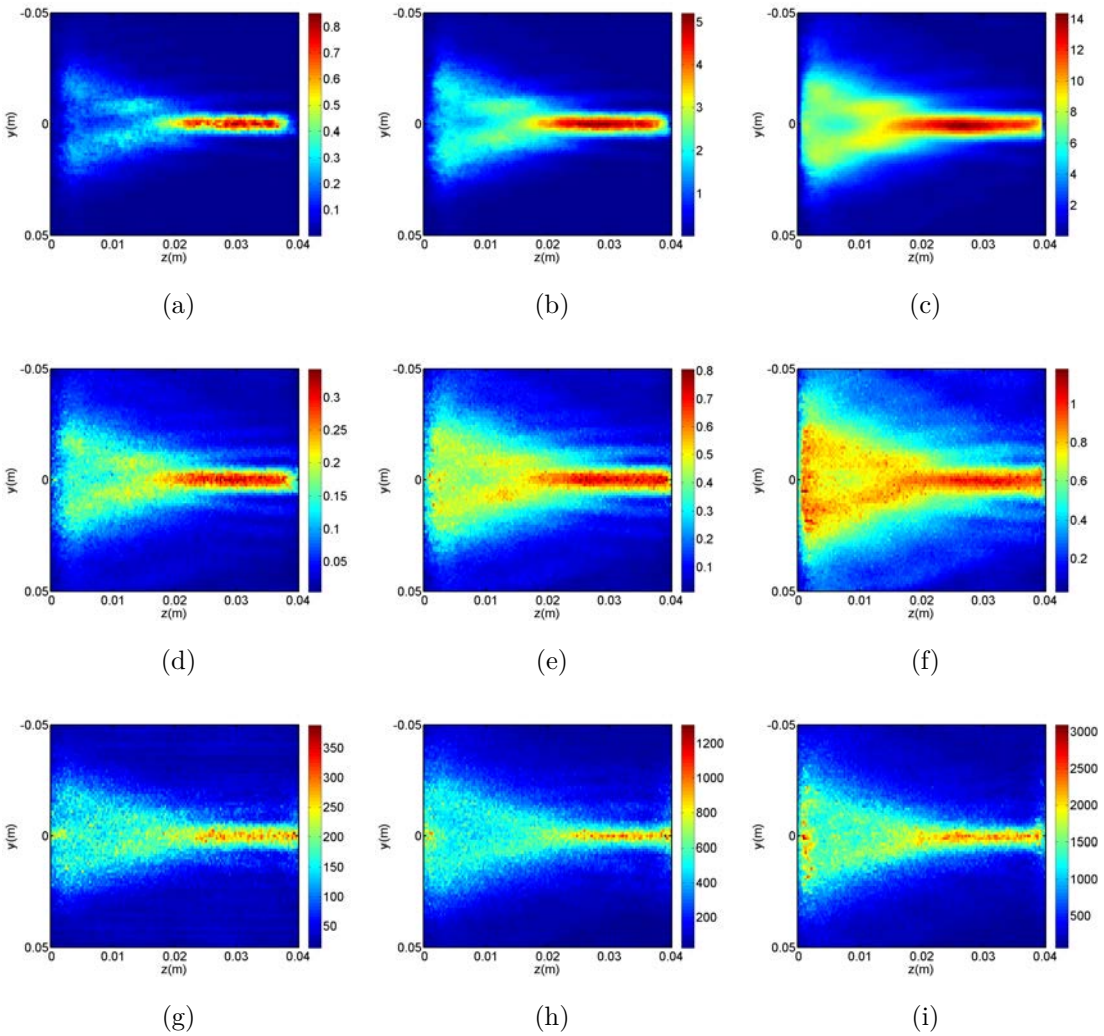



**Figure 5.2.** – Densité volumique d'énergie cinétique en Joule par mètre cube (haut), vitesse maximale en mètre par seconde (milieu) et accélération en mètre par seconde au carré (bas) des ondes en chaque point du domaine de propagation pour les amplitudes d'émission $200mV$ (gauche), $500mV$ (milieu) et $1000mV$ (droite)

Fig. 5.2 illustre trois propriétés fondamentales de propagation d'onde que l'on souhaite observer et caractériser : 1) la focalisation de l'onde de cisaillement due à la courbure de la source, 2) les lobes secondaires résultant des lois de la diffraction, 3) les non-linéarités en fonction de l'amplitude à la source. A cet effet, la Fig. 5.2 présente la densité d'énergie cinétique (cf Figs.5.2(a)-5.2(c)), la vitesse maximale (cf Figs.5.2(d)-5.2(f)) et l'accélération maximale (cf Figs.5.2(g)-5.2(i)) mesurées dans le

plan horizontal pour les trois niveaux d'excitation. La densité volumique d'énergie cinétique du signal est estimée par la formule $e_{tot} \approx \rho_a \sum_{k=0}^{N} V_k^2 \Delta t/2T$ où $V_k$ est la vitesse mesurée à l'instant $t_k = k\Delta t$, $\rho_a$ la masse volumique du milieu et $T = N\Delta t$ la durée totale du signal. Tous les signaux sont échantillonnés temporellement à une fréquence de $5000Hz$ avec $N = 998$ points pour une durée totale de $0.2s$. Notons que l'énergie totale ne peut être déduite directement de l'énergie cinétique que dans le cas plan linéaire où énergie interne et énergie cinétique sont égales. Dans le cas général, il s'agit *a priori* d'une approximation. Le signal temporel d'accélération est calculé à partir du signal de vitesse par dérivation dans l'espace de Fourier. Le calcul de l'accélération s'avérant sensible aux incertitudes de mesure, notamment à hautes fréquences, seules les fréquences inférieures à $1000Hz$ sont prises en compte, ce qui permet d'inclure les harmoniques 1 à 9. On verra plus loin dans l'analyse spectrale des signaux que ceci est largement suffisant, puisque seuls les harmoniques 1 à 7 émergent du bruit. Un exemple de signal en accélération avec et sans filtre est visible Fig. 5.3. On observe clairement l'amélioration de la qualité du calcul de l'accélération à haute fréquence au prix d'une légère diminution de l'amplitude maximale.

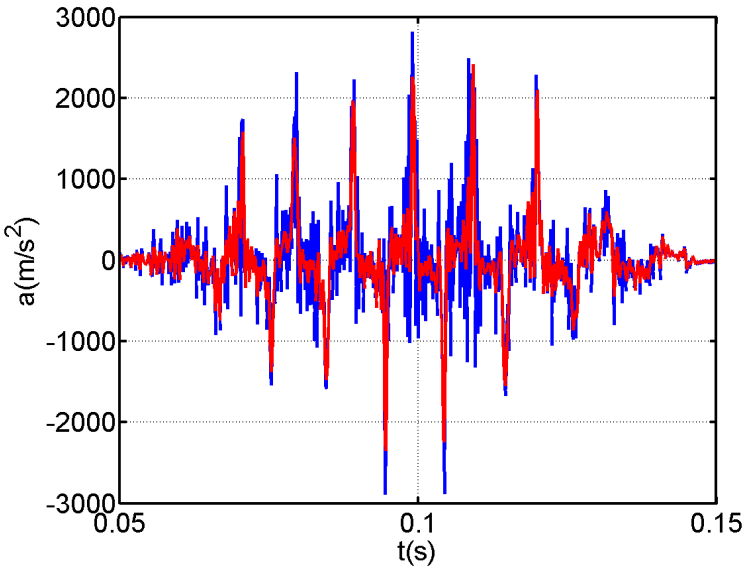



**Figure 5.3.** – Accélérations calculées avec (ligne rouge) et sans (ligne bleue) filtre à $1000Hz$ à la position $z = 1cm$ et $y = 0cm$ pour une excitation de $1000mV$ pic à pic.

Pour les trois niveaux d'excitation et les trois quantités observées, une tache focale

apparaît de manière évidente. Ses dimensions correspondent bien à celles attendues, de l'ordre de $2cm$ en longueur et $1cm$ en largeur. Notons qu'une partie de la tache focale n'est pas mesurée car au-delà de la zone d'acquisition. On verra plus loin que le point focal est bien dans la zone mesurée. Entre vitesse et densité volumique d'énergie cinétique, on observe une focalisation plus marquée pour cette dernière. Ceci peut s'expliquer par deux raisons :

— l'énergie est une quantité quadratique de la vitesse, ce qui tend à amplifier les différences entre les zones de fortes et de faibles intensités ;
— l'énergie est une quantité moyennée sur l'ensemble de la durée du signal donc moins sensible au bruit que la vitesse maximale à un instant donné du signal.

Il apparaît qu'à amplitude croissante, le champ dans la zone pré-focale est de plus en plus affecté par les non-linéarités : la perte d'énergie par génération d'harmoniques élevés et formation de choc joue plus efficacement sur les zones de fortes amplitudes. Ce phénomène est particulièrement marqué à $1000mV$ où les non-linéarités très fortes tendent à saturer le champ de vitesse en amont du point focal. Par ailleurs, on observe un élargissement de la tache focale avec l'amplitude d'émission. Ceci est un phénomène attendu : les non-linéarités à fort niveau tendent à dissiper l'énergie de manière plus efficace sur l'axe acoustique et donc à diminuer l'amplification sur l'axe comparativement aux points latéraux. Concernant l'accélération, on remarque que la tache focale est plus étroite, ce qui est en conformité avec les simulations numériques du chapitre 3 (cf Fig.3.9). Le comportement non linéaire est également visible sur les niveaux maxima focalisés, passant respectivement de $0.34km/s^2$ à $1.11km/s^2$ puis $2.58km/s^2$, soit des facteurs 3.26 et 2.32 supérieurs au facteur entre les niveaux à la source 2.5 et 2. Ces effets non linéaires sur l'accélération sont toutefois nettement moins marqués que pour les simulations numériques. Une explication possible serait que, théoriquement, le choc induit une accélération très élevée à certains instants mais que celle-ci peut être réduite par le processus de moyennage sur la profondeur $x$ si les pics d'accélération ne sont pas parfaitement synchrones. Une quantification précise sera apportée à la fin du chapitre par une comparaison avec les simulations numériques. On montrera alors que les amplitudes en accélérations mesurées et simulées sont en accord raisonnable (cf Fig. 5.15). En conséquence, le processus de moyenne ne semble pas affecter sensiblement l'évaluation de l'accélération.

### 5.1.3. Signaux temporels et spectres

Dans cette partie, l'étude se concentre sur les signaux dans le domaine temporel et leur spectre dans le domaine fréquentiel. Fig. 5.4 présente les vitesses mesurées en plusieurs points $(z, y)$ du domaine de propagation pour les trois amplitudes d'émission, les spectres des vitesses aux mêmes points étant visualisés sur Fig. 5.5. Les spectres sont calculés sur 1000 points par un algorithme de *Fast Fourier Trasform* et présentés à chaque fois en valeur absolue (colonne de gauche) et en valeur normalisée par l'amplitude du fondamental (colonne de droite). Les coordonnées des points choisis sont $(0.27cm, 0cm)$, $(1.46cm, 0cm)$ et la position du point focal en énergie. Ces points sont pris sur l'axe de symétrie de la source $y = 0cm$, déterminé expérimentalement en recherchant l'ordonnée $y$ du maximum d'énergie. L'abscisse $z$ est mesurée par rapport au centre de la barrette. Les figures de droite et de gauche montrent les mêmes signaux temporels mais avec un zoom, pour les figures de droite, sur deux périodes du signal dans l'intervalle de temps $[0.08s, 0.1s]$ où il est d'amplitude maximum. Ce zoom permet de mieux visualiser les effets non linéaires.

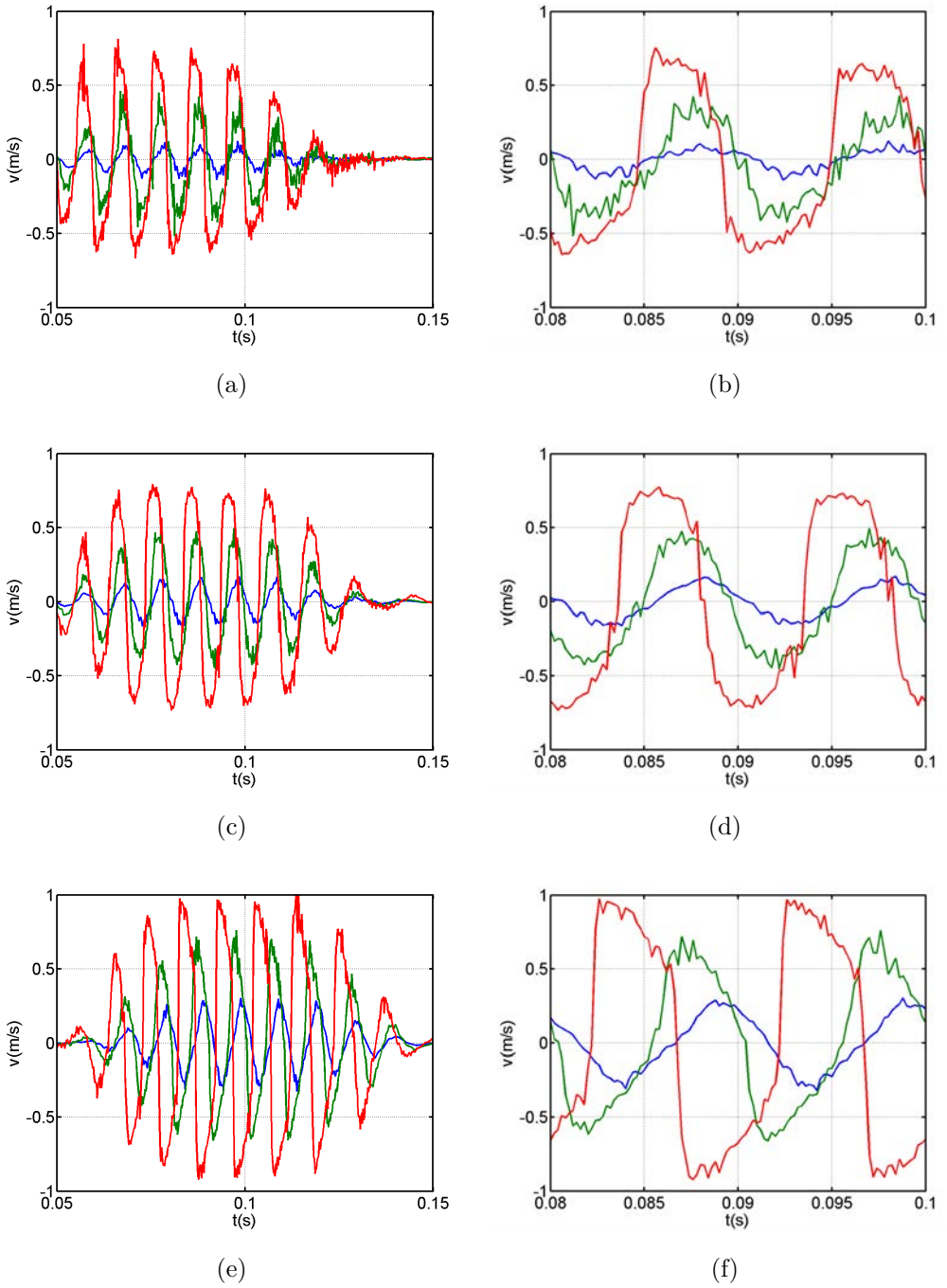



**Figure 5.4.** – Vitesse mesurée dans le domaine de propagation aux points $(0.27cm, 0cm)$ (haut), $(1.46cm, 0cm)$ (milieu) et au point focal en énergie (bas) pour trois amplitudes d'émission $200mV$ (bleu), $500mV$ (vert) et $1000mV$ (rouge) avec le signal complet (gauche) et un zoom sur deux périodes (droite)

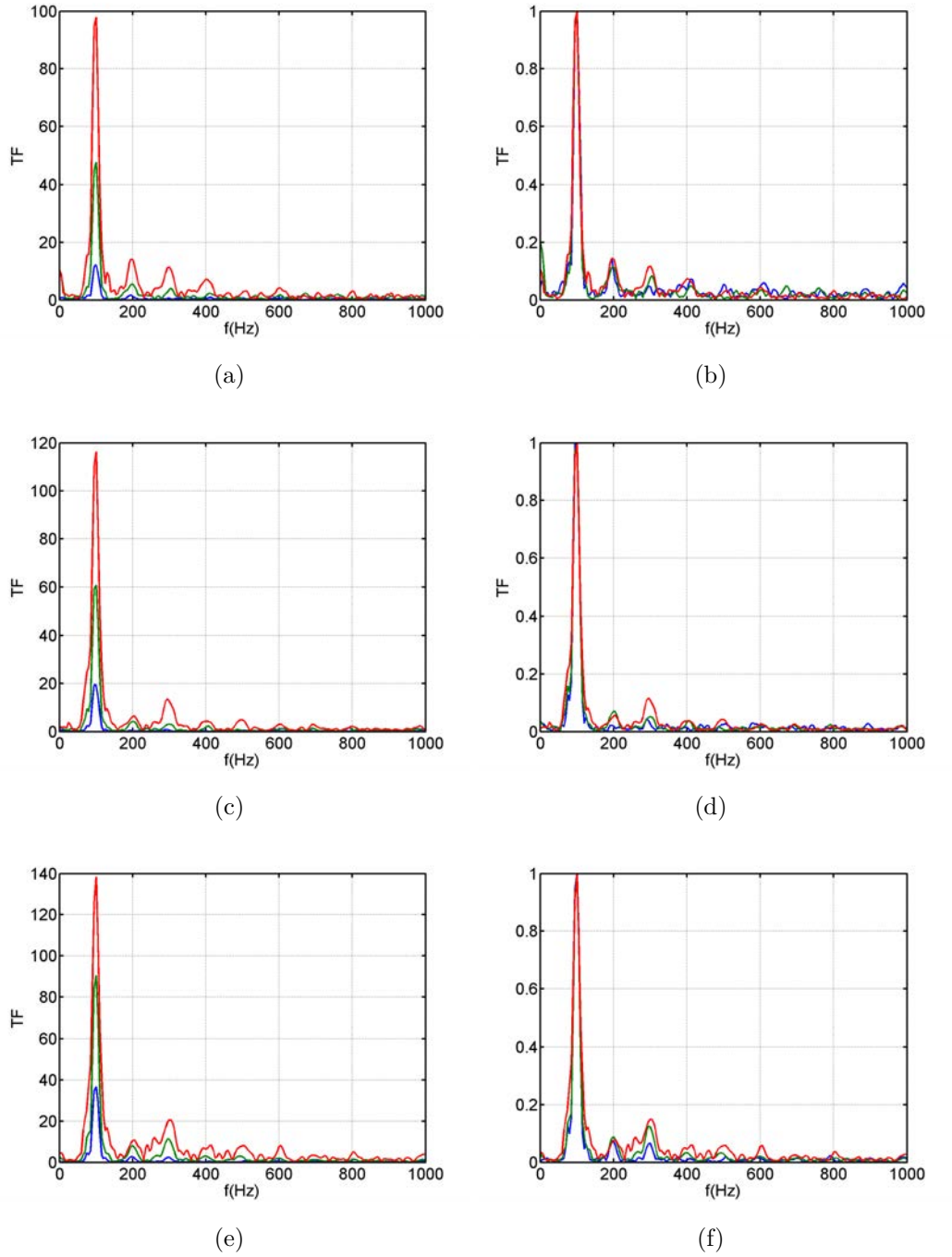



**Figure 5.5.** – Spectres des signaux de vitesse (à gauche) et spectres normalisés par l'amplitude du fondamental (à droite) aux points $(0.27cm, 0cm)$ (haut), $(1.46cm, 0cm)$ (milieu) et au point focal en énergie (bas) pour les trois amplitudes d'émission $200mV$ (bleu), $500mV$ (vert) et $1000mV$ (rouge).

La position $(0.27cm, 0cm)$, faisant l'objet des figures 5.4(a) et 5.4(b), est située bien en amont de la tache focale, à environ $4cm$ du plan tangent au fond de la section de cylindre. Les spectres correspondants sont montrés sur Figs.5.5(a)-5.5(b). On peut y observer que la réponse à l'émission à $200mV$ est quasi-sinusoïdale. Le régime semble bien linéaire. Toutefois, le spectre montre une composante sur l'harmonique 2 de l'ordre de 15% du fondamental et quasiment indépendante de l'amplitude d'émission en valeur normalisée. Ceci indiquerait donc que cette composante n'est pas liée à un effet non linéaire de propagation mais résulterait du système d'acquisition comme discuté précédemment dans la section 4.1.5.3 . Sur les signaux émis à $500mV$, on observe un début de déformation non linéaire de la forme d'onde, avec l'émergence du troisième harmonique à un niveau un peu inférieur à 10% du fondamental. Le cinquième harmonique reste en revanche indétectable sur le spectre. Le cas de l'émission à $1000mV$ présente des effets non linéaires nettement plus marqués avec l'apparition de deux "chocs" par période, l'un positif et l'autre négatif. Conformément à la théorie, on observe également que les zéros d'amplitude se propagent à une vitesse quasiment indépendante de l'amplitude tandis que les extrema arrivent en avance de phase, donc se propagent plus rapidement. Ces observations sont conformes au comportement d'une onde quasi-plane à non-linéarité cubique. Cette conclusion est corroborée par l'analyse du spectre où le troisième harmonique est au-dessus de 10% de l'amplitude du fondamental et le cinquième harmonique est visible mais dans le niveau de bruit. On retrouve ici le fait que le rapport signal sur bruit pour les harmoniques est bien supérieur dans le cas focalisé, que dans le cas de l'onde plane traité au chapitre 4.

L'observation de la position $(1.46cm, 0cm)$, légèrement en amont de la tache focale (cf Fig.5.4(a)-5.4(b)) donne lieu à des conclusions similaires : 1) linéarité à $200mV$ d'excitation, 2) indépendance du second harmonique en fonction du niveau d'excitation, 3) zéros d'amplitude en phase, 4) extrema d'amplitude en avance de phase, 5) troisième et cinquième harmoniques clairement visibles dans le spectre pour le niveau d'excitation le plus élevé à $1000mV$. On peut noter que les effets non linéaires sont peu marqués à $500mV$, à l'exception de l'avance de phase des extrema. En particulier les harmoniques émergent peu du spectre. Ceci pourrait résulter d'interférences destructives locales associées à la diffraction.

Au point focal en énergie, figures 5.4(e) et 5.4(f), les conclusions précédentes sont encore plus nettes. Les extrema sont très nettement en avance de phase pour les deux amplitudes les plus élevées, et les formes d'onde approchent d'une forme de type

"créneau" avec deux chocs respectivement positif et négatif par période pour l'amplitude la plus élevée. Les spectres font visiblement émerger le troisième harmonique y compris pour l'amplitude d'excitation la plus faible, et le cinquième harmonique apparaît nettement au-dessus du niveau de bruit pour les deux excitations les plus élevées. En revanche, les zéros d'amplitude ne sont plus en phase, ce qui indique que les effets de diffraction et/ou non linéaires ne sont plus négligeables comme on peut s'y attendre au point focal.

Les signaux filtrés en accélérations sont montrés Fig. 5.6 avec l'intégralité des signaux temporels à gauche et un zoom sur deux périodes à droite. Les points d'observation sélectionnés sont identiques à ceux choisis pour la vitesse. Le principal intérêt de cette visualisation est de mettre en évidence les pics d'accélération qui correspondent à des chocs sur les signaux de vitesse. Ils sont clairement visibles sur l'ensemble des signaux à $1000mV$ et observables près du point focal à $500mV$. Les chocs positifs et négatifs se distinguent les uns des autres par le signe de l'accélération. Les oscillations hautes fréquences des signatures résultent du filtre imposé à $1000Hz$. Rappelons que le critère HIC (Head Injury Criterion) proposé par US National Highway Traffic Administration [101] est basé sur l'accélération de la tête lors de l'impact.

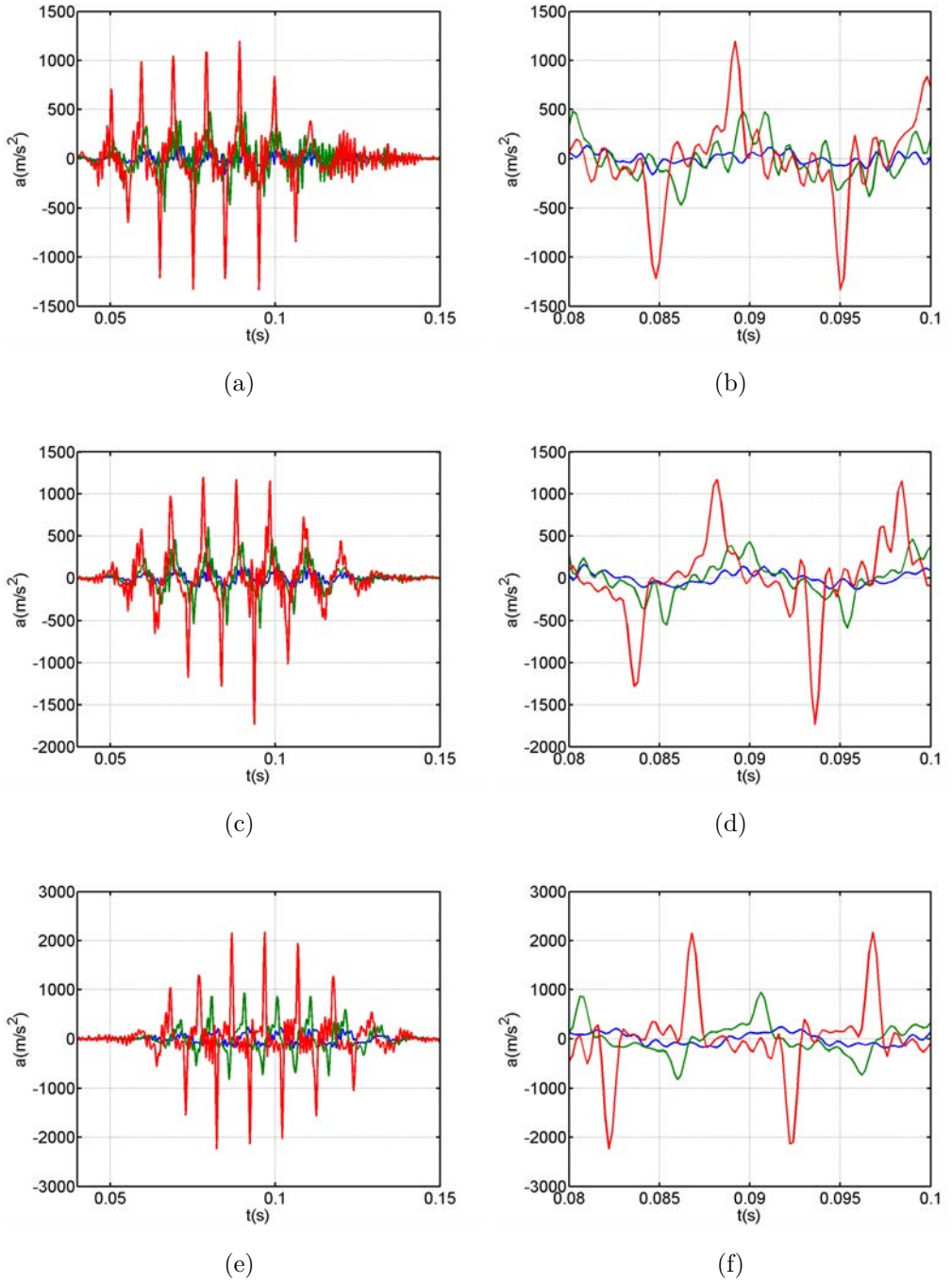
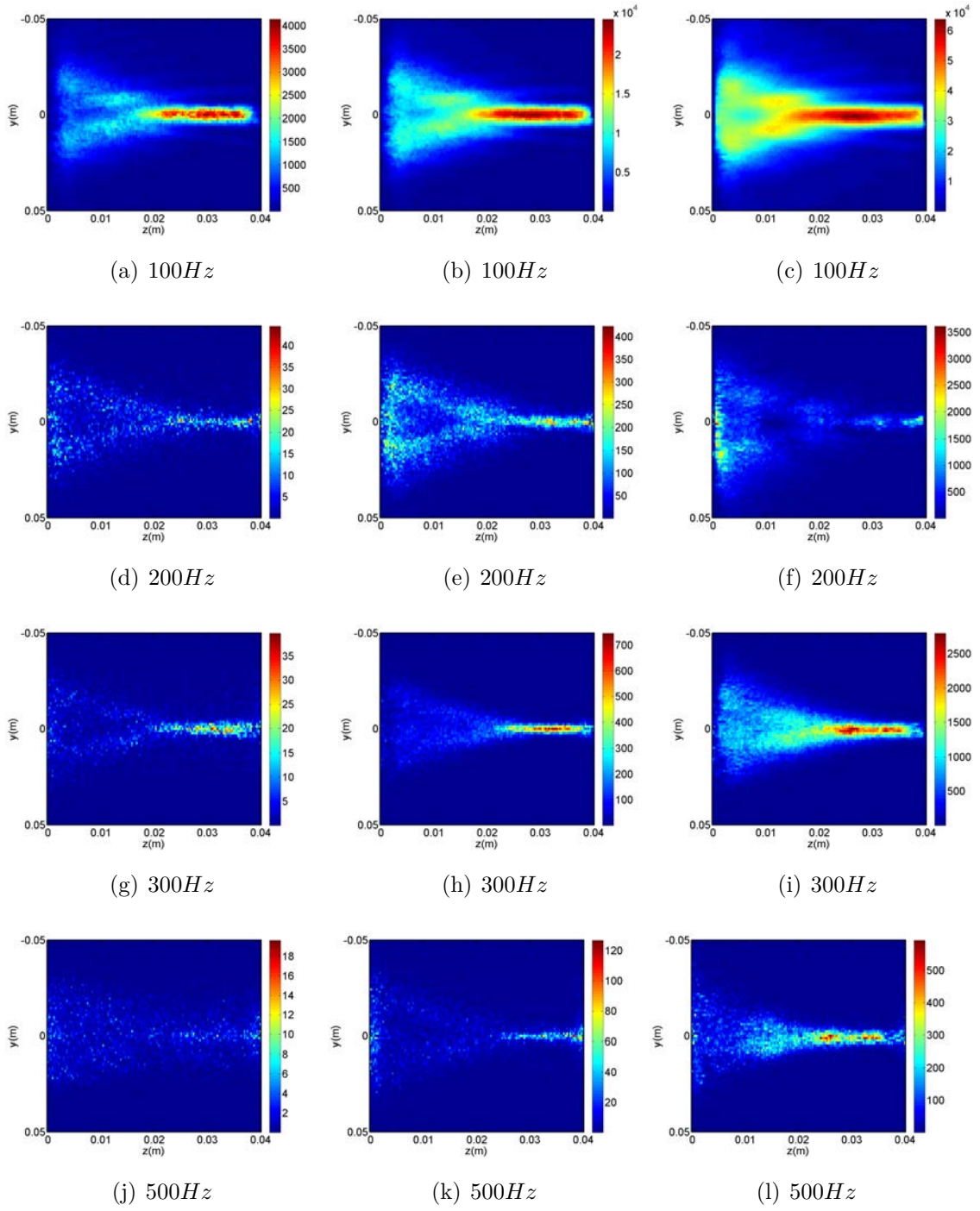



**Figure 5.6.** – Accélération mesurée dans le domaine de propagation aux points $(0.27cm, 0cm)$ (haut), $(1.46cm, 0cm)$ (milieu) et au point focal en énergie (bas) pour trois amplitudes d'émission $200mV$ (bleu), $500mV$ (vert) et $1000mV$ (rouge) avec le signal complet (gauche) et un zoom sur deux périodes (droite)

### 5.1.4. Cartes des harmoniques




(a) $100Hz$ (b) $100Hz$ (c) $100Hz$

(d) $200Hz$ (e) $200Hz$ (f) $200Hz$

(g) $300Hz$ (h) $300Hz$ (i) $300Hz$

(j) $500Hz$ (k) $500Hz$ (l) $500Hz$

**Figure 5.7.** – Energie des harmoniques $100Hz$, $200Hz$, $300Hz$ et $500Hz$ (de haut en bas) pour les trois amplitudes $200mV$ (gauche), $500mV$ (milieu) et $1000mV$ (droite) d'émission.

Les observations déduites des Fig. 5.4 et Fig. 5.5 se basaient sur les signaux mesurés en trois points du domaine. Afin de conforter les conclusions effectuées, il est possible de cartographier l'énergie (en unité arbitraire) de chaque harmonique sur l'ensemble du domaine de mesure. Cette énergie est calculée en intégrant le carré du spectre de vitesse autour de chaque harmonique, sur une bande de largeur $\pm 25Hz$. Le résultat de ce calcul permet ainsi de comparer la localisation des harmoniques pour les différentes amplitudes d'émission en réduisant l'incertitude sur la valeur de la fréquence du maximum local du spectre. Fig. 5.7 montre les cartes d'énergie spectrale obtenues par cette méthode pour les trois niveaux d'excitation.

Celles concernant le fondamental sont les Fig.5.7(a)-5.7(c). Le comportement de celui-ci est extrêmement similaire à celui observé Fig. 5.2 pour l'énergie cinétique du signal. Ainsi, la tache focale s'élargit avec l'augmentation de l'amplitude initiale, et en parallèle, l'amplification diminue. Ici, le coefficient d'amplification de l'énergie du fondamental est proche de 4 pour le test à $200mV$ et proche de 2 pour celui à $1000mV$. Fig.5.7(d)-5.7(f) concernent le second harmonique à $200Hz$. On peut observer sur ces figures cet harmonique dès le premier plan de mesure ; sa répartition suit celle du fondamental mais les effets de focalisation sont peu perceptibles : son niveau est relativement constant dans la zone où du signal est détecté. Ceci rejoint les observations faites sur les spectres où son niveau relatif au fondamental est quasiment constant. Tout ceci semble donc indiquer que l'observation du second harmonique résulte du système de détection et non pas d'un mécanisme physique de propagation, ni d'une émission à la source.

Les résultats pour le troisième harmonique sont présentés sur Fig.5.7(g)-5.7(i). L'émission à $200mV$ présente une très faible énergie pour cette fréquence. Elle est bien amplifiée au point focal mais reste cent fois inférieure à celle du fondamental. Ce rapport augmente dans le cas d'amplitude $500mV$, le troisième harmonique étant alors environ 35 fois plus faible en énergie. Ceci corrobore les observations temporelles montrant la non-linéarité du signal au point focal pour l'onde à $500mV$. Notons aussi que la tache focale du troisième harmonique est parfaitement définie, et est plus étroite que celle du fondamental comme on peut s'y attendre selon les lois de la diffraction linéaire. L'augmentation de l'amplitude d'émission jusqu'à $1000mV$ ne fait que confirmer ces observations avec un rapport fondamental sur troisième harmonique de l'ordre de 25. Remarquons cependant que la tache focale n'est pas aussi bien définie, le troisième harmonique étant présent dès les premiers points de mesure. Ceci est en conformité avec l'observation de chocs à tous les points de me-

sure axiaux sur les signaux temporels. On retrouve ainsi une carte assez similaire à celle du fondamental avec un étalement de la tache focale. L'amplification résulte ici d'une compétition entre diffraction et forte atténuation non linéaire. Au contraire dans le cas à $500mV$, la focalisation de l'harmonique, processus linéaire, est favorisée par sa génération (non linéaire à partir du fondamental) localement au voisinage du point focal. Les figures 5.7(j) à 5.7(l) illustrent la répartition spatiale du cinquième harmonique. Le cas de l'émission à $200mV$ ne montre quasiment pas d'énergie pour cet harmonique. Ce résultat n'est pas étonnant étant donné que le troisième harmonique est déjà très peu développé. Les résultats pour $500mV$ indiquent que cet harmonique n'est présent quasiment que dans la tache focale et résulte d'un processus non linéaire localisé dans les zones de plus forte intensité. Pour une amplitude d'émission de $1000mV$, on peut observer une présence beaucoup plus précoce du cinquième harmonique, dès les premiers points de mesure. L'allure générale est alors similaire à celle observée pour le troisième harmonique au niveau d'excitation à $500mV$. Il résulte donc principalement d'un effet de génération non linéaire à partir du troisième harmonique localisé principalement dans la zone focale.

## 5.2. Comparaison des simulations et des résultats expérimentaux

L'objectif de cette partie est de comparer les résultats expérimentaux décrits précédemment avec le modèle théorique et numérique développé dans les chapitres 2 et 3. Ceci permettra 1) de vérifier la pertinence de ce modèle, 2) d'estimer les paramètres inconnus et notamment le paramètre de non-linéarité $\beta$, et 3) de confirmer que les non-linéarités observées résultent bien d'un processus d'élasticité non linéaire cubique associé à des ondes de cisaillement pur focalisées dans un milieu incompressible. On peut rappeler ici les approximations sous-jacentes au modèle théorique :

- milieu élastique non linéaire en grande déformation ;
- milieu incompressible et isotrope ;
- absorption linéaire ;
- ondes transverses polarisées linéairement ;
- approximation paraxiale.

### 5.2.1. Méthode

La simulation numérique de l'onde de cisaillement non linéaire présente deux difficultés principales :

— l'incertitude concernant le coefficient non linéaire $\beta$ ;
— l'initialisation de l'algorithme pour déterminer les conditions d'entrée liées à la source.

Pour palier la première, nous avons choisi d'effectuer une étude paramétrique en faisant varier systématiquement le paramètre $\beta$ entre 0 et 3.5 dans la gamme estimée la plus probable d'après les mesures en ondes planes. Pour la seconde, deux options sont alors possibles : soit utiliser un signal mesuré dans un plan $z = z_0$, soit déterminer une source plane équivalente à la portion de cylindre par temps de retard. Les deux méthodes présentent des difficultés différentes. L'utilisation d'un signal mesuré dans le gel implique que le signal d'entrée des simulations est affecté par les incertitudes expérimentales, et nécessite que la forme d'onde soit compatible avec l'approximation paraxiale. En revanche, déterminer une source plane équivalente à la section de cylindre par temps de retard, et modifier ceux-ci de façon compatible avec l'approximation parabolique, peut mener à une meilleure focalisation dans les simulations. En contre-partie, ceci implique aussi des erreurs sur les distances de propagation, et donc sur l'atténuation de l'onde et sur son caractère non linéaire. Notons aussi que cette dernière méthode nécessite de parfaitement connaître la forme d'onde émise et la distance entre la source et le domaine étudié, ce qui n'est pas le cas ici. Notre étude utilisera donc par la suite des signaux directement mesurés dans le gel.

Les simulations sont effectuées pour une fréquence d'échantillonnage $f_e = 5000Hz$ afin de respecter la forme des signaux mesurés dans le gel. Cependant, pour le maillage spatial, il faut tenir compte du critère de stabilité de la partie non linéaire. Le maillage spatial a donc été choisi selon $z$ pour satisfaire ce critère, ce qui donne des pas $\Delta z < 3 \times 10^{-5}m$. Selon $y$, le maillage a été choisi afin d'obtenir une description suffisante des effets de focalisation avec un pas $\Delta y = 0.303mm$ au lieu de $1.2mm$ pour le pas expérimental. Le signal mesuré dans le plan initial est interpolé sur le maillage numérique, par une interpolation *spline cubic* pour chaque instant du maillage temporel. Le plan d'initialisation du calcul est localisé à la position $z$ du treizième point du maillage de mesure le long de la barrette à l'abscisse $z_0 = 3.6mm$ depuis le premier point de la barrette. Cette position correspond aux points de me-

sures à partir desquels les amplitudes mesurées sont relativement stables. Rappelons que les points latéraux de la barrette sont affectés par la méthode de filtre décrite au chapitre 4. A partir de maintenant, afin de comparer simulations et mesures, l'origine de l'axe $z$ est choisie comme le premier point de mesure (ce qui correspond à $z = -2cm$). Afin de minimiser les réflexions numériques sur les bords latéraux du domaine, celui-ci est étendu de $2cm$ de chaque côté et le champ initial mesuré est prolongé à zéro au niveau de ces extensions.

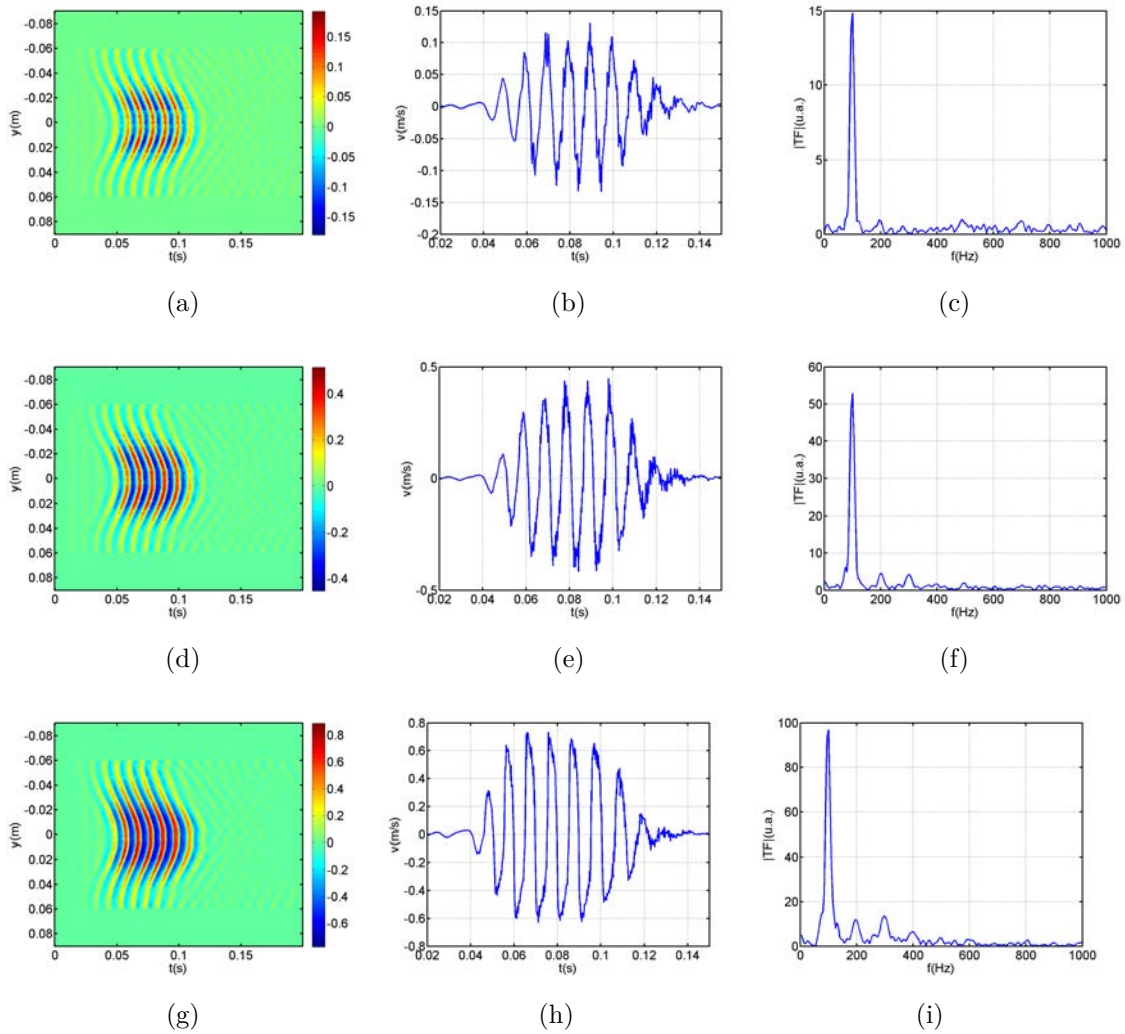



**Figure 5.8.** – Champs de vitesse mesurés et interpolés dans le plan initial de la simulation numérique. De haut en bas, excitation à 200, 500 et $1000mV$. A gauche : champ de vitesse (B-scan) en niveaux de couleur (m/s) en fonction du temps et de la position $y$. Au centre : signaux temporels sur l'axe $y = 0$. A droite : spectres des signaux sur l'axe.

Les signaux dans le plan de mesure servant à l'initialisation du calcul sont visualisés Fig. 5.8 pour les trois niveaux d'excitation. En première colonne, on voit le champ de vitesse (B-scan) en niveaux de couleur en fonction du temps et de la position $y$ ; en seconde colonne, les signaux temporels sur l'axe $y = 0$ ; et en dernière, le spectre correspondant. La courbure des fronts d'onde dans le plan est clairement observable sur les B-scan, ce qui conduira à la focalisation. On observe également la décroissance latérale du champ à partir de l'axe jusqu'à des niveaux relativement faibles, si bien que la diffraction artificielle résultant de la prolongation latérale du champ par zéro conduira à des effets négligeables au niveau de l'axe et de la zone focale. Les signatures temporelles et leur spectre montrent l'apparition progressive des non-linéarités avec le niveau d'excitation, sous la forme d'un raidissement du signal, et de l'émergence des harmoniques 3 et 5. Le niveau relatif du second harmonique est relativement constant.

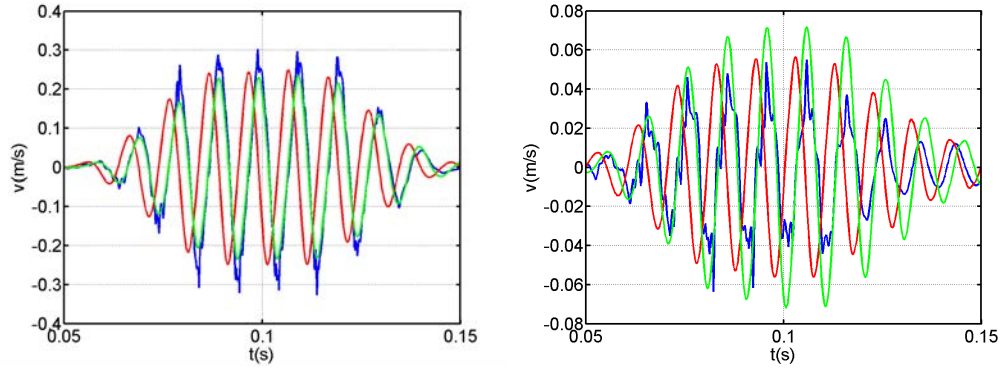
### 5.2.2. Vitesse de propagation en régime linéaire

Les premiers résultats obtenus dans le cas linéaire, pour l'amplitude d'émission $200mV$ pic à pic, montrent que les temps d'arrivée des expériences et des simulations, avec la valeur $c_T = 1.625m/s$ mesurée préalablement pour une onde plane (cf chapitre 4), ne coïncident pas. Deux exemples sont présentés sur Fig. 5.9. Le régime étant quasiment linéaire, l'explication ne peut pas venir d'une augmentation de la vitesse de propagation par l'apparition d'un choc. L'explication la plus probable serait donc une modification de la vitesse de propagation $c_T$ entre les expériences menées en ondes planes et celles en focalisation. La vitesse de propagation a été corrigée pour accorder les temps d'arrivée observés et ceux simulés. La valeur $c_T = 1.45m/s$ donne le meilleur accord. Elle s'avère différer de 12% par rapport à la valeur $c_T = 1.625$ mesurée précédemment. Cette nouvelle vitesse permet ainsi d'obtenir des temps d'arrivée en excellent accord entre les simulations et les expériences, comme pour les deux points étudiés sur Fig. 5.9. Ce changement de la vitesse de propagation observé peut ici s'expliquer par :

— un changement des paramètres du gel, les expériences n'ayant pas été réalisées le même jour ; les variations de températures, mêmes faibles, ou l'hydratation progressive du gel dont la surface est constamment couverte d'eau, pourraient expliquer ces variations ;

— des erreurs de mesures provenant des réflexions sur les bords de la cuve, effets

plus importants dans le cas des ondes planes comme vu au chapitre 4. Par la suite, toutes les simulations présentées dans ce chapitre seront effectuées pour $c_T = 1.45m/s$. La valeur de l'absorption n'a, quant à elle, pas été modifiée.




(a) $z = 3cm$, $y = 0cm$ (b) $z = 3cm$, $y = 1.03cm$

**Figure 5.9.** – Comparaison entre les résultats expérimentaux à $200mV$ pic à pic (ligne bleue) avec les simulations pour $\beta = 1$ avec $c_T = 1.625m/s$ (ligne rouge) et $c_T = 1.45m/s$ (ligne verte) en deux points de mesure sur (à gauche) et hors (à droite) de l'axe de propagation.

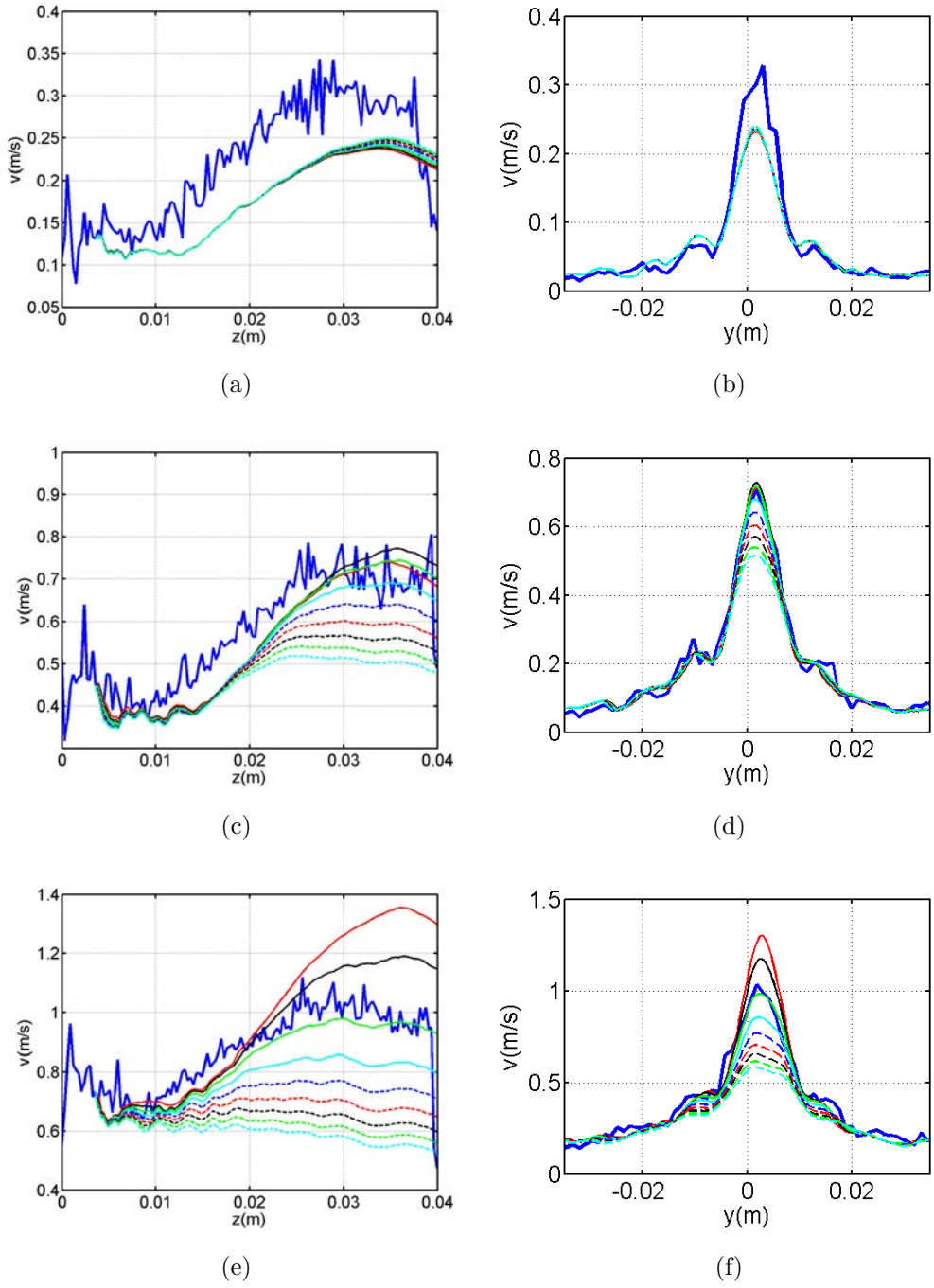



**Figure 5.10.** – Comparaison des amplitudes maximales des signaux temporels mesurés dans le gel (en bleu), pour les amplitudes d'émission $200mV$ (haut), $500mV$ (milieu) et $1000mV$ (bas), avec celles issues des simulations sur l'axe $y = 0$ (gauche) et sur l'axe $z = 3cm$ (droite) pour différents coefficients non linéaires. Rouge : $\beta = 0$. Noir : $\beta = 0.5$. Vert : $\beta = 1$. Cyan : $\beta = 1.5$. Tirets rouges : $\beta = 2$. Tirets noirs : $\beta = 2.5$. Tirets verts : $\beta = 3$. Tirets cyans : $\beta = 3.5$.

## 5.2.3. Comparaisons

### 5.2.3.1. Amplitude

Fig. 5.10 présente les comparaisons entre les amplitudes maximales des signaux temporels mesurés expérimentalement et simulés, d'une part sur l'axe de propagation $y = 0$ (colonne de gauche) et d'autre part, dans le plan $z = 3cm$ proche du point focal (colonne de droite). Ces comparaisons sont effectuées pour différentes valeurs du coefficient non linéaire $\beta$, et toujours pour les trois amplitudes d'émissions $200mV$, $500mV$ et $1000mV$.

La première observation que l'on peut faire est que la dispersion des résultats des simulations en fonction de $\beta$ dépend fortement de l'amplitude d'émission. Dans le cas linéaire (émission à $200mV$), toutes les simulations donnent quasiment le même résultat sur la valeur de l'amplitude en fonction du paramètre $\beta$. Les effets non linéaires sont donc très faibles comme attendu. L'amplitude paraît constamment sous-estimée. Notons toutefois que l'écart entre amplitudes mesurées et simulées est de l'ordre de 15%, soit comparable à l'incertitude sur la mesure dans le plan source. On peut noter également que la simulation reproduit bien la dynamique le long de l'axe, avec une amplitude presque constante sur $1cm$ puis une augmentation graduelle liée à la focalisation. Le point focal numérique est autour de $z = 3.5cm$ avec une amplification d'un facteur 2.5 environ par rapport au plan initial. Le point focal expérimental semble être un peu plus proche, autour de $z = 3cm$ mais les 12 derniers points de mesures étant incertains, il est difficile d'être absolument affirmatif sur la position de celui-ci. La figure dans le plan transverse indique que la simulation reproduit bien la largeur du lobe principal, les premiers minima locaux et la largeur des premiers lobes secondaires. Ceci prouve notamment que l'approximation paraxiale, utilisée dans le modèle théorique, est suffisante à ce stade comparée aux incertitudes expérimentales. On retrouve sur l'amplitude axiale un écart de 15% environ qui peut s'expliquer par l'incertitude sur l'amplitude du signal initial.

En augmentant le niveau d'excitation ($500mV$ ou $1000mV$), la sensibilité des simulations au coefficient non linéaire augmente, le cas le plus non linéaire étant évidemment le plus favorable. On remarque que les résultats pour les faibles coefficients non linéaires autour de $\beta = 1$ sont les plus cohérents avec les résultats expérimentaux. Ces constats sont valables aussi bien pour l'amplitude sur l'axe de propagation selon $z$ avec une bonne estimation de la longueur de la tache focale,

que sur l'axe $y$ avec une largeur de tache focale en accord avec les mesures. Les fortes valeurs du paramètre non linéaire conduisent à une atténuation non linéaire beaucoup trop forte et une amplitude fortement sous-estimée. L'allure générale des courbes est similaire au cas linéaire. Toutefois, les non-linéarités ont tendance à diminuer l'amplification due à la focalisation, et conduisent à une amplitude le long de la tache focale relativement constante sur environ $1.5cm$. Cet effet est bien décrit par la simulation, notamment pour $\beta = 1$. La figure dans le plan transverse pour $1000mV$ indique que les effets non linéaires sont peu sensibles en dehors du lobe principal car les amplitudes y sont trop faibles. En revanche, ils tendent comme attendu à élargir le lobe principal car ils réduisent l'amplitude plus fortement sur l'axe que latéralement.

#### 5.2.3.2. Signaux temporels

La comparaison entre les signaux temporels mesurés et calculés fait l'objet de Fig. 5.11. Elle montre l'ensemble des signaux temporels (colonne de gauche) et un zoom sur deux périodes (colonne de droite) au centre du signal, et ce toujours pour les trois niveaux d'excitation. La position choisie pour la comparaison correspond au point $z = 3cm$ et $y = 0cm$, proche du point focal où l'on s'attend à ce que les effets non linéaires soient maximaux. Les simulations présentées ici correspondent aux coefficients non linéaires $\beta$ variant de 0 à 2.5. Les valeurs supérieures ne sont pas présentées car l'analyse des amplitudes a montré qu'elles n'étaient pas pertinentes. Afin de pouvoir effectuer la comparaison sur les figures, les échelles de temps ont été reconstruites. En effet, les simulations sont en temps retardés contrairement aux acquisitions. Le temps des acquisitions a donc été transformé en temps retardé en utilisant l'écart de positions $z$ entre le point observé et le plan initial. La vitesse de propagation est toujours $1.45m/s$. Des simulations réalisées avec $c_T = 1.625m/s$, valeur mesurée pour l'onde plane, montrent dans tous les cas, y compris fortement non linéaires, un décalage très visible sur les temps d'arrivée.

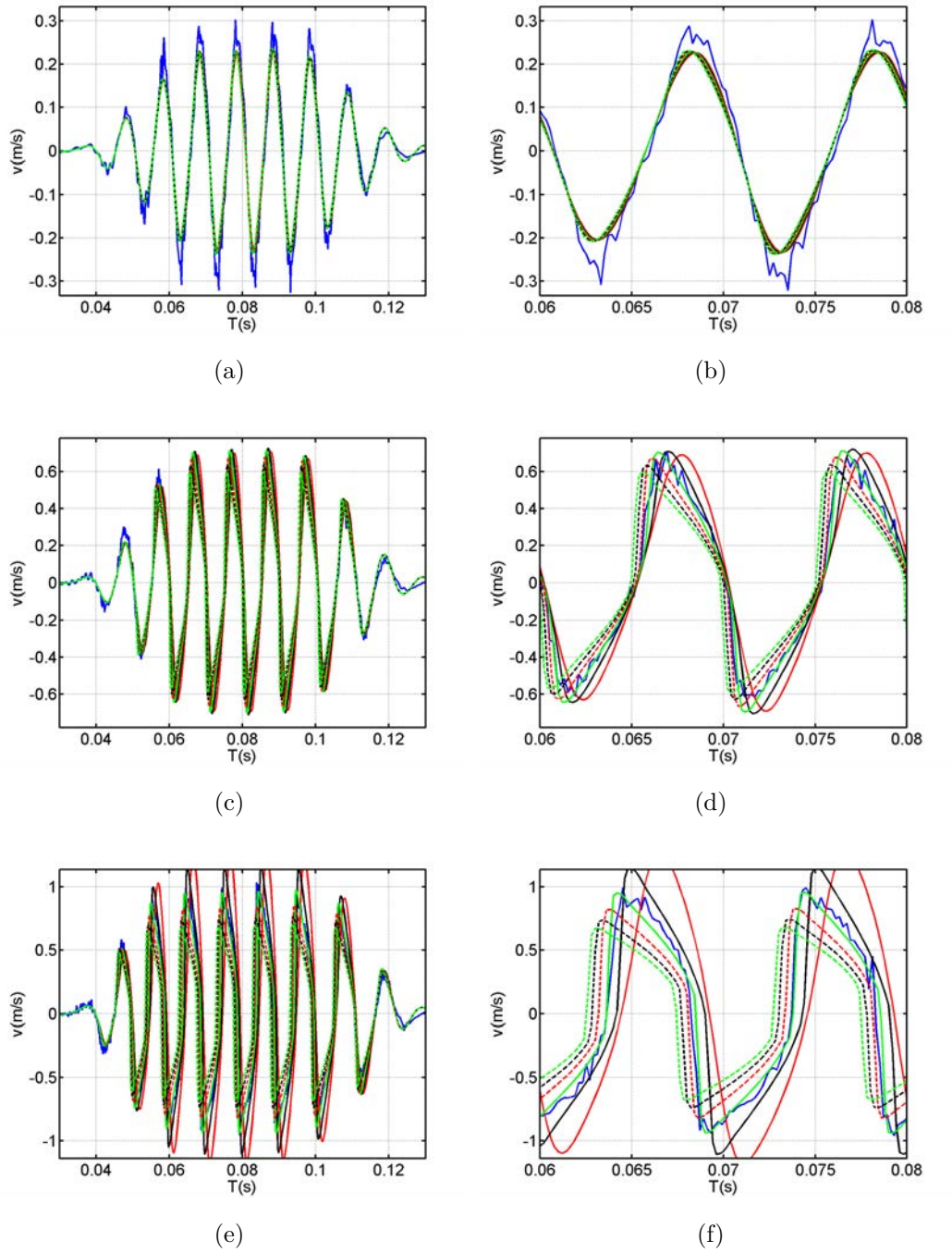



**Figure 5.11.** – Comparaison des signaux temporels de vitesse dans le gel, pour les amplitudes d'émission $200mV$ (haut), $500mV$ (milieu) et $1000mV$ (bas), avec celles issues des simulations à la position $z = 3cm$ et $y = 0cm$ pour différents coefficients non linéaires. Bleu : mesures expérimentales. Simulations : Rouge : $\beta = 0$. Noir : $\beta = 0.5$. Vert : $\beta = 1$. Tirets rouges : $\beta = 1.5$. Tirets noirs : $\beta = 2$. Tirets verts : $\beta = 2$. A gauche : signaux complets. A droite : zoom sur deux périodes.

Figures 5.11(a) et 5.11(b) montrent les résultats obtenus pour l'amplitude la plus faible, de $200mV$. Comme déjà observé sur l'amplitude maximale, la propagation dans ce cas est quasiment linéaire, la forme d'onde n'est que très peu sensible au coefficient non linéaire $\beta$ et l'onde semble toujours sinusoïdale aussi bien sur les simulations que sur les mesures expérimentales. Figures 5.11(c) et 5.11(d) concernent les émissions à $500mV$. On peut observer des effets non linéaires près du point focal aussi bien sur les simulations que sur les mesures. L'onde présente un raidissement significatif caractéristique de la non-linéarité cubique. Les simulations semblent décrire de manière assez fidèle les résultats mesurés pour les coefficients $\beta = 1 \pm 0.5$. Pour $\beta = 0$, la distorsion non linéaire est absente, même si les composantes harmoniques sont présentes en raison des non-linéarités du signal initial. Les valeurs de $\beta \geq 2$ conduisent à des simulations trop fortement non linéaires. Les comparaisons pour l'amplitude d'émission $1000mV$ font l'objet des figures 5.11(e) et 5.11(f) . Il s'agit d'un cas de propagation fortement non linéaire comme on a déjà pu l'observer sur Fig. 5.4 et Fig. 5.5. La sensibilité des simulations au paramètre $\beta$ est donc très marquée. La valeur $\beta = 1$ semble à nouveau la plus pertinente, reproduisant de manière très satisfaisante la forme de l'onde, la position des chocs (positifs ou négatifs), leur amplitude et leur pente. Les valeurs $\beta = 0.5$ et 1.5 conduisent à des écarts significatifs par rapport à la mesure. On peut donc proposer la plage $\beta = [0.75\,1.25]$ pour la valeur du paramètre non linéaire du milieu. Le bon accord entre théorie et expérience confirme par ailleurs que la non-linéarité est essentiellement cubique. Si elle existe, la non-linéarité quadratique joue un rôle négligeable. La présence du second harmonique n'en est pas la signature. Il est bien présent (cf section suivante) mais résulte d'une non-linéarité du système de mesure.

#### 5.2.3.3. Comparaison des spectres

Fig. 5.12 montre les spectres des signaux présentés sur la Fig. 5.11. Les spectres ont été calculés en utilisant un algorithme *Fast Fourier Transform* sur l'intégralité du domaine temporel acquis, soit les 999 points. Cependant, afin d'améliorer l'échantillonnage du spectre, les calculs ont été effectués après une étape de prolongation du signal par des zéros portant le nombre de points en temps à 2048. La colonne de gauche présente les spectres calculés de 0 à $1000Hz$ et la colonne de droite, les spectres, normalisés par l'amplitude du fondamental, et de 0 à $500Hz$, afin de mieux visualiser les résultats sur les cinq premiers harmoniques. Le cas de l'excitation à

$200mV$ fait l'objet des Fig.5.12(a) et Fig.5.12(b). Le troisième harmonique observable sur les résultats expérimentaux semble sous-évalué par les simulations. Une explication possible pourrait être une incertitude de mesure du signal à l'entrée pour laquelle le troisième harmonique aurait été sous-estimé. Fig.5.12(c) et Fig.5.12(d) sont dédiées aux émissions à $500mV$. Dans ce cas, les harmoniques impairs 3 et 5 sont globalement au contraire un peu surestimés, sauf pour $\beta = 0.5$. Le second harmonique est quant à lui bien estimé, ce qui confirme une nouvelle fois qu'il ne résulte pas d'un effet de propagation non linéaire. L'observation des résultats pour l'émission à $1000mV$ indique d'après Fig.5.12(e) et Fig.5.12(f) que le spectre des signaux simulés reproduit toujours la dynamique observée expérimentalement. Dans ce cas fortement non linéaire, les harmoniques 3, 5 et même 7 sont clairement observables. Le niveau absolu du fondamental, qui véhicule le plus d'énergie, est le plus sensible au paramètre non linéaire avec le meilleur accord pour $\beta = 1$. Dans tous les cas, les simulations linéaires avec $\beta = 0$ conduisent à des valeurs fortement sous-estimées des harmoniques, prouvant que ceux-ci résultent bien de la propagation non linéaire. Le fait que les spectres normalisés dépendent peu de $\beta$ indique par ailleurs que la forme d'onde est stabilisée, et donc que l'on a bien un choc mesuré à une distance nettement au-delà de la distance de formation des chocs.

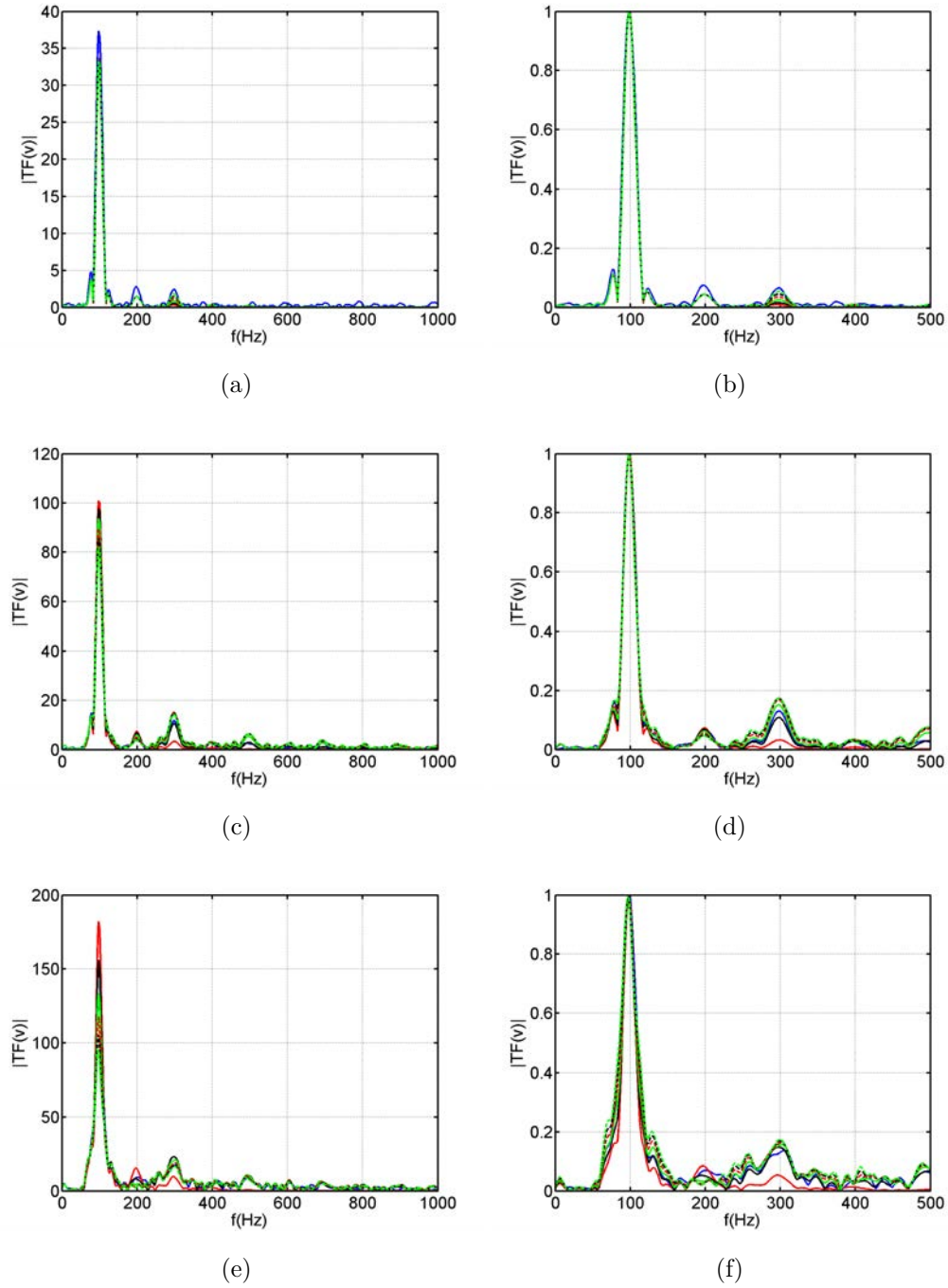



**Figure 5.12.** – Comparaison des spectres de vitesse mesurés (en bleu), pour les amplitudes d'émission $200mV$ (haut), $500mV$ (milieu) et $1000mV$ (bas), avec les spectres issus des simulations à la position $z = 3cm$ et $y = 0cm$ pour différents coefficients non linéaires. Simulations : Rouge : $\beta = 0$. Noir : $\beta = 0.5$. Vert : $\beta = 1$. Tirets rouges : $\beta = 1.5$. Tirets noirs : $\beta = 2$. Tirets verts : $\beta = 2.5$. A gauche : spectres de vitesse. A droite : spectres de vitesse normalisés par l'amplitude du fondamental.

#### 5.2.3.4. Formation des harmoniques

L'analyse des signaux temporels et de leur spectre n'a été réalisée qu'en un point du domaine. Afin d'étendre ces observations à l'ensemble du domaine de calcul, on va maintenant étudier la dynamique du fondamental et du troisième harmonique dans le gel sur l'ensemble de l'axe de propagation $y = 0cm$ et dans le plan $z = 3cm$. Pour les simulations numériques, l'analyse précédente indiquant une valeur probable du paramètre $\beta$ un peu inférieure à 1, le cas $\beta = 0.75$ a été ajouté. Fig. 5.13 présente les résultats correspondant sur l'axe. Le fondamental et le troisième harmonique ont été obtenus en prenant directement l'amplitude des spectres aux fréquences $100Hz$ et $300Hz$. Les spectres étaient calculés par transformée de Fourier rapide, après prolongation des signaux temporels par des zéros afin d'obtenir 2000 points.

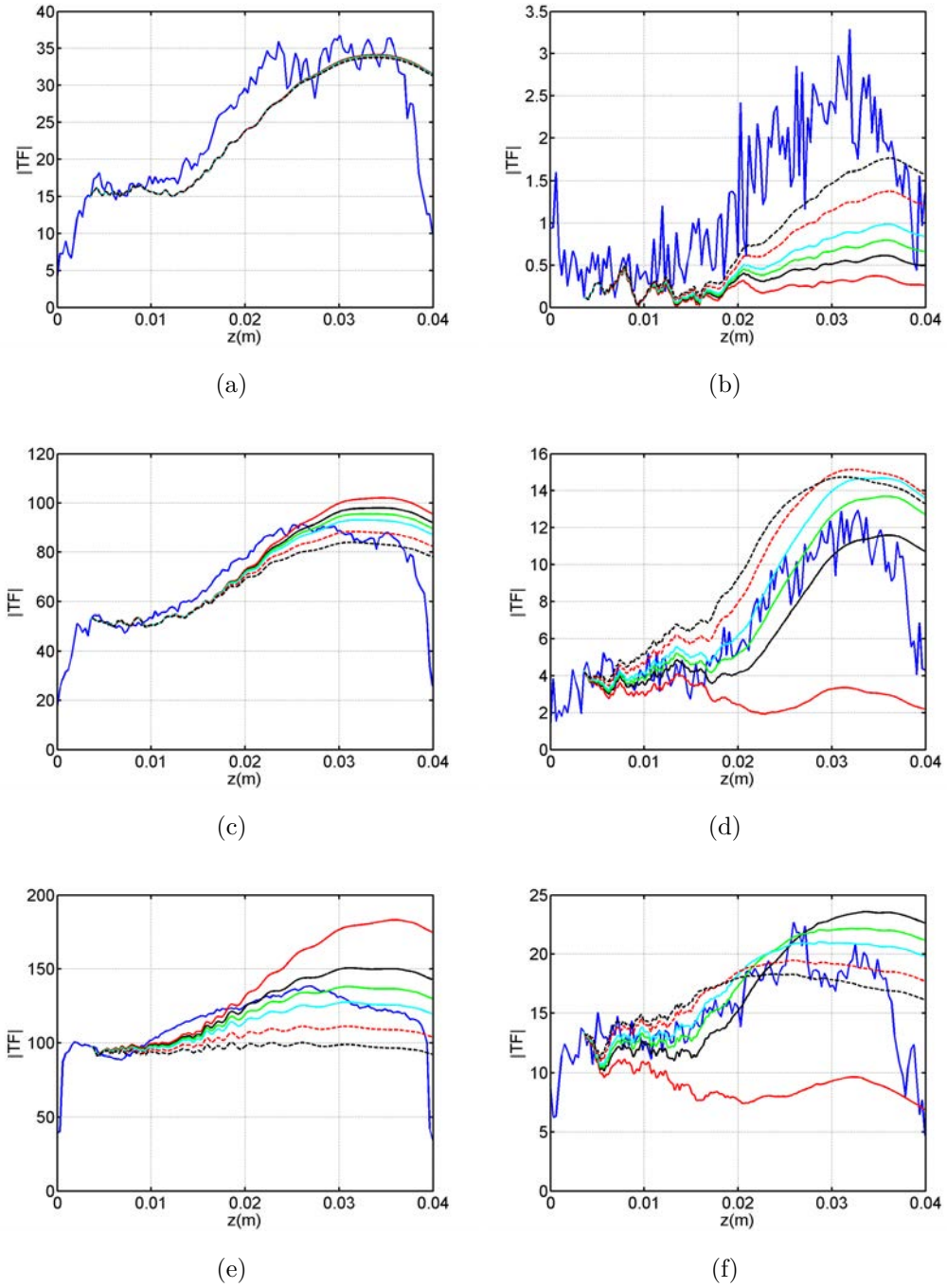



**Figure 5.13.** – Amplitudes du fondamental (gauche) et de l'harmonique 3 (droite) mesurées sur l'axe $y = 0cm$ pour les amplitudes d'émission $200mV$ (haut), $500mV$ (milieu) et $1000mV$ (bas). Bleu : mesures expérimentales. Simulations pour différentes valeurs du paramètre non linéaire. Rouge : $\beta = 0$. Noir : $\beta = 0.5$. Vert : $\beta = 0.75$. Cyan : $\beta = 1$. Tirets rouge : $\beta = 1.5$. Tirets rouge : $\beta = 2$.

L'observation des résultats de l'émission à $200mV$ montre que le fondamental est correctement modélisé. Le comportement mesuré dans le gel se retrouve dans les simulations quel que soit le coefficient $\beta$, puisque le niveau d'excitation est tel que l'on se trouve en régime quasiment linéaire. Le comportement du fondamental est similaire à celui observé pour l'amplitude (cf Fig.5.2(d)) mais le niveau d'incertitude est plus faible, si bien que l'on a un meilleur accord avec les simulations numériques. Celles-ci permettent de localiser le point focal à $z = 3.5cm$ environ. Le niveau du troisième harmonique est comparable à celui du bruit. Les simulations numériques ne reproduisent pas le niveau à cette fréquence, même pour des valeurs du paramètre $\beta$ *a priori* supérieures à la valeur estimée précédemment. Ceci résulte probablement du fait que, dans le plan initialement choisi, le troisième harmonique mesuré et pris en entrée de la simulation étant à un niveau fortement incertain. Une valeur initiale trois fois plus forte resterait compatible avec le niveau à la source compte-tenu du bruit, et conduirait à des valeurs dans la zone focale compatibles avec l'observation.

Pour l'émission à $500mV$, le fondamental commence à s'avérer sensible au paramètre $\beta$ au moins dans la tache focale ($z > 2cm$). Comme précédemment, l'amplitude du fondamental s'avère moins bruitée que l'amplitude maximale. Les simulations du fondamental sont en accord raisonnable avec la mesure, pour les valeurs de $\beta$ autour de 1 avec l'amplification en amont de la tache focale bien décrite. En revanche, la simulation tend à surestimer l'amplitude du fondamental au point focal. Une des raisons pourrait être l'approximation paraxiale qui décrit imparfaitement les ondes issues du bord de la source arrivant sous des angles de $45^o$ environ. L'amplitude du troisième harmonique est, en revanche, bien décrite, notamment par la simulation avec $\beta = 0.75$ qui reproduit parfaitement la croissance de l'harmonique jusqu'à son maximum. Des conclusions similaires peuvent être déduites de l'observation du fondamental et du troisième harmonique pour l'excitation la plus intense ($1000mV$). En régime fortement non linéaire, fondamental et troisième harmonique sont tous deux très sensibles au paramètre non linéaire. L'amplitude du fondamental reproduit à nouveau celle de l'amplitude maximale mais toujours avec un bruit réduit. Les simulations donnent le meilleur accord à nouveau pour $\beta = 0.75$. Dans ce cas, l'accord est tout à fait satisfaisant jusqu'au point focal autour de $z = 2.5cm$ mais moins bon au-delà de $3cm$. Là encore, une explication possible résiderait dans l'approximation paraxiale. Le troisième harmonique est, quant à lui, très bien décrit par la simulation avec $\beta = 0.75$.

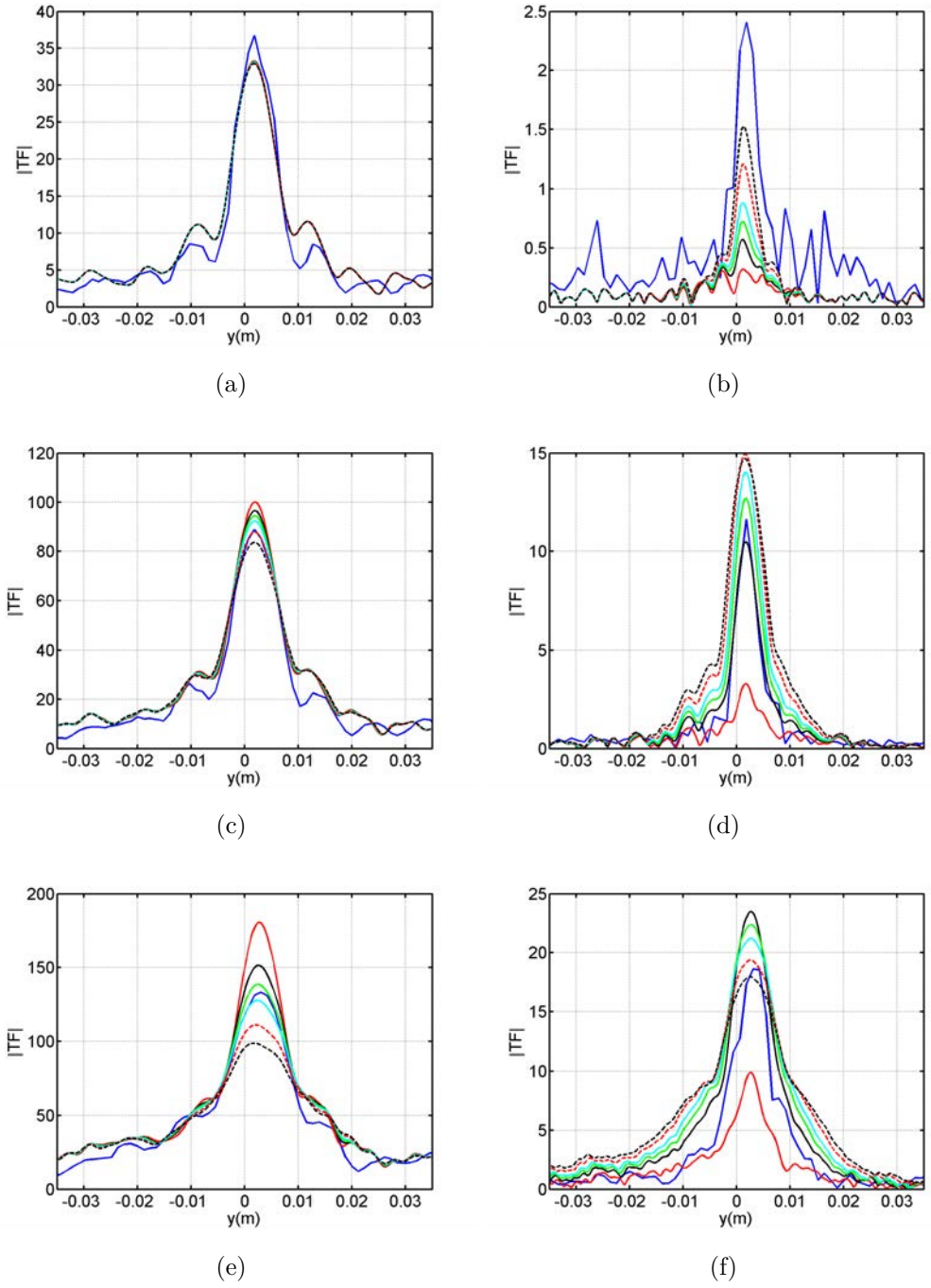



**Figure 5.14.** – Amplitudes du fondamental (gauche) et de l'harmonique 3 (droite) sur l'axe $z = 3cm$ pour les amplitudes d'émission $200mV$ (haut), $500mV$ (milieu) et $1000mV$ (bas). Bleu : mesures expérimentales. Simulations pour différentes valeurs du paramètre non linéaire. Rouge : $\beta = 0$. Noir : $\beta = 0.5$. Vert : $\beta = 0.75$. Cyan : $\beta = 1$. Tirets rouge : $\beta = 1.5$. Tirets rouge : $\beta = 2$.

Fig. 5.14 présente des résultats obtenus de manière similaire à ceux de Fig. 5.13, mais cette fois sur l'axe $z = 3cm$ afin de pouvoir observer les effets non linéaires et la diffraction dans un plan transverse, proche du plan focal. Le cas de l'émission à $200mV$ montre, sur l'axe transverse, comme sur l'axe de propagation, une très faible sensibilité du fondamental avec le coefficient de non-linéarité $\beta$, et une mauvaise évaluation du troisième harmonique. Cependant, ces figures nous permettent d'observer que le modèle permet une modélisation suffisante de la tache focale, avec un bon accord au niveau de la largeur du lobe du fondamental. Les niveaux sont toujours un peu sous-estimés. Le troisième harmonique est mal estimé aussi bien sur l'axe de propagation que sur l'axe transverse. L'augmentation de l'amplitude d'excitation jusqu'à $500mV$ nous permet d'obtenir une bien meilleure évaluation du troisième harmonique sur l'axe transverse. La position choisie semble montrer que la meilleure concordance pour le fondamental est obtenue pour $\beta = 1.5$. En revanche, pour le troisième harmonique, beaucoup plus sensible aux non-linéarités, la meilleure concordance est obtenue pour $\beta$ entre 0.5 et 0.75. La tache focale sur le troisième harmonique est reproduite par les simulations avec des lobes secondaires similaires à ceux mesurés et une même largeur du lobe principal. Les résultats pour l'émission à $1000mV$ montrent cette fois que le fondamental est mieux estimé pour $\beta = 0.75$ mais que le troisième harmonique nécessiterait plutôt de choisir $\beta = 1.5$. Cependant, il faut bien noter que les comparaisons sur l'axe transverse sont plus difficiles à réaliser car dépendant du plan choisi, et plus sensibles au rapport signal sur bruit.

## 5.3. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons réalisé les premières mesures expérimentales de focalisation non linéaire des ondes de cisaillement dans les solides incompressibles. Les expériences menées sont basées sur les méthodes d'imageries des ondes utilisées précédemment pour les ondes planes. Les résultats mettent en évidence trois régimes de propagation. Le premier régime est quasi-linéaire et ne permet pas l'observation d'onde de choc. Les signaux restent principalement centrés sur la fréquence fondamentale. La focalisation est clairement visible avec un facteur d'amplification proche de 2.5, la tache focale est assez étroite, et le niveau du troisième harmonique est faible, à la limite du bruit de mesure. Dans le second régime intermédiaire, les harmoniques se développent principalement autour de la tache focale. Celle-ci

s'élargit, le coefficient d'amplification diminue (légèrement inférieur à 2), le troisième harmonique émerge du bruit, et les signaux temporels dans la tache focale montrent un raidissement visible. La sensibilité au paramètre de non-linéarité est suffisante pour permettre d'estimer celui-ci, ici autour de 0.75.

Le dernier régime est fortement non linéaire et permet l'observation de chocs de cisaillement. Il induit, en conséquence, une forte atténuation non linéaire due au transfert d'énergie vers les harmoniques supérieurs (jusqu'à l'harmonique 7 au moins) et donc une diminution de l'amplification due à la focalisation, avec un facteur d'environ 1.5. La sensibilité au paramètre $\beta$ est importante, le rapport signal sur bruit est nettement meilleur que dans le cas linéaire, ce qui permet de conforter l'estimation à $\beta = 0.75$ résultant du régime intermédiaire. La tache focale continuer de s'élargir, le maximum est peu marqué, et sa position tend à se rapprocher de la source.

La valeur du paramètre de non-linéarité $\beta$ étant désormais estimée à $0.75 \pm 0.25$, les simulations avec cette valeur du paramètre sont comparées en conclusion avec les mesures. La Fig. 5.15 correspond aux cartes de densité volumique d'énergie cinétique, vitesse maximale et accélération simulées pour les trois niveaux d'excitation. Cette figure est à comparer avec Fig. 5.2, identique mais pour la mesure. On y observe clairement la même dynamique en simulation qu'en expérience. La Fig. 5.16 confirme la bonne estimation du paramètre $\beta$ au vu des signatures temporelles au point $z = 3cm$ et $y = 0cm$ avec un excellent accord sur les temps d'arrivée, l'amplitude du signal, son raidissement et l'apparition des ondes de choc pour le niveau le plus intense. La Fig. 5.17 comparant les spectres absolus et relatifs aboutit à la même conclusion pour l'ensemble des harmoniques. L'accord le moins satisfaisant est obtenu pour le régime quasi-linéaire, probablement en raison du rapport signal sur bruit trop faible dans ce cas pour les harmoniques. La distribution spatiale des harmoniques est donnée Fig. 5.18 à comparer avec la même représentation pour les mesures Fig. 5.7. On retrouve là encore un bon accord entre les deux approches.

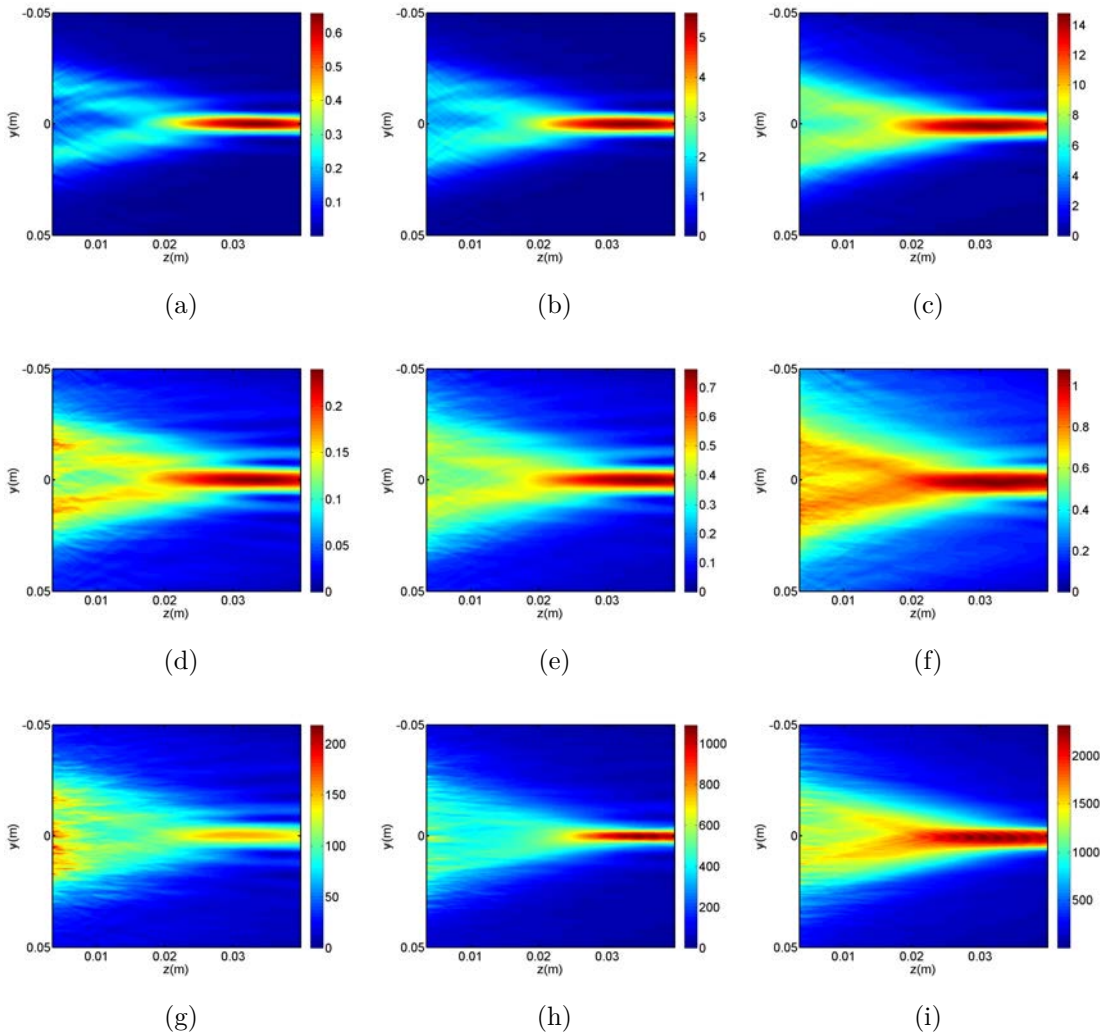



**Figure 5.15.** – Densité volumique d'énergie cinétique en Joule par mètre cube (haut), vitesse maximale en mètre par seconde (milieu) et accélération en mètre par seconde au carré (bas) des ondes en chaque point du domaine de propagation pour les amplitudes d'émission $200mV$ (gauche), $500mV$ (milieu) et $1000mV$ (droite). Simulations avec $\beta = 0.75$.

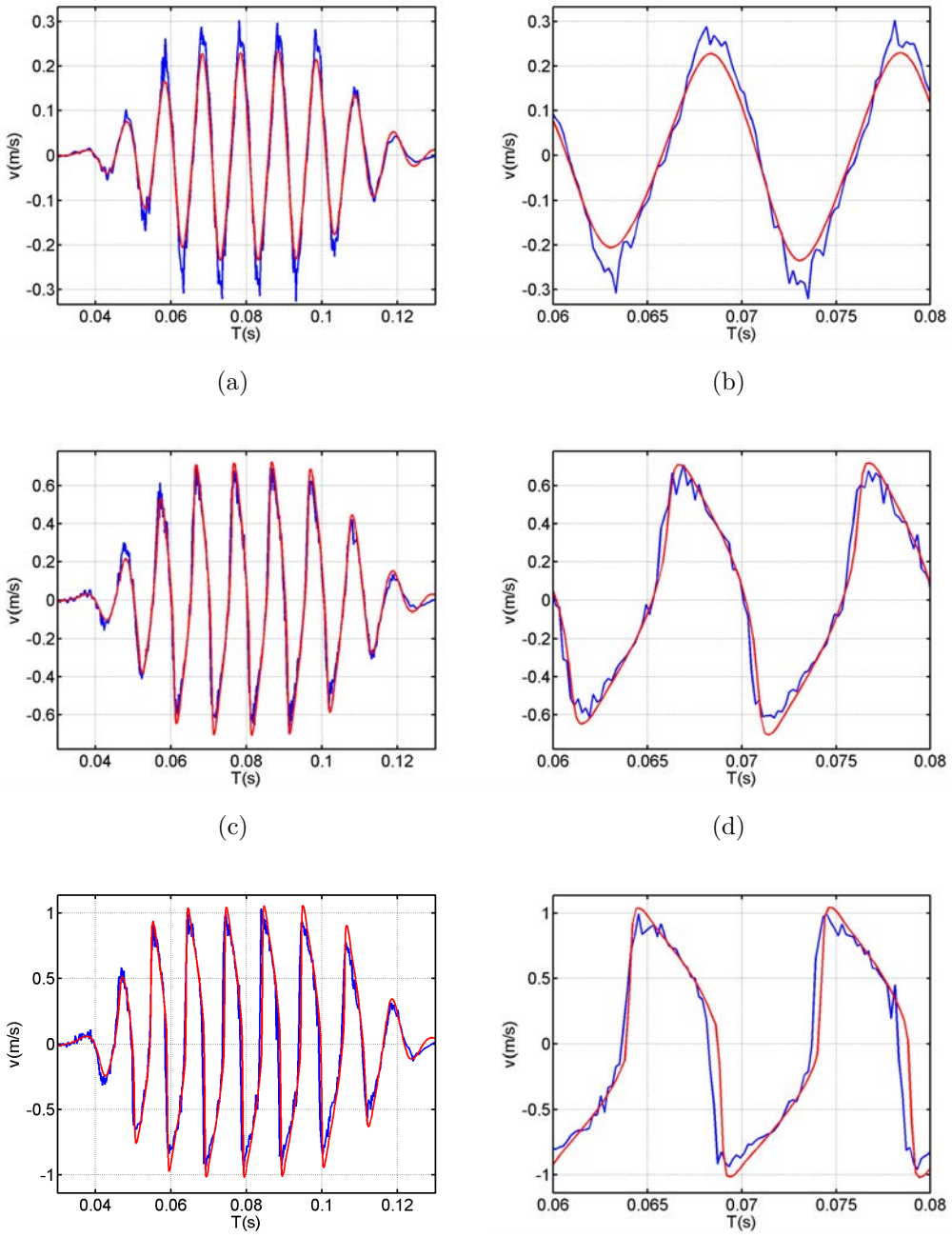



**Figure 5.16.** – Comparaison des vitesses mesurées dans le gel (bleu), pour les amplitudes d'émission $200mV$ (haut), $500mV$ (milieu) et $1000mV$ (bas), avec celles issues des simulations à la position $z = 3cm$ et $y = 0cm$ pour le coefficient non linéaire $\beta = 0.75$ (rouge).

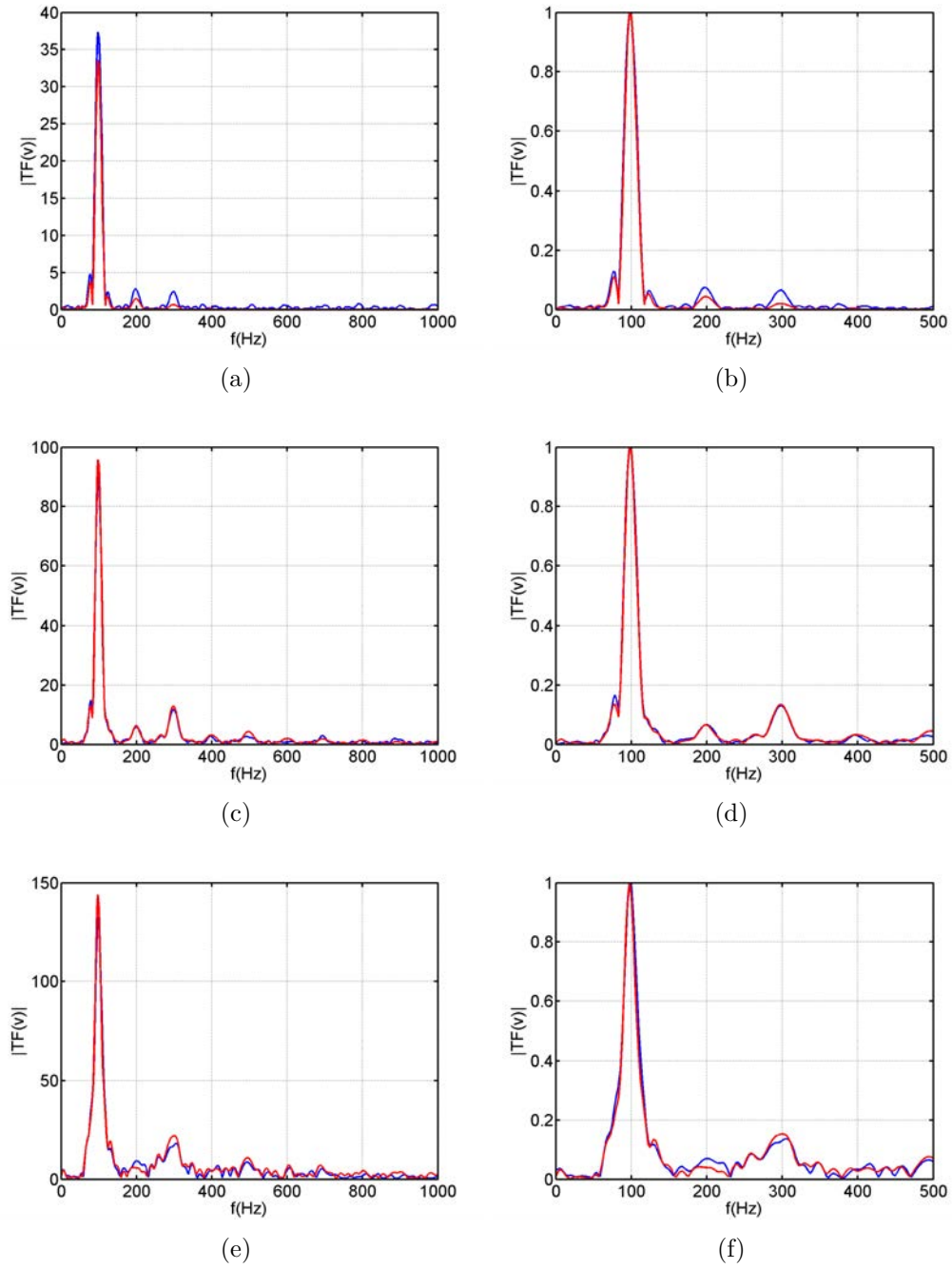
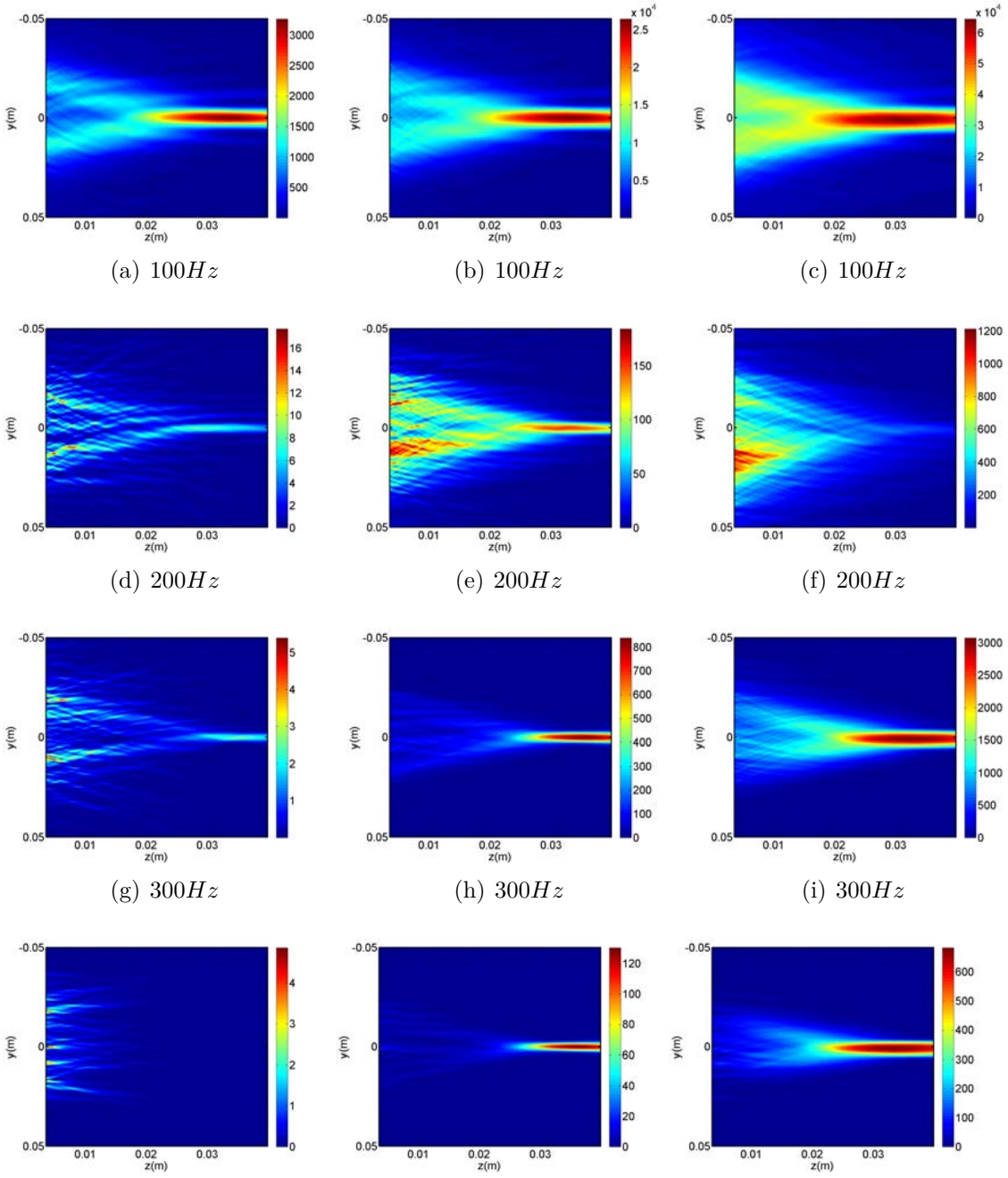



**Figure 5.17.** – Comparaison des spectres de vitesse (à gauche) et des spectres normalisés par l'amplitude du fondamental (à droite), pour les amplitudes d'émission $200mV$ (haut), $500mV$ (milieu) et $1000mV$ (bas), des ondes mesurées (en bleu) dans le gel avec celles issues des simulations à la position $z = 3cm$ et $y = 0cm$ pour le coefficient non linéaire $\beta = 0.75$ (en rouge).




(a) $100Hz$ (b) $100Hz$ (c) $100Hz$

(d) $200Hz$ (e) $200Hz$ (f) $200Hz$

(g) $300Hz$ (h) $300Hz$ (i) $300Hz$

(j) $500Hz$ (k) $500Hz$ (l) $500Hz$

**Figure 5.18.** – Energie des harmoniques $100Hz$, $200Hz$, $300Hz$ et $500Hz$ pour les trois amplitudes $200mV$ (gauche), $500mV$ (milieu) et $1000mV$ (droite) d'émission pour une simulation avec $\beta = 0.75$.

# 6. Conclusion

Les ondes de choc de cisaillement dans les solides quasi-incompressibles sont un type d'onde peu exploré car accessible à la mesure depuis une douzaine d'années seulement. Elles se distinguent des ondes de choc de compression (en fluide ou en solide) par leur non-linéarité cubique au lieu de quadratique. Les faibles vitesses des ondes de cisaillement, de l'ordre du mètre par seconde, permettent notamment d'atteindre des régimes assez fortement non linéaires sur des faibles distances, et de contre-balancer l'absorption relativement importante dans ces milieux. A notre connaissance, ces ondes ont été étudiées presque exclusivement en ondes planes. Or, la focalisation est un phénomène fondamental dans la physique des ondes et ses applications. C'est cette focalisation que l'on s'est attaché à étudier spécifiquement ici, tant du point de vue théorique et numérique, qu'expérimental. L'objectif de cette thèse était de mettre en évidence la focalisation des ondes de choc de cisaillement. Ce travail est en particulier motivé par son application potentielle à des phénomènes de biomécanique. On a ici fait l'hypothèse que les ondes de choc de cisaillement pourraient jouer un rôle dans la formation de certaines lésions cérébrales résultant d'un traumatisme crânien, la géométrie du crâne induisant leur focalisation. Ces considérations nous ont conduit à dimensionner les phénomènes étudiés en conséquence, en termes de fréquence, d'amplitude et de géométrie. La focalisation a ainsi été montrée dans le cas d'un gel simulant un tissu biologique. Les comparaisons avec le modèle théorique et numérique se sont avérées favorables. Pour aller plus loin dans l'analyse de l'hypothèse, il resterait à prouver que ces ondes de choc sont capables d'induire des lésions. Pour ce faire, il conviendrait sans doute de le montrer en premier lieu dans un gel avant des essais sur un crâne et cerveau animal.

Partant de l'hypothèse que le cerveau est un solide élastique quasi-incompressible isotrope, nous avons commencé par établir les équations de propagation non linéaire cubique des ondes de cisaillement dans les solides. Sous les hypothèses d'absorption linéaire et de polarisation linéaire transverse des ondes, une équation des ondes non linéaire cubique a été établie. Dans le cas simplifié de l'approximation paraxiale,

qui néglige le champ rétro-diffusé et suppose des angles de propagation faibles par rapport à l'axe principal, une équation simple de propagation non linéaire cubique à deux dimensions a pu être établie. Celle-ci est similaire à l'équation KZK bien connue pour les ondes de compression, et contient les termes nécessaires pour décrire le plus simplement possible les phénomènes recherchés : propagation, diffraction, non-linéarité et absorption. Le cas uni-dimensionnel non dissipatif possède des solutions analytiques qui permettent de mettre en évidence les spécificités des ondes de choc en cas de non-linéarité cubique. Notons ici que cette première partie de l'étude est essentiellement bibliographique.

Dans un second temps, nous avons développé une solution numérique pour la propagation non linéaire des ondes de cisaillement en approximation paraxiale. Nous nous sommes appuyés sur un schéma à pas fractionné du second ordre dans lequel :

— la diffraction est résolue par différences finies avec un schéma de Crank-Nicolson ;
— l'atténuation est résolue dans le domaine fréquentiel avec des coefficients d'atténuation en loi de puissance de la fréquence ;
— le terme non linéaire cubique est résolu par un schéma de MacDonald et Ambrosiano avec un limiteur de flux "minmod".

La solution numérique est ainsi essentiellement du second ordre. Elle a fait l'objet de plusieurs cas de validation, y compris dans le cas bi-dimensionnel non linéaire où le comportement auto-semblable (loi de similitude de Guiraud) d'une onde de choc focalisée a été vérifié. L'algorithme a ensuite pu être mis en oeuvre pour des propagations avec une géométrie proche de celle d'un crâne. Les paramètres non linéaires du cerveau n'étant alors pas encore connus, le cerveau a été modélisé par un gel d'agar/gélatine homogène et isotrope. Les simulations ont été effectuées pour des amplitudes d'émission inférieures à $2m/s$, ce qui semblait cohérent avec des impacts contondants, en supposant toutefois une transmission parfaite entre la surface du crâne et le cerveau. Ces premières simulations ont fait ressortir les trois régimes pour la focalisation des ondes de cisaillement avec :

— une plage d'amplitude pour laquelle la propagation est linéaire ou faiblement non linéaire ;
— une amplitude limite permettant l'observation d'un choc dans la zone focale uniquement ;
— une saturation de l'amplitude de l'onde diminuant l'amplification géométrique, saturation causée par l'atténuation non linéaire à travers les chocs.

La vérification des conclusions de l'étude théorique et numérique nécessitait la mise en place d'un protocole expérimental. Nous avons commencé par créer un gel de gélatine et de graphite que nous avons caractérisé à partir d'expériences en ondes planes. L'onde de cisaillement résulte d'une plaque plane insérée dans le gel, et excitée par un pot vibrant. Le système d'acquisition repose sur des méthodes d'imagerie échographique ultrasonore ultra-rapide couplées avec des algorithmes de détection de mouvement. Nous avons réalisé des mesures de la dispersion, de l'atténuation et du coefficient non linéaire $\beta$, ces dernières à partir de l'analyse du fondamental et du troisième harmonique. Cependant, la détermination du paramètre non linéaire s'est avérée délicate en raison d'un rapport signal sur bruit insuffisant. Ainsi, le coefficient de non-linéarité $\beta$ a été laissé comme variable paramétrique dans la suite.

Dans le dernier chapitre, nous avons réalisé les premières expériences de focalisation d'onde de choc de cisaillement dans un gel. Nous avons pu, qualitativement et quantitativement, observer ces phénomènes de focalisation pour trois amplitudes d'émission différentes allant d'un régime quasi-linéaire à un régime fortement non linéaire pour lequel les chocs apparaissent en amont de la zone focale. Le régime intermédiaire est tel que les chocs se forment au niveau de la zone focale. Si l'amplitude au point focal croît avec le niveau d'excitation, le coefficient d'amplification, lui, décroît en raison de l'atténuation non linéaire. La solution numérique et les mesures expérimentales ont ensuite été comparées. Une bonne concordance entre la solution numérique et les mesures a été obtenue, et une estimation du coefficient non linéaire du milieu est proposée. En comparaison du cas des ondes planes, l'évaluation de ce paramètre s'avère beaucoup plus précise en raison d'un meilleur rapport signal sur bruit, et d'une sensibilité plus grande en focalisation à la non-linéarité.

Différentes pistes pourraient être proposées pour prolonger cette étude. Une des limitations du présent modèle est l'approximation paraxiale qui limite l'ouverture angulaire à des valeurs inférieures à celles requises aussi bien pour l'expérience que pour l'application biomécanique. Si l'équation des ondes non linéaires a été établie, un logiciel de simulation reste à développer. En ce sens, il conviendrait qu'il prenne également en compte des géométries complexes telles que celles du crâne. A cet effet, on pourrait envisager un développement d'abord à deux dimensions puis à trois. Le modèle théorique, afin de se rapprocher de cas réalistes d'étude, pourrait être généralisé pour inclure des cas de polarisation plus complexe. L'hypothèse de milieu homogène isotrope est probablement peu réaliste dans le cas du cerveau. Les études biomécaniques ont montré que la matière blanche est anisotrope au contraire

de la matière grise. Les non-linéarités s'avéreraient alors quadratiques dans la matière blanche et cubiques dans la matière grise. Développer un modèle numérique en milieu hétérogène apparaît de la sorte comme une étape indispensable. Dans cette perspective, l'influence des interfaces serait à prendre en compte. Le rôle des conversions entre ondes de cisaillement et de compression serait à déterminer. Les effets de polarisation plus complexe pourraient également faire l'objet d'études plus approfondies. Les mécanismes d'absorption font apparaître des phénomènes de relaxation non pris en compte ici. Au contraire, du point de vue théorique, la linéarisation des effets d'absorption s'avère discutable, et la quantification des non-linéarités au niveau de l'absorption reste à mener.

Dans la dernière partie du présent travail, nous avons caractérisé les phénomènes de focalisation non linéaire des ondes de cisaillement dans un cas élastique. Une observation plus fine nécessiterait dans un premier temps, de réduire le rapport signal sur bruit. Pour valider l'hypothèse à l'origine de ce travail selon laquelle les ondes de choc de cisaillement focalisées pourraient être à l'origine de certaines lésions, les observations expérimentales devraient être poursuivies. Dans un premier temps, on pourrait chercher à créer cet endommagement du matériau dans un gel "phantom" en utilisant le même dispositif expérimental que celui mis en oeuvre ici, mais avec des niveaux d'excitation plus élevés. En cas de réponse positive, des expériences *in vitro* sur des tissus biologiques devraient être menées. Le cas de la transmission par la boîte crânienne devrait faire l'objet d'expériences spécifiques sur des modèles animaux. Mais, pour commencer à étudier le potentiel destructeur des ondes de cisaillement, il faudrait peut-être commencer par augmenter les amplitudes émises jusqu'à atteindre une possible lésion du gel ; et cas de résultats concluants, recommencer ces expériences sur des tissus biologiques.

# A. Validation du schéma numérique et solution de Riemann

Cette étude se base sur la solution au problème de Riemann pour l'équation de Burgers modifiée Eq.(2.112) décrite par :

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\beta}{3}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial v}{\partial \tau}\right)^3 \tag{A.1}$$

avec la condition initiale :

$$v(0,\tau) = \begin{cases} v_r & \tau > 0 \\ v_l & \tau < 0. \end{cases} \tag{A.2}$$

Les solutions du problème de Riemann sont données par les Eq.(2.152) et Eq.(2.153) :

$$v(z,\tau) = \begin{cases} v_r & \frac{\tau}{z} > s \\ v_l & \frac{\tau}{z} < s \end{cases} \tag{A.3}$$

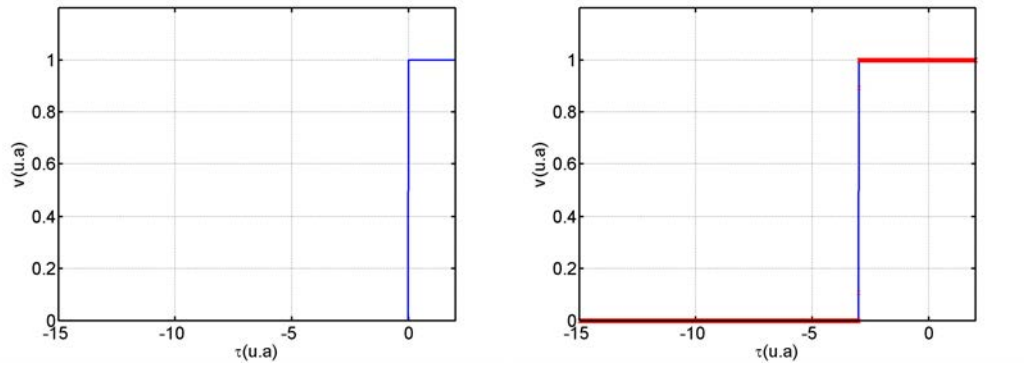
et

$$v(z,\tau) = \begin{cases} v_r & \frac{\tau}{z} > \lambda(v_r) \\ \sqrt{-\frac{\tau}{\beta z}} & \lambda(v_l) < \frac{\tau}{z} < \lambda(v_r) \\ v_l & \frac{\tau}{z} < \lambda(v_l). \end{cases} \tag{A.4}$$

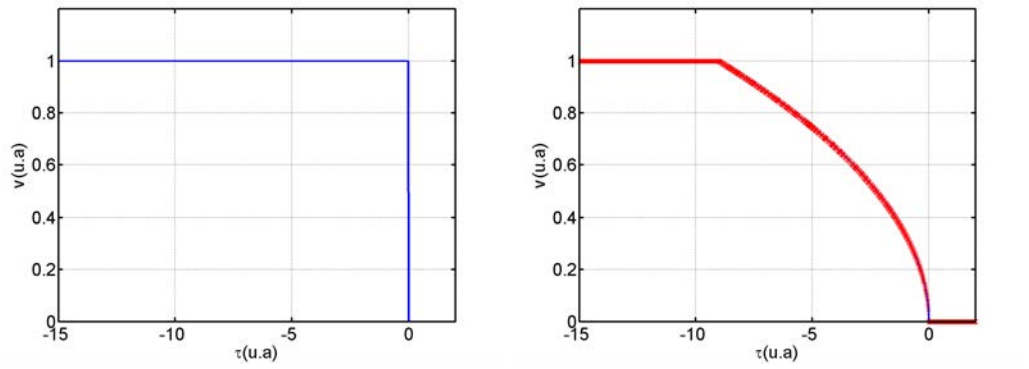
où $s = -\frac{\beta}{3}\frac{[v^3]}{[v]}$ et $\lambda(v) = -\beta v^2$. La solution analytique de ce problème permet de valider les algorithmes numériques, ici le schéma de MacDonald-Ambrosiano modifié avec un limiteur de flux "minmod". La validation est ici effectuée avec les deux cas admissibles pour le problème de Riemann. Pour les simulations, nous choisissons un

maillage temporel $\Delta\tau = 0.01$ et un coefficient non linéaire $\beta = 3$. Les simulations doivent respecter le critère de stabilité donné par Eq.(3.22). Le maillage spatial est ainsi entièrement déterminé en prenant le maximum admissible 1 de la constante CFL, soit $\Delta z = 3.3 \times 10^{-3}$.

Les résultats des simulations sont présentés pour $(v_l = 0, v_r = 1)$ sur Fig.A.1(a)-A.1(b) et $(v_l = 1, v_r = 0)$ sur Fig.A.1(c)-A.1(d). Ces deux cas permettent de tester ondes de chocs et ondes simples. On peut noter que, dans les deux cas, la solution numérique reproduit parfaitement la solution analytique. Le seul écart observé est, en cas de choc, le léger étalement de celui-ci pour la solution numérique à cause des effets de dispersion et dissipation numériques.




(a) $z = 0$ (b) $z = 3$




(c) $z = 0$ (d) $z = 3$

**Figure A.1.** – Comparaisons entre la solution analytique (ligne bleue) et la solution numérique (croix rouge) du problème de Riemann

# Bibliographie


[1] K.B. Arbogast and S.S. Margulies. Material characterization of the brainstem from oscillatory shear tests. *Journal of biomechanics*, 31(9) :801–807, 1998.

[2] K.B. Arbogast, D.F. Meaney, and L.E. Thibault. Biomechanical characterization of the constitutive relationship for the brainstem. Technical report, SAE Technical Paper, 1997.

[3] Alexandra Athanasiou, Anne Tardivon, Mickael Tanter, Brigitte Sigal-Zafrani, Jeremy Bercoff, Thomas Deffieux, Jean-Luc Gennisson, Mathias Fink, and Sylvia Neuenschwander. Breast lesions : quantitative elastography with supersonic shear imaging—preliminary results 1. *Radiology*, 256(1) :297–303, 2010.

[4] M.A. Averkiou and M.F. Hamilton. Nonlinear distortion of short pulses radiated by plane and focused circular pistons. *J. Acoust. Soc. Am.*, 102(5) :2539–2548, 1997.

[5] PV Bayly, TS Cohen, EP Leister, D Ajo, EC Leuthardt, and GM Genin. Deformation of the human brain induced by mild acceleration. *Journal of neurotrauma*, 22(8) :845–856, 2005.

[6] J. Bercoff. *L'imagerie échographique ultrarapide et son application à l'étude de la viscoelasticité du corps humain.* PhD thesis, ESPCI ParisTECH, 2004.

[7] Jeremy Bercoff, Gabriel Montaldo, Thanasis Loupas, David Savery, Fabien Mézière, Mathias Fink, and Mickael Tanter. Ultrafast compound doppler imaging : providing full blood flow characterization. *Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, IEEE Transactions on*, 58(1) :134–147, 2011.

[8] Jérémy Bercoff, Mickäel Tanter, and Mathias Fink. Supersonic shear imaging : a new technique for soft tissue elasticity mapping. *Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, IEEE Transactions on*, 51(4) :396–409, 2004.

[9] M. Bernal, M. Couade, F. Chamming's, J. Bercoff, J-L. Genisson, and M. Tanter. Assessment of the nonlinear elastic properties of soft tissues *in vivo* by

using supersonic shear wave imaging techniques. In *IEEE International Ultrasound Symposium*, page 341, 2014.

[10] Michael V Berry. Waves and thom's theorem. *Advances in Physics*, 25(1) :1–26, 1976.

[11] L.E. Bilston, Z. Liu, and N. Phan-Thien. Linear viscoelastic properties of bovine brain tissue in shear. *Biorheology*, 34(6) :377–395, 1997.

[12] Emilie Blanc, Guillaume Chiavassa, and Bruno Lombard. Biot-jkd model : simulation of 1d transient poroelastic waves with fractional derivatives. *Journal of Computational Physics*, 237 :1–20, 2013.

[13] D.R. Bland. *Nonlinear dynamic elasticity*. Blaisdell Waltham, 1969.

[14] Reinhard Blumrich, François Coulouvrat, and Dietrich Heimann. Variability of focused sonic booms from accelerating supersonic aircraft in consideration of meteorological effects. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 118(2) :696–706, 2005.

[15] J.P. Boris and D.L. Book. Flux-corrected transport. I. SHASTA, A fluid transport algorithm that works. *J. Comput. Phys.*, 11(1) :38–69, 1973.

[16] D.W.A. Brands, G.W.M. Peters, and P.H.M. Bovendeerd. Design and numerical implementation of a 3-d non linear viscoelastic constitutive model for brain tissue during impact. *J. of Biomech.*, 37 :127–134, 2004.

[17] K. Brugger. Thermodynamic definition of higher order elastic coefficients. *Physical Review*, 133(6A) :A1611, 1964.

[18] S. Catheline, J-L. Gennisson, G. Delon, M. Fink, R. Sinkus, S. Abouelkaram, and J. Culioli. Measurement of viscoelastic properties of homogeneous soft solid using transient elastography : An inverse problem approach. *J. Acoust. Soc. Am.*, 116(6) :3734–3741, 2004.

[19] S. Catheline, J-L. Gennisson, and M. Fink. Measurement of elastic nonlinearity with transient elastography. *J. Acoust. Soc. Am.*, 114 :3087–3091, 2003.

[20] S. Catheline, J-L. Gennisson, M. Tanter, and M. Fink. Observation of shock transverse waves in elastic media. *Phys. Rev. Lett.*, 91(16) :164301, 2003.

[21] S. Chatelin, A. Constantinesco, and R. Willinger. Fifty years of brain tissue mechanical testing : from in vitro to in vivo investigations. *Biorheology*, 47(5) :255–276, 2010.

[22] S. Chatelin, C. Deck, F. Renard, S. Kremer, C. Heinrich, J-P. Armspach, and R. Willinger. Computation of axonal elongation in head trauma finite element simulation. *Journal of the mechanical behavior of biomedical materials*, 4(8) :1905–1919, 2011.

[23] CH Chaussy, Walter Brendel, and E Schmiedt. Extracorporeally induced destruction of kidney stones by shock waves. *The Lancet*, 316(8207) :1265–1268, 1980.

[24] B.P. Chinn, D. Doyle, D. Otte, and E. Schuller. Motorcyclists head injuries : mechanisms identified from accident reconstruction and helmet damage replication. In *Proceedings of the International Research Council on the Biomechanics of Injury conference*, volume 27, pages 53–71. International Research Council on Biomechanics of Injury, 1999.

[25] R.S.B. Clark and P. Kochanek. *Brain injury.* Molecular and cellular biology of critical care medicine. Kluwer Academic Publishers, 2001.

[26] Erik H Clayton, Guy M Genin, and Philip V Bayly. Transmission, attenuation and reflection of shear waves in the human brain. *Journal of The Royal Society Interface*, 9(76) :2899–2910, 2012.

[27] R.J.H. Cloots, J.A.W Van Dommelen, S. Kleiven, and M.G.D. Geers. Multi-scale mechanics of traumatic brain injury : predicting axonal strains from head loads. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, 12(1) :137–150, 2013.

[28] R.J.H. Cloots, J.A.W Van Dommelen, T. Nyberg, S. Kleiven, and M.G.D. Gers. Micromechanics of diffuse axonal injury : influence of axonal orientation and anisotropy. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, 10(3) :413–422, 2011.

[29] F. Cohadon, J-P. Castel, E. Richer, J-M. Mazaux, and H. Loiseau. *Les traumatisés crâniens : de l'accident à la réinsertion.* Ed. Arnette. 2°édition. France, 2002.

[30] John D Corrigan, Anbesaw W Selassie, and Jean A Langlois Orman. The epidemiology of traumatic brain injury. *The Journal of head trauma rehabilitation*, 25(2) :72–80, 2010.

[31] F. Coulouvrat. Continuous field radiated by a geometrically focused transducer : Numerical investigation and comparison with an approximate model. *J. Acoust. Soc. Am.*, 94(3) :1663–1675, 1993.

[32] F. Coulouvrat. Focusing of weak acoustic shock waves at a caustic cusp. *Wave Motion*, 32(3) :233–245, 2000.

[33] F. Coulouvrat. A quasi-analytical shock solution for general nonlinear progressive waves. *Wave Motion*, 46(2) :97–107, 2009.

[34] F. Dagrau, M. Rénier, R. Marchiano, and F. Coulouvrat. Acoustic shock wave propagation in a heterogenous medium : A numerical simulation beyond the parabolic equation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 130(1) :20–32, 2011.

[35] K.K. Darvish and J.R. Crandall. Nonlinear viscoelastic effects in oscillatory shear deformation of brain tissue. *Medical engineering & physics*, 23(9) :633–645, 2001.

[36] M. Destrade and R.W. Ogden. On the third-and fourth-order constants of incompressible isotropic elasticity. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 128(6) :3334–3343, 2010.

[37] M. Destrade, G. Saccomandi, and M. Vianello. Proper formulation of viscous dissipation for nonlinear waves in solids. *J. Acoust. Soc. Am.*, 133(3) :1255–1259, 2013.

[38] B.R. Donnelly and J. Medige. Shear properties of human brain tissue. *Journal of biomechanical engineering*, 119(4) :423–432, 1997.

[39] F. A. Duck. *Physical properties of tissues : a comprehensive reference book*. Academic press, 2013.

[40] A. C. Eringen and E. S. Suhubi. *Elastodynamics*. Academic, New York, 1974.

[41] M.S. Estes and J.H. McElhaney. Response of brain tissue to compressive loading. In *Mechanical Engineering*, volume 92, pages 58–62. ASME, 1970.

[42] G.T. Fallenstein, V.D. Hulce, and J.W. Melvin. Dynamic mechanical properties of human brain tissue. *Journal of Biomechanics*, 2(3) :217–226, 1969.

[43] Nicholas Fang, Dongjuan Xi, Jianyi Xu, Muralidhar Ambati, Werayut Srituravanich, Cheng Sun, and Xiang Zhang. Ultrasonic metamaterials with negative modulus. *Nature materials*, 5(6) :452–456, 2006.

[44] Mathias Fink. Time reversal of ultrasonic fields. i. basic principles. *Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, IEEE Transactions on*, 39(5) :555–566, 1992.

[45] C.W. Gadd. Use of a weighted-impulse criterion for estimating injury hazard. Technical report, SAE Technical Paper, 1966.

[46] A. Gefen and S.S. Margulies. Are in vivo and in situ brain tissues mechanically similar ? *Journal of biomechanics*, 37(9) :1339–1352, 2004.

[47] T.A. Gennarelli. Mechanisms of brain injury. *The Journal of Emergency Medicine*, 11 :5–11, 1993.

[48] J-L. Gennisson. *Le palpeur acoustique : un nouvel outils d'investigation des tissus biologiques*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2003.

[49] J-L. Gennisson, M. Rénier, S. Catheline, C. Barrière, J. Bercoff, M. Tanter, and M. Fink. Acoustoelasticity in soft solids : Assessment of the nonlinear shear modulus with the acoustic radiation force. *J. Acoust. Soc. Am.*, 122(6) :3211–3219, 2007.

[50] P. Germain. *Mécanique*, volume 1. Ellipses Marketing, 1986.

[51] P. Germain and P. Muller. *Introduction à la mécanique des milieux continus*. Masson, 1980.

[52] Alain Goriely, Marc GD Geers, Gerhard A Holzapfel, Jayaratnam Jayamohan, Antoine Jérusalem, Sivabal Sivaloganathan, Waney Squier, Johannes AW van Dommelen, Sarah Waters, and Ellen Kuhl. Mechanics of the brain : perspectives, challenges, and opportunities. *Biomechanics and modeling in mechanobiology*, pages 1–35, 2015.

[53] M.A. Green, L.E. Bilston, and R. Sinkus. In vivo brain viscoelastic properties measured by magnetic resonance elastography. *NMR in Biomedicine*, 21(7) :755–764, 2008.

[54] R.M. Greenwald, J.T. Gwin, J.J. Chu, and J.J. Crisco. Head impact severity measures for evaluating mild traumatic brain injury risk exposure. *Neurosurgery*, 62(4) :789–798, 2008.

[55] J-P. Guiraud. Acoustique géométrique, bruit balistique des avions supersoniques et focalisation. *J. Mec.*, 4 :215–267, 1965.

[56] Kevin M Guskiewicz, Jason P Mihalik, Viswanathan Shankar, Stephen W Marshall, Dean H Crowell, Scott M Oliaro, Mario F Ciocca, and Daniel N Hooker. Measurement of head impacts in collegiate football players : relationship between head impact biomechanics and acute clinical outcome after concussion. *Neurosurgery*, 61(6) :1244–1253, 2007.

[57] Kevin M Guskiewicz, Nancy L Weaver, Darin A Padua, and William E Garrett. Epidemiology of concussion in collegiate and high school football players. *The American Journal of Sports Medicine*, 28(5) :643–650, 2000.

[58] Timothy J Hall, Mehmet Bilgen, Michael F Insana, Thomas Krouskop, et al. Phantom materials for elastography. *Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, IEEE Transactions on*, 44(6) :1355–1365, 1997.

[59] M.F. Hamilton, David T. Blackstock, et al. *Nonlinear acoustics*. Academic press San Diego, 1998.

[60] M.F. Hamilton, Y.A. Ilinskii, and E.A. Zabolotskaya. Separation of compressibility and shear deformation in the elastic energy density (L). *J. Acoust. Soc. Am.*, 116 :41–44, 2004.

[61] Warren N Hardy, Craig D Foster, Matthew J Mason, King H Yang, Albert I King, and Scott Tashman. Investigation of head injury mechanisms using neutral density technology and high-speed biplanar x-ray. Technical report, SAE Technical Paper, 2001.

[62] Fredric J Harris. On the use of windows for harmonic analysis with the discrete fourier transform. *Proceedings of the IEEE*, 66(1) :51–83, 1978.

[63] T.S. Hart and M.F. Hamilton. Nonlinear effects in focused sound beams. *J. Acoust. Soc. Am.*, 84(4) :1488–1496, 1988.

[64] Sverre Holm and Sven Peter Näsholm. Comparison of fractional wave equations for power law attenuation in ultrasound and elastography. *Ultrasound in medicine & biology*, 40(4) :695–703, 2014.

[65] Sverre Holm and Ralph Sinkus. A unifying fractional wave equation for compressional and shear waves. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 127(1) :542–548, 2010.

[66] R.R. Hosey and Y.K. Liu. *Finite Elements in Biomechanics*, chapter A homeomorphic finite element model of the human head and neck, pages 379–401. John Wiley & Sons, New York, 1982.

[67] M. Hrapko, J.A.W. Van Dommelen, G.W.M Peters, and J.S.H.M. Wismans. The mechanical behaviour of brain tissue : large strain response and constitutive modeling. *Biorheology*, 43(5) :623–636, 2006.

[68] X. Jacob. *Applications de l'interaction d'ondes élastiques à la mesure des propriétés non-linéaires des matériaux et à la caractérisation de champs de pression*. PhD thesis, Université Paris 7, 2005.

[69] X. Jacob, S. Catheline, J-L. Genisson, C. Barrière, D. Royer, and M. Fink. Nonlinear shear wave interaction in soft solids. *J. Acoust. Soc. Am.*, 122(4) :1917–1926, 2007.

[70] Jørgen Arendt Jensen. *Estimation of blood velocities using ultrasound : a signal processing approach*. Cambridge University Press, 1996.

[71] Y. Jiang, G. Li, L-X. Qian, S. Liang, M. Destrade, and Y. Cao. Measuring the linear and nonlinear elastic properties of brain tissue with shear waves and inverse analysis. *Biomechanics and modeling in mechanobiology*, 14(5) :1119–11128, 2015.

[72] X. Jin, F. Zhu, H. Mao, M. Shen, and K.H. Yang. A comprehensive experimental study on material properties of human brain tissue. *Journal of biomechanics*, 46(16) :2795–2801, 2013.

[73] V.A. Khokhlova, A.E Ponomarev, M.A. Averkiou, and L.A. Crum. Nonlinear pulsed ultrasound beams radiated by rectangular focused diagnotic transducers. *Acoustical Physics*, 52(4) :481–489, 2006.

[74] V.P. Kuznetsov. Equations of nonlinear acoustics. *Sov. Phys. Acoust.*, 16(4) :467–470, 1971.

[75] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Course of Theoretical Physics Vol 7 : Theory and Elasticity*. Pergamon Press, 1959.

[76] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. Theory of elasticity, vol. 7. *Course of Theoretical Physics*, 3, 1986.

[77] RW Lardner. Nonlinear effects on transverse shear waves in an elastic medium. *Journal of elasticity*, 15(1) :53–57, 1985.

[78] Y-S. Lee and M.F. Hamilton. Time-domain modeling of pulsed finite-amplitude sound beams. *J. Acoust. Soc. Am.*, 97(2) :906–917, 1995.

[79] I.P. Lee-Bapty and D.G. Crighton. Nonlinear wave motion governed by the modified burgers equation. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 323(1570) :173–209, 1987.

[80] R. J. LeVeque. *Finite volume methods for hyberpolic problems*. Cambridge University Press, 2002.

[81] A. Loubeau and F. Coulouvrat. Effects of meteoroligical variability on sonic boom propagation from hypersonic aircraft. *AIAA Journal*, 47(11) :2632–2641, 2009.

[82] A.I.R. Maas, N. Stocchetti, and R. Bullock. Moderate and severe traumatic brain injury in adults. *The Lancet Neurology*, 7(8) :728–741, 2008.

[83] R. Marchiano, F. Coulouvrat, and R. Grenon. Numerical simulation of shock wave focusing at fold caustics, with application to sonic boom. *J. Acoust. Soc. Am.*, 114(4) :1758–1771, 2003.

[84] R. Marchiano, F. Coulouvrat, and J-L. Thomas. Nonlinear focusing of acoustic shock waves at a caustic cusp. *J. Acoust. Soc. Am.*, 117(2) :566–577, 2005.

[85] R. Marchiano, J-L. Thomas, and F. Coulouvrat. Experiemental simulation of supersonic superboom in a water tank : Nonlinear focusing of weak shock waves at a fold caustic. *Phys. Rev. Lett.*, 91(18) :1843901, 2003.

[86] S.S. Margulies, L.E. Thibault, and T.A. Gennarelli. Physical model simulations of brain injury in the primate. *Journal of biomechanics*, 23(8) :823–836, 1990.

[87] D. Marjoux. *Mécanismes de lésion de la tête humaine en situation de choc.* PhD thesis, Strasbourg 1, 2006.

[88] P.L. Marston. Geometrical and catastrophe optics methods in scattering. *Physical Acoustics*, 21 :1–234, 1992.

[89] B.E. McDonald and J. Ambrosiano. High-order upwind flux correction methods for hyperbolic conservation laws. *J. Comp. Phys.*, 56(3) :448–460, 1984.

[90] David F Meaney, Barclay Morrison, and Cameron Dale Bass. The mechanics of traumatic brain injury : a review of what we know and what we need to know for reducing its societal burden. *Journal of biomechanical engineering*, 136(2) :021008, 2014.

[91] D.F. Meaney, D.H. Smith, D.I. Shreiber, A.C. Bain, R.T Miller, D.T. Ross, and T.A. Gennarelli. Biomechanical analysis of experimental diffuse axonal injury. *Journal of neurotrauma*, 12(4) :689–694, 1995.

[92] K. Mendis. *Finite element modeling of the brain to establish diffuse axonal injury criteria.* PhD thesis, The Ohio State University, 1992.

[93] K. Miller, K. Chinzei, G. Orssengo, and P. Bednarz. Mechanical properties of brain tissue in-vivo : experiment and computer simulation. *Journal of biomechanics*, 33(11) :1369–1376, 2000.

[94] D.F. Moore, A. Jérusalem, M. Nyein, L. Noels, M.S. Jaffee, and R.A. Radovitzky. Computational biology—modeling of primary blast effects on the central nervous system. *Neuroimage*, 47 :T10–T20, 2009.

[95] E.E. Moore, D.V. Feliciano, and K.L. Mattox. *Trauma*. Number v. 777 in Trauma. McGraw-Hill, Medical Pub. Division, 2004.

[96] B. Morrison III, K. Saatman, D.F. Meaney, and T.K. McIntosh. In vitro central nervous system models of mechanically induced trauma : a review. *Journal of neurotrauma*, 15(11) :911–928, 1998.

[97] F.D. Murnaghan. Finite deformations of an elastic solid. *American Journal of Mathematics*, pages 235–260, 1937.

[98] F.D. Murnaghan. *Finite deformation of an elastic solid*. Dover Publications Inc., 1951.

[99] R. Muthupillai, D.J. Lomas, P.J. Rossman, J.F. Greenleaf, A. Manduca, and R.L. Ehman. Magnetic resonance elastography by direct visualization of propagating acoustic strain waves. *Science*, 269(5232) :1854–1857, 1995.

[100] K. Naugolnykh and L. Ostrovsky. *Nonlinear wave processes in acoustics*. Cambridge University Press, 1998.

[101] NHTSA. *Occupant car crash protection- head injury criterion*, chapter 6.2 of FMVSS 571.208. NHTSA, Washington, 1972.

[102] X. Ning, Q. Zhu, Y. Lanir, and S.S. Margulies. A transversely isotropic viscoelastic constitutive equation for brainstem undergoing finite deformation. *Journal of Biomechanical Engineering*, 128(6) :925–933, 2006.

[103] A.N. Norris. *Nonlinear Acoustics*, chapter Finite-Amplitude Waves in Solids, pages 263–277. Academic Press, San Diego, 1998.

[104] M. Nyein, A. Jerusalem, R. Radovitzky, D. Moore, and L. Noels. Modeling blast-related brain injury. Technical report, DTIC Document, 2008.

[105] US Department of Health, Human Services, et al. *ICD 9 CM. The International Classification of Diseases. 9. Rev : Clinical Modification. ; Vol. 1 : Diseases : Tabular List. ; Vol. 2 : Diseases : Alphabetic Index. ; Vol. 3 : Procedures : Tabular List and Alphabetic Index*. US Government Printing Office, 1980.

[106] R.W. Ogden. On isotropic tensors and elastic moduli. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 75, pages 427–436. Cambridge Univ Press, 1974.

[107] HoT O'Neil. Theory of focusing radiators. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 21(5) :516–526, 1949.

[108] T. Pearcey. Xxxi. the structure of an electromagnetic field in the neighbourhood of a cusp of a caustic. *Philosophical Magazine*, 37(268) :311–317, 1946.

[109] A Penttinen and M Luukkala. Diffraction losses associated with curved ultrasonic transducers. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 10(5) :665, 1977.

[110] G. Pinton, F. Coulouvrat, J-L. Gennisson, and M. Tanter. Nonlinear reflection of shock shear waves in soft elastic media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 127(2) :683–691, 2010.

[111] G. Pinton, J-L Genisson, M. Tanter, and F. Coulouvrat. Adaptive motion estimation of shear shock waves in soft solids and tissue with ultrasound. *Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, IEEE Transactions on*, 61(2014) :1489–1503, 2014.

[112] G.F. Pinton, J.J. Dahl, and G.E. Trahey. Rapid tracking of small displacements with ultrasound. *Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, IEEE Transactions on*, 53(6) :1103–1117, 2006.

[113] G.F. Pinton and G.E. Trahey. Continuous delay estimation with polynomial splines. *Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, IEEE Transactions on*, 53(11) :2026–2035, 2006.

[114] M.T. Prange and S.S Margulies. Regional, directional and age-dependent properties of the brain undergoing large deformation. *Journal of biomechanical engineering*, 124(2) :244–252, 2002.

[115] M.T. Prange, D.F. Meaney, and S.S Margulies. Defining brain mechanical properties : effects of region, direction, and species. *Stapp car crash journal*, 44 :205–213, 2000.

[116] D. Raymond, C. Van Ee, G. Crawford, and C. Bir. Tolerance of the skull to blunt ballistic temporo-parietal impact. *J. of Biomech.*, 42(15) :2479–2485, 2009.

[117] M. Rénier, J.-L. Gennisson, C. Barrière, D. Royer, et al. Fourth-order shear elastic constant assessment in quasi-incompressible soft solids. *Appl. Phys. Lett.*, 93(10) :101912–101912, 2008.

[118] Rebecca W Rimel, Bruno Giordani, Jeffrey T Barth, Thomas J Boll, and John A Jane. Disability caused by minor head injury. *Neurosurgery*, 9(3) :221–228, 1981.

[119] D. Royer and E. Dieulesaint. *Ondes élastiques dans les solides, T.1 : Propagation libre et guidée*. Masson, 1996.

[120] I. Sack, B. Beierbach, U. Hamhaber, D. Klatt, and J. Braun. Non-invasive measurement of brain viscoelasticity using magnetic resonance elastography. *NMR in Biomedicine*, 21(3) :265–271, 2008.

[121] L. Sandrin, M. Tanter, S. Catheline, and M. Fink. Shear modulus imaging with 2-d transient elastography. *Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, IEEE Transactions on*, 49(4) :426–435, 2002.

[122] David P Shattuck, Marc D Weinshenker, Stephen W Smith, and Olaf T von Ramm. Explososcan : A parallel processing technique for high speed ultrasound imaging with linear phased arrays. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 75(4) :1273–1282, 1984.

[123] J. K. Shridharani, G. W. Wood, M. B. Panzer, B.P. Capehart, M. K. Nyein, R. A. Radovitzky, and C. R. Bass. Porcine head response to blast. *Frontiers in Neurology*, 3 :70(1–12), 2012.

[124] L.Z. Shuck and S.H. Advani. Rheological response of human brain tissue in shear. *Journal of Fluids Engineering*, 94(4) :905–911, 1972.

[125] T.A. Shugar. *A finite element head injury model*. Department of Transportation, National Highway Traffic Safety Administration, 1977.

[126] G. Strang. On the construction and comparison of difference schemes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 5(3) :506–517, 1968.

[127] F. Tagliaferri, C. Compagnone, M. Korsic, F. Servadei, and J. Kraus. A systematic review of brain unjury epidemiology in Europe. *Acta Neurochirurgica*, 248(3) :255–268, 2006.

[128] Mickael Tanter, Jeremy Bercoff, Alexandra Athanasiou, Thomas Deffieux, Jean-Luc Gennisson, Gabriel Montaldo, Marie Muller, Anne Tardivon, and Mathias Fink. Quantitative assessment of breast lesion viscoelasticity : initial clinical results using supersonic shear imaging. *Ultrasound in medicine & biology*, 34(9) :1373–1386, 2008.

[129] Mickaël Tanter, Jeremy Bercoff, Lauremt Sandrin, and Mathias Fink. Ultrafast compound imaging for 2-d motion vector estimation : application to transient elastography. *Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, IEEE Transactions on*, 49(10) :1363–1374, 2002.

[130] P. A. Taylor and C.C. Ford. Simulation of blast-induced early-time intracranial wave physics leading to traumatic brain injury. *Journal of Biomechanical Engineering*, 131(6) :61007, 2009.

[131] René Thom. *La théorie des catastrophes : état présent et perspectives*. Springer, 1975.

[132] G.B. Whitham. *Lectures on wave propagation*. Springer-Verlag, 1979.

[133] M.S. Wochner, M.F. Hamilton, Y.A. Ilinskii, and E.A. Zabolotskaya. Cubic nonlinearity in shear wave beams with different polarizations. *J. Acoust. Soc. Am.*, 123(5) :2488–2495, 2008.

[134] L. Yang, Y-Y. Chen, and S-T. J. Yu. Viscoelasticity determined by measured wave absorption coefficient for modeling waves in soft tissues. *Wave Motion*, 50(2) :334–346, 2013.

[135] X. Yang and R.O. Cleveland. Time domain simulation of nonlinear acoustic beams generated by rectangular pistons with application to harmonic imaging. *J. Acoust. Soc. Am.*, 117(1) :113–123, 2005.

[136] E.A. Zabolotskaya. Sound beams in a nonlinear isotropic solid. *Sov. Phys. Acoust.*, 32(4) :296–299, 1986.

[137] E.A. Zabolotskaya, M.F. Hamilton, Y.A. Ilinskii, and G D. Meegan. Modeling of nonlinear shear waves in soft solids. *J. Acoust. Soc. Am.*, 116(5) :2807–2813, 2004.

[138] E.A. Zabolotskaya and R.V. Khokhlov. Quasi-plane waves in the nonlinear acoustics of confined beams. *Sov. Phys. Acoust.*, 15(1) :35–40, 1969.

[139] L. Zhang, K.H. Yang, and A.I. King. Comparison of brain responses between frontal and lateral impacts by finite element modeling. *J. Neurotrauma*, 18(1) :21–30, 2001.

[140] L. Zhang, K.H. Yang, and A.I. King. A proposed injury threshold for mild traumatic brain injury. *J. Biomech. Eng.*, 126(2) :226–236, 2004.

[141] A. Zorgani, R. Souchon, A-H. Dinh, J-Y. Chapelon, J-M. Ménager, S. Lounis, O. Rouvière, and S. Catheline. Brain palpation from physiological vibrations using mri. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 112(42) :12917–12921, 2015.