Inversion des mesures héliosismiques: la rotation interne du Soleil

Thierry Corbard

▶ **To cite this version:**

Thierry Corbard. Inversion des mesures héliosismiques: la rotation interne du Soleil. Astrophysique stellaire et solaire [astro-ph.SR]. Université de Nice Sophia-Antipolis, 1998. Français. NNT : 1998NICE5237 . tel-02921925

HAL Id: tel-02921925
https://theses.hal.science/tel-02921925

Submitted on 25 Aug 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS
U.F.R. FACULTÉ DES SCIENCES

THÈSE

Présentée pour obtenir le titre de

Docteur en SCIENCES (Sciences Physiques)

par

Thierry CORBARD

INVERSION DES MESURES HÉLIOSISMIQUES: LA ROTATION INTERNE DU SOLEIL

Soutenue à l'Observatoire de Nice

le 20 Novembre 1998 devant la commission d'examen composée de:

J. Borgnino	Université de Nice - Sophia Antipolis	Président
T. Roca-Cortés	Université de La Laguna, Espagne	Rapporteur
J.-P. Zahn	Observatoire de Paris	Rapporteur
G. Berthomieu	Observatoire de la Côte d'Azur	Directeur de thèse
L. Blanc-Féraud	C.N.R.S., Laboratoire I3S, Sophia Antipolis	Examinateur
S. Turck-Chièze	C.E.A., Saclay	Examinateur

A mon grand père,
qui m'emmenait “chercher la lune” dans les rues de Nantes...

Remerciements

Je tiens avant tout à remercier ma directrice de thèse Gabrielle Berthomieu ainsi que Janine Provost pour leur encadrement. Grâce à leur soutien, leurs encouragements, leur patience mais aussi leur bonne humeur permanente, le travail au sein d'une équipe prend tout son sens aussi bien du point de vue scientifique que du point de vue humain. Les échanges spontanés avec elles m'ont permis de découvrir le domaine de l'héliosismologie et j'ai énormément appris durant ces trois années. Je remercie Pierre Morel et Georges Gonczi pour leurs nombreux et judicieux conseils pratiques et leur intérêt pour mon travail.

Je suis très reconnaissant à Teo Roca-Cortès et Jean-Paul Zahn qui ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse ainsi qu'à Julien Borgnino qui a présidé le jury. Un grand merci à Sylvaine Turck-Chièze et Laure Blanc-Féraud pour leurs collaborations fructueuses dans des domaines très différents et pour avoir accepté d'être membres de mon jury.

Merci à tous ceux qui, dans la communauté des héliosismologues, m'ont encouragé par l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Je pense tout particulièrement à Takashi Sekii dont les séjours à Nice m'auront été extrêmement bénéfiques, mais aussi à Eric Fossat, Thierry Toutain, Thierry Appourchaux, Steve Tomczyk et les équipes GOLF et GONG qui m'ont permis d'avoir accès très librement à leurs données dans le cadre d'échanges toujours très enrichissants. Mes remerciements vont également à Douglas Gough, Jorgen Christensen-Dalsgaard et Mike Thompson pour leur précieux soutien et à Annie Baglin pour sa lettre à l'amiral alors que je faisais mes premières armes en héliosismologie!

Merci à toute l'équipe de Cassini, Françoise Bely-Dubau puis Annick Pouquet directrices du laboratoire toujours à l'écoute des étudiants mais aussi Valérie, Christiane, Marie-Claude et Nicole pour leur aide matérielle et morale. Les équipes du SIT de Nice et de l'IDRIS m'ont permis de résoudre efficacement les difficultés informatiques liées à ce travail, je les en remercie.

Je voudrais remercier ceux qui ont été présents dans les moments de doutes: Yves un ami de 20 ans (!), et Hélène sans qui la dernière ligne droite aurait été beaucoup plus dure. Les balades en montagne avec Eric et sa joyeuse équipe de montagnards et les montées à vélo à l'observatoire avec Valérie et Stéphanie resteront parmi mes plus beaux souvenirs d'évasion, sans eux ces années n'auraient pas eu la même saveur.

Enfin, je voudrais exprimer toute ma gratitude à mes parents et à ma grand-mère, qui m'ont trouvé bien éloigné durant ces années mais dont le soutien sans faille m'a été très précieux dans les moments difficiles.

Table des matières

Introduction **1**
La rotation solaire 1
Observations de la rotation de surface 1
Détermination de la rotation interne par l'héliosismologie 4
Les enjeux physiques 8
Le travail entrepris: contexte et objectifs 9

I Bases théoriques de la détermination héliosismique de la rotation solaire **13**

1 Le problème direct **15**
1.1 Équations du mouvement 15
1.2 Principe variationnel 17
1.3 Calcul des splittings 18

2 Mesures des splittings **23**
2.1 Diagrammes m-ν 23
2.2 Les coefficients a et les polynômes de projection 23
2.3 Formulation 2D pour les coefficients a 27
2.3.1 Cas général 27
2.3.2 Cas particulier des polynômes orthogonaux - séparabilité 27

3 Le problème inverse **29**
3.1 Propriétés des noyaux de rotation 30
3.1.1 Noyaux de rotation en rayon: $K_{nl}(r)$ et $L_{nl}(r)$ 31
3.1.2 Noyaux de rotation en latitude: $W_{lm}(\mu)$ et $X_{lm}(\mu)$ 33
3.1.3 Deux approximations de l'équation intégrale 35
3.2 Les méthodes d'inversion - Cadre général 37
3.2.1 Situation du problème 37
3.2.2 'Critères de qualité' d'une solution 38
3.2.3 Méthodes globales 42
3.2.4 Méthodes locales 43
3.2.5 Choix des paramètres 44

3.2.6 Comparaison RLS - OLA 48

Annexes **52**

A Quelques formules utiles **53**
A.1 Les fonctions de Legendre 53
A.2 Les coefficients de Clebsh-Gordon 54

B Les polynômes 'pseudo inverses' **55**

II Contribution à l'interprétation des observations: détermination de la rotation solaire **57**

4 Une vision globale de la rotation **59**
4.1 Développement et utilisation d'un code 2D RLS 60
4.1.1 L'utilisation des B-splines - Intérêts et pratique 60
4.1.2 Introduction des contraintes 61
4.1.3 Équations normales et résolution du système linéaire 65
4.1.4 Prise en compte des erreurs: signification statistique des résultats obtenus 67
4.2 Les données 70
4.3 Résultats 71
4.3.1 Profils de rotation, erreurs et noyaux de résolution 71
4.3.2 Une vision globale de plus en plus précise de la rotation 73
4.3.3 Liens avec les développements théoriques 81
Contribution 1: *Solar Rotation from 2D inversion* 83
Article 1: *Solar internal rotation from LOWL data* 91
Article 2: *Differential Rotation and Dynamics of the Solar Interior* 107
Contribution 2: *Internal rotation and dynamics of the Sun from GONG data* 115

5 La tachocline **125**
5.1 Position du problème et les différentes approches 126
5.1.1 Définition des paramètres caractéristiques de la tachocline . . . 126
5.1.2 Limitations de l'approche classique 127
5.1.3 Les nouvelles approches possibles 127
5.2 Obtenir une 'super-résolution' à partir d'une inversion linéaire 128
5.3 Vers une nouvelle approche de la régularisation 129
5.3.1 Pourquoi? 129
5.3.2 Comment? 129
5.4 Application de la régularisation non linéaire à la tachocline solaire . . . 132
5.4.1 Le choix de la fonction φ 132
5.4.2 L'algorithme ARTUR: théorie et pratique 133
5.5 Estimation des incertitudes: régularisation et simulations de Monte-Carlo 137

5.5.1 Principes et difficultés 137
5.5.2 Résultats obtenus pour l'estimation des erreurs 139
5.6 Les caractéristiques de la tachocline solaire 141
5.6.1 Synthèse des résultats 141
5.6.2 Comparaisons avec d'autres travaux 146
5.6.3 Implications pour les modèles de la dynamique interne 147
Contribution 3: *The solar rotation rate from inversion of the first GONG datasets* 153
Article 3: *Inferring the equatorial solar tachocline from frequency splittings* 157
Contribution 4: *On the use of nonlinear regularization in inverse methods for the solar tachocline profile determination* 171
Article 4: *Non linear regularization for helioseismic inversions. Application for the study of the solar tachocline* 179

6 La rotation du coeur **193**
6.1 Mesures des splittings de bas degrés 193
6.2 Spécificités de l'inversion pour le coeur 197
6.3 Résultats 198
Contribution 5: *The solar core rotation from LOWL and IRIS or BiSON data* 203
Contribution 6: *Inferring the internal rotation of the Sun from low degree helioseismology* 207

Conclusions et perspectives **227**
Synthèse des résultats obtenus 227
Perspectives 230

Références **233**

Résumé - Abstract **243**

Introduction

La rotation solaire

Observations de la rotation de surface

L'histoire des premières observations de la rotation solaire est intimement liée à celle de l'observation des taches solaires. Cependant, alors que depuis l'antiquité plusieurs auteurs font état d'observations de taches sur le soleil, il faut attendre le développement par Galilée (1564-1642) de la lunette astronomique à partir de 1609 pour que Johannes Goldschmidt (1587-1615), plus connu sous le nom latin de Fabricius, puis Galilée établissent que ces taches sont bien des phénomènes localisés à la surface du soleil et non pas, par exemple, l'ombre portée de planètes passant devant le disque solaire, thèse défendue initialement par le père jésuite Christopher Scheiner (1575-1650) à partir de ses propres observations. Ainsi Fabricius et Galilée ouvraient, il y a un peu moins de 4 siècles, la voie pour l'observation de la rotation solaire en remettant en cause la cosmologie d'Aristote (384-322 av. J.C.) et de Ptolémée (100-170 av. J.C.) conférant un caractère immuable et parfait (sans 'tache') aux astres en général et au soleil en particulier. Cette doctrine étant défendue par l'église catholique romaine, la position de Galilée sur la nature des taches solaires jouera un rôle important dans la suite des évènements qui le conduiront à être condamné par l'inquisition romaine en 1633. Par la suite, les observations minutieuses du père Scheiner (rallié à l'interprétation de Galilée) permirent d'établir, dès 1630, que la période de rotation du soleil était d'environ 27 jours à l'équateur et que les taches, observées à de plus hautes latitudes (jusqu'à 30° autour de l'équateur), semblaient se déplacer plus lentement (**Fig. 1**).

Ensuite survint la période (1645-1715) dîte du *minimum de Maunder* correspondant, sur terre, au *"mini age glaciaire"* durant lequel très peu ($\simeq$ 15) de taches solaires furent observées ce qui permettra, par la suite, de faire un lien entre l'activité solaire et le climat terrestre. Ce n'est qu'au milieu du dix-neuvième siècle que les premières observations seront confirmées par Richard Carrington (1826-1875) et Gustav Spörer (1822-1895). Ils montrent, indépendamment, que le soleil ne tourne pas comme une sphère rigide : les régions équatoriales tournent plus vite que les zones polaires. En prenant en compte le mouvement de la terre autour du soleil, Carrington trouve une *période sidérale* (les étoiles servant de repère, et non la Terre) de 24,96 jours à l'équateur et propose une loi empirique pour la dépendance de la rotation en fonction de la latitude

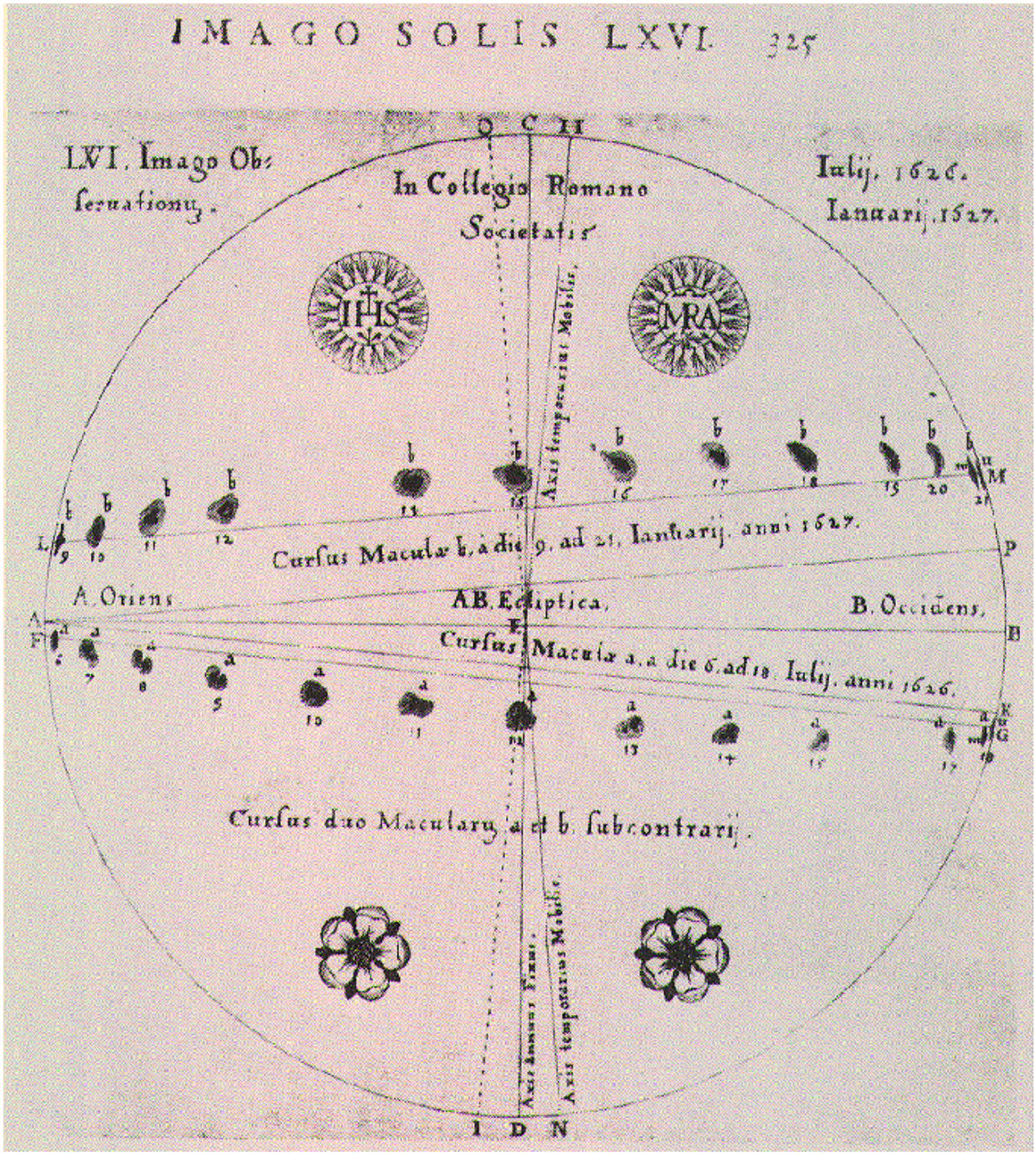


FIG. 1 – *Observations quotidiennes de la rotation avec le Soleil de deux taches ou groupes de taches (a, en 1626; b, en 1627) publiées par Scheiner en 1630 dans un manuscrit intitulé Rosa Ursina. Ses observations détaillées lui permirent également de déduire que l'axe de rotation du Soleil est légèrement incliné par rapport au plan de l'écliptique.*

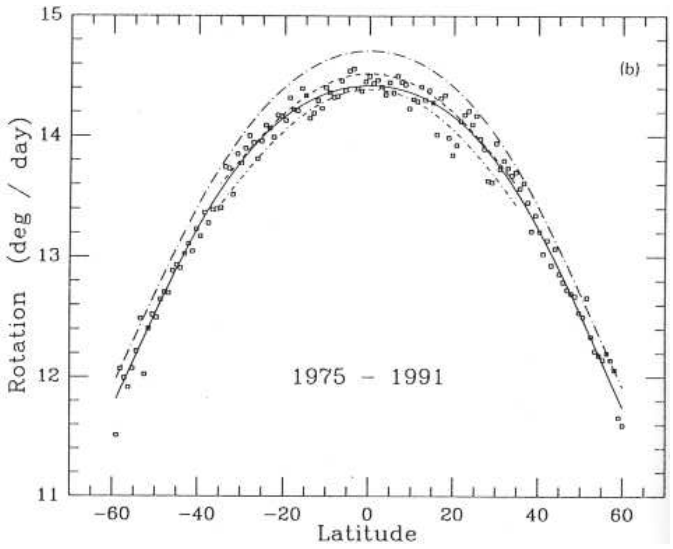


FIG. 2 – *Rotation sidérale moyenne de surface en fonction de la latitude. Les carrés représentent les observations de petites structures magnétiques et la ligne pleine l'approximation par un polynôme de ces observations. Vitesses de rotation d'autres traceurs: supergranules (—·—·—·), groupes de taches (·····), taches individuelles (-------). D'après Komm et al. (1993)*

héliocentrique ϕ:

$$\Omega(^\circ/jrs) = 14^\circ 42 - 2^\circ 75 \sin^{\frac{7}{4}} \phi \qquad (1)$$

Cette loi décrivant la *rotation différentielle* à la surface du Soleil sera corrigée par Hervé Faye (1814-1902) qui trouve la formule

$$\Omega(^\circ/jrs) = 14^\circ 37 - 3^\circ 10 \sin^2 \phi \qquad (2)$$

plus adaptée. Cette *loi de Faye* restera utilisée jusqu'au milieu du vingtième siècle.

L'étape suivante fut franchie grâce à la découverte en 1842 de l'effet Doppler[1]. Armand-Hyppolyte Fizeau (1819-1896) montra en 1848 que la mesure du décalage Doppler des raies spectrales donne accès à la détermination de la vitesse radiale des étoiles. Ces techniques de spectroscopie (visuelle) permirent à Herman Vogel (1841-1907), Nils Dunér (1839-1914) et Jakob Halm(1866-1944) de confirmer la loi de Faye et d'étendre sa validité jusqu'à des latitudes de 60°.

A partir du début du vingtième siècle deux axes principaux sont poursuivis pour la détermination de la rotation de surface du soleil (voir par exemple les revues de Howard (1984), Schröter (1985) et Meunier (1997)) :

– La spectrographie développée à partir de 1906 à l'observatoire du Mont Wilson par Walter S. Adams (1876-1956) et George E. Hale (1868-1938) remplace les

1. Christian Doppler (1803-1853)

observations visuelles. Cette technique permet de déterminer la rotation de toutes les zones de la surface par observation du décalage Doppler de raies spectrales produites au niveau de la photosphère mais pose des problèmes instrumentaux et de calibration importants (Snodgrass et al. 1984, Ulrich et al. 1988, Hathaway et al. 1996).

– Parallèlement, on poursuit le suivi des *traceurs de surface* (taches, groupes de taches, supergranules, structures magnétiques, etc..) (**Fig. 2**) qui pose moins de problèmes instrumentaux mais nécessite que les traceurs soient présents (on n'observe pas de taches par exemple aux hautes latitudes). De plus ces mesures sont plus difficiles à interpréter en terme de rotation. En effet, alors que les observations spectrographiques correspondent à la rotation de couches localisées dans la photosphère qui a une épaisseur de quelques centaines de kilomètres seulement, les différents traceurs observés en surface peuvent être guidés à diverses profondeurs dont l'estimation est difficile sans une compréhension complète de la physique de chaque traceur (Collin et al. 1995).

Détermination de la rotation interne par l'héliosismologie

Les débuts de la recherche concernant la détermination des propriétés internes du soleil à partir de l'étude de ses oscillations ou *héliosismologie* sont marqués par un entrelacement des travaux théoriques et observationnels se stimulant mutuellement. Je rappellerai seulement quelques moments clefs de cette histoire en ce qui concerne la rotation solaire.

L'étude théorique des *oscillations non radiales* des étoiles menée par Ledoux (1951) lui permet d'établir une formule donnant la structure fine du spectre des oscillations induite par une rotation rigide de l'étoile avec une vitesse angulaire Ω_o supposée faible par rapport aux fréquences d'oscillation. Chaque *mode acoustique* est caractérisé par 2 nombres quantiques, *l'harmonique sphérique* l inversement proportionnel à la longueur d'onde horizontale, et *l 'ordre radial* n, représentant le nombre de nœuds radiaux. La pulsation de ce mode se démultiplie sous l'effet de la rotation en $2l+1$ pulsations différentes identifiées par *l'ordre azimutal* $m = -l, -l+1, ..l$ et reliées entre elles par:

$$\omega_{nlm} = \omega_{nl0} - m\ C_{nl}\ \Omega_o, \qquad (m = -l, -l+1, .., l) \tag{3}$$

où C_{nl} est une constante dépendant du modèle de l'étoile et du mode considérés. La différence $\omega_{nlm} - \omega_{nl0}$ est couramment nommée par le terme anglo-saxon de *'splitting' rotationnel*. Le coefficient C_{nl}, calculé dans un repère tournant à la même vitesse que l'étoile, est appelé *terme de Coriolis*. Pour un observateur extérieur, situé dans un repère galiléen, un terme d'entraînement ou *terme d'advection* provenant simplement du fait que la longitude observée φ_{obs} augmente uniformément avec le temps vient s'ajouter au terme de Coriolis:

$$\varphi_{obs} = \varphi + \Omega_o t \Rightarrow cos(m\varphi - \omega t) = cos(m\varphi_{obs} - (\omega + m\Omega_o)t) \Rightarrow \omega_{obs} = \omega + m\Omega_0 \tag{4}$$

Dans un repère d'inertie la pulsation d'un mode (n, l, m) pour une étoile en rotation rigide s'exprime donc par:

$$\omega_{nlm} = \omega_{nl0} + m\ (1 - C_{nl})\ \Omega_o, \qquad (m = -l, -l+1, .., l) \tag{5}$$

En 1967, Lynden-Bell et Ostriker ont établi un *principe variationnel* pour les étoiles en rotation. Ce principe permet, au premier ordre en Ω/ω, de calculer les fréquences des modes d'oscillations d'une étoile en rotation à partir de la seule connaissance des fonctions propres déduites d'un modèle sans rotation. Il a été utilisé par Hansen et al. (1977) et Gough (1981) pour élargir la formule obtenue par Ledoux au cas des étoiles qui, comme le soleil, présentent un profil de rotation $\Omega(r, \theta)$ dépendant à la fois du rayon r et de la colatitude $\theta = \pi/2 - \phi$ (voir chapitre 1).

En 1960 Leighton, Noyes et Simon (Leighton 1960, Leighton et al. 1962) observent pour la première fois que la surface solaire est couverte de zones animées de mouvements oscillants verticaux ayant une période proche de 5mn et des amplitudes allant de quelques centimètres à plusieurs centaines de mètres par seconde. Ces oscillations, nommées *oscillations de 5mn du soleil*, ont été, dans un premier temps, interprétées comme étant la manifestation *locale* de la pénétration de cellules convectives (observée sous forme de *granules*) à l'intérieur de la photosphère stable. Ce n'est que quinze ans après la découverte des oscillations solaires de 5mn, que Deubner (1975) réussit à les résoudre en modes discrets qui se révéleront être la superposition de *modes globaux* d'oscillations du soleil. A partir des calculs théoriques effectués avec des modèles solaires, Ando et Osaki (1975) identifieront ces modes comme étant des modes acoustiques correspondant à des harmoniques sphériques de degrés élevés ($l = 200 - 1000$).

La première vérification expérimentale de la réalité du splitting rotationnel fut obtenue sur les modes normaux de vibration de la terre excités par un tremblement de terre chilien (Pekeris et al. 1961). La possibilité de l'observer dans le contexte solaire fut énoncée (Brookes et al. 1976) et la première observation fut obtenue en 1979 pour les oscillations solaires de degrés élevés ($l \simeq 200$) qui ne sondent que quelques pour cents du rayon solaire (Deubner et al. 1979).

Les modes de bas degrés ont été mis en évidence pour la première fois par Claverie et al. (1979) puis avec une meilleure résolution temporelle par Grec et al. (1980) à partir d'observations ininterrompues couvrant une période de 120 heures réalisées au pôle sud. Dès 1981, Claverie et al. pensent avoir mis en évidence l'existence d'une structure fine dans le spectre des modes de bas degrés. Finalement, bien qu'elles ne permettent pas de résoudre le splitting, les observations réalisées au pôle sud indiqueront que cette première structure fine résultait probablement d'un artefact d'analyse (Grec et al. 1983). D'autres mesures de splittings rotationnels basées sur l'observation de fluctuations du diamètre solaire seront proposées (Bos et Hill 1983) et seront interprétées comme étant compatibles avec une rotation très rapide du cœur (Hill et al. 1983). Cependant, là encore la méthode d'observation est délicate et les splittings s'avèreront peu fiables. Fin 1983 le splitting rotationnel reste donc non résolu et la balle se trouve dans le camp des observateurs.

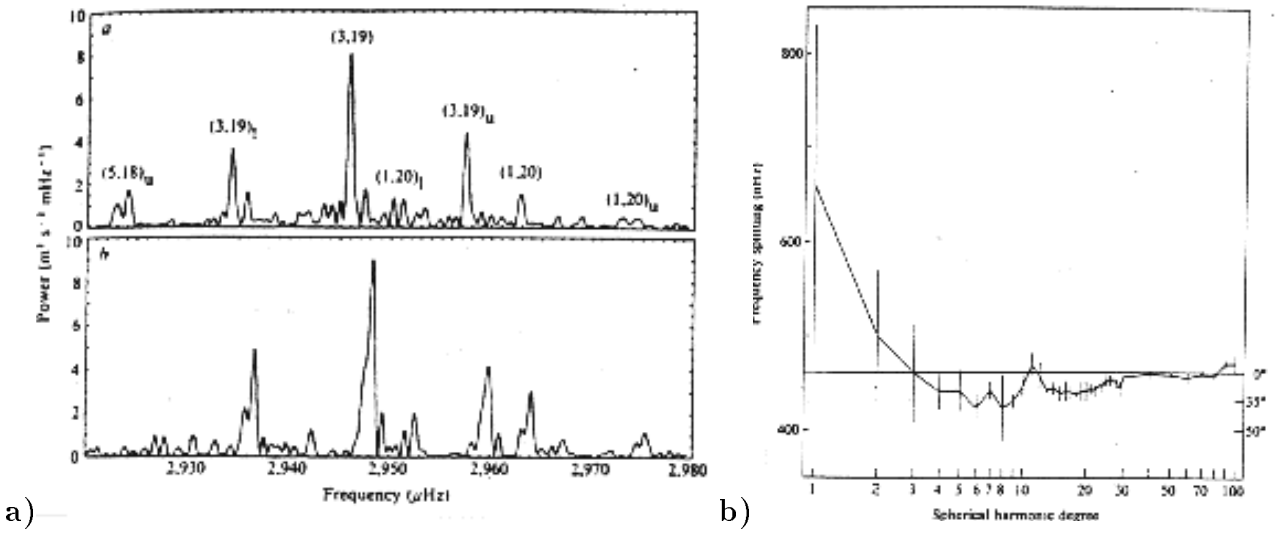


FIG. 3 – *Premières observations par Duvall et Harvey (1984) des splittings rotationnels des modes acoustiques du Soleil.* **(a)** *Spectre d'un mode* $l = 3$ $n = 19$ *décomposé en un mode prograde* ($m = 3$, *cadre du bas) et un mode rétrograde* ($m = -3$, *cadre du haut). Les autres pics proviennent des modes* $l = 1$ *et* $l = 5$ *et des harmoniques du jour à* $11.6\mu Hz$ *(indicés u et l).* **(b)** *Valeurs du splitting sectoral* ($m = l$) *en fonction du degré observé. Les indications de latitudes correspondent aux observations de structures magnétiques en surface menées par Snodgrass (1983).*

Les premières mesures de splittings clairement identifiés ont été réalisées par Duvall et Harvey (1984) (**Fig. 3a**). Se basant sur des observations spatialement résolues faites à Kitt Peak en 1983, ces auteurs obtiennent une estimation des splittings de 180 modes sectoraux ($m = l$) ayant des degrés l compris entre 1 et 100 (**Fig. 3b**). Ils exploitent immédiatement ces observations (Duvall et al. 1984) en utilisant trois méthodes d'inversion différentes qui leur permettent d'obtenir la première estimation du profil de la rotation solaire équatoriale entre 0.4 et $0.9 R_\odot$ (**Fig. 4**) : la rotation obtenue demeure pratiquement constante entre la surface et $0.6 R_\odot$ puis décroît entre 0.6 et $0.4 R_\odot$. Pour le cœur, ce travail semble indiquer une rotation deux fois plus rapide qu'en surface mais les larges incertitudes sur les observations des splittings de bas degrés (**Fig. 3b**) ne permettent pas, là encore, de se prononcer de manière significative sur la rotation centrale.

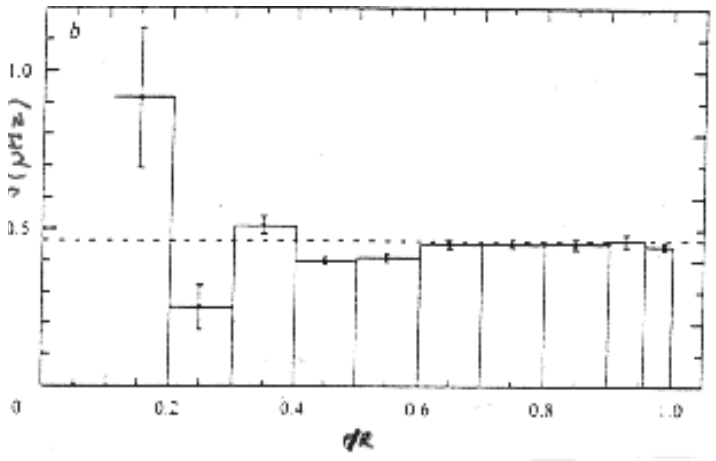


FIG. 4 – *Première inversion des premiers splittings rotationnels observés: fréquence de rotation équatoriale (en μHz) en fonction du rayon solaire. D'après Duvall et al. (1984)*

A partir de 1980, la nouvelle communauté des physiciens héliosismologues développe tout un ensemble d'observatoires au sol (LOWL[2], BBSO[3]) dont certains regroupés en réseaux (IRIS[4], BiSON[5], GONG[6], TON[7], voir la revue de Pallé 1997 et **Fig. 5**) et des instruments embarqués à bord de satellites (PHOBOS, SoHO[8], voir la revue de Toutain 1997) afin d'améliorer la résolution et la précision accessibles. Parallèlement les techniques d'inversion, initialement utilisées par Duvall et al. (1984), sont développées

2. LOWL est un instrument situé à Hawaï, dédié à l'observation des modes de degrés l faibles (LOW-L), http://www.hao.ucar.edu/public/research/mlso/LowL/lowl.html
3. Big Bear Solar Observatory, California (USA) http://sundog.caltech.edu
4. International Research on the Interior of the Sun, http://boulega.unice.fr
5. Birmingham Solar Oscillations Network, http://bison.ph.bham.ac.uk
6. Global Oscillations Network Group, http://helios.tuc.noao.edu/gonghome.html
7. Taiwan Oscillations Network
8. Solar and Heliospheric Observatory, http://sohowww.nascom.nasa.gov

pour déterminer la rotation interne non seulement dans le plan équatorial mais aussi selon deux dimensions en rayon et latitude.

Les enjeux physiques

Si les moyens mis en œuvre depuis 20 ans pour l'étude des oscillations solaires sont si importants, c'est que les enjeux scientifiques sont très nombreux. Je rappellerai ici seulement les principaux enjeux liés à notre compréhension de la dynamique des étoiles et à son évolution dans le temps.

Les informations sur la rotation du cœur et de la zone radiative que l'on peut obtenir par l'héliosismologie permettront de **mieux contraindre les modèles des processus d'évolution et de transport du moment angulaire** (voir par exemple Talon & Zahn 1998). En effet, le soleil est une étoile qui est à peu près au milieu de sa vie et l'observation des étoiles du même type mais plus jeunes a montré que ces étoiles tournent jusqu'à 50 fois plus vite que le Soleil. On pense donc qu'il y a eu, notamment sous l'effet du vent solaire, une perte de moment angulaire durant l'évolution du soleil conduisant à la rotation observée actuellement en surface. La manière dont ce ralentissement affecte les couches internes du soleil est difficile à modéliser car elle dépend fortement de tous les phénomènes de circulation et d'instabilités qui tendent à mélanger l'intérieur et du champ magnétique interne qui peut ralentir ou modifier ce processus.

D'une manière générale la rotation de ses couches internes induit un **mélange des éléments chimiques** à l'intérieur d'une étoile. La connaissance de la rotation peut aider à identifier les processus de transports en jeu (Zahn 1997). Dans le cas du Soleil, un problème qui reste non résolu est celui de la différence importante entre l' **abondance de lithium observée dans la photosphère solaire** et celle relevée dans les météorites. Il semble qu'un mélange induit par la rotation pourrait contribuer à la diminution du lithium à la surface du Soleil (Chaboyer 1998).

Un autre problème non résolu est celui du **déficit apparent des neutrinos** générés dans le cœur solaire. Ce problème peut être relié à la dynamique du cœur (Merryfield et al. 1991, Ghosal & Spiegel 1991) qu'il est donc important de mieux connaître.

La connaissance de la rotation de la zone convective peut nous permettre de mieux comprendre comment la rotation et les mouvements de convection turbulente se combinent pour produire la rotation différentielle et la circulation méridienne observées en surface. De plus l'interaction entre la rotation et le champ magnétique est à l'origine de **la dynamo solaire** qu'il est nécessaire de bien modéliser pour comprendre les **cycles de 22 ans des taches solaires et de l'activité magnétique** (Solanki 1993)

Enfin, nous avons vu que la détermination de la dynamique des zones proches de la surface peut mener à une meilleure connaissance de la physique des divers traceurs (taches, structures magnétiques, etc..) observés en surface.

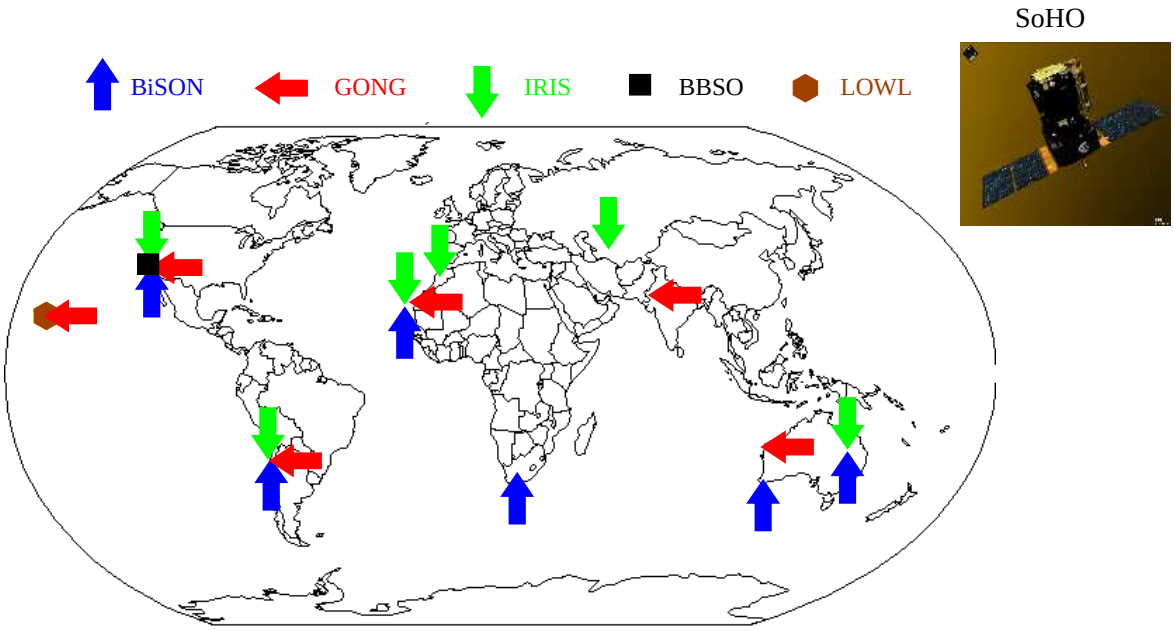


FIG. 5 – *Localisation des principaux instruments dont les données ont été utilisées pour ce travail. IRIS, BiSON et GONG sont des réseaux d'observatoires, LOWL et BBSO deux instruments isolés et le satellite SoHO est situé au point de Lagrange L_1 entre la terre et le Soleil et comprend notamment les instruments VIRGO/LOI, GOLF et MDI (voir texte). Adapté de Pallé (1997)*

Le travail entrepris: contexte et objectifs

Au début de ce travail, les principales observations de splittings disponibles sont celles réalisées entre 1986 et 1990 par Woodard & Libbrecht (1993) au BBSO pour les modes de degrés $l = 5$ à $l = 140$ et celles des réseaux des groupes de Birmingham et Nice, BiSON et IRIS, devenus complètement opérationnels respectivement en 1993 et 1994 (Pallé 1997) pour l'observation en disque intégré donnant accès aux splittings des modes de bas degrés ($l < 4$). La **figure 5** montre la localisation géographique des principaux sites d'observation.

Ensuite les splittings ($l = 1$ à $l = 100$) observés durant deux ans (1994-1996) par l'instrument LOWL ont été mis à la disposition de la communauté scientifique courant 1996, le réseau américain GONG, complètement déployé en 1995, a fourni les splittings de modes $l = 2$ à $l = 150$ des premiers mois d'observation également courant 1996 et enfin le satellite SoHO a été lancé en décembre 1995. Ce satellite comprend plusieurs instruments dédiés à l'héliosismologie dont VIRGO/LOI[9], GOLF[10] et MDI[11].

9. Luminosity Oscillation Imager est un instrument de l'expérience VIRGO Variability of solar IRradiance and Gravity Oscillations, http://virgo.so.estec.esa.nl
10. Global Oscillations at Low Frequency, http://www.medoc-ias.u-psud.fr/golf/golf1.htm
11. Michelson Doppler Imager, http://soi.stanford.edu

L'instrument LOI est dédié à l'observation des modes de bas degrés $l \leq 7$, GOLF est basé sur le même principe que les instruments du réseau IRIS et observe les modes $l \leq 4$ et MDI permet l'observation des modes ayant des degrés jusqu'à $l = 250$. Les premières observations de ces instruments sont également devenues accessibles courant 1996 et 1997 pour les membres de la collaboration.

Les observations de splittings ont permis très rapidement (Brown et al. 1989, Libbrecht 1988) de réfuter certaines simulations numériques de la zone convective (Gilman & Miller 1986, Glatzmaier 1987) prédisant la rotation différentielle observée en surface mais conduisant une rotation constante sur des cylindres parallèles à l'axe de rotation. En effet les premières inversions ont tout de suite permis de révéler l'image suivante pour la rotation interne du soleil : la rotation différentielle de surface se maintient dans la zone convective (les contours d'iso-rotation sont donc radiaux et non pas alignés avec l'axe) et l'intérieur radiatif tourne de manière rigide avec une fréquence angulaire voisine de 430nHz.

L'incertitude sur ces premiers profils de rotation déduits de l'observation demeure néanmoins grande et l'objectif des observations actuelles est de pouvoir atteindre suffisamment de précision sur la mesure des splittings pour pouvoir détailler ces premiers résultats de façon à obtenir des contraintes quantitatives sur les modèles de la dynamique interne du soleil.

Parallèlement à l'effort des observateurs est apparue la nécessité de développer des outils performants permettant l'interprétation des observations dès leur acquisition et la comparaison des résultats au sein de collaborations internationales avec les divers groupes impliqués dans l'exploitation des différents instruments.

Le travail de thèse présenté ici s'inscrit dans le contexte de cet effort théorique avec pour but de contribuer à la résolution de deux problèmes non encore élucidés :

- préciser les caractéristiques (position, largeur) de la zone de transition entre la rotation différentielle en latitude dans la zone convective et la rotation rigide dans la zone radiative. De très nombreuses théories de la rotation interne et de son interaction avec le champ magnétique et les mouvements de la convection turbulente ont vu le jour très récemment qui peuvent être contraintes par les propriétés de cette zone, nommée *tachocline solaire* par Spiegel & Zahn (1992) par analogie avec la *thermocline* située sous la zone de mélange dans les océans terrestres.

- estimer la rotation dans le coeur du Soleil à partir de l'observation de modes de bas degrés qui seuls pénètrent le coeur solaire.

Pour cela j'ai suivi la démarche suivante :

- J'ai développé un code d'inversion performant à deux dimensions permettant de déduire de l'ensemble des observations la rotation solaire en fonction de la latitude et de la profondeur. Je me suis particulièrement attaché à étudier l'influence sur la solution du choix des divers paramètres du code d'inversion et à définir des

stratégies pour ces choix. Ces considérations, parfois négligées, sont essentielles pour espérer atteindre une interprétation la plus rigoureuse possible des résultats. J'ai introduit des contraintes apportées par notre connaissance de la rotation de surface et appliqué ce code aux données LOWL, GONG et MDI.

- Pour l'étude des paramètres de la tachocline j'ai adapté au contexte de l'héliosismologie une méthode d'inversion non linéaire précédemment développée en imagerie dont le principe est particulièrement bien adapté aux problèmes particuliers posés par l'étude de cette zone où le soleil présente de forts gradients de rotation.

- Enfin, pour essayer de mieux contraindre nos estimations sur la rotation du cœur à partir des mesures des différents instruments dédiés à l'observation des splittings de bas degrés, j'ai mené une étude systématique de l'influence, sur le résultat des inversions, des biais contenus dans les données ou introduits par les méthodes d'inversion.

Dans une première partie, les bases théoriques concernant l'inversion des splittings sont données. Le chapitre 1 présente les développements théoriques permettant de relier, par la théorie des oscillations solaires, les splittings de fréquence et la variation de la rotation interne en latitude et en rayon. La manière dont les splittings de fréquence sont extraits des observations est abordée chapitre 2. Les méthodes classiquement utilisées pour aborder le problème inverse qui consiste à déduire la rotation interne des observations de splittings sont exposées dans le chapitre 3. J'introduis notamment les notions de *régularisation* et de *résolution* indispensables à l'interprétation et à la comparaison des deux principaux types de méthodes utilisées.

La seconde partie présente mon apport au développement des méthodes d'inversion ainsi que les résultats obtenus. Le chapitre 4 détaille les caractéristiques et les apports du code d'inversion que j'ai développé, puis présente les principaux résultats obtenus avec les données LOWL, GONG et MDI et les compare aux inversions menées parallèlement par les autres équipes au sein des collaborations mises en place. Les résultats obtenus sur la détermination des paramètres de la tachocline solaire, les différentes approches utilisées ainsi que le développement d'une nouvelle technique d'inversion plus spécifiquement adaptée pour l'étude de cette zone sont discutés chapitre 5. Finalement le chapitre 6 résume les différentes analyses menées pour l'étude de la rotation du cœur à partir des différentes observations des splittings de bas degrés.

Première partie

Bases théoriques de la détermination héliosismique de la rotation solaire

Chapitre 1

Le problème direct: influence de la rotation sur les fréquences d'oscillation

Le but de ce chapitre est de montrer comment on peut relier d'une manière théorique les splittings observés et la rotation interne du soleil en explicitant les hypothèses sous-jacentes à cette étude.

1.1 Équations du mouvement

L'amplitude des oscillations solaires ainsi que les pertes d'énergie sur une période sont faibles. De plus, on ne tient pas compte de l'interaction entre rotation et convection. Il est donc possible de se placer dans une approximation adiabatique et d'utiliser la théorie linéaire des oscillations adiabatiques (voir par exemple Unno et al. 1989).

On considère donc le modèle extrêmement simplifié d'une sphère gazeuse animée d'un mouvement de rotation décrit par un vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}(r,\theta)$ de direction fixe mais dont le module dépend du rayon r et de la colatitude θ. On utilise la théorie des perturbations pour étudier les oscillations de cette sphère autour de sa position d'équilibre (c.à.d. en rotation mais sans oscillation). Dans ce modèle la vitesse en un point (r,θ,φ) est donné, à l'équilibre, par:

$$\vec{v_o}(r,\theta,\varphi) = \vec{\Omega}(r,\theta) \wedge \vec{r} = \Omega(r,\theta) r \sin\theta \ \vec{e_\varphi} \tag{1.1}$$

Cette vitesse étant indépendante de la longitude φ et du temps, les hypothèses sous-jacentes sont la symétrie axiale et la stationnarité de l'état d'équilibre. Le fait que l'état d'équilibre soit indépendant du temps permet par ailleurs de séparer les dépendances spatiales et temporelles de toutes les quantités perturbées (densité, pression etc..).

L'effet du champ magnétique sur les oscillations acoustiques étant, dans le cas solaire, beaucoup plus faible que l'effet de la rotation on ne considérera ici que les forces de pression P et de gravité (définie par le potentiel gravifique Φ). Dans un repère

d'inertie l'équation du mouvement s'écrit donc (équation d'Euler ou de Navier-Stockes sans viscosité):

$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}P - \rho\vec{\nabla}\Phi \tag{1.2}$$

où ρ est la densité et $\frac{D}{Dt}$ représente la *dérivée particulaire* définie par:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla} \tag{1.3}$$

Cet opérateur appliqué à une grandeur liée à la particule fluide exprime la variation pendant l'unité de temps de cette grandeur due non seulement à l'évolution du temps, mais également au déplacement de la particule en fonction du temps. Dans le repère d'inertie, l'effet de la rotation apparaît dans le *terme inertiel* $(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}$. Pour un observateur terrestre, on peut assimiler la terre à un point en rotation autour du soleil avec une vitesse angulaire Ω_T=1/(365 jours) $\simeq$ 31.7nHz. Dans ce repère en rotation (non galiléen) l'équation de la dynamique des fluides s'écrit:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} + 2\vec{\Omega}_T \wedge \vec{v} + \vec{\Omega}_T \wedge \vec{\Omega}_T \wedge \vec{r} = -\frac{\vec{\nabla}P}{\rho} - \vec{\nabla}\Phi \tag{1.4}$$

où $\frac{D}{Dt}$ et $\vec{v}$ sont maintenant relatifs au repère en rotation. Cette équation s'obtient simplement en remplaçant $\vec{v}(r,\theta,\varphi,t)$ par $\vec{v}(r,\theta,\varphi-\Omega_T t,t) + \vec{\Omega}_T \wedge \vec{r}$ dans (1.2). La vitesse angulaire $\Omega(r,\theta)$ de l'équation (1.1) représente maintenant la *vitesse angulaire synodique du soleil* (c.à.d. vue depuis la terre) alors que la *vitesse angulaire sidérale du soleil est* $\Omega(r,\theta)+\Omega_T$.

L'expression dans un repère tournant permet de donner une interprétation plus physique du terme inertiel. En effet si l'on suppose que le soleil est animé d'une rotation rigide Ω_o alors l'équation (1.4), avec Ω_o à la place de Ω_T, donne l'équation du mouvement dans un repère tournant avec le soleil et le terme inertiel apparaît sous la forme de deux 'forces' d'inertie (fictives): la force de Coriolis $(-2\rho\vec{\Omega}_o \wedge \vec{v})$ qui modifie la dynamique et donc les oscillations et qui peut engendrer, des ondes inertielles et de Rossby, et la force centrifuge $(-\rho\vec{\Omega}_o \wedge \vec{\Omega}_o \wedge \vec{r})$ qui influe (faiblement) sur la structure d'équilibre du soleil (voir Rieutord 1998). La distorsion exercée par la 'force' centrifuge sur la structure d'équilibre sans rotation est de l'ordre de $\Lambda \equiv R_\odot^3\bar{\Omega}^2/GM_\odot$ où $M_\odot$ et $R_\odot$ sont la masse et le rayon solaire et $\bar{\Omega}$ représente une moyenne de la rotation $\Omega(r,\theta)$ (voir par exemple Gough 1981). Pour les modes de pression, le rapport entre la fréquence de rotation (de période $\sim$ 1 mois) et la fréquence des oscillations (de période $\sim$ 5mn) est très faible ($\epsilon = \bar{\Omega}/\omega \simeq 10^{-4}$) et Λ est de l'ordre de ϵ^2 si bien que, au premier ordre en ϵ, on peut négliger l'effet de distorsion de la 'force' centrifuge et utiliser à nouveau la théorie des perturbations pour analyser l'effet, dû à la 'force' de Coriolis, de la rotation sur les oscillations acoustiques.

1.2 Principe variationnel pour les étoiles en rotation

Lorsque l'on perturbe le système, on peut alors définir le déplacement lagrangien $\delta\vec{r}(r,\theta,\varphi,t)$ de la particule fluide qui se serait trouvée en $\vec{r}(r,\theta,\varphi,t)$ à l'instant t dans le fluide non perturbé (voir par exemple Cox 1980, Chap. 5). Cette même particule se trouve donc en $\vec{r}+\delta\vec{r}$ au même instant t dans le fluide perturbé. On fixe la forme de la dépendance temporelle par:

$$\delta\vec{r}(r,\theta,\varphi,t) \equiv \vec{\xi}(r,\theta,\varphi)e^{-i\omega t} \tag{1.5}$$

ω représentant la pulsation autour de la position d'équilibre. La perturbation lagrangienne de la vitesse est alors donnée par:

$$\delta\vec{v} = \frac{D_o}{Dt}(\delta\vec{r}) \qquad \text{avec:}\ \ D_o/Dt \equiv -i\omega + \mathcal{M};\quad \mathcal{M} = \vec{v_o}.\vec{\nabla} \tag{1.6}$$

En utilisant la relation de commutation $\delta\frac{D}{Dt} = \frac{D_o}{Dt}\delta$ (Lynden-Bell & Ostriker 1967), l'équation du mouvement perturbé s'écrit pour un observateur terrestre:

$$\frac{D_o^2}{Dt^2}(\delta\vec{r}) + 2\vec{\Omega}_T \wedge \delta\vec{v} + \vec{\Omega}_T \wedge \vec{\Omega}_T \wedge \delta\vec{r} = -\delta\left(\frac{\vec{\nabla}P}{\rho}\right) - \delta(\vec{\nabla}\Phi). \tag{1.7}$$

Les perturbations lagrangiennes de densité, de pression et du potentiel gravifique peuvent s'exprimer comme des fonctions f,g,h du déplacement lagrangien en utilisant respectivement l'équation de continuité, d'adiabaticité et de Laplace:

$$\text{Eq. (1.6) + équation de continuité:}\ \ \frac{D\rho}{Dt} + \rho\vec{\nabla}.\vec{v} = 0 \ \Rightarrow\ \delta\rho = f(\vec{\xi}) \tag{1.8}$$

$$\text{Eq. (1.8) + équation d'adiabaticité:}\ \ \delta P = c^2\delta\rho \ \Rightarrow\ \delta P = g(\vec{\xi}) \tag{1.9}$$

$$\text{Eq. (1.8) + équation de Laplace:}\ \ \Delta\Phi = 4\pi\rho G \ \Rightarrow\ \delta(\vec{\nabla}\Phi) = h(\vec{\xi}) \tag{1.10}$$

où c représente la vitesse du son et G la constante universelle de la gravitation. Il est alors possible d'exprimer explicitement les fonctions f,g,h et d'en déduire l'expression d'un opérateur intégro-différentiel $\mathcal{L}$ tel que le second membre de l'équation (1.7) se réduise à $\mathcal{L}(\vec{\xi})$. De plus, on peut montrer que cet opérateur linéaire est auto-adjoint (Lynden-Bell & Ostriker 1967). La démonstration de cette propriété suppose que la pression et la densité s'annulent sur la surface du soleil à l'équilibre. Si l'on prend la photosphère comme surface, cette condition n'est pas vérifiée mais la correction qui en résulte est faible pour les modes de pression dont la fréquence ($\sim 3mHz$) est inférieure à la fréquence de coupure acoustique de l'atmosphère solaire ($\sim 5mHz$).

L'équation linéarisée du mouvement (1.7) peut donc s'écrire:

$$-\omega^2\vec{\xi} - 2i\omega\left(\mathcal{M}\vec{\xi} + \vec{\Omega}_T \wedge \vec{\xi}\right) + \mathcal{M}^2\vec{\xi} + 2\vec{\Omega}_T \wedge \mathcal{M}\vec{\xi} + \vec{\Omega}_T \wedge \vec{\Omega}_T \wedge \vec{\xi} = -\mathcal{L}\vec{\xi} \tag{1.11}$$

Au premier ordre en Ω, on peut négliger le terme en $\mathcal{M}^2$ ainsi que les deux derniers termes du membre de gauche sachant $\Omega_T < \Omega$. On note que garder ces termes à ce niveau ne serait pas cohérent avec le fait que l'on n'a pas pris en compte la distorsion de la structure d'équilibre par la force centrifuge qui est du même ordre. En projetant (produit scalaire) cette équation sur $\rho_o \vec{\xi}^* dV_o$ (où $*$ dénote le complexe conjugué et $\rho_o dV_o$ la masse contenue dans l'élément de volume dV_o du soleil à l'équilibre) et en intégrant sur le volume du soleil (à l'équilibre), on obtient au premier ordre en Ω :

$$a\ \omega^2 + b\ \omega - c = 0 \quad \text{avec:} \quad \begin{cases} a = \int_{V_o} \vec{\xi}^* . \vec{\xi}\ \rho_o\ dV_o \\ b = 2i \int_{V_o} \vec{\xi}^* . \left(\mathcal{M} + \vec{\Omega}_T \wedge \right) \vec{\xi}\ \rho_o\ dV_o \\ c = \int_{V_o} \vec{\xi}^* . \mathcal{L} \vec{\xi}\ \rho_o\ dV_o \end{cases} \tag{1.12}$$

On montre, en utilisant le fait que $\mathcal{L}$ est un opérateur auto-adjoint, que les termes a b et c sont réels. Le principe variationnel démontré par Lynden-Bell et Ostriker (1967) établit que lorsque les solutions ω de (1.12) sont réelles, et c'est le cas pour les oscillations solaires, elles sont également stationnaires par rapport aux variations de $\vec{\xi}$. Autrement dit, la perturbation d'ordre ϵ sur les fonctions propres $\vec{\xi}$ engendrée par la 'force' de Coriolis n'entraine qu'un changement d'ordre ϵ^2 sur ω. Donc, si on calcule ω en utilisant l'équation (1.12) et un modèle sans rotation pour évaluer les fonctions propres $\vec{\xi}$, ω sera exacte au premier ordre en ϵ.

1.3 Calcul des splittings

Il s'agit maintenant d'utiliser le principe variationnel pour comparer les fréquences des modes d'oscillations dans les modèles avec et sans rotation. La différence entre ces deux quantités constitue le splitting rotationnel.

Pour une rotation sidérale nulle l'équation aux valeurs propres (1.11) s'écrit dans un repère d'inertie ($\mathcal{M} \equiv 0$, $\Omega_T \equiv 0$):

$$\omega^{(o)^2} \vec{\xi}^{(o)} = \mathcal{L}^{(o)} \vec{\xi}^{(o)} \tag{1.13}$$

Les modes propres d'oscillations vérifiant cette équation peuvent (voir par exemple Unno et al. 1989, Sect. 13.3) être développés en utilisant la base complète des harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta, \varphi)$ (cf. Annexe A). On écrit donc:

$$\vec{\xi}_{nl}^{(o)} = \sum_{m=-l}^{l} \vec{\xi}_{nlm}^{(o)} \quad \text{avec:} \quad \begin{cases} \vec{\xi}_{nlm}^{(o)} = \left(\vec{e}_r \zeta_{nl}^{(o)}(r) + \eta_{nl}^{(o)}(r) \vec{\nabla}_h \right) Y_l^m(\theta, \varphi) \\ \vec{\nabla}_h = \vec{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\vec{e}_\varphi}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{cases} \tag{1.14}$$

On peut ainsi obtenir, par résolution de l'équation aux valeurs propres (1.13), les composantes radiales $\zeta_{nl}^{(o)}$ et horizontales $\eta_{nl}^{(o)}$ du déplacement de chaque mode propre

d'oscillation caractérisé par l'ordre radial n et le degré l. Dans le modèle sans rotation $\vec{v}_o = 0$ et donc $b = 0$ (Eq. (1.12)) d'où l'expression de la pulsation d'un mode (n, l, m):

$$\omega^{(o)^2} = c/a. \tag{1.15}$$

Les coefficients a et c dépendent de n et l mais pas de m. Les $2l+1$ fonctions propres $\vec{\xi}^{(o)}_{nlm}$ $m = -l, ..l$ correspondent à des oscillations ayant toutes la même pulsation $\omega^{(o)} \equiv \omega^{(o)}_{nl}$. Dans le modèle sans rotation, le spectre est donc *dégénéré en m*. Notons de plus que ce modèle étant à symétrie sphérique, il n'existe aucun axe privilégié. Le choix de l'axe polaire $\theta = 0$ est donc ici arbitraire.

On note $\delta\omega$ la perturbation de la pulsation par rapport au modèle sans rotation (c'est le splitting!). Dans le modèle avec rotation, la pulsation $\omega = \omega^{(o)} + \delta\omega$ doit être solution de l'expression variationnelle (1.12). Sachant $\delta\omega/\omega^{(o)} \simeq 10^{-4}$, on a: $\omega^2 \simeq \omega^{(o)^2} + 2\omega^{(o)}\delta\omega$ et, en utilisant l'expression (1.15) de $\omega^{(o)}$, on obtient:

$$\delta\omega = -b/2a \Leftrightarrow \delta\omega = \frac{-i\int_{V_o} \vec{\xi}^{(o)*}_{nlm}.\left((\vec{v}_o.\vec{\nabla}) + \vec{\Omega}_T\wedge\right)\vec{\xi}^{(o)}_{nlm}\ \rho_o\ dV_o}{\int_{V_o} |\vec{\xi}^{(o)}_{nlm}|^2\ \rho_o\ dV_o} \tag{1.16}$$

Ce terme est réel. En effet, pour des oscillations adiabatiques on peut prendre $\zeta^{(o)}_{nl}(r)$ et $\eta^{(o)}_{nl}(r)$ réelles et, en utilisant la symétrie axiale (1.1) et le développement (1.14) des modes propres, on obtient facilement les relations:

$$\vec{\xi}^{(o)*}_{nlm}.(\vec{v}_o.\vec{\nabla})\vec{\xi}^{(o)}_{nlm} = im\Omega(r,\theta)|\vec{\xi}^{(o)}_{nlm}|^2 + \vec{\xi}^{(o)*}_{nlm}.(\vec{\Omega}(r,\theta)\wedge\vec{\xi}^{(o)}_{nlm}) \tag{1.17}$$

et :

$$\vec{\xi}^{(o)*}_{nlm}.(\vec{\Omega}(r,\theta)\wedge\vec{\xi}^{(o)}_{nlm}) = -2im\frac{\Omega(r,\theta)}{2\pi}\eta^{(o)}_{nl}(r)\left[\zeta^{(o)}_{nl}(r)\tilde{P}^m_l(\mu)^2 + \eta^{(o)}_{nl}(r)\frac{\mu\tilde{P}^m_l(\mu)}{\sin\theta}\frac{d\tilde{P}^m_l(\mu)}{d\theta}\right] \tag{1.18}$$

où l'on a posé $\mu = cos\theta$ et où $\tilde{P}^m_l(\mu)$ sont les fonctions de Legendre normalisées définies annexe A.
L'équation différentielle vérifiée par les fonctions de Legendre (cf. Eq. (A.2)) permet de montrer:

$$I_{nl} \equiv \int_{V_o} |\vec{\xi}^{(o)}_{nlm}|^2\ \rho_o\ dV_o = \int_0^{R_\odot} \left[\zeta^{(o)^2}_{nl}(r) + L^2\eta^{(o)^2}_{nl}(r)\right]\ \rho_o r^2 dr \tag{1.19}$$

En utilisant la normalisation des fonctions de Legendre Eq. (A.5), une simple intégration par partie donne:

$$\int_0^\pi \frac{\mu\tilde{P}^m_l(\mu)}{\sin\theta}\frac{d\tilde{P}^m_l(\mu)}{d\theta}\sin\theta\ d\theta = \frac{1}{2}. \tag{1.20}$$

Ceci permet, en utilisant (1.18), de réduire le terme en $\vec{\Omega}_T$ dans (1.16) à une intégrale sur le rayon solaire:

$$-i \int_{V_o} \vec{\xi}^{(o)*}_{nlm} . \left(\vec{\Omega}_T \wedge \vec{\xi}^{(o)}_{nlm} \right) \ \rho_o \, dV_o = -m \ \Omega_T \ C_{nl} \tag{1.21}$$

où l'on a défini le *terme de Coriolis* C_{nl} par:

$$C_{nl} \equiv \frac{1}{I_{nl}} \int_0^{R_\odot} \left(\eta^{(o)^2}_{nl}(r) + 2\eta^{(o)}_{nl} \zeta^{(o)}_{nl}(r) \right) \rho_o(r) r^2 \ dr \tag{1.22}$$

Finalement, le splitting s'exprime sous la forme:

$$\delta\omega_{nlm} = m \left(-\Omega_T \ C_{nl} + \int_0^{R_\odot} \int_{-1}^{1} K_{nlm}(r,\mu) \Omega(r,\theta) \ dr d\mu \right) \tag{1.23}$$

avec:

$$K_{nlm}(r,\mu) = \frac{\rho_o(r) r^2}{I_{nl}} \left\{ \left(\zeta^{(o)^2}_{nl}(r) - 2\zeta^{(o)}_{nl}(r) \eta^{(o)}_{nl}(r) \right) \tilde{P}^m_l(\mu)^2 \ + \ \eta^{(o)^2}_{nl}(r) \left[\left(\frac{d\tilde{P}^m_l(\mu)}{d\theta} \right)^2 + \frac{m^2}{\sin^2\theta} \tilde{P}^m_l(\mu)^2 - 2 \frac{\mu \tilde{P}^m_l(\mu)}{\sin\theta} \frac{d\tilde{P}^m_l(\mu)}{d\theta} \right] \right\} \tag{1.24}$$

On note que le splitting dépend de l'ordre azimutal m: la dégénérescence en m du spectre des oscillations est levée par la rotation. Cette expression relie les splittings synodiques (mesurés depuis la terre) à la rotation solaire synodique.

$$\left(\frac{\delta\omega_{nlm}}{m} \right)_{syn} = \int_0^{R_\odot} \int_{-1}^{1} K_{nlm}(r,\mu) \ \Omega_{syn}(r,\mu) \ dr \ d\mu - C_{nl} \ \Omega_T \tag{1.25}$$

Il est intéressant d'en déduire deux relations mettant en jeu les quantités sidérales.

1. La relation entre splittings sidéraux et la rotation sidérale s'obtient en posant $\Omega_T = 0$ (on se place dans un repère d'inertie):

$$\left(\frac{\delta\omega_{nlm}}{m} \right)_{sid} = \int_o^{R_\odot} \int_{-1}^{1} K_{nlm}(r,\mu) \ \Omega_{sid}(r,\mu) \ dr \ d\mu \tag{1.26}$$

Cette expression correspond au résultat obtenu par Hansen et al. (1977) et Gough (1981) mentionné dans l'introduction. Le résultat obtenu par Ledoux (1951) pour une étoile en rotation rigide $\Omega_{sid} = \Omega_o$ (c.à.d. $(\delta\omega_{nlm}/m)_{sid} = (1 - C_{nl})\Omega_o$, cf. Eq. (5)) se retrouve aisément à partir des équations (1.16), (1.17) et (1.18) en utilisant les propriétés (A.5) et (1.20). Le *terme de Coriolis* est maintenant défini par (1.22). Pour les modes acoustiques de degrés ou d'ordres radiaux élevés on a $C_{nl} \ll 1$ (Voir **Fig. 1.1**). Ceci signifie que, pour les modes acoustiques, le splitting

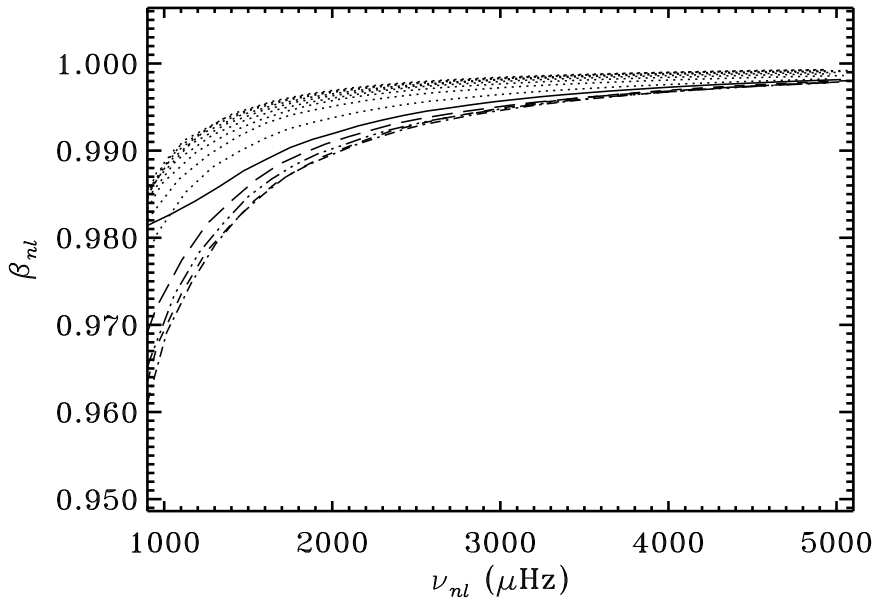


FIG. 1.1 – *Coefficients $\beta_{nl} = 1 - C_{nl}$ obtenus pour des modes acoustiques dans un modèle solaire standard. Les coefficients correspondant à un même degré l sont reliés par une ligne. $l = 1$: ———; $l = 2$: ----------; $l = 3$: —·—·—·; $l = 4$: —···—···—···; $l = 5$: ------; $l = 10, 15, ..., 50$: ····· (β_{nl} augmente avec l). D'après Christensen-Dalsgaard (1997).*

rotationnel est dominé par l'advection et l'écart de pulsations entre deux modes ayant des ordres azimutaux m et $m \pm 1$ est donné approximativement par la rotation elle même. Si l'on assimile la rotation solaire à une rotation rigide égale à la rotation de surface à mi-latitude donnée par la loi de Faye (2) on obtient un splitting sidéral entre modes adjacents de l'ordre de 420nHz.

2. Une relation utile est celle entre les splittings synodiques mesurés et la rotation sidérale que l'on veut déterminer. On l'obtient en écrivant $\Omega_{syn} = \Omega_{sid} - \Omega_T$ dans (1.25) et en utilisant la relation de Ledoux pour une rotation rigide:

$$\left(\frac{\delta\omega_{nlm}}{m}\right)_{syn} + \Omega_T = \int_0^{R_\odot}\int_{-1}^{1} K_{nlm}(r,\mu)\Omega_{sid}(r,\mu)\; dr\; d\mu \qquad (1.27)$$

Ceci montre la relation $(\delta\omega/m)_{sid} = (\delta\omega/m)_{syn} + 31.7$nHz qui est par ailleurs évidente si on suit le raisonnement (4). Il est intéressant de noter que même pour une rotation sidérale nulle le splitting synodique dépend linéairement de m. L'advection due à la seule rotation terrestre lève la dégénérescence.

Chapitre 2

Mesures des splittings - Utilisation des 'coefficients a'

2.1 Diagrammes m-ν

La mesure de splittings se fait sur le spectre des fréquences d'oscillations obtenu après projection des observations (images du soleil en vitesses ou en intensités) sur les harmoniques sphériques (Hill 1998, Roca Cortés 1998). On obtient ainsi un diagramme degré azimutal - fréquence (diagramme $m-\nu$). La **figure 2.1** donne une représentation classique d'un tel diagramme obtenu à partir d'observations faites au sol sur un seul site et la **figure 2.2** donne, dans une représentation 3D en niveau de gris, un exemple plus récent de diagramme obtenu en utilisant le réseau GONG d'observatoires au sol.

La résolution spectrale n'étant en général pas suffisante pour séparer les pics individuellement pour chaque m, on décrit la dépendance en m de la fréquence pour chaque mode (n,l) observé en décrivant les lignes du spectre $m-\nu$ à l'aide de leurs projections sur des polynômes $\mathcal{P}_j^l(m)$ (Voir Schou 1992). On obtient:

$$\nu_{nlm} - \nu_{nl0} \simeq \sum_{j=0}^{N^{nl}} a_j^{nl} \mathcal{P}_j^l(m) \tag{2.1}$$

où le nombre N^{nl} de polynômes utilisés dépend de la qualité des observations pour le mode considéré. Par exemple, le maximum de coefficients a calculés est de 3 pour les données LOWL, 6 pour les données BBSO et jusqu'à 36 pour les données MDI. Le réseau GONG fournit également une estimation, pour chaque mode (n,l), de la fréquence de chaque pic du multiplet ce qui permet d'accéder directement aux mesures individuelles de splittings.

2.2 Les coefficients a et les polynômes de projection

Plusieurs types de polynômes ont été utilisés pour décrire les observations. Historiquement, Duvall et al. (1986) ont utilisé $\mathcal{P}_j^l(m) = LP_j(m/L)$ où $L = \sqrt{l(l+1)}$ et

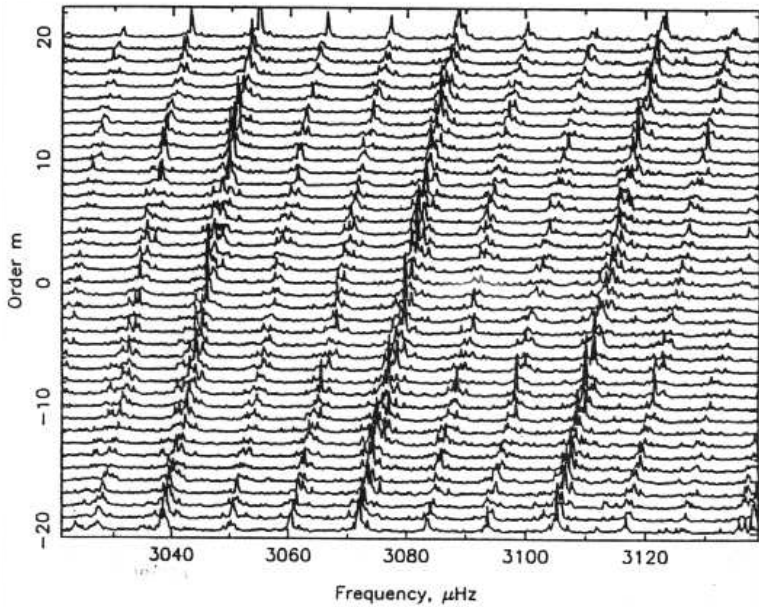


FIG. 2.1 – *Spectres de puissance des harmoniques sphériques* $l = 20$, $m = -20, .., +20$ *obtenus au Big Bear Solar Observatory. Les pics dans le spectre* ($m = 0$) *se trouvant aux fréquences* $\nu = 3047$, 3080 *et* $3114\mu Hz$ *correspondent aux modes* $(n, l) = (15, 19)$, $(15, 20)$ *et* $(15, 21)$. *La présence des mode* $l = 19$ *et* $l = 21$ *dans le spectre du mode* $l = 20$ *provient du fait que l'on n'observe pas l'ensemble de la surface solaire (seulement un peu moins de la moitié) et que les harmoniques sphériques sur lesquels on projette les observations pour obtenir ce spectre ne sont pas orthogonaux sur la seule partie observable du disque. Les autres pics, séparés de* $\pm 11.6\mu Hz$, *sont la signature dans le spectre de la fenêtre d'observation interrompue toutes les nuits. La différence en fréquence entre les différents pics en fonction de* m *représente le splitting. D'après Libbrecht (1989).*

P_j sont les polynômes de Legendre; puis Brown & Morrow (1987) ont utilisé $\mathcal{P}_j^l(m) = lP_j(m/l)$ pour faciliter la comparaison avec des résultats théoriques. Ces deux formes de polynôme resteront utilisées (notamment par Woodard & Libbrecht (1993) pour les mesures du BBSO réalisées entre 1986 et 1990) jusqu'à ce que Ritzwoller & Lavely (1991) fassent remarquer qu'il serait avantageux de choisir des polynômes orthogonaux sur l'espace discret en m. En effet, le fait que les polynômes de Legendre ne soient pas orthogonaux sur cet espace entraîne que la valeur d'un coefficient a dépend du nombre N^{nl} de termes utilisés dans le développement (2.1) et ces coefficients ne peuvent pas être considérés comme statistiquement indépendants (cf. annexe B). Ces auteurs suggèrent donc d'utiliser des polynômes orthonormaux $\mathcal{P}_j^l(m) = \beta_{jl}^m$ définis par:

$$\sum_{m=-l}^{m=+l} \beta_{jl}^m \beta_{kl}^m = \delta_{jk} \tag{2.2}$$

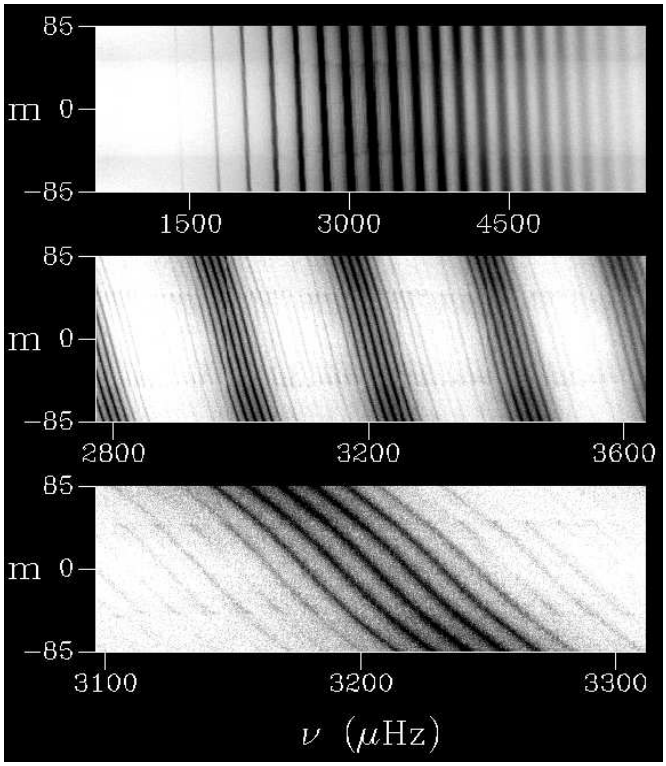


FIG. 2.2 – *Spectre $m-\nu$ pour $l = 85$ obtenu entre le 23 Aôut 1995 et le 18 Février 1996 par le réseau GONG. La figure du haut montre l'ensemble du spectre, celle du milieu correspond aux modes $n = 7, 8, 9$ et celle du bas est un agrandissement du spectre du mode $n = 8$. Les problèmes liés aux harmoniques du jour sont en grande partie évités par l'utilisation du réseau. Cependant le spectre est montré à différentes échelles pour mettre en évidence qu'il subsiste des pics secondaires ('side lobes') provenant du fait que l'on n'observe pas l'ensemble de la surface solaire. On note que la convention pour le choix du signe de m est différente de celle de la figure précédente. Ici un ordre azimutal négatif correspond à un* mode prograde *(c.à.d. se propageant dans le sens de la rotation) dont la fréquence est augmentée par rapport à celle du mode $m = 0$. D'après Hill et al. (1996).*

Ces polynômes sont reliés simplement aux coefficients de Clebsh-Gordon $C^{jm}_{j_1 m_1 j_2 m_2}$ (e.g. Edmonds 1960) par:

$$\beta^m_{jl} = \sqrt{\frac{2j+1}{2l+1}} C^{lm}_{lmj0} \tag{2.3}$$

mais ne seront en fait jamais utilisés ainsi normalisés. Schou et al. (1994) utilisent des polynômes $\mathcal{S}^m_{j,l}$ orthogonaux, c'est à dire:

$$\sum_{m=-l}^{m=+l} \mathcal{S}^m_{j,l} \mathcal{S}^m_{k,l} = 0 \quad \text{si } j \neq k, \tag{2.4}$$

mais, par souci de compatibilité avec les expressions en polynômes de Legendre, ils les normalisent tel que:

$$\mathcal{S}^l_{j,l} = l \tag{2.5}$$

En effet, les polynômes ainsi définis sont toujours, pour j fixé, asympotiquement égaux pour $l \gg 1$ à la fois à $lP_j(l/m)$ et à $LPj(L/m)$. Les équations (2.4) et (2.5) définissent complètement ces polynômes. On obtient [1]:

$$\mathcal{S}^m_{j,l} = \frac{l\sqrt{(2l-j)!(2l+j+1)!}}{(2l)!\sqrt{2l+1}} C^{lm}_{lmj0} \tag{2.6}$$

Enfin les splittings obtenus par le réseau GONG sont exprimés en fonction de polynômes orthogonaux $\mathcal{P}^l_j(m) = \gamma^m_{sl}$ normalisés d'une troisième manière:

$$\gamma^m_{jl} = L^2 \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}}\ C^{l1}_{l1j0}\ \ C^{lm}_{lmj0} \tag{2.7}$$

L'intérêt de ce choix est lié à l'utilisation des méthodes d'inversion dîte 1.5D qui suppose connue la forme de la dépendance en latitude de la rotation. Une synthèse des méthodes de ce type a été réalisée dans Corbard (1998).

Des relations de récurrence basées sur les propriétés des coefficients de Clebsh-Gordon peuvent être trouvées dans Ritzwoller & Lavely (1991) et Pijpers (1997) [2] permettent d'obtenir simplement les polynômes γ^m_{jl} et $\mathcal{S}^m_{j,l}$. Schou et al. (1994) construisent les polynômes $\mathcal{S}^m_{j,l}$ par simple orthogonalisation de Gram-Schmit à partir des polynômes de Legendre.

Les différents polynômes $\mathcal{P}^l_j(m)$ utilisés sont de même parité que j. Les splittings définis par (3.16) étant des fonctions impaires de m, seuls les coefficients a d'indices impairs seront reliés à la rotation. Les coefficients d'indices pairs sont d'amplitudes beaucoup plus faibles et peuvent être reliés aux effets de la force centrifuge, du champ magnétique ou de tout écart à la symétrie sphérique. A partir de (2.1), on obtient:

1. Cette formule est donnée par Kosovichev et al. (1997) mais avec un choix moins conventionnel pour la phase des Clebsh-Gordon (C^{lm}_{lmj0} est noté C^{lm}_{j0lm})

2. Dans la formule de récurrence obtenue par Pijpers (1997) (Eq. (46)), les coefficients de Clebsh-Gordon, notés $< j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 jm >$ doivent en fait être multipliés par $(-1)^m$ si on utilise la convention d'Abramowitz & Stegum (1972) comme citée par l'auteur (voir aussi Edmonds (1960)).

$$\delta\omega_{nlm} = \frac{\omega_{nlm} - \omega_{nl,-m}}{2} \simeq 2\pi \sum_{j=0}^{N^{nl}} a_{2j+1}^{nl} \mathcal{P}_{2j+1}^{l}(m) \tag{2.8}$$

De plus pour tous ces polynômes on a $\mathcal{P}_1^l(m) \propto m$, si bien que le coefficient a_1 décrit la dépendance linéaire en m du splitting. Nous avons vu que pour une étoile en rotation rigide, seule cette composante existe. Pour le Soleil, les diagrammes $m-\nu$ (**Figs. 2.1, 2.2**) montrent clairement que la dépendance en m du splitting est quasi-linéaire. Le coefficient a_1 sera donc le terme dominant tandis que les autres coefficients impairs décriront l'écart (faible) à la linéarité induit par la dépendance en latitude de la rotation solaire. Cette non linéarité des lignes du diagramme $m-\nu$ est bien visible sur l'agrandissement **Fig. 2.2**.

2.3 Formulation 2D pour les coefficients a

2.3.1 Cas général

Si l'on suppose que les coefficients a sont obtenus par une méthode de moindres carrés à partir des splittings individuels et de la relation (2.8), alors il existe des polynômes ${}^{\dagger}\mathcal{P}_j^l(m)$, appelés 'pseudo inverses de $\mathcal{P}_j^l(m)$' (cf. annexe B) tels que:

$$2\pi\ a_{2j+1}^{nl} \simeq \sum_{m=1,l} {}^{\dagger}\mathcal{P}_j^l(m)\delta\omega_{nlm} \tag{2.9}$$

En pratique il n'est pas toujours possible d'identifier tous les pics dans le diagramme $m-\nu$ (notamment pour les degrés l élevés), et la procédure pour obtenir les coefficients a peut ne pas être une simple méthode de moindres carrés (Schou 1992, voir aussi Appourchaux (1998) pour les splittings de bas degrés). Cependant la relation linéaire (2.9) peut être considérée comme une bonne approximation de la relation entre splittings et coefficients a. Si l'on reporte (2.9) dans l'équation 2D (1.26), on obtient une équation intégrale 2D reliant chaque coefficient a à la rotation par:

$$2\pi\ a_{2j+1}^{nl} \simeq 2\int_0^{R_\odot}\int_0^1 \underbrace{\sum_{m=1}^{l} m\,{}^{\dagger}\mathcal{P}_{2j+1}^{l}(m) K_{nlm}(r,\mu)}_{K_{nlj}^{(a)}(r,\mu)} \Omega(r,\mu) dr d\mu, \tag{2.10}$$

ce qui définit le noyau $K_{nlj}^{(a)}(r,\mu)$ relatifs aux coefficients a.

2.3.2 Cas particulier des polynômes orthogonaux - séparabilité

Dans le cas $\mathcal{P}_j^l(m) = \mathcal{S}_{jl}^m$, on obtient une expression du noyau $K_{nlj}^{(a)}(r,\mu)$ sous la forme (Pijpers 1997):

$$K_{nlj}^{(a)}(r,\mu) = K_{nl}(r) W_{lj}^{(a)}(\mu) + L_{nl}(r) X_{lj}^{(a)}(\mu) \tag{2.11}$$

où $K_{nl}(r)$ et $L_{nl}(r)$ sont donnés respectivement par (3.3) et (3.4) et:

$$W_{lj}^{(a)}(\mu) = -\frac{1}{2}\frac{(4j+3)v_{2j+1}^{(l)}}{(j+1)(2j+1)}\sin\theta\ P_{2j+1}^{1}(\mu) \tag{2.12}$$

$$X_{lj}^{(a)}(\mu) = -j(2j+3)\ W_{lj}^{(a)}(\mu) \tag{2.13}$$

$v_{2j+1}^{(l)}$ est donné par (A.10). Cette décomposition explicite du noyau 2D en la somme de deux noyaux séparables permet de traiter l'inversion des coefficients a d'une manière identique à celle des splittings. De plus, on note que ces noyaux sont tels que $\int_{-1}^{1} W_{lj}^{(a)}(\mu)d\mu = \delta_{j0}$ et $\int_{-1}^{1} X_{lj}^{(a)}(\mu)d\mu = 0$. En première approximation, et pour l élevé on peut donc négliger le deuxième terme de la somme (2.11) (cf. §3.1.3). Enfin notons que l'on trouve facilement les noyaux liés à l'utilisation des polynômes γ_{jl}^{m} en utilisant (A.9) et que la formule (A.11) permet de passer, pour l élevé, au cas où les splittings sont projetés sur des polynômes de Legendre.

Chapitre 3

Le problème inverse

Le chapitre 1 a présenté ce que l'on appelle le *problème direct* qui consiste à prédire les observations en se donnant un modèle solaire et une rotation.

Problème direct: rotation a priori + modèle $\longrightarrow$ prédiction des observations

Le *problème inverse* au contraire a pour but d'utiliser les données observationnelles pour en déduire une quantité physique, ici la rotation interne:

Problème inverse: observations + modèle $\longrightarrow$ estimation de la rotation

Il est évident que les deux problèmes sont étroitement liés car ils utilisent le même modèle du Soleil et la même théorie des oscillations. De plus, la résolution du problème inverse nécessite de définir un certain *critère* que doit satisfaire la solution et qui peut être basé sur l'accord entre les données prédites et les données observées et donc faire intervenir le problème direct. Nous verrons par la suite que l'on peut choisir d'autres critères locaux (cf. §3.2.2). Kirsch (1996) distingue d'une manière très générale le problème inverse du problème direct associé par le fait que le problème inverse est *mal posé* alors que le problème direct est *bien posé* au sens de Hadamard (1923). Ceci conduit à la nécessité de *régulariser* le problème inverse en utilisant une information a priori sur la forme de la solution.

Après avoir étudié les propriétés des noyaux de rotation 2D, je me restreindrai en général dans la suite de ce chapitre au cas 1D pour la présentation des méthodes inverses qui sont facilement généralisables, dans leurs principes, au cas bidimensionnel. Les points particuliers pour lesquels le problème 2D pose des difficultés nouvelles seront néanmoins soulignés.

3.1 Propriétés des noyaux de rotation

$$\left(\frac{\delta\omega_{nlm}}{m}\right)_{sid} = \int_o^{R_\odot}\int_{-1}^{1} K_{nlm}(r,\mu)\ \Omega_{sid}(r,\mu)\ dr\ d\mu \tag{3.1}$$

La nature du problème inverse qui consiste à déduire la rotation solaire de l'observation des splittings à partir de cette équation, est contenue dans la forme des noyaux de rotation $K_{nlm}(r,\mu)$ donnés par l'équation (1.24).

Deux exemples de ces noyaux bidimensionnels sont donnés **Fig. 3.1** montrant leurs natures oscillantes caractérisées par n nœuds radiaux et $\frac{l-m}{2}$ nœuds en latitude (entre l'équateur et le pôle, soit $l-m$ nœuds d'un pôle à l'autre). On remarque immédiatement que ces noyaux n'ont pas d'amplitude dans tout l'intérieur solaire et sont au contraire limités dans un certain domaine en rayon et en latitude. Nous verrons par la suite comment ce domaine peut être caractérisé en fonction des entiers n, l et m pour chaque mode propre.

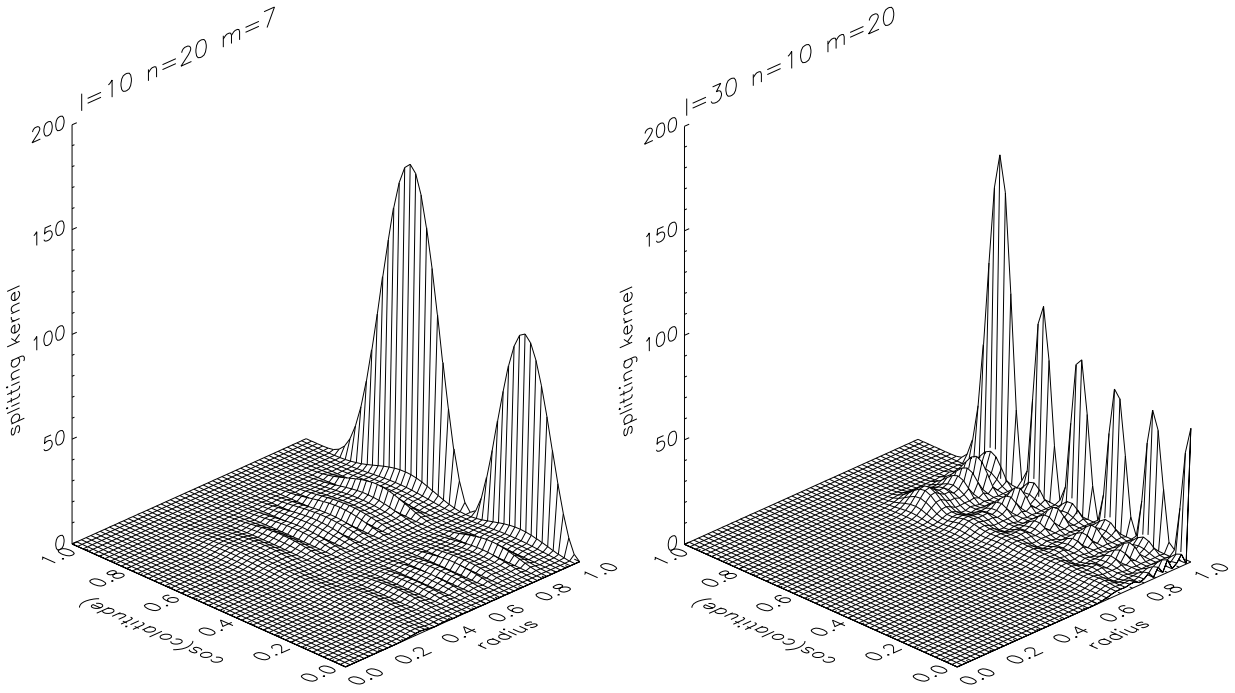


FIG. 3.1 – *Exemples de noyaux de rotation $K_{nlm}(r,\mu)$ pour $l = 10$, $n = 20$, $m = 7$ (gauche) et $l = 30$, $n = 10$, $m = 20$ (droite). D'après Sekii (1997).*

Ces noyaux (Eq. (1.24)) peuvent être écrits sous plusieurs formes, mais la décomposition suivante est pratique pour l'analyse de leurs propriétés:

$$K_{nlm}(r,\mu) = K_{nl}(r)W_{lm}(\mu) + L_{nl}(r)X_{lm}(\mu) \tag{3.2}$$

avec:

$$K_{nl}(r) = [\zeta_{nl}^{(o)^2} + (L^2-1)\eta_{nl}^{(o)^2} - 2\zeta_{nl}^{(o)}\eta_{nl}^{(o)}]\ \rho r^2\ /I_{nl} \quad (3.3)$$

$$L_{nl}(r) = L^2\eta_{nl}^{(o)^2}\ \rho r^2\ /I_{nl} \quad (3.4)$$

$$W_{lm}(\mu) = \tilde{P}_l^m(\mu)^2 \quad (3.5)$$

$$X_{lm}(\mu) = L^{-2}\left\{\frac{1-\mu^2}{2}\frac{d^2}{d\mu^2}W_{lm}(\mu) + W_{lm}(\mu)\right\} \quad (3.6)$$

où l'on a noté $L^2 = l(l+1)$ et I_{nl} est donné par l'équation (1.19).

3.1.1 Noyaux de rotation en rayon: $K_{nl}(r)$ et $L_{nl}(r)$

La **figure 3.2** donne des exemples des deux composantes radiales des noyaux de rotations (3.2) pour différents modes. Les modes de pression observés peuvent être décrits par une approximation locale en ondes planes valable asymptotiquement pour les hautes fréquences et satisfont à une relation de dispersion de la forme:

$$K_r^2 + K_h^2 \simeq \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2} \quad (3.7)$$

où K_r et K_h représentent respectivement le nombre d'onde radial et le nombre d'onde horizontal, $c(r)$ la vitesse du son et $\omega_c(r)$ la fréquence de coupure acoustique qui reste très petite ($< 600\mu$Hz) dans tout l'intérieur du Soleil et devient importante (jusqu'à environ 5000μHz) seulement dans une petite couche très près de la surface (au dessus de $0.9995R_\odot$).

Le nombre d'onde horizontal est défini par:

$$\frac{1}{r^2}\nabla_h^2 f = -K_h^2 f \quad (3.8)$$

où $\vec{\nabla}_h$ est donné par l'équation (1.14). K_h^2 est donc entièrement fixé par le choix du développement sur les harmoniques sphériques (cf. Eq. (1.14)) des quantités perturbées (notées f dans (3.8)). L'équation différentielle (A.2) vérifiée par les polynômes de Legendre donne:

$$K_h^2 = L^2/r^2 \qquad \text{avec: } L^2 = l(l+1) \quad (3.9)$$

Les ondes se propagent pour $K_r^2 > 0$, sont évanescentes pour $K_r^2 < 0$ et les points où $K_r^2 = 0$ sont nommés *points tournants* du mode. En surface la vitesse du son est faible et le nombre d'onde radial s'annule pour $\omega = \omega_c$. La fréquence de coupure acoustique est reliée au gradient de densité qui augmente très rapidement juste sous la surface solaire. On peut donc considérer que celle-ci représente un point de réflexion commun à tous les modes de pression étudiés. Dans les couches superficielles, les oscillations ont

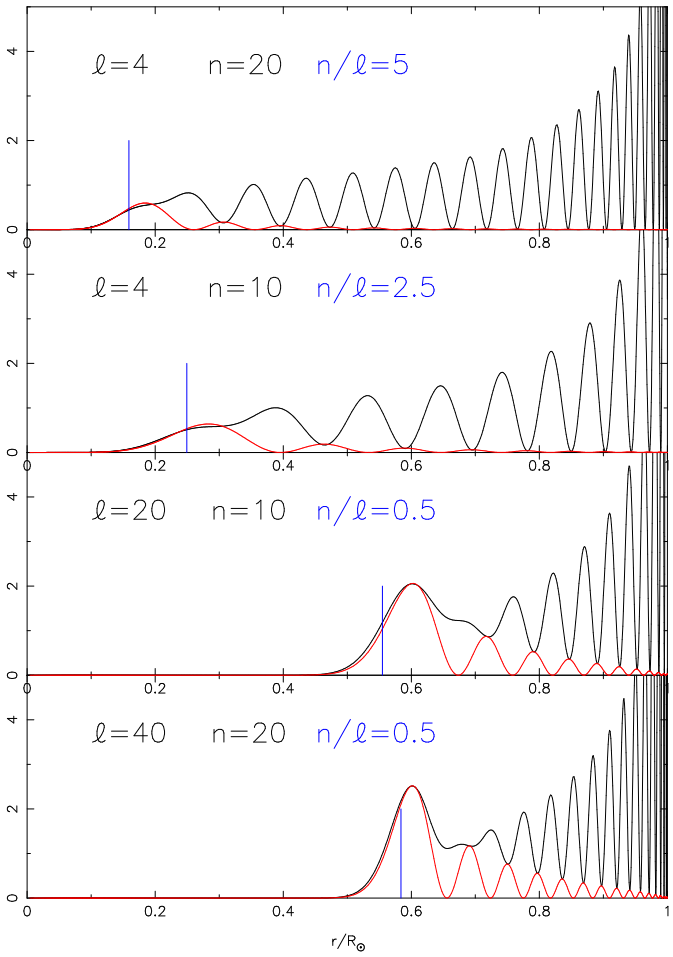


FIG. 3.2 – *Exemples des composantes radiales $K_{nl}(r)$ (Eq.(3.3), ligne pleine) et $L_{nl}(r)$ (Eq. (3.4), ligne pointillée) des noyaux de rotation pour différents modes. Les barres verticales indiquent la position du point tournant de chacun des modes considérés.*

toutes un caratère radial qui se manifeste par le fait que les noyaux $K_{nl}(r)$, fortement oscillants, y ont leur maximum d'amplitude et ne se différencient qu'au voisinage du point tournant interne. De même, le noyau $L_{nl}(r)$ n'a d'amplitude qu'au voisinage de ce point.

La profondeur du point tournant interne est fonction du mode considéré. En effet, à l'intérieur la vitesse du son augmente et la fréquence du coupure est faible. On obtient donc $K_r^2 = 0$ pour $r = r_t$ avec:

$$r_t = \frac{c(r_t)L}{\omega}, \tag{3.10}$$

ce qui définit le point tournant interne d'un mode comme étant le rayon pour lequel la fréquence du mode est égale à la *fréquence de Lamb* $\omega_l = \frac{L_c}{r}$. Sachant que la fréquence

augmente avec l'ordre radial n et que $L \simeq l$, on en déduit que, en première approximation, le point tournant est une fonction du rapport n/l. Plus ce rapport est grand (l faible) plus le mode acoustique pénétrera l'intérieur du Soleil. Les exemples de la **figure 3.2** montrent ce comportement pour trois rapports n/l différents.

L'information apportée sur la rotation dans une zone donnée dépendra du nombre de modes, de splittings connus, dont le point tournant interne se situe dans cette zone. On appelera zone bien contrainte par les observations une zone où ce nombre sera assez grand

3.1.2 Noyaux de rotation en latitude: $W_{lm}(\mu)$ et $X_{lm}(\mu)$

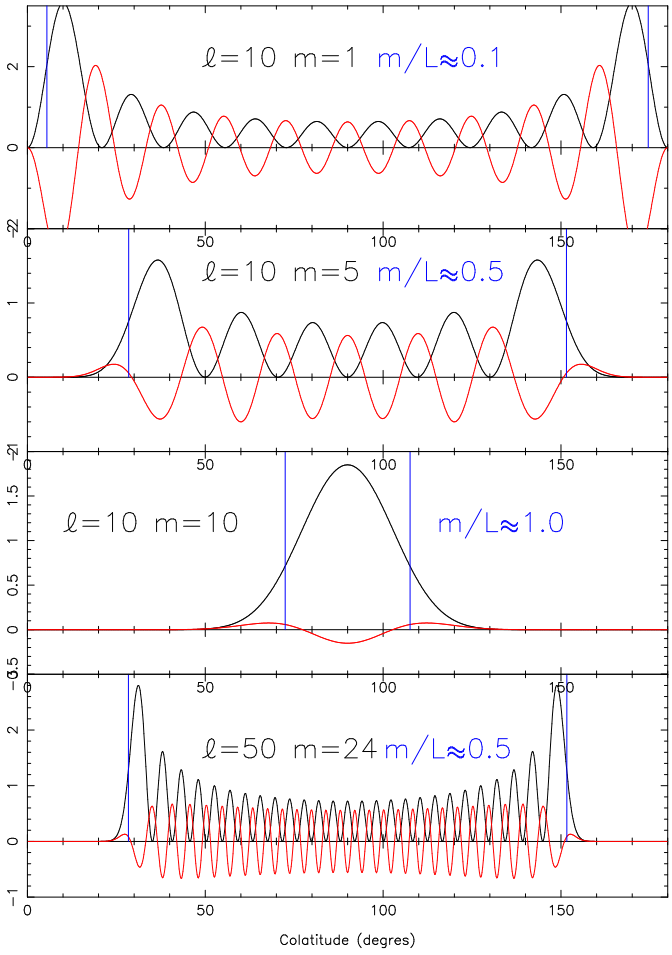


FIG. 3.3 – *Exemples des composantes latitudinales $W_{lm}(\mu)$ (Eq. (3.5), ligne pleine) et $X_{nl}(\mu)$ (Eq. (3.6), ligne pointillée) des noyaux de rotation pour différents modes. Les barres verticales indiquent la position du point tournant de chacun des modes considérés.*

L'analyse locale en onde plane permet également de définir un point tournant en latitude. La description horizontale de l'onde étant fixée par la projection sur les harmoniques sphériques, le point tournant en latitude ne dépendra que des propriétés des polynômes de Legendre. Il est néanmoins possible de se représenter les choses d'une manière plus physique en décomposant le nombre d'onde horizontal en deux composantes selon la latitude et la longitude. Soit:

$$K_h^2 = \frac{L^2}{r^2} = K_\varphi^2 + K_\theta^2; \quad \text{avec: } \nabla_h^2 = \nabla_{h\theta}^2 + \nabla_{h\varphi}^2 \quad \text{et: } \nabla_{h\varphi}^2 = \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{3.11}$$

La rotation étant supposée à symétrie axiale on peut poser pour les quantités perturbées:

$$f(r,\theta,\varphi,t) = f'(r,\theta,t)e^{im\varphi} \tag{3.12}$$

et on obtient ainsi pour la partie longitudinale du nombre d'onde:

$$\frac{1}{r^2}\nabla_{h\varphi}^2 f = -K_\varphi^2 f \;\Leftrightarrow\; K_\varphi^2 = \frac{m^2}{r^2\sin^2\theta} \tag{3.13}$$

d'où l'on tire le domaine de propagation en latitude et le *point tournant en latitude* θ_t par:

$$K_\theta^2 = \frac{1}{r^2}\left(L^2 - (m/\sin\theta)^2\right) > 0 \Leftrightarrow \pi - \theta_t < \theta < \theta_t \quad \text{avec: } \theta_t = \sin^{-1}(|m|/L) \tag{3.14}$$

La **figure 3.3** illustre sur quelques exemples le fait que le point tournant en latitude est une fonction de m/L.

Une autre propriété importante des noyaux W_{lm} et X_{lm} est que ce sont des fonctions paires de l'ordre azimutal m et de $\mu = \cos\theta$. **On ne pourra donc obtenir que la composante de la rotation qui est symétrique par rapport à l'équateur**. Soit:

$$\Omega_s(r,\mu) \equiv \frac{\Omega(r,\mu) + \Omega(r,-\mu)}{2} \tag{3.15}$$

L'intégration en latitude peut donc se faire entre l'équateur et le pôle seulement (soit μ entre 0 et 1), et cela en multipliant simplement par deux le noyau de rotation. La partie symétrique $\Omega_s(r,\mu)$ de la rotation ainsi définie sera notée simplement $\Omega(r,\mu)$ dans la suite. La parité du noyau en m donne avec l'équation (1.27):

$$\delta\omega_{nlm} = -\delta\omega_{nl,-m} = \frac{\omega_{nlm} - \omega_{nl,-m}}{2} \tag{3.16}$$

ce qui montre que, au premier ordre, **c'est la partie symétrique (par rapport à $m = 0$) de la structure fine du spectre qui peut être mise en relation avec la partie symétrique (par rapport à l'équateur) de la rotation**. Autrement dit, pour remonter à la partie symétrique de la rotation, on ne disposera au mieux que de

l observables ou splittings (et non pas $2l+1$) pour chaque mode (n,l). Nous avons vu que les conditions d'observations peuvent encore réduire ce nombre d'observables accessibles par mode en ne donnant accès qu'à un nombre limité de coefficients a de projection des splittings sur des polynômes.

La partie non symétrique de la structure fine du spectre peut être reliée aux effets de la 'force' centrifuge, du champ magnétique ou de tout écart à la symétrie sphérique qui ne seront pas considérés ici.

3.1.3 Deux approximations de l'équation intégrale

Deux approximations très utilisées de l'équation intégrale (3.1) peuvent se déduire des propriétés des noyaux de rotation bidimensionnels.

Séparabilité du noyau

La composante horizontale du déplacement $L_{nl}(r)$ (cf. Eq. (3.4)) n'a d'amplitude qu'au voisinage du point tournant interne et donc, partout sauf près du point tournant on a $K_{nl}(r) > L_{nl}(r)$, ce qui se vérifie bien sur la **figure 3.2**. Si l'on ajoute à cela que $X_{lm}(\mu)$ est oscillant autour de 0 avec $\int_{-1}^{1} X_{lm}(\mu)d\mu = 0$ alors que $W_{lm}(\mu)$ est toujours positif et tel que $\int_{-1}^{1} W_{lm}(\mu)d\mu = 1$, alors il apparaît que la contribution à l'intégrale double du second terme du noyau (3.2) doit être faible. En première approximation, on pourra donc récrire l'équation intégrale:

$$\frac{\omega_{nlm} - \omega_{nl,-m}}{2m} \simeq 2\int_0^{R_\odot}\int_0^1 K_{nl}(r)W_{lm}(\mu)\Omega(r,\mu)\ drd\mu \tag{3.17}$$

Cette équation serait exacte pour une rotation indépendante de la latitude (Cuypers 1980) et reste une très bonne approximation pour une rotation faiblement différentielle.

Dans cette approximation le noyau est séparable en rayon et latitude. Cette propriété est parfaitement visible sur la **figure 3.1** des noyaux 2D complets et a été exploitée pour mettre en oeuvre un approche dîte $R^1 \otimes R^1$ du problème inverse 2D qui consiste à séparer celui-ci en une succession de deux problèmes à une dimension (Sekii 1993a,b; Pijpers et Thompson 1996).

Relation 1D rotation équatoriale - splittings $m = l$ (modes sectoraux)

Une des propriétés de la partie angulaire des noyaux conduit à une relation 1D entre les splittings des modes sectoraux ($m = l$) et la partie équatoriale ($\Omega_{eq}(r) = \Omega(r, \mu = 0)$) de la rotation. En effet, pour les modes sectoraux de degrés l élevés le point tournant en latitude est proche de l'équateur ($\theta_t = \sin^{-1}(l/L) \simeq \pi/2$) si bien que, partant de l'approximation 2D (3.17), on obtient la relation 1D:

$$\frac{\omega_{nll} - \omega_{nl,-l}}{2l} \simeq \int_0^{R_\odot} K_{nl}(r)\Omega_{eq}(r)\ dr \tag{3.18}$$

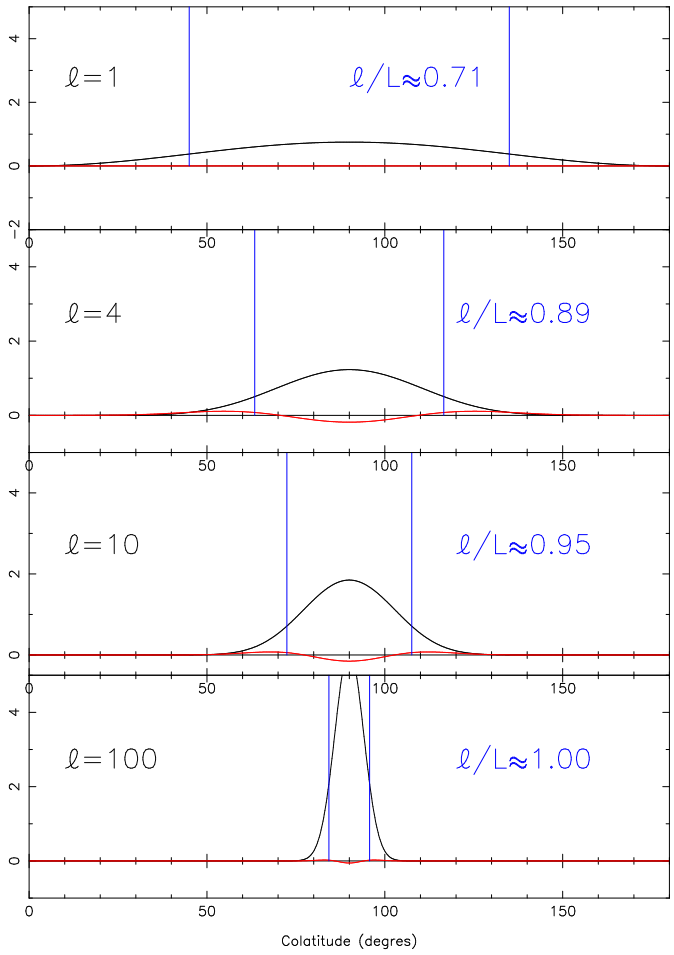


FIG. 3.4 – *Comme Fig. 3.3 mais pour les modes sectoraux* $l = 1, 4, 10, 100$. *Les points tournants sont d'autant plus éloignés de l'équateur que le rapport* l/L *est différent de 1 et donc que le degré* l *est petit.* $\theta_t(l = 1) = 45°$, $\theta_t(l = 4) \simeq 63°$, $\theta_t(l = 10) \simeq 72°$, $\theta_t(l = 100) \simeq 84°$. *On note que la composante* $X_{nl}(\mu)$ *est négligeable.*

Cette équation 1D, employée par Duvall dès 1984, reste très utilisée comme première approximation (eg. Antia et al. 1996, Rabello Soares et al. 1997, Corbard et al. 1998c (Article 3)). Il faut cependant noter qu'elle n'est pas valable pour les modes de bas degrés. La **figure 3.4** montre en effet que pour ces modes la partie angulaire du noyau de rotation peut s'étendre loin de l'équateur et ce d'autant plus que le rapport l/L s'éloigne de 1. On ne peut donc pas en toute rigueur utiliser cette équation pour remonter par inversion à la rotation de cœur solaire sans faire des hypothèses sur la dépendance en latitude de la rotation (Corbard 1997, Corbard et al. 1998e).

3.2 Les méthodes d'inversion - Cadre général

Dans cette section je donne, dans le cas 1D, les éléments indispensables pour l'interprétation des méthodes linéaires. La généralisation au cas bidimensionel et aux techniques non linéaires que j'ai plus particulièrement étudiées sont développées dans les chapitres suivants.

3.2.1 Situation du problème

Il est intéressant de reprendre la classification des problèmes inverses effectuée par Menke (1989) pour situer celui concernant la rotation solaire. Il distingue trois catégories que l'on peut écrire de manière formelle par:

$$\text{problème discret} \qquad d_i = \sum K_{ij}\Omega_j + \epsilon_i \tag{3.19}$$

$$\text{problème continu} \qquad d_i = \int K_i(r)\Omega(r)dr + \epsilon_i \tag{3.20}$$

$$\text{problème intégral} \qquad d(y) = \int K(r,y)\Omega(r)dr + \epsilon(y) \tag{3.21}$$

où d représente les observations et ϵ les erreurs. **Dans la suite ces erreurs d'observation seront supposées gaussiennes, non corrélées et d'écart type σ_i.** Cette classification est basée sur l'aspect continu ou discret des données (d) et du modèle (le noyau K et la rotation Ω). Le spectre des fréquences d'oscillations étant discret et les noyaux de rotation étant des fonctions continues du rayon, il est évident que le problème lié à la rotation solaire est un problème inverse continu. L'indice i représente dans ce cas le triplet (n,l,m).

Les équations intégrales sont rencontrées dans de très nombreux domaines (voir par exemple Craig & Brown 1986) et notamment en imagerie (Blanc-Féraud 1998). Il existe également une formulation asymptotique du problème inverse lié à la rotation solaire qui permet de passer du cas continu au cas intégral en considérant les variables $y_1 = \omega_{nlm}/L$ et $y_2 = m/L$ comme étant des variables continues (voir Gough 1996). On se ramène alors à une intégrale d' Abel à 2D (voir Sekii & Gough (1993) et les références citées). Le cas 1D pour la rotation supposée indépendante de la latitude ($y = \omega_{nl}/L$) est traité par Christensen-Dalsgaard et al. (1990) (voir aussi Christensen-Dalsgard (1997)). Enfin on note que la formulation $R^1 \otimes R^1$ nécessite la résolution d'un problème inverse intégral pour la partie latitudinale. Ce problème intégral peut également être résolu en utilisant une formulation asymptotique avec la variable $y = m/L$ supposée continue pour les degrés l élevés (Sekii 1993a, Schou et al. 1994).

Le traitement numérique d'un problème inverse continu ou intégral exige toujours que l'on se ramène au cas du problème discret. Une première étape consistera donc à discrétiser le problème par une méthode de projection ou de quadrature (voir par exemple Craig & Brown 1986) pour réduire l'intégrale à une somme discrète (cf. §3.2.3).

Notons enfin que le problème inverse continu peut toujours être vu comme la limite d'un problème inverse discret avec un nombre infini de paramètres. Ce problème est donc par nature sous déterminé (même si le nombre d'observables est très supérieur au nombre de paramètres cherchés) et donc la solution d'un tel problème n'est pas unique. Seule l'introduction d'une information a priori (par des contraintes de régularité, de surface etc..) permettra de choisir parmi les solutions possibles et on ne pourra obtenir que des *moyennes de la rotation* $< \Omega(r_0) >$ sur certains *domaines* autour de r_0. Ces notions liées à la *résolution* finie de toute méthode inverse seront développées par la suite.

3.2.2 'Critères de qualité' d'une solution

Dans cette section je définis d'une manière intuitive les 'qualités' que l'on espère pour une solution du problème inverse et je donne pour chacune de ces 'qualités' une mesure plus quantitative. Les différentes approches du problème inverse présentées par la suite se distinguent essentiellement par le choix des qualités que l'on désire voir satisfaites en priorité.

Critères globaux

1. **Accord avec les données**

   Un des premiers critères qui vient à l'esprit est la confrontation avec le problème direct: on veut, à partir de la solution $\tilde{\Omega}(r)$, pouvoir retrouver les données aux incertitudes près.

   On définit pour cela une 'mesure de l'accord avec les données' par:

   $$\chi^2(\tilde{\Omega}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d_i - \int K_i(r)\tilde{\Omega}(r)dr}{\sigma_i}\right)^2 \tag{3.22}$$

   Idéalement, on voudrait faire tendre cette quantité vers 0 mais les erreurs sur les données étant supposées gaussiennes, non corrélées et de variance σ_i^2, l'espérance mathématique pour cette quantité est 1 soit:

   $$E(\chi^2(\tilde{\Omega})) = 1 \tag{3.23}$$

   et c'est donc cette valeur que l'on cherchera à atteindre.

2. **Solution 'pas trop oscillante'**

   L'ensemble des splittings observés ne donnant accès qu'à une résolution limitée, il semble raisonnable d'exclure les solutions présentant de trop fortes oscillations. Celles ci peuvent cependant être produites par le bruit contenu dans les données et il convient donc de chercher uniquement des solutions qui ne soient 'pas trop

oscillantes'. Pour quantifier cette 'contrainte de douceur' ou *'contrainte de régularisation'* de la solution , on définit la 'douceur globale' (en rayon) de la solution $\tilde{\Omega}$ par:

$$T_r(\tilde{\Omega}) = \int \left| P(r) \frac{\partial^p \tilde{\Omega}}{\partial r^p} \right|^q dr \tag{3.24}$$

L'ordre p de la dérivée est généralement choisi égal à 1 ou 2 et dépend de notre connaissance a priori de la solution. Avec le choix $p = 1$, minimiser (3.24) revient à tendre vers une solution constante alors que le choix $p = 2$ tend à favoriser une solution linéaire. Le choix et la signification de la puissance q et de la fonction de poids $P(r)$ seront discutés au §3.2.3.

Critères locaux

1. **Une bonne résolution** On souhaite que le 'domaine' autour de r_0 sur lequel on peut obtenir une moyenne $<\Omega(r_o)>$ de la rotation soit 'étroit'. Cela peut s'écrire formellement, en notant E l'espérance mathématique:

$$E(<\Omega(r_0)>) - \Omega(r_0) \longrightarrow 0 \tag{3.25}$$

Pour une méthode linéaire, l'estimation en r_0 sera toujours une combinaison linéaire des données. On peut donc définir des coefficients $c_i(r_0)$ par:

$$\forall r_0 \; \exists \; c_i(r_0) \;\; \text{tel que:} \quad <\Omega(r_0)> = \sum_i c_i(r_0) d_i \tag{3.26}$$

En remplaçant dans (3.20), on obtient:

$$<\Omega(r_0)> = \int \kappa(r, r_0)\Omega(r)dr + \sum_i c_i(r_0)\epsilon_i \tag{3.27}$$

où l'on a défini le *noyau de résolution en* r_0 $\kappa(r, r_0)$ par:

$$\kappa(r, r_0) \equiv \sum_{i=1}^{N} c_i(r_0) K_i(r) \tag{3.28}$$

Les erreurs ϵ_i étant supposées sans biais, c'est à dire d'espérances mathématiques nulles, la relation (3.25) peut se récrire:

$$\int \kappa(r, r_0)\Omega(r)dr - \int \delta(r - r_0)\Omega(r)dr \longrightarrow 0 \tag{3.29}$$

où $\delta(r - r0)$ représente une distribution de Dirac. Cette équation montre que l'on voudrait idéalement faire tendre le noyau de résolution vers la distribution de Dirac pour avoir une bonne résolution.

On définit une mesure de la largeur du noyau de résolution par (Backus & Gilbert 1968):

$$\mathcal{M}_m(\kappa(r,r_0)) = \int 12(r-r_0)^2\kappa(r,r_0)^2 dr \tag{3.30}$$

Cette 'mesure de la largeur' est telle que, si le noyau κ est une fonction porte de largeur Δr, alors la mesure de sa largeur donne Δr.

Une autre 'mesure' de la largeur d'un noyau de résolution est donnée par l'écart à une gaussienne $\mathcal{G}(r,r_0)$ centrée en r_0 et dont on se donne la largeur $\Delta(r_0)$. La 'mesure' $\mathcal{M}_s$ du noyau relativement à cette gaussienne est alors définie par:

$$\mathcal{M}_s(\kappa(r,r_0)) = \int_0^{R_\odot} \left(\kappa(r,r_0) - \mathcal{G}(r,r_0)\right)^2 dr \tag{3.31}$$

avec:

$$\mathcal{G}(r,r_0) = C\exp\left(-\left(\frac{r-r_0}{\Delta(r_0)}\right)^2\right) \quad \text{et:} \quad C = 1/\int_0^{R_\odot}\mathcal{G}(r,r_0)dr \tag{3.32}$$

Enfin, trois autres quantités sont également utilisées pour donner la largeur du noyau de résolution: (1) la largeur totale à mi hauteur (FWHM, 'Full Width at Half Maximum', cf. **Figs. 4.3**) , (2) la largeur de la gaussienne donnant la meilleure approximation du noyau (cf. **Fig. 3.7b**), (3) la distance (Δ_{qu}) entre les deux points ('quartile points') définis de telle sorte que un quart de l'aire sous le noyau de résolution soit en dessous du premier point et un autre quart au dessus du second point (cf. **Figs. 3.6, 3.7a**).

2. **Erreur sur $<\Omega(r_0)>$ faible**

   On souhaite également que l'incertitude sur $<\Omega(r_0)>$ soit faible. Avec les hypothèses précédentes sur les erreurs d'observations (cf. §3.2.1) et en supposant une méthode linéaire, on peut définir la variance de l'estimée $<\Omega(r_0)>$ par (cf. Eq. (3.26)):

$$\mathcal{V}(<\Omega(r_0)>) = \sigma^2(<\Omega(r_0)>) = \sum_{i=1}^{N}\left(c_i(r_0)\sigma_i\right)^2 \tag{3.33}$$

3. **Faibles corrélations entre deux estimations en deux rayons r_1 et r_2**

   Certaines régions (cœur, pôles) étant moins bien contraintes par les données que d'autres il est important que l'estimation en un rayon donné soit la plus indépendante possible de la solution trouvée ailleurs. Pour une méthode linéaire, il est possible de définir une fonction de corrélation $C(r_1,r_2)$ entre les erreurs sur $<\Omega(r_1)>$ et $<\Omega(r_2)>$, par:

$$C(r_1,r_2) = \frac{E\left[(\sum c_i(r_1)\epsilon_i)(\sum c_j(r_2)\epsilon_j)\right]}{\sqrt{E\left[(\sum c_i(r_1)\epsilon_i)^2\right]E\left[(\sum c_j(r_2)\epsilon_j)^2\right]}} = \frac{\sum c_i(r_1)c_i(r_2)\sigma_i^2}{\sqrt{\sum c_i^2(r_1)\sigma_i^2}\sqrt{\sum c_i^2(r_2)\sigma_i^2}} \tag{3.34}$$

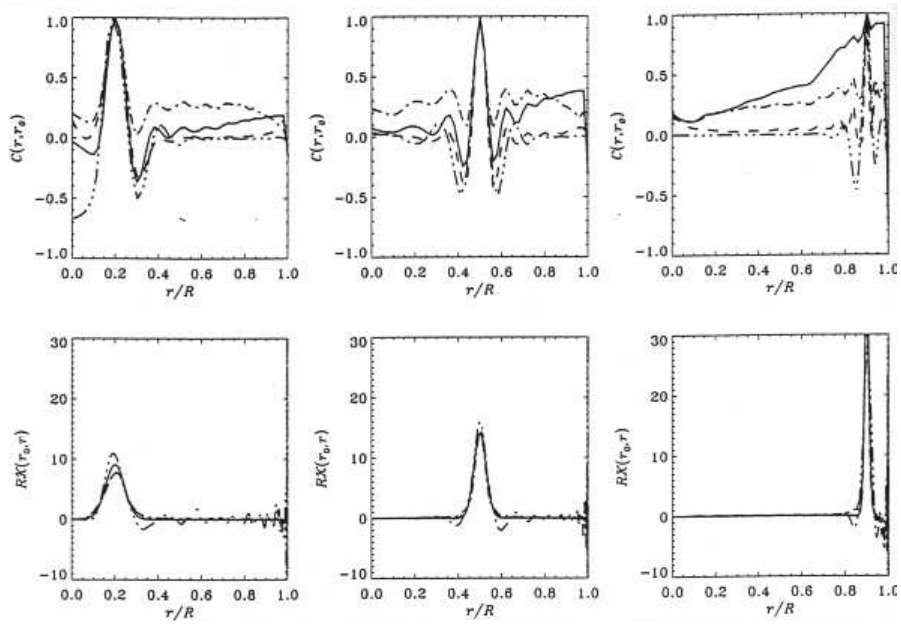


FIG. 3.5 – *Exemples de fonctions de corrélation (cadres du haut) et de noyaux de résolution (cadres du bas) calculés en trois rayons* $r_0 = 0.2R_\odot$ *(gauche),*$r_0 = 0.5R_\odot$ *(milieu),* $r_0 = 0.9R_\odot$ *(droite) pour quatre inversions différentes (cf. §§5.3 et 5.4): SOLA1(———), SOLA2(------), OLA(—·—·—), RLS(—···—···—···). SOLA1 et SOLA2 sont deux inversions SOLA avec des paramètres de régularisation différents. D'après Howe & Thompson (1996)*

La **figure 3.5** donne des exemples de fonctions de corrélation pour les diverses méthodes détaillées §3.2.3 et 3.2.4. Cette figure montre que la forme de la fonction de corrélation dépend de la méthode utilisée (voir la discussion §3.2.6) mais présente en général un pic central de largeur comparable à la largeur du noyau de résolution. Cette propriété rend difficile l'interprétation des structures qui, dans la solution, sont du même ordre de grandeur que la résolution. En effet on ne sait pas s'il s'agit de la signature d'une structure non résolue de la rotation ou simplement d'un effet dû à un artefact des erreurs d'observations qui se propagent sur cette échelle. Une discussion plus détaillée sur l'utilisation de ces fonctions de corrélation peut être trouvée dans Howe & Thompson (1996)

Les méthodes d'inversion présentées dans les sections suivantes sont basées sur l'utilisation de ces critères mais quels que soient les critères retenus pour une méthode particulière, il est utile pour l'interprétation du résultat de regarder comment ces cinq critères sont satisfaits a posteriori par la solution trouvée.

3.2.3 Méthodes globales

Une solution qui donne un très bon accord avec les données est en général très oscillante car elle cherche à reproduire aussi le bruit inclus dans les données. La méthode RLS ou méthode de moindres carrés régularisée cherche à établir un **compromis entre l'accord avec les données et la 'douceur' de la solution**.

Comme nous l'avons vu, la première étape consiste à passer du problème continu à un problème discret pour son traitement numérique. Cela peut se faire par projection de la rotation sur une base de fonctions $\varphi_p(r)$ (Craig & Brown 1986; Kirsch, 1996)

$$\tilde{\Omega}(r) = \sum_{p=1}^{N_p} \Omega_p \varphi_p(r) \tag{3.35}$$

On cherche alors les coefficients Ω_p de la projection de la rotation sur la base choisie.

Le nombre de fonctions de base utilisées (N_p) ainsi que leur distribution constituent une forme de régularisation en ce sens qu'un faible nombre de fonctions de base ne permet en général pas de trouver une solution avec des variations rapides. La distribution des fonctions de base en rayon se fait couramment en regardant l'ensemble des points tournants associés aux modes observés. Plus le nombre de modes ayant leurs points tournants dans une région donnée sera important et plus on peut penser que cette région sera bien contrainte par les données. On augmentera donc localement la grille de discrétisation.

Une inversion RLS se fera donc par minimisation du critère (cf. §3.2.2):

$$J(\mathbf{\Omega}) = \chi^2(\mathbf{\Omega}) + \lambda_r T_r(\mathbf{\Omega}) \tag{3.36}$$

où $\mathbf{\Omega}$ représente le vecteur des projections Ω_p de la rotation sur la base choisie, et λ_r est un paramètre de régularisation permettant d'ajuster le compromis entre l'accord avec les données et la 'douceur' de la solution. Un deuxième paramètre, relatif à la 'douceur' en latitude, sera introduit dans le cas bidimensionnel §4.1.2.

La fonction de poids $P(r)$ (Eq. 3.24) peut être utilisée pour pondérer localement la 'contrainte de douceur' (Schou et al. 1994, Corbard et al. 1997 (Article 1)). Eff-Darwich & Pérez-Hernandez (1997) ont par ailleurs développé une méthode (nommée OMD pour **O**ptimal **M**esh **D**istribution) qui cherche à optimiser le choix de la grille de discrétisation en utilisant une fonction de poids $P(r)$ adaptée à la résolution intrinsèque de l'ensemble de données à inverser.

On distingue deux grandes classes de méthodes en fonction du choix de la puissance q dans le terme de régularisation (3.24):

- Si elle est choisie égale à 2 , on se ramène à un problème quadratique facile à traiter numériquement. Le méthode RLS est alors appelée *méthode de régularisation de Tikhonov* par référence l'auteur qui a introduit cette méthode (Tikhonov

1963). Un terme quadratique correspond à une méthode linéaire et il est possible de calculer des coefficients $c_i(r_0)$ (cf. Eq. (3.26)), de trouver les noyaux de résolution en chaque point de la solution (cf. Eq. (3.28)) et d'estimer l' erreur sur la solution obtenue en ce point (ou plus exactement l'erreur sur la moyenne définie par le noyau de résolution) ainsi que la corrélation des erreurs en plusieurs points (cf. Eqs. (3.33)(3.34)). Autrement dit **il est possible d'obtenir une interprétation locale d'une inversion RLS linéaire.**

La méthode **MTSVD** (**M**odified **T**runcated **S**ingular **V**alue **D**ecomposition) introduite par Sekii et Shibahashi (1988) est également basée sur l'utilisation d'un terme de régularisation quadratique de la même forme mais utilise un paramètre de régularisation discret lié à la décomposition en valeurs singulières du problème discrétisé.

– Le choix $q = 1$ correspond à une méthode dîte de **V**ariation **T**otale (**TV**) basée sur l'utilisation d'une norme $\mathcal{L}^1$ qui permet de préserver les variations rapides de la solution par régularisation non-linéaire (Blanc-Féraud 1998). La méthode développée chapitre 5 pour l'étude de la tachocline solaire est basée sur une généralisation de ce type d'approche.

  La méthode **PP-TSVD** **P**iecewise **P**olynomials **TSVD** introduite par Hansen & Mosegaard (1996) utilise également un terme de régularisation basé sur une norme $\mathcal{L}^1$ et entre donc dans la catégorie des méthodes de régularisation non linéaire. Il s'agit d'une modification de la méthode MTSVD utilisant de la même manière un paramètre de régularisation discret. J'ai appliqué pour la première fois cette méthode dans le contexte de l'héliosismologie pour l'étude de la tachocline solaire (voir chapitre 5). Le détail des méthodes MTSVD et PP-TSVD pourra être trouvé en annexe de Corbard et al. (1998c) (Article 3).

3.2.4 Méthodes locales

Il est en général possible, dans les zones suffisamment contraintes par les observations, de trouver une combinaison linéaire des noyaux de rotation qui donne (d'après (3.28)) des noyaux de résolution très localisés et donc une bonne résolution. Néanmoins cela conduit en général à trouver des coefficients $c_i(r_0)$ de très grandes amplitudes afin de compenser toutes les contributions de tous les noyaux de rotation qui ont de l'amplitude loin de r_0 (cf. **Fig. 3.2**). D'après l'équation (3.33), de grandes valeurs des coefficients $c_i(r_0)$ se traduiront par une incertitude importante sur l'estimation de la rotation au voisinage de r_0. La méthode **OLA** (**O**ptimally **L**ocalized **A**verages) ou des 'moyennes localisées' est basée sur la recherche d'un **compromis entre la résolution et la propagation des erreurs observationnelles**. Pour cela on cherche pour chaque rayon r_0 les coefficients $c_i(r_0)$ tels que:

$$<\Omega(r_0)>= \sum_{i=1}^{N} c_i(r_0) d_i \ , \qquad \kappa(r, r_0) = \sum_{i=1}^{N} c_i(r_0) K_i(r) \tag{3.37}$$

et qui minimisent le critère (cf. §3.2.2)

$$J^{(o)}(c_1(r_0), c_2(r_0), .., c_N(r_0)) = \mathcal{M}(\kappa(r, r_0)) + \Lambda\ \mathcal{V}(<\Omega(r_0)>) \tag{3.38}$$

avec la contrainte $\int_0^{R_\odot} \kappa(r, r_0) dr = 1$

Le paramètre Λ contrôle le poids relatif des deux termes dans la minimisation et joue le rôle de paramètre de régularisation. Lorsque la 'mesure' $\mathcal{M} = \mathcal{M}_m$ est utilisée, la méthode est appelée **OLA** ou méthode de Backus & Gilbert par référence aux auteurs qui ont introduit la méthode en géophysique (Backus & Gilbert 1968, voir aussi Xia & Nashed 1994) ou encore **MOLA** pour **M**ultiplicative OLA, car la mesure du noyau se fait par multiplication par une parabole (cf. Eq. (3.30)).
Si la mesure $\mathcal{M} = \mathcal{M}_s$ est utilisée la méthode est appelée **SOLA** pour **S**ubtractive OLA (Pijpers & Thompson 1992, 1994; Larsen & Hansen 1997), car la mesure du noyau se fait par différence avec une gaussienne (cf. Eq. (3.31)). Dans ce cas la largeur $\Delta(r_0)$ de la gaussienne est un paramètre suplémentaire à fixer.

3.2.5 Choix des paramètres

Le choix des paramètres de régularisation représente une réelle difficulté des méthodes d'inversion. Il reste souvent plus ou moins empirique et il importe de toujours tester la sensibilité des résultats obtenus au choix de ces paramètres. Il faut noter que, outre les 'paramètres de compromis' intervenant dans les équations (3.36) (4.6) et (3.38), d'autres paramètres spécifiques pour une méthode particulière peuvent jouer le rôle de paramètres de régularisation.

Pour la méthode RLS nous avons mentionné §3.2.3 le rôle du choix du nombre et de la distribution des fonctions de bases utilisées pour projeter la rotation. L'examen des propriétés du système discrétisé (par décomposition en valeurs singulières) permet en général d'adapter le choix du nombre des fonctions de bases (cf. Christensen-Dalsgaard et al. 1993, 1994; voir aussi Corbard et al. 1995).

Je ne ferai ici qu'illustrer deux des méthodes les plus employées pour le choix des 'paramètres de compromis' liés à l'inversion de la rotation solaire. Des discussions plus générales pourront être trouvées dans les revues de Badeva & Morozov (1991), Thompson & Craig (1992) et Hansen (1992, 1994). Des applications liées à l'héliosismologie se trouvent dans: Thompson (1992), Barett (1993), Stepanov & Christensen-Dalsgaard (1996) et Corbard et al. (1998c). L'utilisation systématique et l'extension de ces méthodes constituent une part importante du travail présenté dans la deuxième partie de ce travail.

Les "Courbes L" ou "courbes de compromis"

Les "courbes L" (Hansen 1992) représentent l'évolution relative des deux termes de la fonctionnelle à minimiser (cf. Eqs. (3.36)(4.6)(3.38)) en fonction du (des) paramètre(s) de régularisation.

- Pour une méthode RLS on tracera donc l'évolution de la 'douceur' de la solution $T(\tilde{\Omega})$ en fonction du $\chi^2(\tilde{\Omega})$ représentant l'accord avec les données (cf. **Fig. 4.2**). La généralisation à deux dimensions de ce type de courbes et son utilisation sont détaillées §4.1.2.

- Pour une méthode OLA on tracera l'évolution de la largeur du noyau de résolution en un rayon r_0 en fonction de l'erreur sur l'estimation $< \Omega(r_0) >$ (cf. **Fig. 3.6**).

Ces courbes présentent en général un 'coin' leur donnant l'aspect d'un 'L' d'où leur nom. Lorsque l'on s'éloigne de ce 'coin', le gain sur l'un des deux critères de qualité ne peut se faire que par une très forte détérioration de l'autre critère. Donc choisir un paramètre de régularisation proche du coin de la 'courbe L' revient à optimiser le compromis entre les deux critères de qualité choisis. Ce choix peut se faire a posteriori après avoir calculé des solutions pour plusieurs paramètres. Cependant cette approche nécessite de nombreuses inversions pour pouvoir construire des 'courbes L' avec suffisamment de points.

Pour la méthode RLS et à une dimension, il est possible de rendre la procédure de choix du paramètre de régularisation un peu plus automatique en définissant le choix optimal comme étant celui donnant le maximum de courbure de la courbe paramétrée que représente la 'courbe L'. L'expression de la courbure en fonction du paramètre de régularisation peut être obtenue après une décomposition en valeurs singulières généralisées (GSVD pour Generalized Singular Value Décomposition) du problème discrétisé (voir Christensen-Dalsgaard et al. (1993) et Hansen (1994)). Ceci a pour avantage de nécessiter l'équivalent d'une seule inversion pour obtenir la 'courbe L' en tout point. L'utilisation de ce principe à 2D est détaillée §4.1.3

Enfin notons que, une interprétation locale et le calcul de noyaux de résolution étant toujours possibles pour une inversion linéaire (cf. §3.2.3), il est également possible de baser le choix des paramètres de régularisation RLS sur des 'courbes L' de type OLA donnant le compromis résolution - erreur en un rayon r_0 donné (et une latitude donnée dans le cas 2D). La solution globale obtenue ne sera cependant optimale selon ce critère qu'au voisinage de r_0. Les **figures 3.6a et 3.7a** donnent des exemples pour une méthode RLS 1D pour différents rayons r_0 alors que la **figure 3.7b** donne un exemple pour une méthode RLS 2D où l'erreur est tracée en fonction des résolutions en rayon et en latitude.

Choix des paramètres par "Validation Croisée"

Cette méthode, introduite par Wahba (1977), donne un critère pour le choix du paramètre de régularisation qui est basé uniquement sur l'analyse des données par opposition au choix basé sur l'examen de la 'courbe L' qui, dans le cas RLS, prend aussi en compte explicitement la contrainte de douceur sur la solution. On peut résumer la démarche par les étapes suivantes:

1. On se donne un paramètre de régularisation λ

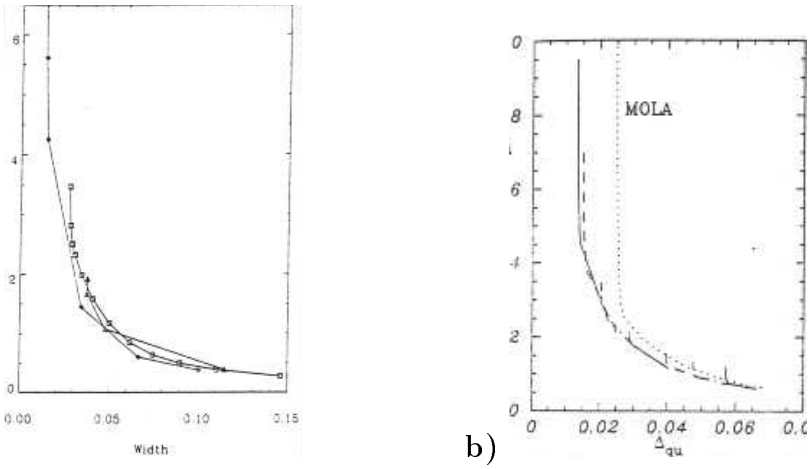


FIG. 3.6 – *Exemples de 'courbes L' donnant le compromis entre la résolution (Δ_{qu}: largeur des noyaux de résolution, cf. §3.2.2) et les erreurs ($\sigma(<\Omega(r_0)>)$, cf. Eq. (3.33)) obtenues en $r_0 = 0.5R_\odot$.* **(a)** *Les trois courbes du cadre de gauche sont pour des méthodes MOLA (carrés), RLS (losanges), et asymptotique (triangles). D'après Christensen-Dalsgaard et al. (1990).* **(b)** *Le cadre de droite donne une comparaison entre les méthodes SOLA (trait plein) et MOLA (trait pointillé). D'après Pijpers & Thompson (1994).*

2. On supprime l'observation d_1 de l'ensemble des données puis on résout le problème inverse pour obtenir une solution $\tilde{\Omega}_{1,\lambda}(r)$

3. On calcule la donnée $\tilde{d}_1(\lambda)$ prédite par cette rotation (résolution du problème direct)

4. On fait de même (étapes 2 & 3) pour tous les modes observés un à un $\rightarrow$ On obtient un ensemble $\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, .., \tilde{d}_N$ de données reconstruites.

5. On calcule $C(\lambda) = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\tilde{d}_i(\lambda) - d_i)^2$

6. On réitère pour plusieurs choix du paramètres λ et on définit le choix optimal comme étant celui qui minimise $C(\lambda)$

Ce schéma illustre bien comment ce choix revient à chercher à minimiser l'impact d'une donnée individuelle (d'un splitting) sur le résultat final.

Il faut cependant remarquer que, pratiquement, cette procédure serait très lourde à mettre en œuvre car elle nécessite un grand nombre d'inversions. Il existe une généralisation de ce critère nommée **GCV** (pour '**G**eneralized **C**ross **V**alidation') basée sur le même principe mais très facile à mettre en œuvre (Golub et al. 1979, Eldén 1984).

Hansen (1992) remarque que le choix du paramètre de régularisation par la méthode GCV conduit en général à un choix proche du coin de la 'courbe L'. Il note

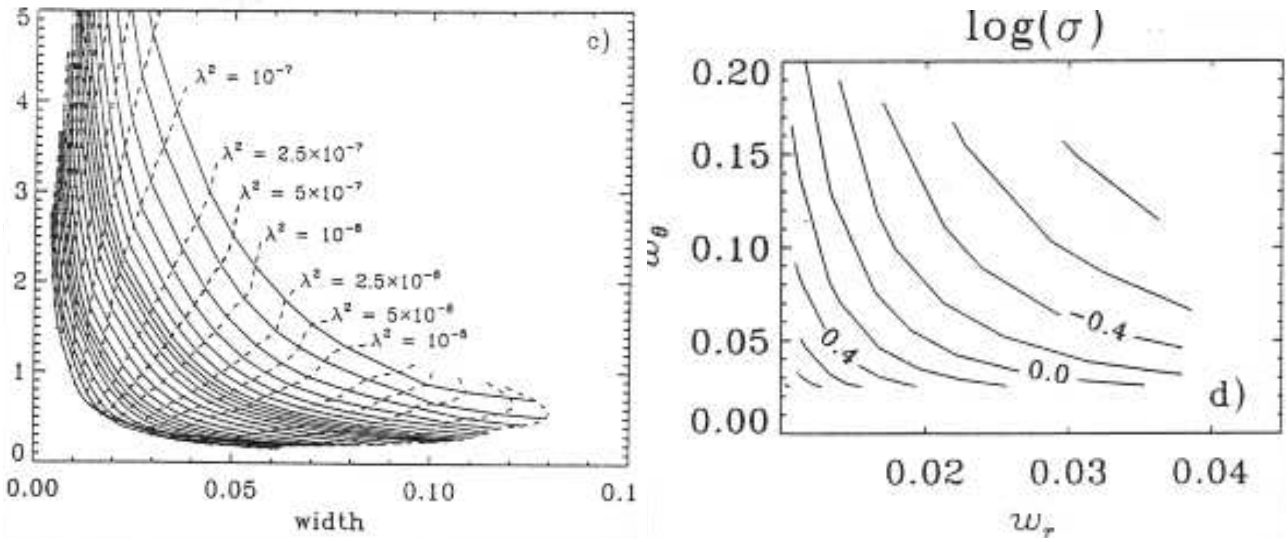


FIG. 3.7 – *Exemples de 'courbes L' pour une méthode RLS, basées sur l'étude du compromis résolution - erreur (de type OLA).* **(a, cadre de gauche)** *Pour une méthode RLS 1D. Chaque courbe représente la variation de l'erreur σ en fonction de la largeur du noyau de résolution en un rayon r_0 différent entre $0.25R_\odot$ (courbes du haut) et $0.94R_\odot$ (courbe du bas). Les valeurs du paramètre de régularisation $\lambda^2 = \lambda_r$ (cf. Eq. 3.36)) sont indiqués et les lignes pointillées joignent les points obtenus avec le même paramètre pour différent r_0. D'après Christensen-Dalsgaard et al. (1993).* **(b, cadre de droite)** *Pour une méthode RLS 2D. Le logarithme de l'erreur σ est tracé sous forme d'iso-contours en fonction des résolutions en rayon (w_r) et en latitude (w_θ) obtenues en $r_0 = 0.84R_\odot$, $\theta_0 = 45°$ par approximation du noyau de résolution par une gaussienne 2D. D'après Schou et al. (1994).*

cependant que ce choix peut ne pas conduire à une solution satisfaisante si les erreurs d'observations sont fortement corrélées.

Dans le contexte de l'inversion de la rotation solaire j'ai mené une étude systématique de l'influence du choix du paramètre de régularisation sur l'estimation des paramètres de la tachocline solaire (cf. §5, Corbard et al. 1998c). Ce travail montre que le choix GCV du paramètre de régularisation conduit systématiquement à une régularisation moindre qu'avec un choix fixé au maximum de courbure de la 'courbe L'. Le choix GCV peut donc s'avérer plus pertinent pour l'étude des zones à forts gradients de vitesse de rotation angulaire qui seraient lissées par une régularisation trop importante. Plus généralement, ceci marque l'intérêt de fixer une stratégie automatique du choix du paramètre de régularisation qui soit adaptée au problème particulier que l'on veut traiter.

3.2.6 Comparaison RLS - OLA

Résolution et interprétation des résultats

Les deux types de méthodes, globales et locales, sont très couramment employés pour l'inversion de la rotation. Les deux approches sont en fait complémentaires et une comparaison des deux approches aide en général à l'interprétation des résultats (voir par exemple Thompson et al. (1996)).

Nous avons vu qu'il est possible avec une méthode RLS linéaire d'interpréter le résultat en tout point comme une moyenne localisée de la rotation sur l'étendue d'un noyau de résolution. Néanmoins, contrairement aux méthode de type OLA, la construction de ces noyaux n'est pas l'objectif premier de la méthode mais plutôt une conséquence de sa linéarité. De ce fait les noyaux de résolution obtenus avec une méthode RLS sont en général moins bien 'piqués' que ceux obtenus avec une méthode OLA. Les **figures 3.8 et 3.9** comparent les noyaux de résolution des deux types de méthodes dans les cas 1D et 2D respectivement. Les oscillations, les parties négatives et les contributions proches de la surface, présentes dans les noyaux RLS, rendent l'interprétation du résultat en terme de moyennes localisées plus difficile qu'avec les noyaux OLA.

Ceci n'est cependant pas surprenant puisque les méthodes de type OLA ont justement pour objectif de donner une interprétation en terme de moyennes localisées. Par contre ces méthodes ne permettent pas d'une manière directe d'avoir le contrôle sur la consistance avec les données, ce que donnent les méthodes globales. Il est néanmoins possible de considérer l'ensemble des estimations locales comme formant une solution globale et de calculer a posteriori une valeur de χ^2. On s'attend cependant à ce que cette valeur soit moins bonne que celle obtenue avec une méthode RLS ayant pour principal objectif de minimiser cette quantité.

Une inversion de type RLS propose une solution qui donne un bon accord avec les données sachant qu'il existe une infinité d'autres solutions qui peuvent donner un aussi bon accord. Parmi ces solutions possibles, la méthode RLS en sélectionne une

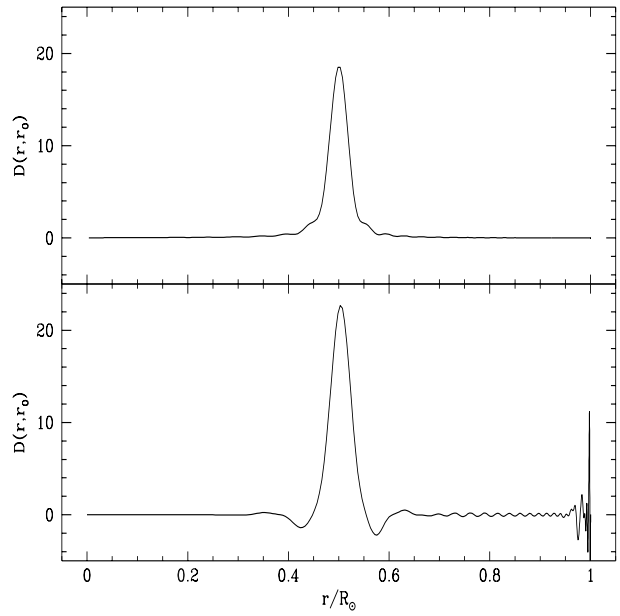


FIG. 3.8 – *Exemples de noyaux de résolution 1D calculés en* $r_0 = 0.5R_\odot$ *par une méthode* **OLA (cadre du haut)** *et une méthode* **RLS (cadre du bas)**. *Dans les deux cas le même ensemble de modes a été utilisé. D'après Sekii (1997).*

en prenant en compte l'information a priori sur la rotation contenue dans le terme de régularisation. L'interprétation locale des solutions RLS nécessite donc un examen attentif des noyaux de résolution. Contrairement aux solutions OLA une simple 'barre d'erreur' horizontale représentant la largeur du noyau de résolution ne serait en général que peu représentative de la complexité du noyau.

Il y a donc deux approches duales possibles pour interpréter les barres d'erreur présentées sur une solution RLS (cf. **Fig.4.3a)**. On peut considérer que l'erreur obtenue en r_0 représente l'incertitude sur la rotation $\Omega(r_0)$ mais alors on doit avoir à l'esprit que cette estimation est biaisée du fait de la résolution finie de l'inversion, ou alors cette erreur représente l'incertitude sur une moyenne (non biaisée) $<\Omega(r_0)>$ de la rotation dont l'interprétation requiert l'examen attentif du noyau de résolution. D'une manière générale l'interprétation locale d'une solution RLS peut donc s'avérer plus délicate que celle d'une solution OLA. Il faut noter cependant que l' approche RLS peut permettre, par examen des résidus (c.à.d. de chacun des termes constituant la somme du χ^2), de détecter des erreurs sous-estimées dans les données et donc de faire des aller retour entre observations et inversions permettant de confirmer ou d'infirmer l'estimation des incertitudes sur certaines observations.

Enfin notons que si les ailes négatives des noyaux RLS peuvent compliquer l'interprétation locale de la solution, elles peuvent aussi (dépendant de la forme réelle de la rotation) conduire à une meilleure solution par un jeu d'interpolations et d'extrapolations où les ailes négatives compensent en partie l'effet de lissage dû à la largeur

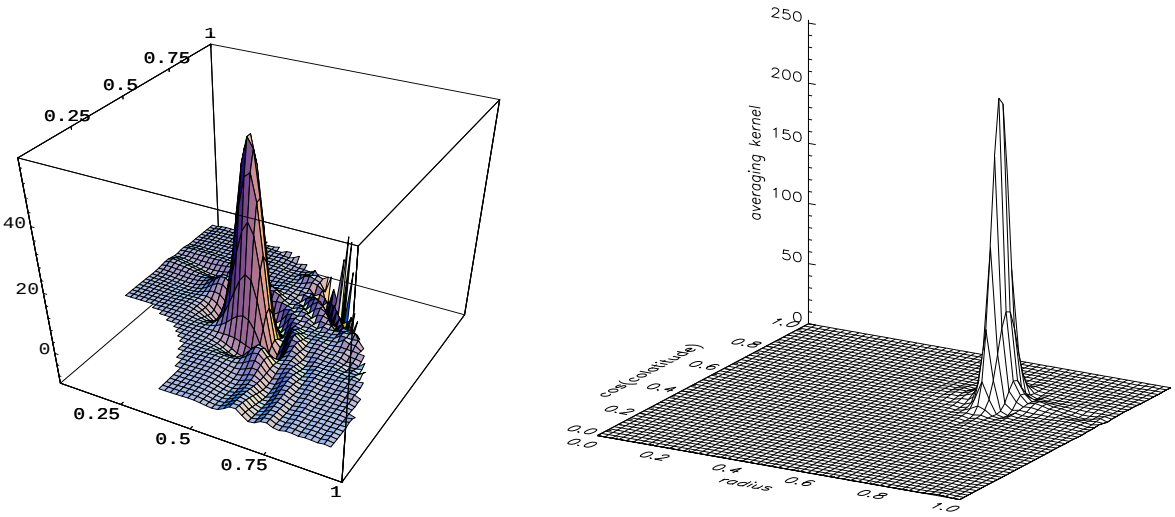


FIG. 3.9 – *Exemples de noyaux de résolution 2D.* **A gauche**, *un noyau obtenu en* ($r_0 = 0.55R_\odot$, $\mu_0 = 0.707$) *par une méthode* **RLS** *(graphique polaire) à partir des modes observés par BBSO (soit* ~ 2300 *coefficients a pour des modes* $5 \leq l \leq 60$*). D'après Corbard et al. (1995).* **A droite**, *un noyau obtenu par une méthode* **OLA** $R^1 \otimes R^1$ *en* $r_0 = 0.7R_\odot$, $\mu_0 = 0.707$ *à partir de données simulées comprenant* 70000 *splittings ayant des degrés jusqu'à* $l = 250$ *(simulation de données GONG). D'après Sekii (1997). Il est à noter que les deux résultats ne sont pas directement comparables car le rayon* r_0 *ainsi que l'ensemble des modes utilisés diffèrent. Le manque de modes de degrés élevés dans les données BBSO peut notamment être en partie à l'origine des pics obtenus en surface par la méthode RLS. Néanmoins, d'après la figure précédente, ceux-ci restent une caractéristique de la méthode RLS.*

non nulle du pic central. De plus l'examen des fonctions de corrélation (**Fig. 3.5**) montre l'existence de plus fortes corrélations avec des méthodes OLA qu'avec la méthode RLS. Ces corrélations peuvent être liées à l'absence de pics de surface sur les noyaux de résolution OLA. En effet pour éliminer ces pics, on utilise principalement les modes de degrés élevés qui restent confinés sous la surface solaire. Si ces mêmes modes sont utilisés de manière similaire pour tous les rayons r_0, cela introduit des corrélations importantes entre les erreurs sur la solution à des rayons assez distants. Cet effet peut cependant être minimisé par le choix des paramètres de régularisation (cf. **Fig 3.5**).

Annexe A

Quelques formules utiles

A.1 Les fonctions de Legendre

Les fonctions de Legendre $P_l^m(\mu)$ sont reliées aux polynômes de Legendre $P_l(\mu)$ de degré l par:

$$P_l^m(\mu) = (-1)^m \sin^m(\theta)\ \frac{d^m P_l(\mu)}{d\mu^m}, \qquad \mu = \cos\theta \tag{A.1}$$

et vérifient l'équation différentielle:

$$\frac{d^2 P_l^m(\mu)}{d\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{dP_l^m(\mu)}{d\theta} = \left(\frac{m^2}{\sin^2\theta} - L^2\right) P_l^m(\mu) \qquad L^2 \equiv l(l+1) \tag{A.2}$$

Elles sont orthogonales et telles que:

$$\int_0^\pi P_l^m(\mu) P_k^m(\mu) d\mu = \delta_{kl} \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!} \tag{A.3}$$

On définit les fonctions de Legendre normalisées $\tilde{P}_l^m(\mu)$ par:

$$\tilde{P}_l^m(\mu) = \left[\frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\right]^{-\frac{1}{2}} P_l^m(\mu) \tag{A.4}$$

Ces fonctions vérifient:

$$\int_{-1}^{1} \tilde{P}_l^m(\mu) d\mu = 1 \tag{A.5}$$

et sont liées aux harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta,\varphi)$ par:

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}} \tilde{P}_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}. \tag{A.6}$$

Les premières fonctions de Legendre d'ordre $m = 1$ sont données par:

$$\begin{cases} P_1^1(\mu) = & -\sin\theta \\ P_3^1(\mu) = & -\frac{3}{2}\sin\theta(5\mu^2 - 1) \\ P_5^1(\mu) = & -\frac{15}{8}\sin\theta(21\mu^4 - 14\mu^2 + 1) \end{cases} \tag{A.7}$$

A.2 Les coefficients de Clebsh-Gordon

Avec la convention d'Edmonds (1960) pour la phase des coefficients de Clebsh-Gordon $C^{jm}_{j_1 m_1 j_2 m_2}$, on obtient:

$$C^{l1}_{l,1,2j+1,0} = (-1)^j 2^{j+1} \frac{\sqrt{2l+1}}{l(l+1)} \sqrt{\frac{(2l-2j-1)!}{(2l+2j+2)!} \frac{(2j+1)!!}{j!} \frac{(l+j+1)!}{(l-j-1)!}} \tag{A.8}$$

Ceci permet, en utilisant (2.6) et (2.7), de trouver la relation entre les polynômes $\mathcal{S}^m_{j,l}$ et $\gamma^m_{j,l}$ pour j impair. On obtient:

$$\gamma^m_{2j+1,l} = \sqrt{\frac{4j+3}{4\pi}} v^{(l)}_{2j+1} \mathcal{S}^m_{2j+1,l} \tag{A.9}$$

avec:

$$v^{(l)}_{2j+1} = (-1)^j \frac{(2j+1)!!}{(2j)!!} \tilde{v}^{(l)}_{2j+1} \quad \text{et:} \quad \tilde{v}^{(l)}_{2j+1} = \frac{2^{2j+1}}{l} \frac{(2l+1)!}{(2l+2j+2)!} \frac{(l+j+1)!}{(l-j-1)!} \tag{A.10}$$

De plus, on montre facilement que $\tilde{v}^{(l)}_{2j+1} \overset{l \gg j}{\longrightarrow} 1$ si bien que:

$$\gamma^m_{2j+1,l} \overset{l \gg j}{\longrightarrow} (-1)^j \sqrt{\frac{4j+3}{4\pi}} \frac{(2j+1)!!}{(2j)!!} \mathcal{S}^m_{2j+1,l} \tag{A.11}$$

Annexe B

Les polynômes 'pseudo inverses'

On peut réécrire l'équation (2.8) sous forme matricielle par:

$$\mathbf{W} \simeq \mathbf{PA} \quad \left\{ \begin{array}{l} (W_m \equiv \delta\omega_{nlm}/2\pi)_{m=1..m} \\ (P_{mj} \equiv \mathcal{P}^l_{2j+1}(m))_{\substack{m=1..l \\ j=0..N^{nl}}} \\ (A_j \equiv a^{nl}_{2j+1})_{j=0..N^{nl}} \end{array} \right. \tag{B.1}$$

Si les coefficients a sont obtenus à partir des splittings individuels par moindres carrés en minimisant:

$$\chi^2 = \|\mathbf{W} - \mathbf{PA}\|_2^2 \ , \tag{B.2}$$

on obtient:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^\dagger \, \mathbf{W} \quad \text{avec:} \ \ \mathbf{P}^\dagger = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{P}^\top \quad \text{et:} \ \ \mathbf{D} = \mathbf{P}^\top\mathbf{P}. \tag{B.3}$$

La matrice $\mathbf{D}$ ainsi définie est diagonale si les polynômes $\mathcal{P}^l_j(m)$ sont orthogonaux sur l'espace discret en m (cf. Eq. (2.4)), et pleine sinon. D'une manière générale on a donc:

$${}^\dagger\mathcal{P}^l_{2j+1}(m) = \mathbf{P}^\dagger_{jm} = \sum_{j'=1}^{N^{nl}} (\mathbf{D}^{-1})_{jj'}\mathbf{P}_{mj'} \tag{B.4}$$

et ${}^\dagger\mathcal{P}^l_{2j+1}(m)$ dépend du nombre N^{nl} de coefficients a cherchés. Pour des polynômes orthogonaux seul le terme diagonal subsiste et

$${}^\dagger\mathcal{P}^l_{2j+1}(m) = (\mathbf{D}^{-1})_{jj}\mathbf{P}_{mj} \tag{B.5}$$

est indépendant de N^{nl}. L'expression de $\mathbf{D}$ donne dans ce cas la relation:

$${}^\dagger\mathcal{P}^l_{2j+1}(m) = \frac{\mathcal{P}^l_{2j+1}(m)}{\sum_{m'=1}^{l} \mathcal{P}^l_{2j+1}(m')^2} \tag{B.6}$$

Notons que l'utilisation des polynômes orthonormaux β^m_{jl} (voir Eq. 2.3) suggérée par Ritzwoller & Lavely (1991) conduit à une matrice $\mathbf{D}$ égale à l'identité et donc les polynômes 'pseudo inverses' sont dans ce cas également les polynômes β^m_{jl}.

Deuxième partie

Contribution à l'interprétation des observations: détermination de la rotation solaire

Chapitre 4

Une vision globale de la rotation: exploitation des données LOWL, GONG et MDI

Un des principaux objectifs de ce travail est de contribuer à l'analyse des nouvelles observations héliosismologiques dès leur acquisition et d'en déduire les propriétés de la rotation interne du Soleil. Les deux premières années d'observations de l'instrument LOWL ont été mises à la disposition de la communauté scientifique au début de ce travail (1996) et des collaborations ont été menées avec les équipes du réseau GONG et de l'instrument MDI à bord de SoHO (équipe SOI[1]), qui ont fourni les premières mesures des splittings rotationnels par ces instruments courant 1996 et 1997. Ces instruments permettant d'observer un grand nombre de modes avec une bonne résolution, le volume des données à traiter a nécessité le développement d'un code d'inversion performant sur les machines CRAY à architecture vectorielle gérées par l'IDRIS[2].

L' un des objectifs des collaborations internationales engagées est de comparer les résultats obtenus par différentes méthodes d'inversion appliquées aux mêmes données. Ensuite des inter-comparaisons entre les équipes des différents instruments permettent d'acquérir une plus grande confiance encore en la réalité des résultats obtenus ou bien au contraire de révéler des différences qui devront être expliquées par de nouvelles observations. J'ai choisi pour ce travail de développer un code 2D RLS basé sur le développement de la rotation en polynômes par morceaux projetés sur un produit tensoriel de B-splines. Parallèlement à ce travail d'autres équipes ont développé des codes 2D de type OLA, plus coûteux sur le principe en temps de calcul mais qui ont pu être optimisés en utilisant notamment les propriétés de séparabilité des noyaux de rotation. La comparaison de mes résultats avec ceux obtenus par les différentes équipes a montré un bon accord avec tous ces travaux. Elle a été facilitée par le calcul systématique des noyaux de résolution en de nombreux points de rayons et latitudes

1. Solar Oscillations Investigation, http://soi.stanford.edu
2. Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique

différents à l'issue de chaque inversion 2D RLS.

Les sections suivantes présentent les spécificités du code 2D RLS que j'ai développé, les résultats que j'ai obtenus à partir de ce code et les principales conclusions issues des comparaisons des résultats au sein des collaborations.

4.1 Développement et utilisation d'un code 2D RLS

4.1.1 L'utilisation des B-splines - Intérêts et pratique

Pour le problème bi-dimensionnel, on choisit de représenter la rotation par un polynôme par morceaux en rayon et en latitude. Je définis un peu plus précisément ce que sont les polynômes par morceaux:

un polynôme par morceaux $\mathcal{P}(r)$ d'ordre m sur une partition Δ de $[r_1, r_n]$ $\Delta \equiv [r_1 < r_2 < .. < r_n - 1 < r_n]$ est défini comme une fonction qui coïncide sur chaque sous intervalle $[r_i, r_{i+1}[$ $1 \leq i < n$, avec un polynôme de degré $m-1$

On peut définir, en chaque *point de raccord* r_i, le type de connexion souhaitée entre les parties gauches et droites des polynômes. Le type de connexion peut potentiellement changer d'un point de raccord à un autre: $\mathcal{P}(r_i)$ peut être discontinu pour certains r_i, continu ou de dérivée première continue pour d'autres, etc.. On appelle *multiplicité* le type de connexion en chaque point de raccord.

A deux dimensions, on peut obtenir une base pour un tel espace de polynômes par morceaux par un produit tensoriel de B-splines (Schumaker 1981). On écrit:

$$\tilde{\Omega}(r,\mu) = \sum_{p=1}^{n_r} \sum_{q=1}^{n_\mu} \omega_{pq} \varphi_p(r) \psi_q(\mu) \tag{4.1}$$

où $\varphi_p(r)$ et $\psi_q(\mu)$ sont les B-splines.

Le choix de la base des B-splines présente plusieurs avantages. C'est une base locale: en un point r ($r \in [r_1, r_n]$), seules m B-splines d'ordre m sont non nulles et leur somme est égale à 1. De plus elles peuvent être définies par une différence tabulaire divisée ce qui rend efficace leur évaluation numérique en tout point ainsi que celle de leurs dérivées à partir de la seule connaissance de la grille de points de raccord, de leur multiplicité et de l'ordre.

Toutes ces grandeurs, ainsi que la dimension $n_r \times n_\mu$ de la base, constituent des paramètres de l'inversion. La possibilité de choisir tous ces paramètres donne une grande souplesse au code d'inversion qui peut ainsi être facilement adapté en fonction des données utilisées ou du problème particulier que l'on veut étudier (voir le cas de la tachocline chapitre 5). Le § 4.1.2 montrera de plus que cette base de fonctions B-splines permet d'implémenter facilement des conditions aux limites en surface et dans le coeur.

La **figure 4.1** montre un exemple de base constituée de $n_r = 21$ B-splines distribuées en fonction de la densité des points tournants correspondant aux modes observés par l'instrument LOWL. On remarque la faible densité de fonctions dans le cœur et

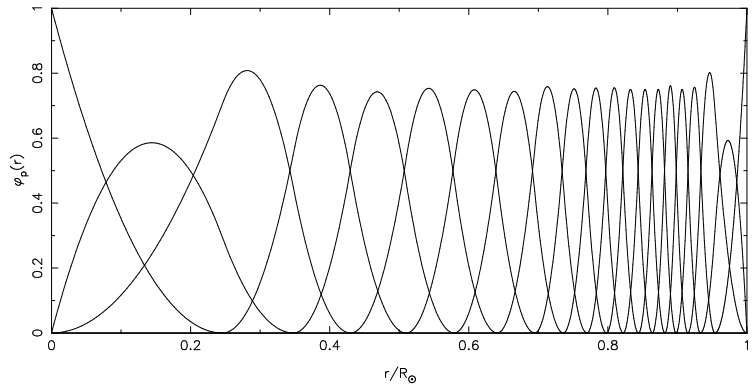


FIG. 4.1 – *Base de 21 B-splines d'ordre 3 (paraboles par morceaux) distribuées selon la densité des points tournants des modes observés par l'instrument LOWL entre 1994 et 1996.*

dans les couches proches de la surface, ce qui correspond au faible nombre de modes observés par LOWL permettant de sonder ces zones. Par rapport à une distribution équidistante des points de raccord, cette base permet une meilleure résolution dans les couches qui sont bien décrites par les données et agit comme une régularisation dans les zones moins bien contraintes.

En latitude, les points de raccord sont choisis équirépartis en $\mu = \cos\theta$. On obtient ainsi une grille plus fine à l'équateur, où tous les modes observés ont de l'amplitude, qu'aux pôles sondés uniquement par les modes $m \ll l$.

Des tests préliminaires utilisant des splittings simulés et les données du BBSO (voir Contribution 1) ont permis de montrer que le résultat de l'inversion n'est pas très sensible au choix de l'ordre des splines utilisées au moins dans les zones bien contraintes par les données. Le choix d'un ordre élevé pouvant favoriser l'apparition d'oscillations de la solution, j'ai utilisé, pour l'exploitation des diverses observations, des splines d'ordre 3 c'est à dire des paraboles par morceaux.

Le choix du nombre des fonctions de base dépend des données traitées et se fait après examen du graphe des valeurs singulières du système discrétisé.

4.1.2 Introduction des contraintes

Nous avons vu que la résolution du problème inverse nécessite l'utilisation d'une régularisation qui peut être basée sur la connaissance a priori que l'on a de la solution. En plus des 'contraintes de douceur' déjà évoquées, il est intéressant de fixer également des conditions aux limites.

Grace à la structure du code RLS utilisant la base locale des B-splines j'ai introduit non seulement le terme de régularisation globale mais aussi une contrainte de régularité dans le coeur et des contraintes de surfaces basées sur les observations directes de la rotation en surface.

La contrainte de régularité au centre

Le développement (4.1) de la rotation, généralement utilisé dans les inversions RLS (voir par exemple Schou et al. 1994), autorise en principe plusieurs valeurs de la rotation en $r = 0$ en fonction de la latitude. Ceci n'a bien sûr pas de sens physique et l'on peut chercher à supprimer cet effet en imposant la condition de régularité:

$$\lim_{r\to 0} \frac{\partial \Omega(r,\mu)}{\partial \theta} = 0. \tag{4.2}$$

Cette condition est particulièrement simple à mettre en œuvre en utilisant les propriétés des B-splines. Cela revient en effet à imposer que les n_μ premiers coefficients de $\mathbf{\Omega}$ soient égaux (soit $\omega_{11} = \omega_{12} = .. = \omega_{1n_\mu} \equiv \omega_0$). Le développement de la rotation sur la base de B-splines devient donc:

$$\Omega(r,\mu) = \omega_0 \varphi_1(r) + \sum_{p=\mathbf{2}}^{n_r} \sum_{q=1}^{n_\mu} \omega_{pq} \varphi_p(r) \psi_q(\mu) \tag{4.3}$$

et le nombre de paramètres cherchés est $n_\omega = (n_r - 1) \times n_\mu + 1$. On note $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ le vecteur de ces paramètres à déterminer.

En fait ceci impose la condition de régularité sur tout le domaine d'extension de la première B-spline de la base, soit, dans le cas de la **figure 4.1**, entre le centre et environ $0.2R_\odot$. Les données ne fournissant pratiquement aucune information sur une éventuelle dépendance en latitude de la rotation dans cette zone, il est également intéressant d'utiliser cette condition de régularité pour se concentrer sur l'accès à une éventuelle dépendance radiale moyenne de la rotation dans le cœur. Cette condition a été implémentée avec succès dans (Corbard et al. 1997 (Article 1)) puis Antia et al. (1998). Nous verrons cependant (chapitre 6) que, même si cette condition ne peut que contribuer à l'obtention d'une solution plus réaliste, l'interprétation des résultats obtenus au dessous de $0.2R_\odot$ reste difficile.

Le terme de régularisation globale: utilisation des dérivées premières en latitude et généralisation 2D des 'courbes L'

A deux dimensions, l''accord avec les données' est défini par le terme:

$$\chi^2(\Omega) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{d_i - \int\int K_i(r,\mu)\Omega(r,\mu) dr d\mu}{\sigma_i} \right)^2 \tag{4.4}$$

où $d_i, i = 1, ..N$ représentent les données (splittings ou coefficients a, voir chapitre 2). Le terme de régularisation de Tikhonov s'écrit:

$$T_{r\mu}(\Omega) = \lambda_r \underbrace{\int_0^1\int_0^1 f_r(r,\mu) \left(\frac{\partial^i \Omega(r,\mu)}{\partial r^i} \right)^2 dr d\mu}_{T_r} + \lambda_\mu \underbrace{\int_0^1\int_0^1 f_\mu(r,\mu) \left(\frac{\partial^j \Omega(r,\mu)}{\partial \mu^j} \right)^2 dr d\mu}_{T_\mu}. \tag{4.5}$$

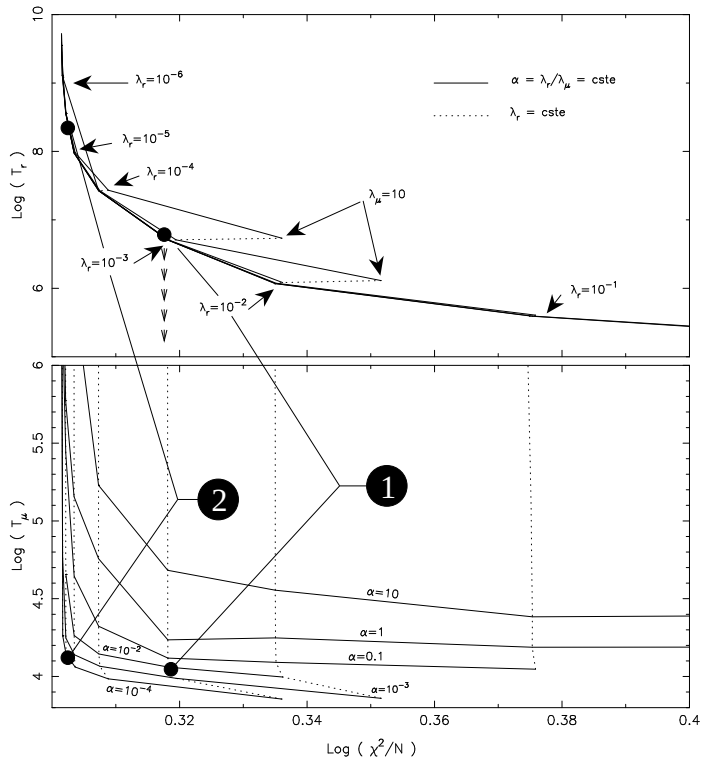


FIG. 4.2 – *Exemple de 'courbes L' obtenues par inversion de six mois de données GONG (mois d'observations 4 à 10) avec différents choix de paramètres de régularisation. Ces données comprennent le développement sur des polynômes orthogonaux (jusqu'à a_9) des splittings de $N = 2103$ modes ayant des fréquences comprises entre $1200\mu Hz$ et $5000\mu Hz$. Le logarithme des termes de régularisation en rayon (figure du haut) et en latitude (figure du bas) sont donnés en fonction du logarithme du χ^2 normalisé par le nombre de mode. Les points correspondant au même choix de λ_r sont reliés par une ligne pointillée et les points correspondant au même choix du rapport $\alpha = \lambda_r/\lambda_\mu$ sont reliés par une ligne pleine. Le point 1 montre le choix de $\lambda_r = 10^{-3}$ et $\lambda_\mu = 10^{-1}$ qui semble optimal d'après l'analyse de ces courbes (voir texte) alors que le point 2 montre un choix de paramètres qui correspond à une inversion moins régularisée qui peut s'avérer utile par exemple pour l'étude de la tachocline (voir chapitre 5)*

Après discrétisation par introduction du développement (4.3) dans (4.4) et (4.5), le critère à minimiser se récrit (cf. Eq. 3.36):

$$J(\tilde{\mathbf{\Omega}}) = \chi^2(\tilde{\mathbf{\Omega}}) + \lambda_r T_r(\tilde{\mathbf{\Omega}}) + \lambda_\mu T_\mu(\tilde{\mathbf{\Omega}}). \tag{4.6}$$

Ceci introduit deux paramètres de régularisation λ_r et λ_μ et deux fonctions de poids f_r et f_μ. L'ordre des dérivées (i et j) est généralement choisi égal à deux. Néanmoins le choix d'une contrainte sur la dérivée première en latitude ($j = 1$), associé à une fonction de poids $f_\mu(r, \mu) = 1/r^2$, permet de donner un grand poids à la contrainte de latitude au centre ce qui est consistant avec la contrainte de régularité au centre (Eq. 4.2). J'ai montré par ailleurs que ce choix pour la forme du terme de régularisation en latitude permet de généraliser plus facilement l'utilisation des 'courbes L' dans le cas bi-dimensionnel.

La **figure 4.2** donne un exemple de 'courbes L' dans le cas bi-dimensionnel. Elle a été obtenue à partir des données GONG (voir légende) avec le choix d'une dérivée seconde pour le terme de régularisation en rayon et d'une dérivée première pour le terme en latitude. La figure du haut montre que tous les points correspondant au même choix de λ_r sont confondus sauf pour les très grandes valeurs de λ_μ ($\lambda_\mu > 1$). Autrement dit la valeur du χ^2 ainsi que la valeur du terme de régularisation en rayon ne dépendent pas du paramètre λ_μ pour un large domaine de variation de celui-ci ($\lambda_\mu < 1$). Cette propriété qui n 'est pas vérifiée lorsque l'on utilise la dérivée seconde dans le terme de régularisation en latitude, est très intéressante dans la mesure où elle permet de fixer dans un premier temps le paramètre λ_r en étudiant uniquement le compromis entre la minimisation du χ^2 et celle du terme de régularisation en rayon. Ensuite le choix de λ_μ peut se faire sur la figure du bas en cherchant à minimiser le terme de régularisation en latitude à λ_r fixé. Les courbes pleines joignent les points correspondant à la même valeur de $\alpha = \lambda_r/\lambda_\mu$. Les 'courbes L' correspondant à un α donné sont d'autant plus basses que α est petit ce qui indique que l'on doit choisir λ_μ le plus grand possible (toujours avec la limitation $\lambda_\mu < 1$) si l'on veut minimiser le terme de régularisation en latitude. Cette démarche conduit au choix de $\lambda_r = 10^{-3}$ et $\lambda_\mu = 10^{-1}$ montré par le point 1 sur la figure.

La procédure décrite ci-dessus pour le choix des paramètres, facilitée par le choix d' une dérivée première pour la régularisation en latitude, a pu être menée également pour les autres données (notamment LOWL (voir Article 1), et MDI). Cette démarche reste semi empirique et n'a pas pu être automatisée dans le cas bi-dimensionnel mais le fait que la même procédure ait été suivie pour les différentes données observationnelles est important pour la comparaison des résultats. Bien sûr d'autres choix des paramètres de régularisation sont possibles, et l'on verra notamment qu'un choix correspondant à une régularisation moindre (point 2 sur la **figure 4.2**) peut se révéler plus approprié pour l'étude de la tachocline. Pour l'étude d'une propriété locale de la rotation, on base aussi le choix des paramètres en partie sur l'étude du compromis local entre résolution et propagation des erreurs par examen des noyaux de résolution en un point donné. Ce choix peut cependant se révéler inapproprié pour la description de la rotation dans les autres zones.

Contraintes de surface

Certaines observations ne donnant pas accès aux splittings des modes de degrés l élevés ($l < 100$ pour LOWL) sondant les couches les plus superficielles, il est intéressant d'utiliser les observations directes de la rotation des traceurs de surface pour contraindre l'inversion.

Néanmoins, les observations de surface sont également entachées d'incertitudes observationnelles, elles sont en général moyennées sur de longues périodes qui ne sont pas nécessairement contemporaines des observations de splittings rotationnels utilisées. De plus, en fonction du type de traceurs suivis, la description de la rotation différentielle obtenue peut correspondre à la rotation de couches qui ne sont pas strictement localisées à la surface solaire définie dans l'inversion.

Tous ces points peuvent contribuer à introduire des effets indésirables dans l'inversion si les observations de surface sont utilisées comme des contraintes 'dures' imposant strictement la valeur de la rotation en $r = R_\odot$. J'ai donc plutôt choisi d'introduire un nouveau paramètre λ_s pondérant un terme mesurant l'écart entre la rotation de surface déduite de l'inversion et la loi de rotation différentielle correspondant aux observations directes de la rotation de surface. Cela revient à ajouter un terme appelé 'χ^2 de surface' à la fonctionnelle à minimiser, soit :

$$\chi^2_{\text{surface}}(\Omega) = \frac{1}{n_\mu} \sum_{k=1}^{n_\mu} \left(\frac{\Omega_k^s - \Omega(R_\odot, \mu_k)}{\sigma_k^s} \right)^2 , \tag{4.7}$$

où Ω_k^s représentent les valeurs en n_μ points en latitude de la rotation de surface déduites des observations directes et σ_k^s les écarts types estimés pour ces observations. Un choix $\lambda_s = 0$ n'impose aucune contrainte de surface alors qu'un choix de λ_s grand tendra à imposer une contrainte 'dure' sur la rotation de surface. L'étude de la variation de la solution en fonction du choix de ce paramètre permet de tester la compatibilité des observations de splittings avec les diverses observations de surface. Les résultats obtenus pour deux types d'observations de surface combinées aux données LOWL sont discutés §4.

4.1.3 Équations normales et résolution du système linéaire

La discrétisation de la fonctionnelle à minimiser prenant en compte toutes les contraintes précédentes peut s'écrire sous la forme:

$$J(\tilde{\mathbf{\Omega}}) = \left\| \mathbf{P} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \sqrt{\lambda_s}\mathbf{S} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{\Omega}} - \begin{bmatrix} \mathbf{W} \\ \sqrt{\lambda_s}\mathbf{\Omega_s} \end{bmatrix} \right) \right\|_2^2 + \lambda_r \tilde{\mathbf{\Omega}}^\top \mathbf{Z}^{\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{\Omega}} + \lambda_\mu \tilde{\mathbf{\Omega}}^\top \mathbf{Z}^{\mu} \tilde{\mathbf{\Omega}} \tag{4.8}$$

où $\mathbf{R}$ et $\mathbf{S}$ représentent les matrices correspondant à la discrétisation des termes χ^2 (Eq. 4.4) et χ^2_{surface} (Eq. 4.7) respectivement; $\mathbf{W}$ est le vecteur des observables (splittings ou coefficients a); $\mathbf{\Omega_s}$ le vecteur des observations de surface à différentes latitudes; $\mathbf{P} \equiv \mathbf{diag}(\mathbf{1}/\sigma_\mathbf{i}, \mathbf{1}/\sigma_\mathbf{k}^\mathbf{s})$ la matrice diagonale de l'inverse des écarts types sur les splittings (ou

coefficients a) et sur les observations de surface; et $\mathbf{Z^r}$ et $\mathbf{Z}^\mu$ les matrices de discrétisation des termes de régularisation en rayon et en latitude.

Le minimum de cette fonctionnelle est atteint pour le vecteur $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ qui annule son gradient, ce qui conduit à la résolution d'un système linéaire ou *équations normales*:

$$\nabla J(\tilde{\mathbf{\Omega}}) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\left(\mathbf{H}^\top\mathbf{H} + \lambda_r\mathbf{Z^r} + \lambda_\mu\mathbf{Z}^\mu\right)}_{\mathcal{H}}\tilde{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{H}^\top\mathbf{d}, \tag{4.9}$$

où l'on a noté:

$$\mathbf{H} = \mathbf{P}\begin{bmatrix}\mathbf{R}\\ \sqrt{\lambda_s}\mathbf{S}\end{bmatrix} \qquad \text{et:} \quad \mathbf{d} = \mathbf{P}\begin{bmatrix}\mathbf{W}\\ \sqrt{\lambda_s}\mathbf{\Omega}_s\end{bmatrix}. \tag{4.10}$$

Ce système peut être résolu par inversion de la matrice symétrique $\mathcal{H}$ ce qui peut se faire par une décomposition en valeurs singulières (SVD) ou par une méthode itérative de gradients conjugués (voir par exemple Press et al. 1992). Ceci nécessite néanmoins de recommencer l'inversion pour chaque nouveau choix des paramètres λ_r, λ_μ ou λ_s et donc la construction des 'courbes L' est très coûteuse en temps de calcul. Il est cependant possible d'utiliser une décomposition en valeurs singulières généralisée (GSVD) (Christensen Dalsgaard et al. 1993, Hansen 1994) qui présente le double avantage de travailler directement sur la matrice $\mathbf{H}$ qui est mieux conditionnée que $\mathbf{H}^\top\mathbf{H}$, et de pouvoir fournir tous les points d'une 'courbe L' correspondant à un coefficient $\alpha = \lambda_r/\lambda_\mu$ fixé (voir **Fig. 4.2**) avec l'équivalent (en temps de calcul) d'une seule inversion de la matrice $\mathcal{H}$.

Pour utiliser la méthode GSVD, on exprime la fonctionnelle à minimiser sous la forme:

$$J(\tilde{\mathbf{\Omega}}) = \left\|\mathbf{H}\tilde{\mathbf{\Omega}} - \mathbf{d}\right\|_2^2 + \lambda_r\left\|\mathbf{L}\tilde{\mathbf{\Omega}}\right\|_2^2 \tag{4.11}$$

où la matrice $\mathbf{L}$ est calculée de telle sorte que:

$$\mathbf{L}^\top\mathbf{L} = \mathbf{Z}^r + \alpha^{-1}\mathbf{Z}^\mu \tag{4.12}$$

La méthode GSVD décompose alors la paire de matrices $(\mathbf{H}, \mathbf{L})$ par:

$$\begin{cases}\mathbf{H} &= \mathbf{U}\mathbf{D_a}\mathbf{X}^{-1}\\ \mathbf{L} &= \mathbf{V}\begin{pmatrix}0 & \mathbf{D_b}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\mathbf{X}^{-1}\end{cases} \tag{4.13}$$

où $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ sont des matrices unitaires; $\mathbf{D}_a \equiv diag(a_i)$ et $\mathbf{D}_b \equiv diag(b_i)$ des matrices carrées diagonales dont les tailles respectives sont le nombre d'inconnues (n_ω) et le rang de $\mathbf{L}$ $(n_L \leq n_\omega)$; et $\mathbf{X}$ est une matrice carrée inversible de taille n_ω. A partir de cette décomposition, la solution peut être calculée pour n'importe quel choix de λ_r (α étant fixé), par:

$$\tilde{\mathbf{\Omega}}(\lambda_r) = \mathbf{X}\mathbf{D}_f\mathbf{U}^\top\mathbf{d} \tag{4.14}$$

où $\mathbf{D}_f$ est une matrice diagonale de dimension n_ω dont les éléments diagonaux sont définis par:

$$f_i = \begin{cases} a_i^{-1} & i = 1,..,n_\omega - n_L \\ \dfrac{a_i}{a_i^2 + \lambda_r b_{i-n_\omega+n_L}^2} & i = n_\omega - n_L + 1,..,n_\omega \end{cases} \tag{4.15}$$

Cette décomposition GSVD a été exploitée pour l'inversion 2D des données MDI mais s'est surtout révélée utile pour l'analyse 1D de la tachocline dans le plan équatorial (voir §5). Les résultats 2D obtenus à partir des données LOWL et GONG présentés dans la suite ont été obtenus par inversion de la matrice $\mathcal{H}$ des équations normales après sa décomposition en valeurs singulières.

4.1.4 Prise en compte des erreurs: signification statistique des résultats obtenus

Je commence par rappeler quelques notions bien connues relatives à la méthode des moindres carrés puis je montre comment la régularisation intervient dans ce cadre et comment la valeur du χ^2 peut être utilisée pour l'estimation des erreurs en tout point de la solution.

Aspects statistiques de la méthode des moindres carrés

Les splittings ou les coefficients a sont déterminés avec une certaine incertitude et ne correspondent donc pas exactement à l'intégrale double de la rotation pondérée par le noyaux de rotation. Cette différence est généralement modélisée par l'addition pour chaque observable d'un bruit ϵ_i que l'on suppose gaussien de moyenne nulle (ce qui suppose que les mesures ne sont pas biaisées) et dont l'écart type σ_i peut être estimé à partir des méthodes d'ajustement utilisées pour décrire le spectre.

On note formellement le problème discrétisé par:

$$\mathbf{d} = \mathbf{H}\tilde{\mathbf{\Omega}} + \bar{\epsilon} \tag{4.16}$$

Les données ayant été normalisées par les écarts types, le vecteur $\bar{\epsilon}$ représente ici un vecteur aléatoire normal $\mathcal{N}(0,1)$. Les hypothèses sur la statistique du bruit permettent de donner une signification statistique aux résultats obtenus (sous réserve bien sûr que les hypothèses soient justes!). Dans le cas d'un bruit gaussien et indépendant de la rotation, la *probabilité de vraisemblance* des observations connaissant la rotation, $\mathrm{P}(\mathbf{d}/\tilde{\mathbf{\Omega}})$, est telle que:

$$\mathrm{P}(\mathbf{d}/\tilde{\mathbf{\Omega}}) = \mathrm{P}(\bar{\epsilon} = \mathbf{d} - \mathbf{H}\tilde{\mathbf{\Omega}}) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \exp\left[\frac{1}{2}\|\mathbf{d} - \mathbf{H}\tilde{\mathbf{\Omega}}\|_2^2\right] \tag{4.17}$$

et:

$$\max_{\tilde{\mathbf{\Omega}}} \mathrm{P}(\mathbf{d}/\tilde{\mathbf{\Omega}}) \Longleftrightarrow \min_{\tilde{\mathbf{\Omega}}} \|\mathbf{d} - \mathbf{H}\tilde{\mathbf{\Omega}}\|_2^2 \tag{4.18}$$

Sous l'hypothèse d'un bruit gaussien, la méthode des moindres carrés non régularisée est donc équivalente à une méthode de maximum de vraisemblance. Cet estimateur est, du point de vue statistique, un estimateur non biaisé en ce sens que l'espérance mathématique du vecteur solution du problème (4.18) est égal au vecteur $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ des projections de la rotation sur la base de splines intervenant dans le modèle (4.16) (voir ci-après).

Prise en compte du terme de régularisation

Comment, dans ce cadre, interpréter du point de vue de la statistique, le fait d'introduire un terme de régularisation?

Si l'on conserve la même hypothèse de l'existence d'un bruit gaussien $\mathcal{N}(0, \sigma_i)$ sur les mesures, un rapide calcul montre que le vecteur $\tilde{\mathbf{\Omega}}'$ obtenu par résolution des équations normales (4.9) n'est plus un estimateur non biaisé. En effet d'après (4.16) l'espérance mathématique des données réduites $\mathrm{E}(\mathbf{d})$ est $\mathbf{H}\tilde{\mathbf{\Omega}}$ mais l'espérance mathématique du vecteur $\tilde{\mathbf{\Omega}}' = \mathcal{H}^{-1}\mathbf{H}^\top\mathbf{d}$, solution des équations normales, est:

$$E(\tilde{\mathbf{\Omega}}') = \mathcal{H}^{-1}\mathbf{H}^\top\mathbf{H}\tilde{\mathbf{\Omega}} \tag{4.19}$$

et cet estimateur de $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ est donc biaisé. Dans le cas sans régularisation où $\mathcal{H} = \mathbf{H}^\top\mathbf{H}$ on retrouve bien le fait que l'estimateur du maximum de vraisemblance est non biaisé.

La régularisation revient donc à choisir un nouvel estimateur, qui n'est plus non biaisé mais qui traduit la connaissance a priori que l'on a introduite, en lui donnant une signification physique, dans le terme de régularisation.

Il est également possible de relier cet estimateur à la *probabilité a posteriori* $\mathrm{P}(\tilde{\mathbf{\Omega}}/\mathbf{d})$ d'obtenir $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ connaissant les données $\mathbf{d}$. En utilisant la règle de Bayes:

$$\mathrm{P}(\tilde{\mathbf{\Omega}}/\mathbf{d}) = \frac{\mathrm{P}(\mathbf{d}/\tilde{\mathbf{\Omega}})\mathrm{P}(\tilde{\mathbf{\Omega}})}{\mathrm{P}(\mathbf{d})} \tag{4.20}$$

et sachant que $\mathrm{P}(\mathbf{d})$ est indépendant de $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ et donc constant, l'estimation du Maximum A Posteriori (MAP) s'écrit:

$$\max_{\tilde{\mathbf{\Omega}}}\{\mathrm{P}(\mathbf{d}/\tilde{\mathbf{\Omega}})\mathrm{P}(\tilde{\mathbf{\Omega}})\} \tag{4.21}$$

où $\mathrm{P}(\tilde{\mathbf{\Omega}})$ représente la *probabilité a priori* d'une rotation dont les projections sur la base de splines serait $\tilde{\mathbf{\Omega}}$. On voit dès lors l'interprétation statistique possible du terme de régularisation introduit: cela revient à définir une loi de probabilité sur $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ par:

$$\mathrm{P}(\tilde{\mathbf{\Omega}}) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{\Omega}}^\top(\lambda_r\mathbf{Z}^r + \lambda_\mu\mathbf{Z}^\mu)\tilde{\mathbf{\Omega}}\right] \tag{4.22}$$

Étant donnée cette loi de probabilité la solution RLS est équivalente à une solution du Maximum A Posteriori qui représente la rotation qui a la plus grande probabilité de donner les observations mesurées. Cette expression de la régularisation en termes de loi de probabilité (4.22) n'a pas ici d'interprétation statistique simple mais peut trouver

une interprétation dans le cadre des théories des champs de Markov correspondant à une approche stochastique de l'inversion (Blanc-Féraud 1998). Cela permet juste de voir que régulariser en définissant un terme de 'douceur de la solution' revient à considérer comme plus probables les solutions les plus 'douces' selon cette définition.

Modification des hypothèses et prise en compte du χ^2

La méthode des moindres carrés est construite sur l'hypothèse selon laquelle la meilleure description d'un ensemble de données est celle obtenue en minimisant la somme pondérée des carrés des résidus (4.4). Avec l'hypothèse d'erreurs gaussiennes $\mathcal{N}(0, \sigma_i)$ sur les observations, on montre que cette quantité suit une loi de χ^2 à $N - n_w$ degrés de liberté. L'espérance mathématique de cette quantité est donc $\mathrm{E}(\chi^2(\tilde{\mathbf{\Omega}})) = N - n_w$. Naturellement la régularisation tend à augmenter légèrement la valeur du χ^2, c'est ce que montrent les 'courbes L', mais l'on s'attend néanmoins à ce que la valeur du χ^2 normalisé par le nombre de degrés de liberté soit voisine de 1 au coin des 'courbes L'. Cependant, les résultats obtenus avec les données GONG (**Fig. 4.2**) et LOWL (Article 1) donnent une valeur du χ^2 normalisé proche de 2. Cette valeur est hautement improbable pour un système ayant un si grand nombre de degrés de liberté. Cela peut signifier que notre modélisation du problème direct ou que la base de splines utilisée ne sont pas appropriées ou bien que les erreurs sur les splittings (ou coefficients a) ont été sous estimées.

La base de splines autorisant des solutions très oscillantes pour de faibles régularisations, il semble plus vraisemblable que les incertitudes sur les observations aient pu être sous estimées. Il est néanmoins possible de considérer que les erreurs données pour chaque observable, si elles peuvent être biaisées en valeur absolue, reflètent bien le degré de confiance relatif que l'on a en une mesure par rapport à une autre. Autrement dit **l'utilisation des σ_i comme poids dans le critère à minimiser reste justifiée mais l'interprétation statistique du résultat peut être biaisée**.

Une façon de remédier à ce problème est de changer l'hypothèse selon laquelle les erreurs ϵ_i suivent une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma_i)$. On supposera plutôt que ces erreurs suivent une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma/p_i)$ où σ est une constante inconnue et les poids p_i sont estimés par l'inverse des erreurs données sur chaque splitting ou coefficient a ($p_i = 1/\sigma_i$). Un estimateur de σ est alors donné par la valeur du χ^2 normalisé par le nombre de degrés de liberté (voir par exemple Linnik 1963) et la matrice de covariance sur l'estimation $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ est donnée par:

$$\mathbf{B}_{\tilde{\mathbf{\Omega}}} = \frac{\chi^2(\tilde{\mathbf{\Omega}})}{N - n_\omega} \mathcal{H}^{-1} \mathbf{H}^\top \mathbf{H} \mathcal{H}^{-1} \tag{4.23}$$

Ensuite l'équation (4.3) permet d'obtenir un estimateur de l'écart type sur la solution en tout point (r_0, μ_0) par:

$$\sigma(\tilde{\Omega}(r_0, \mu_0)) = \sqrt{\xi^\top \mathbf{B}_{\tilde{\mathbf{\Omega}}} \xi} \qquad \text{avec: } \xi^\top = [\varphi_1(r_0), \varphi_2(r_0)\psi_1(\mu_0), ..., \varphi_{n_r}(r_0)\psi_{n_\mu}(\mu_0)] \tag{4.24}$$

et c'est cette valeur qui est représentée comme barre d'erreur sur les solutions RLS.

Dans le cas d'un χ^2 normalisé voisin de 2, cette correction conduit à multiplier par $\sqrt{2} \simeq 1.4$ les barres d'erreurs traditionnellement données. Malgré cette correction, nous verrons par la suite (chapitre 4) que les erreurs ainsi estimées restent probablement sous estimées, au moins si on leur donne une interprétation purement locale (voir la discussion du §3.2.6).

4.2 Les données

Le **tableau 4.1** donne les principales caractéristiques des données utilisées pour les résultats présentés dans ce chapitre et n'inclue pas les données de bas degrés (voir chapitre 6). Elles correspondent aux premières observations de chacun des instruments cités. Les observations de l'instrument LOWL couvrent une période de 2 ans, celles du réseau GONG une période de 8 mois et les données MDI correspondent aux 144 premiers jours d'observations à bord du satellite SoHO. L'ensemble couvre une période de deux ans et demi entre février 1994 et septembre 1996. L'indice maximum des coefficients a évalués pour chaque mode est donné en dernière ligne du tableau mais le nombre de ces coefficients peut varier d'un mode à l'autre en fonction notamment de la qualité de l'ajustement du spectre pour le mode considéré. La procédure d'ajustement suivie pour extraire les coefficients a des spectres est similaire pour les données LOWL et MDI (Schou 1992) alors qu'une procédure indépendante a été développée par l'équipe du réseau GONG (Hill et al. 1996).

Instrument	**LOWL**	**GONG**	**MDI**
Périodes d'observation	26/02/94-25/02/96	23/08/95-30/04/96	09/05/96-29/09/96
Degrés	$1 \leq l \leq 99$	$2 \leq l \leq 150$	$1 \leq l \leq 250$
Fréquences (μHz)	$1200 < \nu < 3500$	$1200 < \nu < 5000$	$954 < \nu < 4556$
Nombres de modes (n,l)	1102	2103	2036
Coefficients a	$a_1 - a_5$	$a_1 - a_9$	$a_1 - a_{35}$

TAB. 4.1 – *Caractéristiques des principales données exploitées*

D'autres ensembles de données concernant les degrés intermédiaires ont été utilisés pendant ce travail. Des comparaisons avec des données GONG couvrant d'autres périodes d'observations ou obtenues par d'autres méthodes d'ajustement du spectre ont notamment été menées au sein de l'équipe GONG (voir Article 2, Contribution 2). Par ailleurs, les observations réalisées entre 1986 et 1990 au BBSO ont été exploitées pendant la phase de développement du code d'inversion 2D RLS (Contribution 1). Ce travail a permis de mettre au point la stratégie générale pour le choix des divers paramètres de l'inversion et de confirmer, d'une manière indépendante, les résultats obtenus par d'autres équipes à partir de ces même données. Ces premiers résultats ont

pu être précisés à partir des données du **tableau 4.1** dont l'analyse est détaillée dans les paragraphes suivants.

4.3 Résultats

4.3.1 Profils de rotation, erreurs et noyaux de résolution

La **figure 4.3a** donne le profil de rotation obtenu pour dix latitudes différentes à partir des données LOWL. L'analyse détaillée de ces données à partir du code 2D RLS développé fait l'objet de l'article 1. Les noyaux de résolution correspondant à cette inversion sont reproduits **figure 4.3b**.

La **figure 4.4a** compare les inversions des différents groupes de la collaboration GONG appliquées aux mêmes données. Les profils de rotation obtenus à trois latitudes (0, 30 et 60 degrés) sont tracés sur la même figure en omettant les barres d'erreur associées. La **figure 4.4b** reproduit le résultat obtenu avec le code 2D RLS ('groupe Nice') pour dix latitudes en montrant les barres d'erreurs. L'examen des noyaux de rotation montre cependant que ceux ci sont mal localisés pour des latitudes supérieures à 60° et donc les résultats ne sont pas fiables pour ces latitudes. Il en est de même pour des rayons inférieurs à $0.4R_\odot$.

D'après la **figure 4.4a**, tous les résultats sont en bon accord pour $r > 0.5R_\odot$. Jusqu'à $0.4R_\odot$ les solutions obtenues à l'équateur et à 30° restent compatibles. Au dessous de $0.4R_\odot$ la dispersion des résultats indique que la rotation n'est pas suffisamment contrainte par les données pour pouvoir tirer des conclusions fiables des différentes inversions. D'une manière générale, la dispersion des résultats obtenus par différentes méthodes semble légèrement plus importante que les barres d'erreurs estimées en chaque point sur la solution 2D RLS (d'amplitude comparable à celles obtenues avec les données LOWL **Figs. 4.3a, b**, voir aussi Contribution 2) ou sur les solutions de type OLA (voir Contribution 2, Fig. 1). Par exemple à l'équateur et proche de la surface ces erreurs sont typiquement de l'ordre de $\pm$1nHz alors la dispersion des résultats issus de différentes méthodes est plutôt de l'ordre de 5nHz. Cette différence s'accentue dans les zones où la solution est mal contrainte par les données. En fait la dispersion des résultats de différentes méthodes, si elle donne une idée de l'incertitude sur le résultat, n'est pas directement comparable aux barres d'erreurs données sur une solution. Elle est plus directement comparable à la dispersion des résultats en fonction de la régularisation: les différentes solutions tracées pour le même rayon et la même latitude ne correspondent pas strictement à la même moyenne de la rotation. Autrement dit les noyaux de résolution en un même point ne sont pas strictement identiques pour deux méthodes différentes.

Les barres d'erreurs estimées sont basées sur des hypothèses statistiques concernant les données. Dans la méthode RLS, l 'introduction du χ^2 permet de prendre en compte d'éventuels biais dans l'estimation des erreurs d'observation mais l'incertitude que l'on a sur la connaissance a priori introduite par le terme de régularisation n'est pas prise en compte. La difficulté d'obtenir des barres d'erreurs réalistes sur une solution RLS

est donc directement reliée au fait que, comme je l'ai discuté au §4.1.4, le terme de régularisation, introduit dans un cadre déterministe, n'a pas réellement d'interprétation statistique simple. C'est pourquoi seule l'étude des noyaux de résolution combinée à une comparaison des différentes méthodes d'inversion comme celle présentée sur la **figure 4.4** ou encore une étude systématique de l'influence du choix des paramètres de régularisation comme celle menée pour l'étude de la tachocline (voir §5 et Article 3) peuvent permettre une estimation réaliste de l'incertitude sur un résultat d'inversion.

Enfin, la **figure 4.5**, représente sur une coupe du soleil les courbes d'iso-rotation déduite des données MDI. Il est à noter que la solution, représentée sur une coupe entière du soleil, est symétrique par rapport à l'équateur. Ceci n'exclut pas l'existence d'éventuelles dissymétries puisque seule la composante de la rotation symétrique par rapport à l'équateur est déduite de l'inversion. Les noyaux de résolution obtenus, à l'issue de cette inversion, entre $0.55R_\odot$ et $0.95R_\odot$ à l'équateur, 30 et 15 degrés du pôle sont présentés **figure 4.6**. Les valeurs des résolutions radiales et latitudinales correspondantes sont résumées dans le **tableau 4.2**.

$\mathbf{r_0} \setminus \theta_0$	**90°**	**30°**	**15°**
$\mathbf{0.55R_\odot}$	0.102 16.1°	0.159 28.4°	0.155 32.4°
$\mathbf{0.70R_\odot}$	0.091 8.2°	0.117 17.2°	0.141 20.7°
$\mathbf{0.9R_\odot}$	0.030 4.9°	0.058 7.3°	0.067 9.7°
$\mathbf{0.95R_\odot}$	0.035 4.9°	0.044 6.2°	0.070 6.3°

TAB. 4.2 – *Résolutions radiales et latitudinales* ($^{\Delta_r/R_\odot}_{\Delta_\theta}$) *correspondant à la largeur à mi hauteur des noyaux de résolution évalués en* (r_0, θ_0) *pour l'inversion des données MDI (***Fig. 4.5***).*

Les zones laissées en blanc correspondent aux endroits où l'on estime que la solution trouvée n'est pas fiable. Le critère utilisé est la localisation des noyaux de résolution: dans ces zones la distance Δ entre la position du maximum du noyau de résolution et le point (r_0, θ_0) où celui-ci est calculé, est telle que $\Delta > 0.1R_\odot$. La **figure 4.6** montre par exemple que le point $(r_0 = 0.55R_\odot, \theta_0 = 15°)$ correspond à une valeur $\Delta = 0.129R_\odot$ et donc la solution trouvée en ce point n'est pas considérée comme fiable sur la **figure 4.5**.

La résolution en latitude atteinte est naturellement reliée au nombre de coefficients a utilisés pour décrire les splittings puisque les coefficients d'indices supérieurs à 1 sont utilisés pour décrire l'écart à la linéarité des lignes du diagramme $m - \nu$ et que c'est cet écart à la linéarité qui contient l'information sur la dépendance en latitude de la rotation. Ainsi les données LOWL avec uniquement trois coefficients a ne permettent pas d'obtenir un résolution en latitude inférieure à $\Delta_\theta = 30°$ (voir **Fig. 4.3b**). L'inversion

des splittings reconstruits à partir de ces (3) coefficients a, en supposant les coefficients d'indices supérieurs à trois nuls, a permis de donner une estimation de la résolution en latitude que l'on pouvait espérer atteindre grâce à une meilleure résolution dans le spectre permettant de déterminer les splittings individuels et non plus seulement trois coefficients de leur projection sur des polynômes (voir Article 1). A l'équateur on estimait ainsi pouvoir atteindre des résolutions en latitude entre $\Delta_\theta = 4.5°$ et $\Delta_\theta = 13.8°$ pour des rayons entre $0.9R_\odot$ et $0.55R_\odot$. De telles résolutions ont effectivement été atteintes par la suite grâce au grand nombre (18) de coefficients a (d'indices impairs) qui a pu être déterminé à partir des observations MDI (la **figure 4.6** donne des résolutions de 4.9° à 16.1° à l'équateur pour des rayons entre $0.9R_\odot$ et $0.55R_\odot$). Les 5 coefficients a des données GONG ont également amélioré, dans une moindre mesure, la résolution en latitude par rapport aux données LOWL, mais des déterminations de splittings individuels sont maintenant réalisées à partir des spectres GONG qui devraient permettre d'atteindre des résolutions similaires à celles obtenues avec les données MDI.

4.3.2 Une vision globale de plus en plus précise de la rotation

Globalement, l'ensemble des résultats obtenus confirme la vision générale de la rotation obtenue dès que la précision atteinte sur les mesures des splittings a permis l'application d'inversions 1.5D pour sonder les variations de la rotation en rayon et en latitude (Christensen-Dalsgaard & Schou 1988, Dziembowski et al. 1989). La rotation différentielle observée en surface se maintient dans toute la zone convective ($r > 0.7R_\odot$). L'équateur fait un tour tous les 25 jours environ ($\Omega/2\pi \simeq 460$ nHz) alors que les zones polaires mettent environ 35 jours ($\Omega/2\pi \simeq 330$ nHz) pour effectuer une révolution complète. A la base de la zone convective la rotation devient quasiment indépendante de la latitude et du rayon au moins dans la partie externe de la zone radiative ($r > 0.4R_\odot$), la zone de transition entre les deux régimes de rotation, différentielle et rigide, constituant la tachocline solaire. Cette vision est cependant assez grossière et laisse en fait beaucoup de zones d'ombre. L'objectif des nouvelles observations de splittings est d'essayer de préciser notamment les points suivants:

- la rotation des couches situées juste sous la surface ($r > 0.95R_\odot$),
- la rotation des zones proche des pôles,
- le degré d'indépendance de la rotation en fonction de la latitude et du rayon dans la zone radiative,
- la structure précise (localisation, largeur, dépendance en latitude) de la tachocline,
- la rotation du cœur.

Les principaux résultats obtenus concernant les trois premiers points sont développés dans ce chapitre et les deux derniers points feront l'objet des chapitres 5 et 6 respectivement.

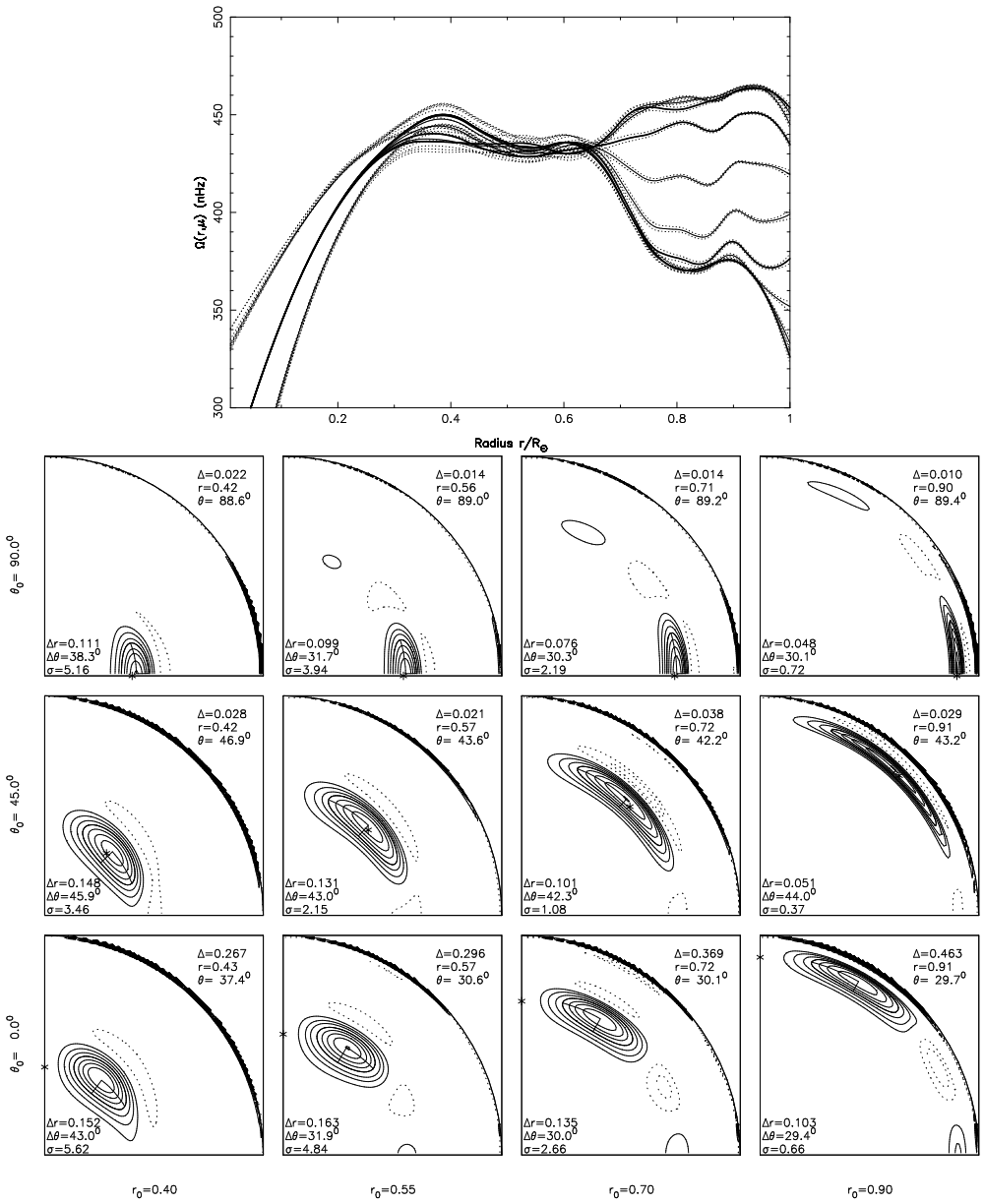


FIG. 4.3 – *Inversion 2D RLS des données LOWL (voir* **Tab. 4.1***).* **(a, en haut)** *La solution est présentée à* 10 *latitudes différentes entre l'équateur et le pôle (traits pleins) avec les erreurs à* 1σ *(traits pointillés), les erreurs d'observations étant supposées gaussiennes et non corrélées.* **(b, en bas)** *Les noyaux de résolution 2D* $\kappa(r_0, \theta_0, r, \theta)$ *sont calculés pour 4 rayons* r_0 *et* 3 *colatitudes* θ_0 *différents.* Δ_r *et* Δ_θ *sont les largeurs totales en rayon et en latitude à mi hauteur du noyau de résolution (FWHM).* σ *donne l'erreur reportée sur le résultat (a) en chaque* (r_0, θ_0)*.* r *et* θ *indiquent la position du maximum du noyau de résolution et* Δ *indique la distance de ce maximum au point* (r_0, θ_0)*.*

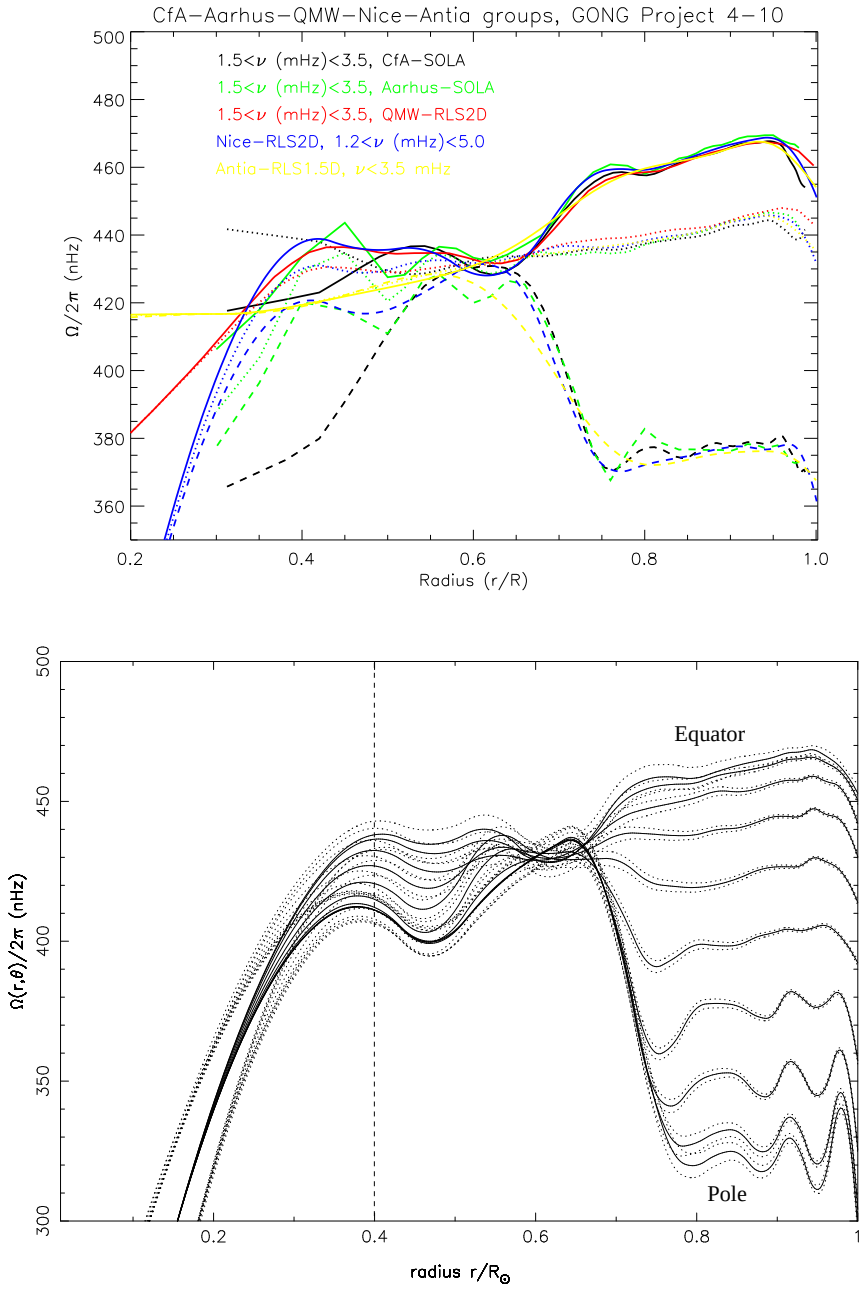


FIG. 4.4 – **(a, en haut)** *Comparaison des profils de rotation obtenus pour trois latitudes (équateur, 30° et 60°) par différentes méthodes d'inversion. Chaque méthode a été mise en oeuvre par un groupe différent au sein de la collaboration GONG. Les données utilisées correspondent aux données GONG du* **tableau 4.1**, *le domaine de fréquences retenu par chaque groupe étant indiqué sur la figure. Les résultats de l'inversion RLS 2D (groupe 'Nice') ont été obtenus avec le choix des paramètres de régularisation désignés par le point 1 sur la figure 4.2 des 'courbes L' (Résultats compilés par A. Eff-Darwich, communication privée).* **(b, en bas)** *Détails de la solution 2D RLS (groupe 'Nice') pour dix latitudes entre l'équateur et le pôle. L'examen des noyaux de résolution indique que la solution n'est pas fiable pour des rayons inférieurs à* $0.4R_\odot$ *et des latitudes supérieures à* 60°.

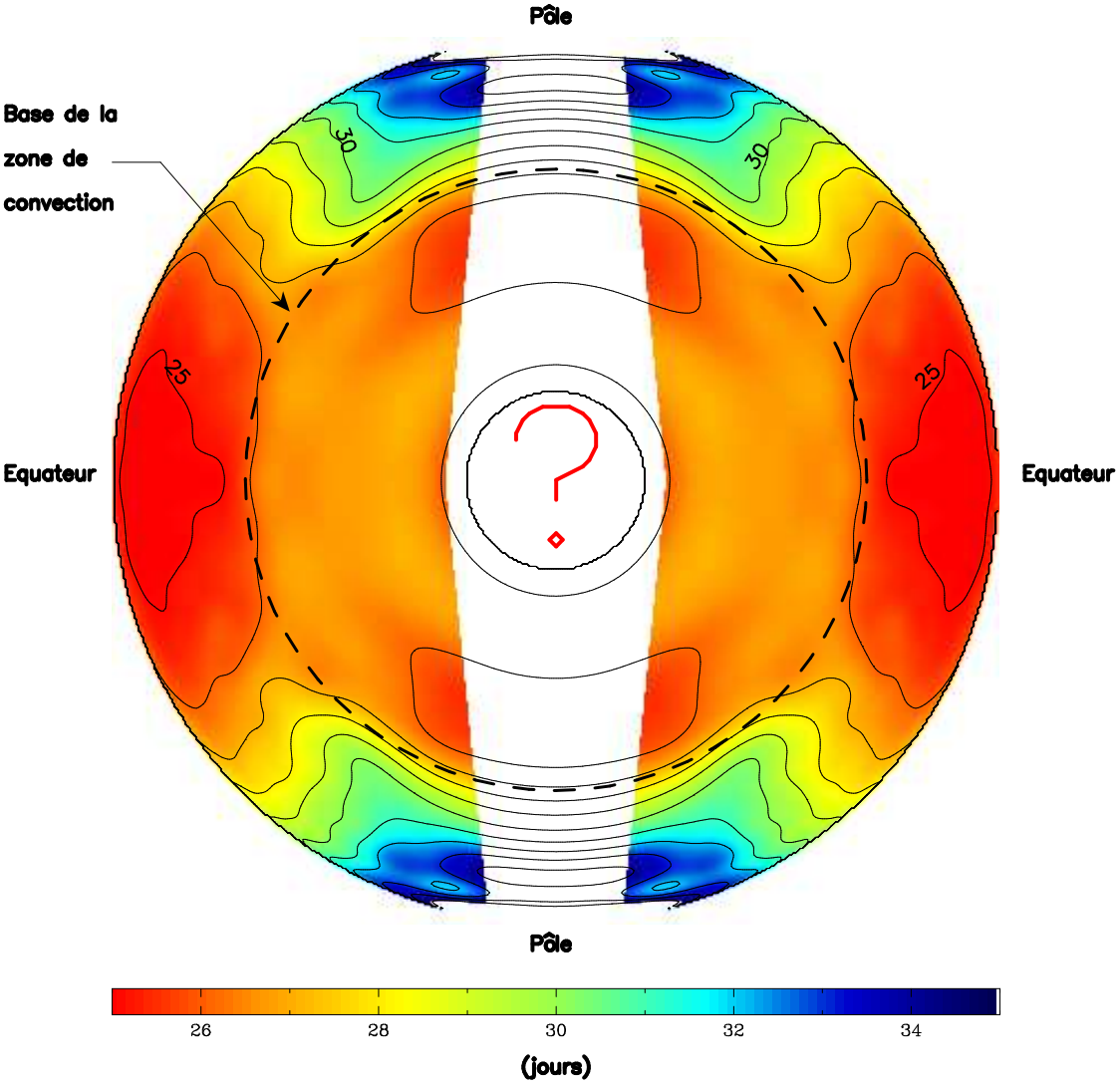


FIG. 4.5 – *Le résultat présenté ici sous forme de courbes iso-rotation sur une coupe en profondeur de la sphère solaire, a été obtenu par inversion 2D RLS des données acquises durant les 144 premiers jours d'observation de l'instrument MDI à bord du satellite SoHO (voir* **Tab. 4.1**. *Les résultats sur l'estimation de la rotation du coeur et des zones polaires demeurent incertains et ne sont représentés sur ce graphique que par des iso-contours (sans couleur) qui peuvent être considérés en grande partie comme des extrapolations des résultats obtenus dans les autres zones.*

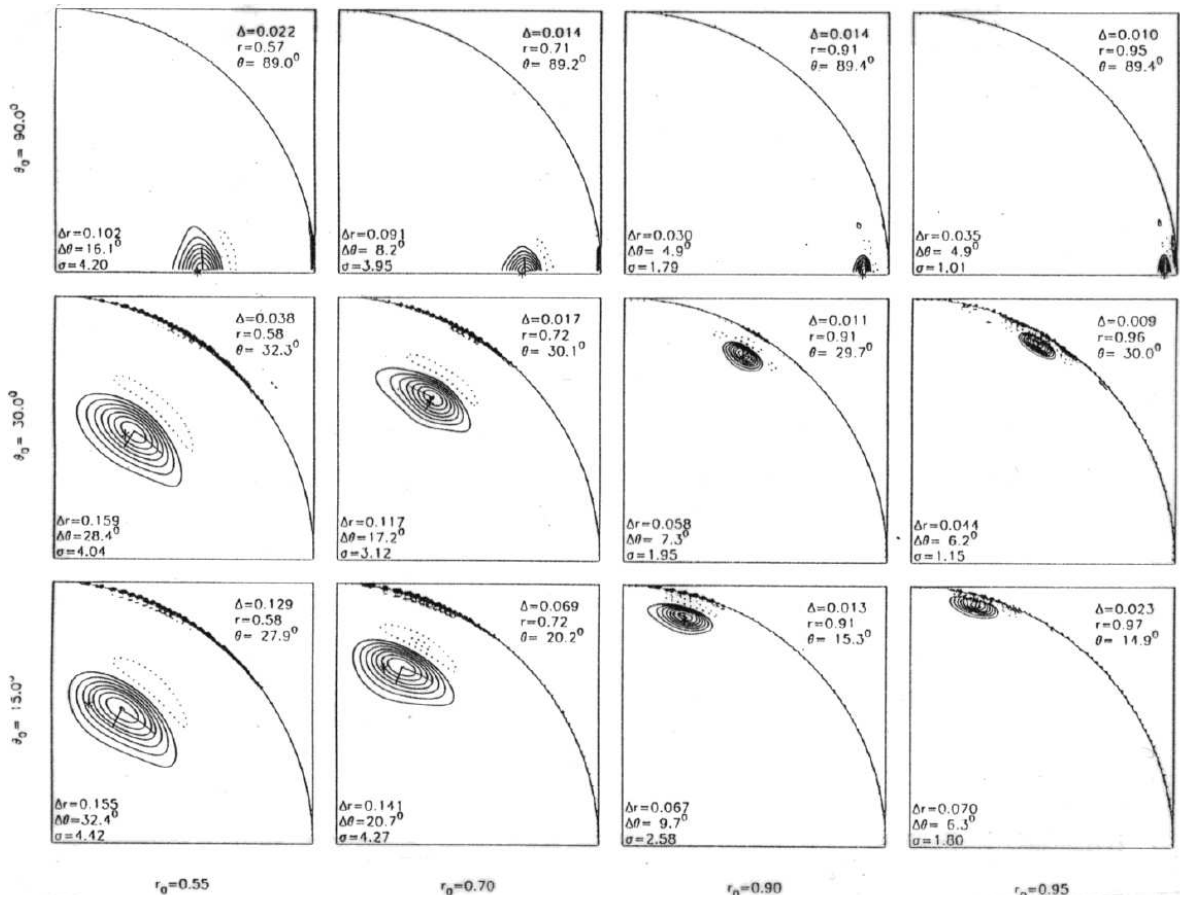


FIG. 4.6 – *Noyaux de résolution correspondant à l'inversion présentée Fig. 4.5. (Voir légende Fig. 4.3b)*

La rotation des couches superficielles

Les données LOWL ne comprenant pas de modes $l > 100$, seuls quelques modes (~ 30) de basses fréquences ont leurs points tournants au dessus de $0.95R_\odot$. Néanmoins, les modes observés ont de l'amplitude près de la surface et une étude systématique (voir Article 1) de l'influence sur la solution de la contrainte de surface introduite dans le code d'inversion 2D RLS m'a **permis de mettre en évidence que les données LOWL sont compatibles avec les observations directes du plasma photosphérique obtenues par analyse Doppler des raies spectrales (Snodgrass & Ulrich 1990, Snodgrass 1992)**. Des conclusions similaires ont ensuite été obtenues par Kosovitchev & Schou (1997) en analysant les modes fondamentaux ('modes f', c.à.d. d'ordre radial $n = 0$) qui n'ont de l'amplitude que dans une zone juste sous la surface et qui ont pu être observés par l'instrument MDI pour les degrés compris entre $l = 120$ et $l = 250$.

De fait, le profil de rotation obtenu pour $r > 0.95R_\odot$ par inversion des données LOWL avec une contrainte de surface (**Fig. 4.3a**) est très proche du résultat obtenu sans contraintes de surface avec les données MDI (**Fig. 4.5**). Finalement l'ensemble des données et des analyses (**Figs. 4.3a, 4.4, 4.5**, voir aussi Article 1 et Schou et al. 1998) converge vers le résultat suivant: **proche de l'équateur, il existe, juste sous la surface, un gradient de la rotation angulaire. Celle-ci augmente de 10 à 15nHz pour atteindre un maximum d'environ 465 à 470nHz autour de $0.095R_\odot$ à l'équateur** . L'ensemble des données utilisées indique que ce gradient de vitesse sous la surface et le maximum autour de $0.95R_\odot$ persistent au moins jusqu'à des latitudes de 30°. Au delà, jusqu'à 60°, ce gradient semble se maintenir mais la résolution atteinte ne permet plus réellement de conclure et de nouvelles observations seront nécessaires pour confirmer les résultats obtenus.

Ce maximum de vitesse de rotation en $0.95R_\odot$ correspond à la vitesse déduite de l'observation des petites structures magnétiques en surface (Komm et al. 1993, cf. **Fig. 2**). Ceci semble donc suggérer que ces structures peuvent être ancrées aux environs de $0.95R_\odot$ (voir Article 1).

La rotation proche des pôles

La détermination de la rotation des pôles (0° de colatitude) est impossible par l'héliosismologie car seuls les modes $m = 0$ ont de l'amplitude aux pôles et ces modes ne donnent pas de splittings. De plus les modes ayant des points tournants proches des pôles ont un faible rapport m/L et sont plus difficiles à mesurer que les modes sectoraux.

De fait, l'examen des noyaux de résolution montre qu'il n'est pas possible d'obtenir des noyaux bien localisés au dessus de 80° de latitude. Les résultats obtenus avec les données LOWL et GONG pour des latitudes supérieures à 60° restent très incertains et peuvent essentiellement être considérés pour l'inversion RLS comme des extrapolations des résultats obtenus à de plus basses latitudes.

Néanmoins, près de la surface, les données MDI ont permis d'atteindre des résolutions suffisantes (voir le **tableau 4.2** et la **figure 4.6**) pour confirmer la justesse de ces

extrapolations dans la zone convective. D'une manière générale la rotation de surface reste compatible avec les observations du plasma photosphérique (voir Eq. 6 Article 1) pour les hautes latitudes et la rotation différentielle se maintient dans toute la zone convective.

L'inversion RLS des données MDI **figure 4.5** montre cependant une zone étroite près du pôle (à environ 15° de colatitude) qui présente un maximum local de rotation autour de $0.95R_\odot$. L'existence de ces structures (ou 'jets') est importante à mettre en évidence si elles existent car elles sont prédites par certaines simulations numériques de la convection et sont observées pour les planètes géantes Jupiter et Saturne qui sont également des objets en rotation avec d'importants mouvements de convection (Toomre & Brummel 1995).

La zone où a été trouvé ce 'jet' est à la frontière de la zone pour laquelle on pense que nos résultats peuvent être considérés comme fiables mais la résolution atteinte à 15° de colatitude pour une profondeur de $0.95R_\odot$ (voir **Tab. 4.2**) tend à montrer que cette structure est réelle. Néanmoins un deuxième ensemble de données a été réalisé par l'équipe MDI qui est basé sur les mêmes observations mais avec des critères plus sévères pour le nombre de modes extraits et le nombre de coefficients a estimés pour certains modes. Ces données comportent 1656 modes et 18498 coefficients a (d'indice maximal 35 également) contre 2036 modes et 30648 coefficients a pour les données MDI présentées dans le **tableau 4.1**. Ce deuxième ensemble de données est basé sur une estimation différente des coefficients a à partir des spectres et n'est donc pas un strict sous ensemble des premières données mais il peut être vu comme une version 'allégée' ne comprenant que les paramètres les plus fiables qui peuvent être extraits des observations. La comparaison (**Figs. 4.7a, b**) des résultats obtenus à partir des deux ensembles de données montre que le 'jet' n'apparaît plus à l'issue de l'inversion des données 'allégées'. Partout ailleurs les solutions sont très semblables et de plus aucune différence notable n'est apparue pour les noyaux de résolution. Les indicateurs de résolutions et d'incertitudes ne permettent pas de trancher en faveur de l'une ou l'autre des solutions.

Cette structure de 'jet', suspectée pour la première fois avec les données MDI, reste donc probablement trop proche de la limite de résolution pour que l'on puisse conclure. De plus elle ne semble pas être mise en évidence par les inversions de type OLA (Schou et al. 1998, Howe et al. 1998). Ce résultat doit donc être pris avec précaution et ces études devront être poursuivies dans le futur avec de nouvelles données permettant une meilleure résolution. Enfin, je note que si ce jet est réel, nous n'avons aucune indication pour savoir s' il se trouve de manière symétrique proche des deux pôles ou uniquement dans un hémisphère. De plus il est probable, les simulations numériques de la dynamique de la zone convective montrent des phénomènes similaires, que ce genre de structure à relativement petite échelle spatiale évolue au cours du cycle solaire. Il sera donc également intéressant de chercher à résoudre ces 'jets' avec des données couvrant des périodes d'observations différentes.

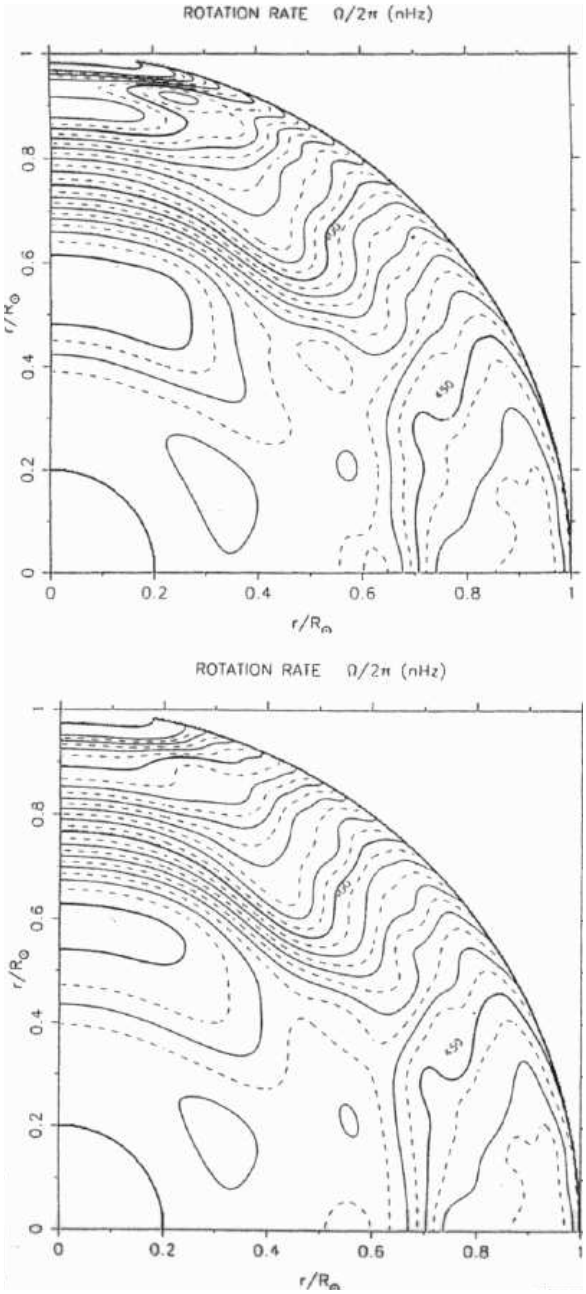


FIG. 4.7 – *Contours d'iso-rotation avec une équidistance de 5nHz, sur une coupe d'un quart du Soleil.* **a) (en haut)** *Résultat identique à celui de la figure 4.5. Les données sont celles de l'instrument MDI mentionnées* **Tab. 4.1** *comprenant 2036 modes et 30648 coefficients a.* **b) (en bas)** *Résultat obtenu à partir d'une version 'allégée' (voir texte) des données (1656 modes et 18498 coefficients a) basées sur les mêmes observations. La structure de 'jet' présente à environ* $15°$ *du pôle pour* $r = 0.95R_\odot$ *dans la solution a) n'est pas retrouvée en b).*

La rotation rigide de la zone radiative

Dans quelle mesure la rotation de la zone radiative est elle rigide? L'ensemble des données et des inversions indique que la rotation est effectivement indépendante de la latitude et du rayon entre la base de la zone convective et $0.4R_\odot$ pour des latitudes inférieures à 40°. La rotation dans cette zone peut être estimée à 430 ± 5nHz. Pour des latitudes supérieures les résultats restent compatibles avec une rotation quasi rigide mais divergent légèrement en fonction des données et des méthodes utilisées. En $0.4R_\odot$ les données LOWL indiquent une augmentation de la rotation avec la latitude (**Fig. 4.3a**) alors que les données GONG indiquent plutôt une rotation plus faible (**Figs. 4.4a, b**). Ces données étant en grande partie contemporaines (voir **Tab. 4.1**) il est peu probable que cette différence puisse venir d'une évolution temporelle de la rotation dans cette zone. Les données MDI montrent une rotation plus rapide autour de $0.6R_\odot$ pour des latitudes supérieures à 70°. Néanmoins, ces variations en fonction de la latitude dans la zone radiative restent marginalement significatives si l'on prend en compte les erreurs ($\sigma \simeq 5nHz$) et la résolution atteinte pour les hautes latitudes dans la zone radiative. D'un autre côté le manque de résolution en latitude devrait au contraire avoir tendance à produire des solutions similaires pour toutes les latitudes. On ne peut donc pas exclure que de telles variations puissent exister et **l'aspect rigide de la rotation (à $\pm$5nHz) de la zone radiative jusqu'à $0.4R_\odot$ n'est pour l'instant bien établi que dans zones proches de l'équateur jusqu'à mi-latitude**.

4.3.3 Liens avec les développements théoriques

Les courbes d'iso-rotation sont donc essentiellement radiales dans toute la zone convective. Ceci va à l'encontre de certaines simulations numériques de la convection dans des couches en rotation (Gilman et Miller 1986; Glatzmaier 1987) qui prédisaient une rotation constante sur des axes parallèles à l'axe de rotation. Depuis la mise en évidence de ce désaccord de nombreuses études théoriques de la rotation différentielle (voir par exemple Küker et al. 1993, Hiremath & Gokhale 1995) et de la rotation associée aux mouvements de convection turbulente (Brummell et al. 1998) ont été menées qui peuvent conduire à un meilleur accord avec les observations héliosismiques. Cependant les hypothèses sous jacentes à ces modèles et simulations numériques restent difficiles à vérifier ou assez éloignées des conditions réelles rencontrées dans le Soleil. La compréhension de la rotation différentielle de la zone convective solaire reste donc une question très largement ouverte et d'actualité.

Dans la zone radiative, entre la base de la zone convective et jusqu'à une profondeur de $0.2R_\odot$, la rotation est quasiment rigide, indépendante de la latitude avec une valeur correspondant à la rotation de surface à mi-latitude soit $\Omega/2\pi \simeq 430$ nHz. Là encore plusieurs théories sont toujours en compétition pour expliquer à la fois l'indépendance de la rotation en fonction de la latitude et la valeur de 430nHz trouvées par l'héliosismologie.

L'hypothèse la plus souvent évoquée pour expliquer la rotation solide de l'intérieur radiatif est l'existence d'un champ magnétique mais si celui-ci s'étend dans la zone convective, le couplage des deux régions devrait tendre à induire une rotation différentielle en latitude également dans la zone radiative (cf. Charbonneau & MacGregor 1993). Un hypothèse possible (Gough 1997) est alors que la circulation dans la zone de transition (la tachocline) soit telle que le couplage ne se fasse que à des latitudes moyennes où il n'y a pas de gradient de rotation entre zone convective et zone radiative (cf. **Fig. 4.5**).

Une autre approche développée simultanément par Zahn et al. (1997) et Kumar & Quataert (1997) est de considérer le transport du moment angulaire par des ondes de gravité générées à la base de la zone convective. Ce processus s'avère suffisamment efficace pour réduire la rotation du Soleil au cours de son évolution jusqu'à la valeur actuellement observée (ou plus exactement déduite par inversion des données héliosismiques) et tend également à produire une rotation rigide de la zone radiative sans invoquer l'existence d'un champ magnétique (Talon & Zahn 1998).

Contribution 1

Solar Rotation from 2D Inversion

T. Corbard, G. Berthomieu, G. Gonczi, J. Provost, P. Morel

Fourth Soho Workshop: Helioseismology, ESA SP-376 vol. 2, p. 289, 1995

SOLAR ROTATION FROM 2D INVERSION

Th. Corbard[1], **G. Berthomieu**[1], **G. Gonczi**[1], **J. Provost**[1], **P. Morel**[1]

[1] Laboratoire Cassini CNRS URA 1362, O.C.A. B.P. 229 06304 NICE Cedex4 FRANCE

ABSTRACT

A 2-D regularized least square inversion code for solar rotation has been constructed which approximates the rotation rate by piecewise polynomials projected on B-splines. It is applied to the rotational splitting data of BBSO (Ref. 1). A discussion of the influence of the number and order of the spline basis on the results is given. Preliminary results of inversion with LOI data (Ref. 2) are presented.

Keywords: inverse problem, solar rotation.

1. BASIC EQUATIONS

The rotational splitting $\Delta\nu_{nlm}$ of a p-mode of degree l, radial order n and frequency $\nu_{n,l,m}$ can be expressed as an integral over the rotation rate with weighting kernels depending on the non dimensioned radius and on the colatitude θ according to:

$$\Delta\nu_{nlm} = \int_0^1 \int_{-1}^1 K_{nl}(r) P_l^m(\mu)^2 \Omega(r,\mu) dr d\mu \qquad [1]$$

where $\mu = cos(\theta)$, $\Omega(r,\mu)$ is the unknown rotation rate. The splitting $\Delta\nu_{nlm}$ is defined by

$$\Delta\nu_{nlm} = \frac{\nu_{n,l,m} - \nu_{n,l,m=0}}{m}$$

The kernels $K_{nl}(r)$ depend on the model and on the radial eigen function of the mode n,l (Ref. 3).

Due to the symmetry of the weighting kernels relatively to μ, only the symmetric component of the rotation rate relatively to the equatorial plane can be obtained. We search for the unknown rotation rate as a linear combination of piecewise functions $\varphi_p(r)$ and $\psi_q(\mu^2)$.

$$\Omega(r,\mu) = \sum_{p=1}^{N_r^\Omega} \sum_{q=1}^{N_\mu^\Omega} \omega_{pq}\ \varphi_p(r)\psi_q(\mu^2) \qquad [2]$$

We introduce the following vectors and matrix:

$W \equiv (W_k)_{k=1..N} \qquad k \equiv (n,l,m) \qquad W_k = \Delta\nu_{nlm}$

$\overline{\Omega} \equiv (\overline{\Omega}_Q)_{Q=1..N_r^\Omega N_\mu^\Omega} \qquad Q \equiv (p,q) \qquad \overline{\Omega}_Q = \omega_{pq}$

$R \equiv (R_{kQ})_{\substack{k=1..N \\ Q=1..N_{r\mu}^\Omega}}$ with $N_{r\mu}^\Omega = N_r^\Omega N_\mu^\Omega$ and

$$R_{k,Q} = 2\left[\int_0^1 K_{nl}(r)\varphi_p(r)dr\right]\left[\int_0^1 P_l^m(\mu)^2\psi_q(\mu^2)d\mu\right]$$

Thus the inversion problem writes:

$$W = R\,\overline{\Omega} \qquad [3]$$

The observations are not yet accurate enough to give all the splittings $\Delta\nu_{nlm}$ of a mode n,l. The observational splittings are given by the coefficients $a_i^{n,l}$ of their development on $P_i(m/L)$ functions, with their errors $\delta a_i^{n,l}$. The inversions can be performed either on the $a_i^{n,l}$ or on the splittings. Here we have derived the splittings and their standard deviations σ_{nlm} according to the following expressions:

$$\Delta\nu_{nlm} = \frac{L}{m}\sum_j a_j^{n,l} P_j\left(\frac{m}{L}\right) \qquad [4]$$

with $L = \sqrt{l(l+1)}$

$$\sigma_{nlm} = \sqrt{\left(\frac{L}{m}\right)^2 \sum_j (\delta a_j^{n,l})^2 P_j\left(\frac{m}{L}\right)^2} \qquad [5]$$

In this study we assume that the errors on the splittings are independent. This may introduce some errors on the solution since this assumption is not valid for the multiplets of a given mode (l,n). A regularization term $T_{r\mu}$ is also introduced to avoid the large spurious variations of the solution induced by the ill-conditioned inversion problem. We thus minimize the quantity:

$$J_{r\mu}(\overline{\Omega}) = \|PW - PR\overline{\Omega}\|^2 + T_{r\mu} \qquad [6]$$

$P \equiv \left(\frac{1}{\sigma_k}\delta(k,j)\right)_{\substack{k=1..N \\ j=1..N}}$

$T_{r\mu} =$

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[\lambda_r f_r \left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2}\right)^2 + \lambda_\mu f_\mu \left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial(\mu^2)^2}\right)^2\right] dr d\mu$$

$$T_{r\mu} = \overline{\Omega}^\top [\lambda_r Z^r + \lambda_\mu Z^\mu]\,\overline{\Omega}$$
$$= \overline{\Omega}^\top Z \overline{\Omega}$$

with :

$Z \equiv (z_{QQ_1})_{\substack{Q=1..N^\Omega \\ Q_1=1..N^\Omega}} \qquad Q \equiv (p,q) \qquad Q_1 \equiv (p_1,q_1)$

$$z_{QQ_1} = \lambda_r \left[\int_0^1 \varphi_p''\ \varphi_{p_1}''\ dr\right]\left[\int_0^1 \psi_q\ \psi_{q_1}\ d\mu\right]$$
$$+\lambda_\mu \left[\int_0^1 \varphi_p\ \varphi_{p_1}\ dr\right]\left[\int_0^1 \psi_q''\ \psi_{q_1}''\ d\mu\right]$$

The estimation of the rotation rate at a point r_0 and μ_0 is derived from the vector solution $\overline{\Omega}$ of the minimization of equation [6]:

$$\tilde{\Omega}(r_0,\mu_0) = \xi^\top \overline{\Omega} \qquad [7]$$

$$\xi \equiv (\xi_Q)_{Q=1..N^\Omega_{r\mu}} \qquad \xi_Q = \varphi_{p(Q)}(r_0)\ \psi_{q(Q)}(\mu_0^2)$$

From the propagation of the errors we derive the standard deviation on the rotation rate at that point by the relation:

$$\sigma^2(\tilde{\Omega}(r_0,\mu_0)) = \xi^\top B_{\overline{\Omega}}\ \xi \qquad [8]$$

$$= \sum_{Q=1}^{N^\Omega} \sum_{Q_1=1}^{N^\Omega} \xi_Q\ (B_{\overline{\Omega}})_{QQ_1}\ \xi_{Q_1}$$

where the covariance matrix $B_{\overline{\Omega}}$ on the solution $\overline{\Omega}$ is given by

$$B_{\overline{\Omega}} = (C)^{-1} R^\top P^2 R (C)^{-1} \qquad C = R^\top P^2 R + Z$$

More details on the derivation of the equations can be found in Ref. 4. The inversion depends on the numbers N^Ω_r and N^Ω_μ of the piecewise polynomials $\varphi(r)$ and $\psi(\mu^2)$, of the order of the spline functions and of the distribution of the fitting points of these polynomials. In what follows, the distribution of these points along the radius has been chosen according to the density of the turning points of the considered p-modes set of data. The inversion depends also on the values and forms of the regularizing term through the coefficients λ_r, λ_μ and the functions f_r and f_μ.

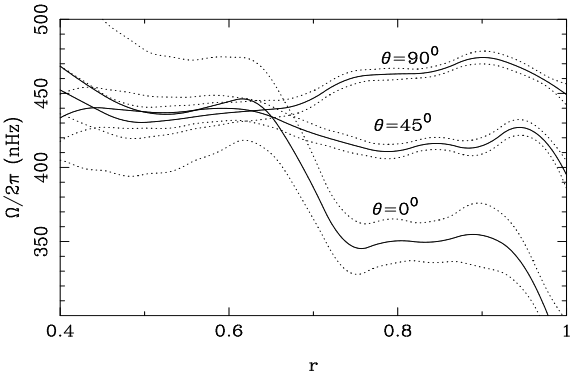


Figure 1: Variation of the rotation rate Ω as a function of the radius at three latitudes: polar, mid and equatorial latitudes. Dotted lines represent $\Omega \pm \sigma$.

2. INVERSION OF BBSO DATA

2.1 Results for the solar rotation rate

We have applied our code to derive the internal solar rotation rate from the 1986 Libbrecht data [1] (Ref. 1), hereafter referenced as BBSO, for modes l=5 to 60. We use the a_i coefficients and their errors to reconstruct the splittings and their errors according to equation [4] and [5]. The resulting solar rotation rate is shown in Figure 1 as a function of the radius for three latitudes: 0, 45, 90 degree. It has been obtained using $N^\Omega_r = 20$ and $N^\Omega_\mu = 10$ piecewise polynomials projected on cubic splines basis and with regularizing parameters: $\lambda_r = 10^{-6}$ $\lambda_\mu = 10^{-6}$ $f_r = f_\mu = 1$

Dotted curves represent the 1σ errors on the solution ($\Omega \pm \sigma$). The solution is not valid for $r > 0.85$ due to the lack of modes with degrees $l > 60$. It has no significance too for radius lower than 0.4. Our results are in agreement with previously published results (Ref. 5,6,7,8). The rotation rate has a surface like latitudinal dependence in the whole convection zone and depends only on the radius in the internal radiative zone with a rapid variation at the basis of the convection zone.

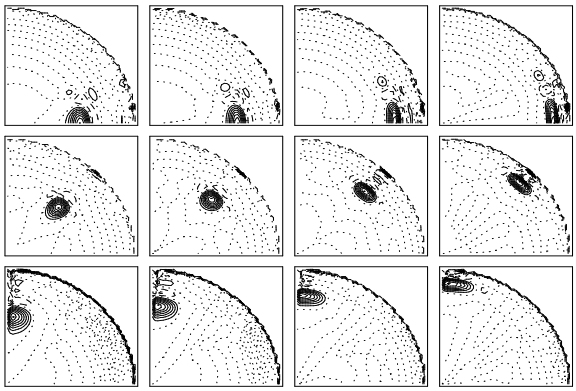


Figure 2: The contour plots of the averaging kernels $\overline{K}(r_0,\mu_0,r,\mu)$ are given for three values of the latitude $\mu_0 = 0.01, 0.707, 0.99$ and four values of the radius $r_0 = 0.55, 0.65, 0.75, 0.85$. Dotted lines correspond to zero values contour plots and dashed lines to negative values contour plots.

2.2 Averaging kernels

The estimation of the rotation at a point r_0, μ_0 given by [7] can be expressed as a linear combination of the data $W_k = \Delta\nu_{nlm}$:

$$\tilde{\Omega}(r_0,\mu_0) = \sum_{k=1}^{N} c_k(r_0,\mu_0) W_k$$

$$= \int_0^1 dr \int_{-1}^1 d\mu \overline{K}(r_0,\mu_0,r,\mu)\Omega(r,\mu)$$

with $\overline{K}(r_0,\mu_0,r,\mu) = \sum_{k=1}^N c_k(r_0,\mu_0)\ K_k(r,\mu)$.

The estimated rotation rate at the point r_0 and μ_0 appears to be the average of the real rotation rate weighted by an averaging kernel $\overline{K}(r_0,\mu_0,r,\mu)$. The

[1] p-mode data acquired by Ken Libbrecht and Martin Woodard, Big Bear Solar Observatory, Caltech

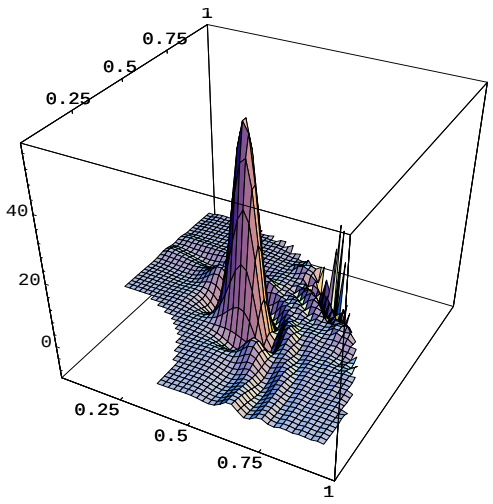


Figure 3: Two dimensional averaging kernel at mid-latitude for r_0= 0.55. It is well peaked close to the location r_0, μ_0 (μ_0 =0.707). We see some contribution from the solar surface due to the lack of modes of large degrees.

solution will be well spatially resolved if the averaging kernels are close to a δ distribution in radius and μ around the target radius r_0 and target μ_0.

Contour plots of averaging kernels for different target radius r_0 and μ_0 are given in Figure 2 and a three dimensional plot of an averaging kernel ($r_0 = 0.55, \mu_0 = 0.707$) is shown in Figure 3. It is seen that the kernels are peaked around the target values but with some contributions at the surface.

The spatial resolution at a point (r_0, μ_0) can be estimated from the characteristics of the averaging kernels. It depends principally on the set of modes we consider and on the regularizing parameters which are used to smooth the solution. It increases with lower regularizing term, at the expense of larger errors on the solution. Different ways of estimating the spatial resolution can be used (Ref. 9).

Here we characterize the averaging kernels by the contour plot curve C corresponding to half of the height of the maximum value (Fig. 4) and by different quantities. Δ is the geometrical distance between position (r, θ) of the maximum value of the averaging kernel and the target point (r_0, θ_0). The radial and latitudinal half width of the curve C, Δr and $r\Delta\theta$, are used to define the spatial resolution of the inversion. These quantities are multiplied by the standard deviation $\sigma(r_0, \mu_0)$ given by equation [8] which represents the error on the rotation rate $\Omega(r_0, \mu_0)$ given by propagation of the errors. We thus take into account the opposite variation of errors on the solution and its spatial resolution in order to give an estimate the quality of the result of the inversion. All these quantities are given in Figure 4 for r = 0.55. It is seen that, as already discussed (see for example Ref. 9), the quality of the inversion is much better

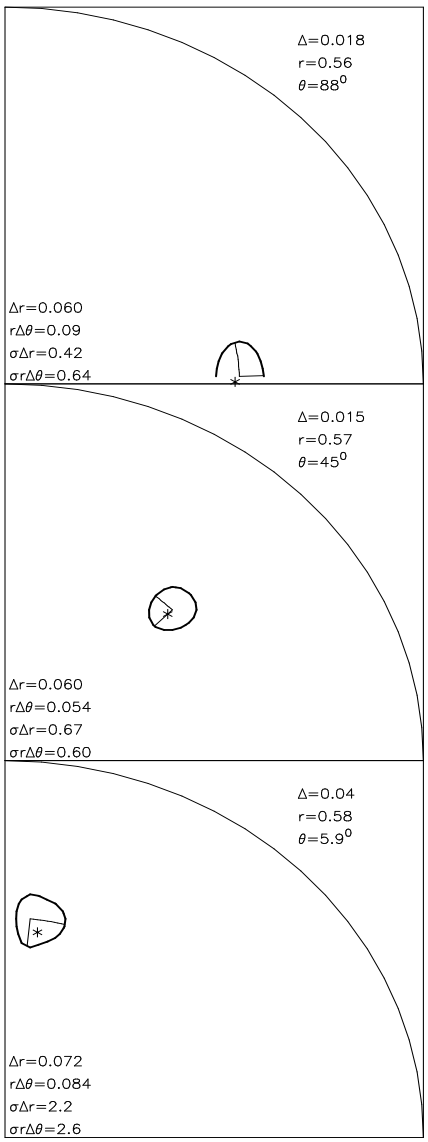


Figure 4: Contour plot curve C of the averaging kernels for the target radius r_0=0.55 (indicated by a * point) and three latitudes (equator, mid-latitude and pole) corresponding to half height of the maximum value.

for equator and mid-latitude rotation rate than at the pole.

The variation of $\sigma\Delta r$ and $\sigma r\Delta\theta$ relatively to the number of piecewise polynomials is plotted in Figure 5. The results show that these quantities do not vary very significantly and that 20 piecewise polynomials are enough to describe the rotation rate. We have also found that these quantities are not much sensitive to the order of the B-splines that we used.

3. PRELIMINARY RESULTS ON INVERSIONS WITH LOI DATA.

We have considered the LOI splittings given for the degrees $l = 2, 3, 4, 5$ by Appourchaux et al. (Ref. 2) and added them to the BBSO data for $5 < l \leq 60$. The inversion has been made for two values of the regularizing parameters $\lambda_r = 10^{-5}$ $\lambda_\mu = 5.10^{-5}$ (solution 1) and $\lambda_r = 10^{-6}$ $\lambda_\mu = 5.10^{-6}$ (solution 2) and with $f_r = 1$ $f_\mu = r^{-4}$ (Ref. 9). The results are given for the three latitudes $\mu_0 = 0.01, 0.707, 0.99$ for the BBSO data only on the left and for the BBSO+LOI data on the right side in Figure 6. We see that in the two cases the modification of the regularizing constants induces a larger difference in the solution behavior for radius smaller than 0.4, contrarily to what happens for $r > 0.4$.

The contour plots given in Figure 2 for the averaging kernels appear to be the same for the two sets of data. Adding the LOI data does not improve significantly the spatial resolution in our computations. The results obtained with the two values of the regularizing parameters show as expected, that the spatial resolution estimated by the quantities Δr and $r\Delta\theta$ is better for lower values of λ_r and λ_μ but the errors on the solution (Fig. 6) are larger. The positions of the maximum of the averaging kernels are also closer to the respective points r_0, μ_0 in that case. However it appears that the product of the error σ by the latitudinal and radial resolution $\sigma\Delta r$ and $\sigma r\Delta\theta$ are lower for the larger values of the regularizing constants. As an example, all these quantities are reported in Table I for a radius $r_0 = 0.35$ and for the three latitudes: equator (E), mid-latitude (M), pole (P). From these results, we are lead to favour solution 1 (Fig. 6 upper right panel) which gives an estimated solar rotation rate almost independent of the latitude for radius $0.2 < r < 0.6$.

4. CONCLUSION

We have developed a 2D least square inversion code for the solar rotation rate, using piecewise polynomials projected on B-spline functions and we have derived some quantities to test the quality of the solution. The study of the sensitivity of the results relatively to the inversion parameters gives an optimal number of piecewise polynomials to be considered

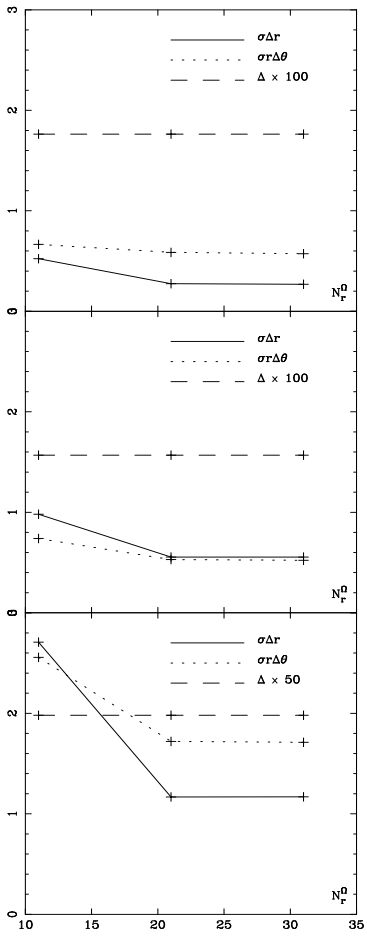


Figure 5: Sensitivity of the radial and latitudinal spatial resolution multiplied by the error on the solution $\sigma\Delta r$ and $\sigma r\Delta\theta$ relatively to the number of piecewise polynomials N_r^Ω. They are given for three values $N_r^\Omega = 10, 20, 30$ at the same location ($r_0 = 0.55$) and ($\mu_0 = 0.01, 0.707, 0.99$) than Figure 4 The position of the maximum value of the averaging kernel, characterized by Δ, is not modified within the grid of r and μ we use to compute these kernels.

Table 1:

	λ_r	Δ	Δr	$r\Delta\theta$	$\sigma\Delta r$	$\sigma r\Delta\theta$
E	10^{-5}	0.13	0.08	0.11	0.72	0.97
	10^{-6}	0.10	0.076	0.10	1.07	1.4
M	10^{-5}	0.1	0.09	0.14	1.08	1.73
	10^{-6}	0.06	0.08	0.13	1.62	2.41
P	10^{-5}	0.21	0.1	0.22	2.	4.4
	10^{-6}	0.15	0.09	0.17	3.3	5.8

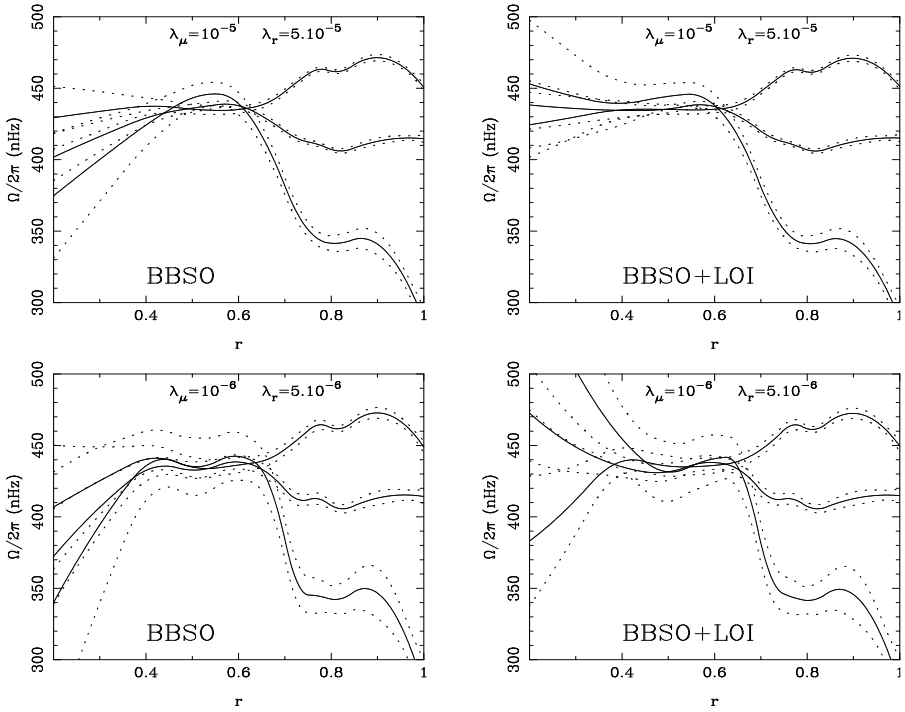


Figure 6: Comparison of the rotation rates obtained with BBSO data and BBSO+LOI data for two values of the regularizing constants λ_r and λ_μ.

and shows that the results are not much sensitive to the order of the splines which are used.

We have applied this code to BBSO and LOI data. Our preliminary computations show that the data BBSO+LOI and their uncertainties do not strongly constrain the solution for $r < 0.4$. However, the test quantities of Table I show that the LOI observations, in agreement with Tomczyk et al (Ref. 10), seems to indicate that the rotation rate remains lower than the surface equatorial rate down to 0.3 $R_\odot$.

Acknowledgement. We thank Th. Appourchaux and Th. Toutain for communicating their data from LOI prior to publication. The numerical computations have been performed on the Cray/YMP (IMT Marseille). We acknowledge financial support from the GDR 131 from CNRS.

REFERENCES

1. Libbrecht K.G., Woodard M.F., Kaufman J.M. 1990, Frequencies of solar oscillations, Ap J Supp. 74, 1129
2. Appourchaux Th., Toutain Th., Jimenez A., Rabello-Soares M.C., Andersen B., Jones A.R. 1995, Results from the Luminosity Oscillations Imager, these proceedings
3. Cuypers J. 1980, On the calculation of the frequency splitting of adiabatic nonradial stellar oscillations by slow differential rotation, Astron. Astrophys. 89, 207-208
4. Corbard Th., Berthomieu G., Provost J., Morel P., Gonczi G. 1995, in preparation
5. Christensen-Dalsgaard J. Schou J. 1988, Differential rotation in the solar interior, in *Seismology of the Sun & Sun-like Stars* ed. E.J. Rolfe, ESA SP-286, p 149
6. Goode P.R., Dziembowski W.A., Korzennik S.G., Rhodes E.J. 1991, What we know about the sun's internal rotation from solar oscillations, Ap J 367, 649
7. Thompson M.J. 1990, A new inversion of solar rotational slitting data, Solar Phys. 125, 1
8. Sekii T. 1991, Two-dimensional inversion for Solar Internal Rotation, P.A.S.J. 43, 381
9. Schou J., Christensen-Dalsgaard J., Thompson M.J. 1994, On comparing helioseismic 2-dimensional inversion methods, Ap. J. 433, 389
10. Tomczyck S., Schou J., Thompson M.J. 1995, Measurement of the rotation rate in the deep solar interior, preprint

Article 1

Solar internal rotation from LOWL data: A 2D Regularized least-squares inversion using B-splines

Corbard T., Berthomieu G., Morel P., Provost J., Schou J., Tomczyk S.

Astronomy and Astrophysics 324, p298, 1997

Astron. Astrophys. 324, 298–310 (1997)

ASTRONOMY
AND
ASTROPHYSICS

Solar internal rotation from LOWL data

A 2D regularized least-squares inversion using B-splines

T. Corbard[1], **G. Berthomieu**[1], **P. Morel**[1], **J. Provost**[1], **J. Schou**[2], **and S. Tomczyk**[3]

[1] Laboratoire G.-D. Cassini, CNRS URA 1362, Observatoire de la Côte d'Azur, BP 229, F-06304 Nice Cedex 4, France
[2] Hansen Experimental Physics Laboratory, Annex A201, Stanford University, Stanford, CA 94305-4085, USA
[3] High Altitude Observatory, National Center for Atmospheric Research, Boulder, CO 80307, USA

Received 9 December 1996 / Accepted 21 January 1997

Abstract. Observations of surface oscillations of the Sun can be analyzed to probe the solar interior. We use data obtained by the LOWL instrument (LOWL is an abbreviation for low degree with degree denoted by L) installed on Mauna Loa, Hawaii, since 1994 to investigate solar internal rotation. A 2 Dimensional Regularized Least-Squares (2D RLS) inverse method based on an expansion of the solution on B-splines of arbitrary order is presented and applied to a 2 year dataset. This method insures the regularity of the solution in the center and introduces surface constraints. The choice of trade-off parameters in the regularization term is discussed using an L-curves analysis and we discuss the influence of the choice of the order of derivatives in the regularization terms for the description of the deep interior. We study the latitudinal resolution of the inversion of a-coefficients compared to that of the inversion of individual splittings built from these coefficients.

Compared to the previous inversion of the first three months of LOWL data made by Tomczyk et al. (1995b), our solution is extended up to the surface by adding high degree modes and constraining the rotation to fit the spectrographic observations (Snodgrass 1984). In the radiative zone we obtain more rigid rotation and our solution is compatible with a rotation of the solar core of the order or smaller than the surface rotation at mid latitude.

Key words: Sun: interior – Sun: oscillations – Sun: rotation – methods: numerical

1. Introduction

One of the main interests of helioseismology is the description of the Sun's internal rotation rate versus depth and latitude. Over the past decade, increasingly accurate observational data have become available from ground based observations (e.g. Chaplin et al. 1996; Harvey et al. 1996; Lazrek et al. 1996; Woodard & Libbrecht 1993; Appourchaux et al. 1994; Tomczyk et al. 1995a). These and other datasets have allowed several teams to infer the solar internal rotation profile using 1D (Duvall et al. 1984), 1.5D (Christensen-Dalsgaard & Schou 1988; Dziembowski et al. 1989) and 2D (Sekii 1990, Schou 1991) inversion codes (see Schou et al. (1994) for a more complete list of historical references). All these inversions tend to show a rotation profile which is approximately constant on radii throughout the convection zone, with a sharp transition to a latitudinal independent rotation rate below the base of the convection zone.

One of the objectives of the Global Oscillations at Low Frequency (GOLF, Gabriel et al. 1995), Michelson Doppler Imager (MDI, Scherrer et al. 1995) and Variability of solar IRadiance and Gravity Oscillations (VIRGO, Fröhlich et al. 1995) experiments aboard the SOlar and Heliospheric Observatory (SOHO) satellite is to obtain a more accurate set of measurements of low- and high-degree acoustic modes in order to specify what happens in the deep interior ($r/R_\odot < 0.4$), near the surface ($r/R_\odot > 0.85$) and in the transition zone below the convection zone. Nevertheless, ground-based experiments have been operating for many years and can provide spectra obtained over much longer time periods than are currently available to the SOHO experiments. In particular, in this paper we use data from the LOWL experiment covering a two year period of observation on which we apply a 2D RLS inversion code using an approximation of the rotation rate by piecewise polynomials projected on a B-splines tensorial product.

We briefly present the well known forward problem in Sect. 2 and discuss the relevant hypothesis and the boundary conditions for the rotation rate. In Sect. 3 we recall basic principles for the 2D RLS method. We present the LOWL data and discuss the choice of inversion parameters for this particular dataset in Sect. 4. The results of inverting the observed frequency splittings are presented in Sect. 5, and our conclusions are presented in Sect. 6. In addition, Appendices A and B give some details about splines basis and the minimization process

Send offprint requests to: T. Corbard

and Appendix C recalls the concept of averaging kernels for a linear inversion.

2. Forward problem and hypothesis

2.1. Basic equations

The Sun is oscillating simultaneously in many thousands of global acoustic modes. The observation of these modes at the solar surface and the knowledge of their sub-surface properties are the basis by which helioseismology can sound the interior of the Sun.

Each mode can be described by three integers: the degree l, the azimuthal order m and the radial order n. In a spherically symmetric non-rotating star the eigenfrequencies of the modes are independent of m. The rotation of the Sun induces a preferred axis of symmetry and the frequency difference between westward and eastward propagating waves on the solar surface contains the signature of the global rotation of the Sun.

The rotation period for the Sun (about 1 month) is very long compared to the periods of the observed p-modes (about 5 minutes), thus we can use a linear perturbation theory to predict the effect of rotation on the p-modes. According to this theory and under the assumption that the effect of the magnetic field is negligible, the difference between the frequency ν_{nlm} of a mode with azimuthal order m and the frequency ν_{nl} that this mode would have in a non-rotating (but otherwise identical) star is given in terms of the eigenfunctions of the non rotating star (e.g. Hansen et al. 1977; Christensen-Dalsgaard & Berthomieu 1991).

If we denote by ξ_{nl} and η_{nl} the radial and horizontal displacement of the fluid from its equilibrium position, the displacement ξ has the form:

$$\xi(r,\theta,\phi,t) = \left(\xi_{nl}(r)Y_l^m(\theta,\phi), \eta_{nl}(r)\frac{\partial Y_l^m(\theta,\phi)}{\partial\theta}, \frac{\eta_{nl}(r)}{\sin(\theta)}\frac{\partial Y_l^m(\theta,\phi)}{\partial\phi}\right)e^{2i\pi\nu_{nlm}t}, \quad (1)$$

where (r,θ,ϕ) are the spherical polar coordinates defined from the solar rotation axis $\theta = 0$ and $Y_l^m(\theta,\phi)$'s are spherical harmonics. The so-called frequency splitting $\Delta\nu_{nlm} = \nu_{nlm} - \nu_{nl}$ can be written as a weighted average of the unknown rotation rate Ω:

$$\Delta\nu_{nlm} = m\int_0^{R_\odot}\int_0^1 K_{nlm}(r,\mu)\Omega(r,\mu)drd\mu \quad (2)$$

with $\mu = \cos(\theta)$ and where the full kernels K_{nlm} derived from the first order perturbation theory are given by:

$$K_{nlm}(r,\mu) = \frac{(2K_{nl}(r)G_{ml}(\mu) + \eta_{nl}(r)^2 X_{ml}(\mu))\rho(r)r^2}{I_{nl}}, \quad (3)$$

with:

$$\begin{cases} K_{nl}(r) = \xi_{nl}(r)^2 + (L^2-1)\eta_{nl}(r)^2 - 2\xi_{nl}(r)\eta_{nl}(r), \\ G_{ml}(\mu) = P_l^m(\mu)^2, \\ X_{ml}(\mu) = (1-\mu^2)\frac{d^2}{d\mu^2}(G_{ml}) + 2G_{ml}(\mu), \\ I_{nl} = \int_0^{R_\odot}\left[\xi_{nl}(r)^2 + L^2\eta_{nl}(r)^2\right]\rho(r)r^2dr, \end{cases} \quad (4)$$

where $P_l^m(\mu)$ are normalized Legendre polynomials, $\rho(r)$ is the density and $L^2 = l(l+1)$.

In first approximation, we can neglect terms with first and second derivatives of the rotation rate (by partial integration with respect to the colatitude of Eq.(2)) assuming that one has smooth variation in latitude and the so-called rotational kernel reduces to (Cuypers 1980):

$$\tilde{K}_{nlm}(r,\mu) = \frac{2K_{nl}(r)G_{ml}(\mu)\rho(r)r^2}{I_{nl}}, \quad (5)$$

The radial part $K_{nl}(r)$ of the rotational kernel is the same as in the 1D inversion problem where the rotation is supposed to be latitudinal independent i.e. $\Omega(r,\mu) = \Omega(r)$ (e.g. Gough 1981). The kernel Eq. (3) is symmetric about the equator and the factor of two is introduced by the assumption that the rotation rate has a similar symmetry property i.e. $\Omega(r,-\mu) = \Omega(r,\mu)$. The functions $\xi_{nl}(r)$, $\eta_{nl}(r)$ are determined by solving the differential equations describing the motion of a self-gravitating fluid body in a standard solar model (Unno et al. 1989).

We note that the approximation Eq. (5) of the rotational kernel includes a term $-\eta_{nl}(r)^2$ which does not appear in Sekii's approximation (Sekii 1993) and which becomes of significant importance compared to the $l(l+1)\eta_{nl}(r)^2$ term only for the low l. For higher degree modes, this kernel reduces to Sekii's approximation and the terms of Eq. (3) that are neglected have been shown by Pijpers and Thompson (1996) to be small compared to $\tilde{K}_{nlm}$ except near the inner turning point of the modes. Therefore their contribution to the integral Eq. (2) is negligible for the observed modes. Nevertheless, while this approximation of the rotational kernel simplifies the problem and decreases the number of calculations, our work takes into account the full kernel and this should have a significant effect especially if f- or even g-modes become available. We note however that, for the present data, using the full or the approximate kernel leads to the same solution in the zones that are sounded by the observed modes.

The object of all the 2D inversion codes is to infer the rotation rate versus depth and latitude $\Omega(r,\mu)$ from the observed splittings $\Delta\nu_{nlm}$ by inverting the integral relation Eq.(2).

2.2. Boundary conditions

2.2.1. At the surface

Some direct observations of the rotation at the solar surface are available and one may want to force the inferred rotation to match the observed surface rotation. The sidereal rotational frequencies are obtained as a function of latitude at the solar surface by different techniques such as the Doppler shift of photospheric spectral lines or by tracking sunspots, small magnetic features or supergranulation cells (see the review by Schröter (1985)). The values which are derived are within a few percent but they lead to a different variation of the solar rotation as a function of latitude during the solar cycle. These differences could be explained by the different depths where indicators are

anchored but a complete interpretation of these observations is strongly related to a better theoretical understanding of the interaction between rotation, convection and magnetic fields.

The rotation of surface layers has been determined spectroscopically from standard techniques used at Mount Wilson by Snodgrass (1984). In this work we use the rotation results from Doppler velocity measurements made at the Mount Wilson 150 foot tower telescope between 1967 and 1984 and related by Snodgrass & Ulrich (1990). The sidereal plasma rotation rate averaged over the entire period is given by:

$$\Omega_p = A_p + B_p\mu^2 + C_p\mu^4 \begin{cases} A_p = 453.8 \pm 1.0 \text{ nHz} \\ B_p = -54.6 \pm 0.8 \text{ nHz} \\ C_p = -75.4 \pm 1.1 \text{ nHz} \end{cases} \quad (6)$$

All the magnetic tracers are believed to represent the rotation of deeper layers. The observation of small magnetic features leads to a rotation rate slower than the rotation rate of the supergranular pattern but faster than the rotation rate of sunspot groups or the plasma (Komm & Howard 1993). Thus it gives a mean value of the rotation rates estimated by the different indicators and we also use these data to study the sensitivity of the inversion to different surface constraints. The fit of the main sidereal rotational rate of small magnetic features that we use is given by Komm & Howard (1993) from the analysis of magnetograms taken with the NSO Vacuum Telescope on Kitt peak between 1975 and 1991:

$$\Omega_m = A_m + B_m\mu^2 + C_m\mu^4 \begin{cases} A_m = 463.6 \pm 0.7 \text{ nHz} \\ B_m = -64.5 \pm 4.3 \text{ nHz} \\ C_m = -67.2 \pm 4.8 \text{ nHz} \end{cases} \quad (7)$$

The surface rates (Eqs. (6), (7)) are averaged over a long period and are not contemporaneous with the LOWL observations. Moreover they describe the rotation of layers that are not necessarily strictly the solar surface. This might introduce spurious effects in the inversion results if these observations were used as strong constraints. For this reason, we choose to take into account these data in a more flexible way by introducing a parameter λ_s as explained in Appendix B and discussed in Sect. 4.2.3.

2.2.2. At the center

At the limit $r = 0$ the rotation rate Ω has no latitudinal dependence. Thus the functional space where we search the rotation rate must generate only functions which are in agreement with the physical condition:

$$\lim_{r\to 0} \frac{\partial\Omega(r,\mu)}{\partial\theta} = 0. \quad (8)$$

This condition insures the regularity of the solution at the center and is easy to insert in the inversion process as discussed in Appendix A.

3. The inversion method

The problem of inverting Eq. (2) is intrinsically an ill-posed problem because of its global (or integral) nature (e.g. Craig & Brown 1986). Furthermore this is strengthened in the helioseismic case because of the lack of modes able to sound the deepest and shallowest layers of the Sun: only a small percentage of the observed p-modes have their corresponding rotational kernels Eq. (3) with significant amplitude below $0.4R_\odot$ or with their lower turning point between $0.95R_\odot$ and the surface (see Fig. 1). Then the solution is not well constrained at these depths and the global nature of the problem implies that this leads to difficulties in the whole domain and that there is no unique solution for the problem.

In order to discretize Eq. (2), we project the unknown rotation rate on a tensorial product of B-splines (see Appendix A):

$$\Omega(r,\mu) = \sum_{p=1}^{n_r}\sum_{q=1}^{n_\mu} \omega_{pq}\varphi_p(r)\psi_q(\mu). \quad (9)$$

Then, we apply a regularized least-squares method on values of both observed splittings and observed surface rotation in order to find the set of coefficients ω_{pq}. The aim of regularization is to stabilize the inversion process by ruling out rapidly oscillating solutions which are physically unacceptable.

In our inversion we adopt a Tikhonov regularization method (Tikhonov & Arsenin 1977) by solving:

$$\min_{\boldsymbol{\Omega}} \quad \left(J(\boldsymbol{\Omega}) + T(\boldsymbol{\Omega})\right), \quad (10)$$

where $J(\boldsymbol{\Omega})$ is the least-squares term (see Appendix B for details) and $T(\boldsymbol{\Omega})$ is of the form:

$$T(\Omega) = \lambda_r T_r + \lambda_\mu T_\mu, \quad (11)$$

with:

$$T_r = \int_0^1\int_0^{R_\odot} f_r(r,\mu)\left(\frac{\partial^i\Omega(r,\mu)}{\partial r^i}\right)^2 dr d\mu, \quad (12)$$

$$T_\mu = \int_0^1\int_0^{R_\odot} f_\mu(r,\mu)\left(\frac{\partial^j\Omega(r,\mu)}{\partial \mu^j}\right)^2 dr d\mu. \quad (13)$$

This can be regarded as a measure of smoothness of the rotation $\Omega(r,\mu)$. The functions f_r and f_μ are used to assign different weights to the smoothing terms for different positions r and μ. It should be noticed, however, that well chosen functions together with first derivatives ($i = j = 1$) can lead to the definition of flatness given by Sekii (1991): $T(\Omega) = \iint \|\nabla\Omega\|^2 r dr d\theta$. The choice of the so-called trade-off parameters λ_r and λ_μ depends on the data from which we perform the inversion and is discussed in the next section.

Finally, let us define the χ^2 which characterizes how the observed splittings are approached by the solution $\bar{\Omega}(r,\mu)$:

$$\chi^2 = \sum_{nlm}\left(\frac{\Delta\nu_{nlm} - \iint K_{nlm}(r,\mu)\bar{\Omega}(r,\mu)dr d\mu}{\sigma_{nlm}}\right)^2. \quad (14)$$

This value corresponds to the first term in the sum that defines $J(\boldsymbol{\Omega})$ Eq. (B2).

4. Data and inversion parameters used

4.1. The data : LOWL observations

The LOWL instrument is a Doppler imager based on a Potassium Magneto-Optical Filter that has been operating on Mauna Loa, Hawaii since 1994 (see Tomczyk et al. (1995a) for a detailed description). Both low- and intermediate-degree p-modes can be observed with this instrument.

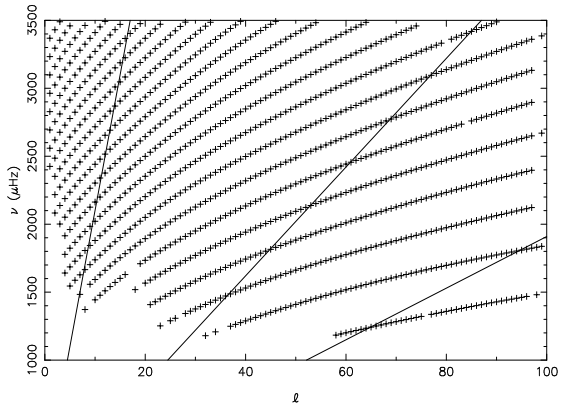


Fig. 1. $l - \nu$ diagram showing the modes included in the LOWL 2 year dataset. Solid lines indicate the values of ν/L that correspond to modes with turning points r_t=0.4, 0.85, 0.95$R_\odot$ from the left to the right.

The modes used in this paper are shown in Fig. 1. The estimations of frequency splittings result from a two year period of observation (2/26/94 - 2/25/96). The first year of observation has been analyzed and inverted by Tomczyk et al. (1996) and is referred as the one year dataset in the following. The second year of observations has been analyzed separately and an unweighted average of the two resulting datasets has been performed to produce the data that we use in this work. These data contain 1102 modes (n, l) with degrees up to $l = 99$ and frequencies lower than $\nu = 3500$ μHz. For each mode, individual splittings are given by, at best, five a-coefficients of their expansion on orthogonal polynomials $Q_j^l(m)$ defined by Schou et al. (1994):

$$\Delta\nu_{nlm} = \sum_{j=1}^{N_j^l} a_j^{nl} Q_j^l(m) \qquad \begin{cases} N_j^l = 2l & l = 1, 2 \\ N_j^l = 5 & l \geq 3 \end{cases} \tag{15}$$

Estimations of standard deviations are given for each of these a-coefficients. To first order, the solar rotation contributes only odd j a-coefficients to the expansion Eq. (15). Even indexed a-coefficients arise from aspherical perturbations, centrifugal distortion and magnetic fields.

We have inverted both odd indexed a-coefficients and the set of splittings reconstructed from these coefficients. The errors assigned to these splittings are discussed in Appendix B. A χ^2 value can be calculated from the inversion of the a-coefficients by the first term in the sum Eq. (B7).

4.2. The choice of inversion parameters

4.2.1. Splines basis

In all inversions shown in this paper the set of all B-splines $\psi_q(\mu)$ with $1 \leq q \leq n_\mu = 10$, forms a basis for the linear space of the set of the piecewise polynomials of order 3 having their first derivatives continuous in $]0, 1[$ and with a distribution of break points, i.e. a partition Δ of $[0, 1]$ (see Appendix A), equidistant in $\mu = cos(\theta)$. Doing this we obtain a finer discretization near the equator than near the pole, in agreement with the fact that among all of the observed modes only a few of them have significant amplitude near the pole. The choice of only a few basis functions ($n_\mu = 10$) to describe the latitudinal dependence of the rotation rate is related to the low number of odd indexed a-coefficients (3 maximum) given by observers to describe the azimuthal- or m-dependence of each splitting through Eq. (15).

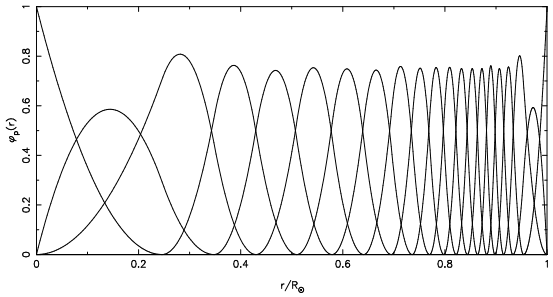


Fig. 2. Basis of $n_r = 21$ B-splines functions of order 3 with a distribution of break points calculated from the density of turning points relative to the set of modes plotted in Fig. 1

B-splines in radius $\varphi_p(r)$ with $1 \leq p \leq n_r = 21$ will also be piecewise polynomials of order 3 with their first derivatives continuous at each break point, but the partition of $[0, R_\odot]$ is chosen such that the number of basis functions used to describe an interval in radius is proportional to the number of modes having their turning points located in this interval (Fig. 2). Compared with an equally spaced partition with the same number of points, this distribution allows a better resolution in the layers which are well described by the data and acts as a regularization term in less well constrained zones.

4.2.2. The trade-off parameters λ_r and λ_μ

Currently, most inverters who use this kind of regularization in helioseismic inversions take $i = j = 2$ in the regularization terms Eqs. (12) and (13) (Schou et al. 1994). Here the code allows constraining with the first derivative of the rotation in latitude (i.e. $j = 1$). Using a high weight in the core (with a function $f_\mu(r, \mu) \propto 1/r^2$ for example), this constraint is in better agreement with the regularity condition at the center given by Eq. (8). Both cases ($j = 1, 2$) have been performed and are discussed in the following with $f_r = r/R_\odot^2$ and $f_\mu = R_\odot^{2j-1} r^{-2j}$.

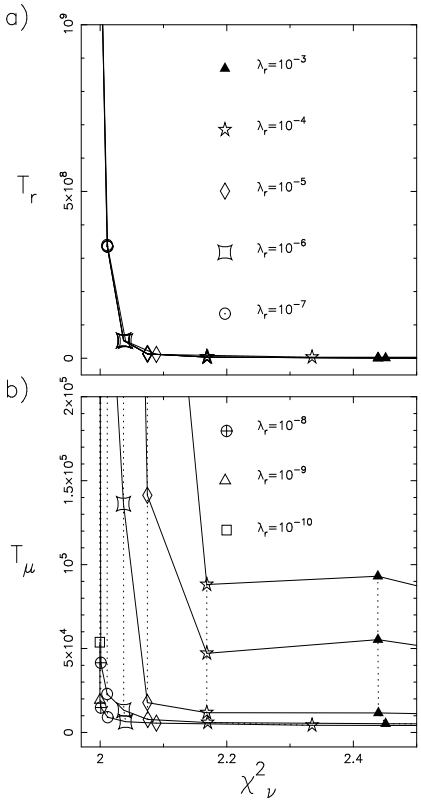


Fig. 3a and b. L-curves obtained by inverting the a-coefficients from the dataset shown in Fig. 1. **a** Regularization term in radius (T_r) (with second derivative ($i = 2$)) and **b** regularization term in latitude (T_μ) (with first derivative ($j = 1$)) against the χ^2_ν value. Each graph marker corresponds to one value of λ_r. Full curves join points with the same ratio $\alpha = \frac{\lambda_r}{\lambda_\mu}$ ($\alpha = 10^4, 10^2, 1, 10^{-2}, 10^{-4}$ from the top to the bottom) and dotted curves have the same λ_r.

A generalization of the so-called L-curves currently used in one dimensional problems (Hansen 1992a, b) can be a guide for the choice of the trade-off parameters λ_r and λ_μ. The aim is to find parameters that minimize both the χ^2 value obtained for the fit of data and the two regularization terms T_r and T_μ. In the limit of strong regularization (large λ_r and λ_μ) which aims to minimize T_r and T_μ , a small decrease in T_r and T_μ can be obtained only at the expense of a rapidly increasing χ^2_ν value and the solution does not give a good fit of the data anymore. On the other hand, in the limit of low regularization which aims to minimize the χ^2_ν value, a little better fit of the data can be obtained only at the expanse of a strong increase of the terms T_r and T_μ and the solution presents important oscillations. A good choice of trade-off parameters should be near the intersection of these two limit regimes.

Figure 3 is a plot of the value of each regularization term against the $\chi^2_\nu = \chi^2/\nu$ value for different choices of λ_r and λ_μ (ν being the number of degrees of freedom of the system i.e. the difference between the total number of a-coefficients N_a and the number $n_\mu(n_r - 1) + 1$ (see Appendix A) of searched coefficients w_{pq}).

An interesting result is that, on Fig. 3a, all the points which are labeled by the same λ_r but different λ_μ have nearly the same location except for values of $\alpha = \frac{\lambda_r}{\lambda_\mu} \leq 10^{-4}$ and $\lambda_r \geq 10^{-4}$. We define the corner of a curve that joins points with the same ratio α (full curves on Fig. 3) as the nearest point of the curve to the intersection of the two limit regimes asymptotes. For $\alpha = 10^{-4}$ the χ^2_ν value begins to increase rapidly for the largest values of λ_r (the star graph marker goes on the right). For $\alpha < 10^{-4}$ (not shown on the figure) the corners of the L-curves give larger values of T_r and the corresponding values of parameters must be disregarded because they do not lead to the best compromise between the regularization and the fit of the data. Thus it appears that, near the corners of the L-curve, the χ^2_ν and T_r values do not depend on the value of λ_μ for a large domain of variation of the parameter α ($10^{-4} \leq \alpha \leq 10^4$): they depend only on λ_r. Consequently we minimize both the T_r and χ^2_ν values by choosing λ_r at the corner of the L-curve i.e. $\lambda_r = 10^{-6}$

The choice of λ_μ is then given by the analysis of Fig. 3b. On this figure, as α decreases the position of the L-curve becomes lower showing that for a given value of λ_r, the λ_μ value must be as large as possible (keeping in the previous interval for α) if one wants to reduce the value of the regularization term in latitude.

According to these two figures, a choice near $\lambda_r = 10^{-6}, \lambda_\mu = 10^{-2}$ tends to minimize both the χ^2_ν value and the two regularization terms. When the regularization term in latitude T_μ is chosen with second derivative ($j = 2$), the corresponding plots have similar behaviors but the domain of variation of α, for which χ^2 and T_r depend only on λ_r, is smaller ($10^{-3} \leq \alpha \leq 10^4$). In this case the optimal choice for trade-off parameters becomes $\lambda_r = 10^{-6}, \lambda_\mu = 10^{-3}$. The inversion of individual splittings, instead of a-coefficients, leads to the same results for the choice of trade-off parameters and the L-curves analysis is not sensitive to the surface constraints parameter λ_s.

L-curves are a useful tool to study variations and mutual dependencies of each term in Eq. (10) for different choices of trade-off parameters and functions f_r and f_μ. Nevertheless other criteria for the optimal choice of trade-off parameters are possible (Craig & Brown 1986; Thompson & Craig 1992). In particular, for the solar rotation problem, the method of generalized cross validation (GCV) (Golub & Van Loan 1989) has been applied to the 1D RLS inversion method by Thompson (1992) and Barrett (1993). For a local estimation of the quality of the solution, we must look at the balance between the effect of propagating input errors and the resolution (as defined in Appendix C) reached at a target location (r_0, μ_0). Thus a local optimal choice of trade-off parameters could be based on plots showing resolution against the error on the inferred rotation rate for different choices of trade-off parameters. Such curves have been plotted by Christensen-Dalsgaard et al. (1990) for different 1D inversion techniques and by Schou et al. (1994) for a 2D inversion.

4.2.3. Surface constraints and the λ_s parameter

Different surface constraints can be used and introduced in Eq. (B2) with the parameter λ_s which defines the weight assigned to the fit of surface observations. The choice of surface constraints is suggested by the behavior of $\Omega(R_\odot, \mu)$ obtained if we do not impose any surface constraint ($\lambda_s = 0$) and with the previous choice of trade-off parameters (Fig. 4a).

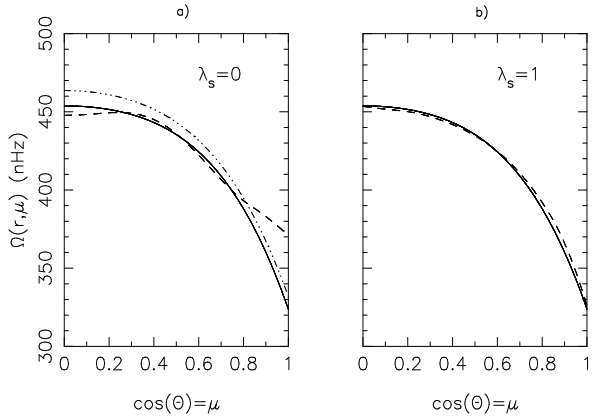


Fig. 4a and b. Inferred surface rotation rates against latitude from inverting a-coefficients. The solid curves show the observations of the plasma surface rotation Eq. (6). The dot-dashed curve shows the observations of the small magnetic feature surface rotation Eq. (7). The dashed curves show the inferred rotation rates: **a** inversion without surface constraint, **b** inversion with plasma surface constraints and $\lambda_s = 1$ (This solution is the same as the one shown in Fig. 7).

This figure clearly points out that the surface rotation estimated from the helioseismic data alone is closer to the plasma observations than to the small magnetic feature observations. However, the estimated surface rotation has no latitudinal dependence in the region covering 30° around the equator which is in evident contradiction with all surface observations and can be a consequence of the lack of high degree modes in the data. Thus we have to fix the value of λ_s in such a way that the rotation rate obtained at the surface becomes close to the imposed surface values $\Omega_s(i)$ at the $n_\mu = 10$ points.

Let us define the $\chi^2_{surface}$ value by:

$$\chi^2_{surface} = \frac{1}{n_\mu} \sum_{i=1}^{n_\mu} \left(\frac{\Omega_s(i) - \Omega(R_\odot, \mu_i)}{\sigma_i} \right)^2, \qquad (16)$$

and the relative contribution $p(\lambda_s, r_0, \mu_0)$ of the surface term to the estimated rotation rate at (r_0, μ_0) by (according to Eq. (C1)):

$$p(\lambda_s, r_0, \mu_0) = \frac{100}{\bar{\Omega}(r_0, \mu_0)} \sum_{i=1}^{n_\mu} \tilde{C}_i(r_0, \mu_0) \Omega_{\frac{m}{p}}(\mu_i), \qquad (17)$$

where $\tilde{C}_i(r_0, \mu_0)$ is a function of λ_s.

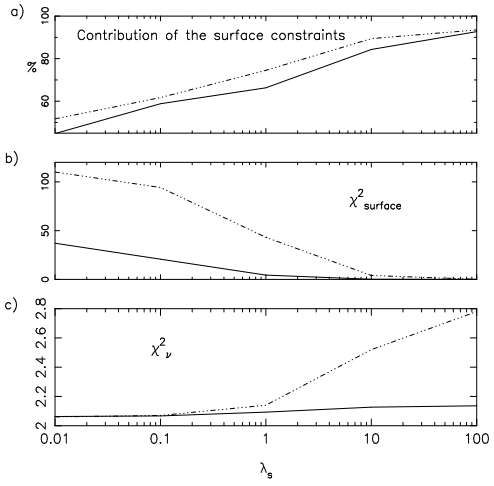


Fig. 5a-c. Variation of, **a** the relative contribution of the surface term in the estimation of the rotation rate at the surface and the equator (i.e. $p(\lambda_s, R_\odot, 0.)$ Eq. (17)), **b** the $\chi^2_{surface}$ value and **c** the χ^2_ν value, against λ_s and by inverting a-coefficients. Dot-dashed curves are for the small magnetic feature observations and full curves for the plasma observations used as surface constraints.

The Fig. 5a shows the variations against λ_s of the relative contribution of the surface term to the estimated rotation rate at the solar surface ($r_0 = R_\odot$) and at the equator ($\mu_0 = 0$).

The Fig. 5b and c show the variations of $\chi^2_{surface}$ and χ^2_ν against λ_s for the two kinds of observations Eq. (6) and Eq. (7) used as surface constraints. With the use of plasma rotation observations, we can obtain a small $\chi^2_{surface}$ value for $\lambda_s = 1$ and the helioseismic data still contributes more than 30 percent in the computation of the surface rotation rate. If we want to obtain roughly the same value of the $\chi^2_{surface}$ with the use of the small magnetic feature observations, we have to set $\lambda_s = 10$ and then the helioseismic data contributes less than 10 percent in the computation of the surface rotation rate.

Furthermore, as $\chi^2_{surface}$ decreases, the χ^2_ν value increases greatly for the small magnetic feature constraint (from 2.0 for $\lambda_s = 0$ up to 2.5 for $\lambda_s = 10$) but not so much for the plasma constraints (Fig. 5b, 5c). This behavior and the very large value of $\chi^2_{surface}$ in Fig. 5b for small magnetic feature clearly indicates that the use of these observations for surface constraints is not compatible with helioseismic data, probably because these observations correspond to the rotation not of the solar surface but of deeper layers.

The Fig. 6 shows the variation of the surface contribution with depth (at fixed $\lambda_s = 1.$ and at the equator), showing that the major contribution of the surface constraints occurs above $0.98 R_\odot$. Nevertheless some residual (negative) contributions exist below this depth and are more important for the small magnetic feature observations than for the plasma observations.

For these reasons we choose in the following to use plasma observations as surface constraints with $\lambda_s = 1$. With this choice, the inferred rotation rate, shown in Fig. 4b as a func-

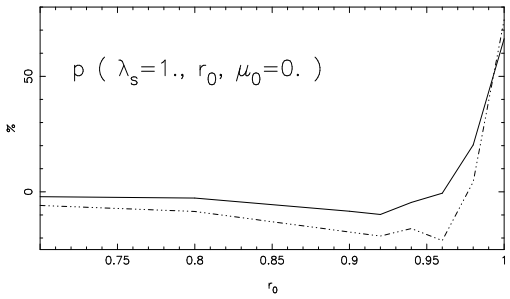


Fig. 6. Variation with depth of the relative contribution of the surface term in the estimation of the rotation rate at the equator and for $\lambda_s = 1$. The line styles are the same as in Fig. 5a-c.

tion of latitude at the surface, is close to the observed one and remains compatible with LOWL data (Fig. 5c).

5. Results and discussions

The 2D solar rotation rate obtained by inverting the a-coefficients of LOWL data and the corresponding averaging kernels are given respectively in Figs. 7 and 9. In order to see what could hypothetically be achieved with individual splittings, we made the (unjustified) assumption that the higher a-coefficients are all identically zero and built the corresponding individual splittings. The inversion of these splittings and the corresponding averaging kernels are given respectively in Figs. 8 and 10. The averaging kernels are presented in Appendix C and can be used to assess the quality of the solution and the resolution that we can obtain at different target locations.

5.1. About the χ^2 value

Let us discuss first, the χ^2_ν values obtained at the corner of L-curves. This value is not enough to quantify the quality of the solution but can reveal some problems in the analysis or in the data themselves. The inversion of a-coefficients with $\lambda_s = 0.$ leads to a value around $\chi^2_\nu = 2.0$. The value of 2.0 for this parameter is highly improbable for a system with many degrees of freedom and reveals that we can not produce a rotation profile by our RLS inversion that agrees strictly with the LOWL data. We note however that this value was higher (around 2.5 at the corner of the L-curves) with a data set covering only the first year of observations. With the two years dataset, the inversion of only the modes for which $\nu/L > 40$ μHz leads to the same value of $\chi^2_\nu = 2.0$, so that the more superficial p-modes do not appear to be particularly subject to systematic errors which was a concern in an analysis of the first 3 months of LOWL data (Tomczyk et al. 1995b).

We remark that the χ^2/N value obtained by inverting individual splittings with weights (or errors) specified as explained in Appendix B (where N is the difference between the number of splittings and the number of searched coefficients), is around $\chi^2/N = 0.13$. Nevertheless, this value is not significant because although the hypothesis of independence of individual splittings is useful to compute their weights in the minimization process (see Appendix B), Eq. (15) implies that individual splittings are dependent, so that the real number of degrees of freedom is still given from the number of a-coefficients (assumed to be independent) even when individual splittings are inverted. Since, the total number of splittings is on average about 15 times higher than the number of odd indexed a-coefficients, the resulting χ^2_ν value is still around $0.13 \times 15. \simeq 2.0$. We note however that this discussion is valid only on average because the actual ratio between the number of individual splittings and a-coefficients is obviously l-dependent leading to a radial gradient in the apparent improvement on the errors.

The input errors of the a-coefficients are derived from the formal errors when fitting the power spectra and are known to underestimate the true errors. This is the most likely cause for the large values of the χ^2_ν. Additionally, systematic errors in the data could contribute to the value of the χ^2_ν. Also, our results are obtained under the assumption that the hypothesis made in Sect. 2, and the integral expression Eq. (2) for the splittings, are valid for all observed modes. Overly constraining the hypothesis in the forward analysis, as well as some unknown bugs in the inversion process, may also increase the value of χ^2_ν.

5.2. Inversion of a-coefficients

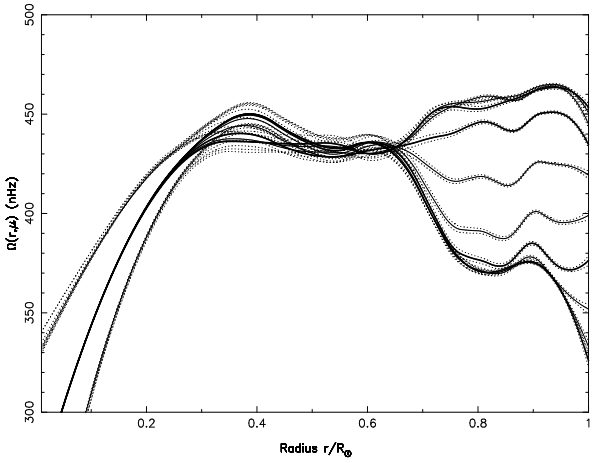


Fig. 7. Inferred rotation rate obtained by inverting a-coefficients, plotted against the solar radius for ten latitudes from the equator up to the pole. Bold curves correspond to colatitudes $\theta = 90, 60, 30, 0°$ from the top to the bottom. Dotted curves are the corresponding 1σ errors.

Figure 7 shows the variations of the inferred rotation rates against the solar radius from the inversion of a-coefficients. The different inversion parameters have been chosen as discussed in the previous sections with, in particular, $\lambda_s = 1$ for the plasma surface constraints. The solution shown in this figure is in good agreement with the result obtained at $\theta = 30, 60, 90°$ between 0.2 and 0.85 solar radius by Tomczyk et al. (1995b) who have

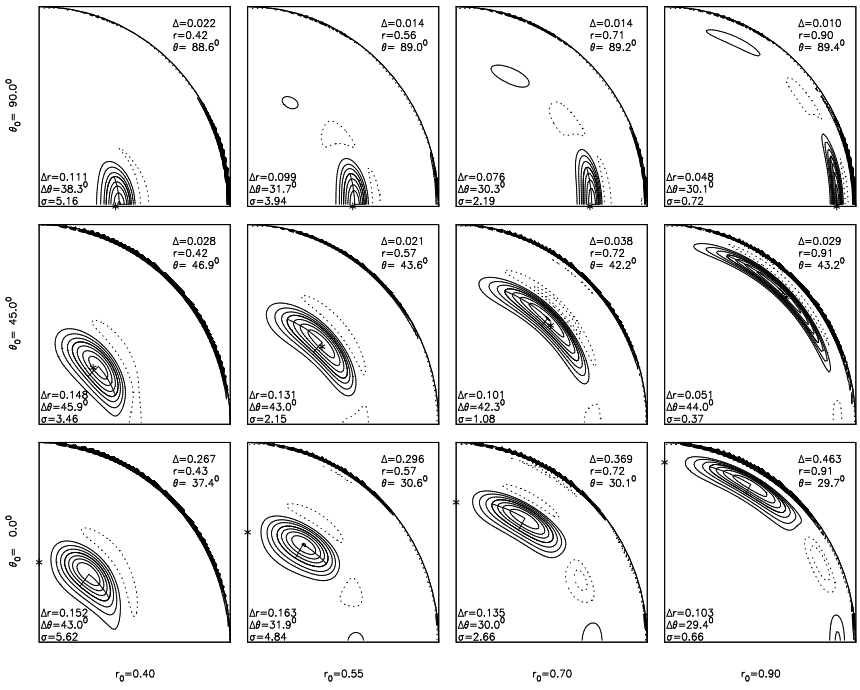


Fig. 9. Averaging kernels corresponding to the inversion of a-coefficients (Fig. 7). For each panel, the contour spacing is defined by the value of the averaging kernel at (r, θ) divided by eight. Positive contours are shown solid, and negative contours dotted. For clarity the zero contour have been omitted. Δ is the geometrical distance between the position (r, θ) of the maximum value of the peak and the point (r_0, θ_0) shown by a star. Δr and $\Delta\theta$ denote the radial and latitudinal resolution as defined in Appendix C. σ is the 1σ error (in nHz) calculated at (r_0, θ_0) and shown by dotted lines on Fig. 7.

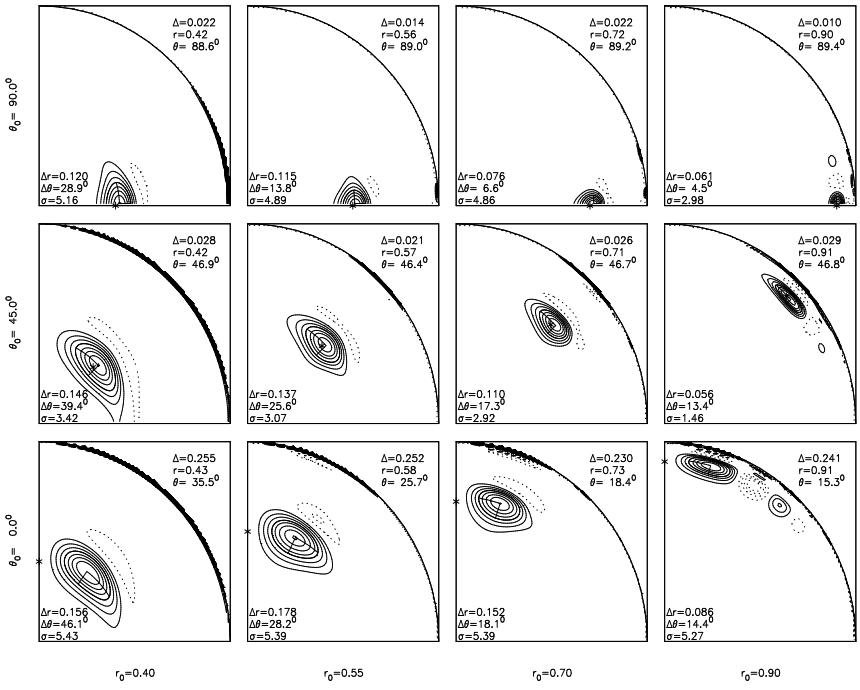


Fig. 10. Averaging kernels corresponding to the inversion of individual splittings (Fig. 8) (See caption Fig. 9).

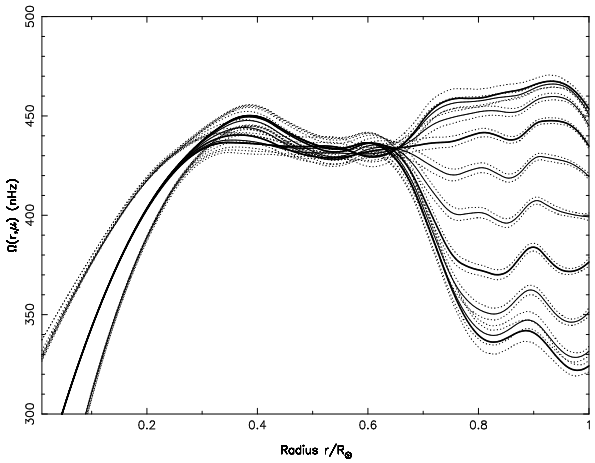


Fig. 8. The same as Fig. 7 but using individual splittings

inverted a-coefficients from the first three months of LOWL data. The rotation rate presents no variation with latitude at $0.2R_\odot$ with a value around 410 nHz and a transition, between 0.65 and $0.75R_\odot$, to a latitudinal dependent rotation that leads to rotation rates around 370 nHz at 30° of colatitude, 410 nHz at mid-latitude and 460 nHz at the equator for depths between 0.75 and $0.85R_\odot$. By inverting the a-coefficients, the inferred rotation has no significant latitudinal variation between 0.75 and $0.95R_\odot$ in zones covering 20° around the pole and 20° around the equator.

In the radiative interior, between 0.45 and $0.65R_\odot$ we find no significant variation of the rotation rate with radius and latitude. Tomczyk et al. (1995b) found a local maximum at $0.4R_\odot$ occurring for all latitudes. This latitudinal independence was due to the fact that at these radii the kernels for all latitudes were all centered at the equator and very similar. In our results with two years of data, the rotation rate for colatitudes from the equator to 60° is found constant for radii between 0.3 to 0.7 $R_\odot$ at a value of 430 nHz. Around $r = 0.4$ $R_\odot$ we find a small latitudinal dependence with a maximum at the pole. This difference with previous work may be due to a better latitudinal localization of the averaging kernels obtained at this depth with the two year dataset (kernels at $r_0 = 0.4R_\odot$, $\theta_0 = 90^\circ$ and $r_0 = 0.4R_\odot$, $\theta_0 = 45^\circ$ are clearly distinguishable (Fig. 9)). However, this small latitudinal dependence remains marginally significant if we take into account the errors found on the solution at this depth (σ over 5 nHz at the equator and at the pole).

5.3. Inversion of individual splittings

Fig. 8 shows the inferred rotation rate deduced from the inversion of individual splittings. Doing so is equivalent to assuming that the higher (unmeasured) a-coefficients are zero. The rotation rate is very close to that of Fig. 7 except in the convection zone near the equator and the pole. These differences may be analyzed by looking at the averaging kernels.

The kernels obtained by inverting individual splittings (Fig. 10) indicate that we can obtain a better latitudinal resolution than by inverting a-coefficients (Fig. 9) for targets located at radii larger than $0.5R_\odot$. In fact, by using a-coefficients directly, the number of these coefficients (i.e. 3) seems to set a limit to the latitudinal resolution around $\Delta\theta = 90^\circ/3 = 30^\circ$ ($\Delta\theta \simeq 29^\circ$ is the best latitudinal resolution reached in Fig. 9). This result is not surprising since, in a first approximation, the a_1 coefficients correspond to rotation constant on spheres and higher order coefficients specify the deviation from this solid rotation, then their number is strongly related to the latitudinal resolution that we can expect. Obviously, the better latitudinal resolution reached in individual splittings inversion induces higher 1σ errors on the solutions (e.g. $\sigma = 2.98$ nHz at $r_0 = 0.9R_\odot$ at the equator in Fig. 10 against $\sigma = 0.72$ nHz for the same location in Fig. 9) so that the rotation obtained near the equator remains compatible, at the 1σ level, with that given by the inversion of a-coefficients. Nevertheless, this is not the case near the pole where the difference in the rotation rates is over 3σ. In this zone we must look not only at the resolution but also at the localization of averaging kernels. By inverting a-coefficients, averaging kernels calculated at the pole remain localized at best at 30° of colatitude for all depths (see θ for the four lower panels in Fig. 9) although, by inverting individual splittings, we can obtain a peak with a maximum value separated only by 15° from the pole at $0.9R_\odot$. These remarks could be enough to explain the differences in rotation rates obtained near the pole in the convection zone and seems to argue in favor of the use of the inversion of individual splittings to probe these zones since the inversion of a-coefficients does not allow us to constrain latitudes higher than 60°. Nevertheless, we must keep in mind that the rotation obtained near the pole is related to the real rotation rate only under the assumption that the a_j coefficients are null for $j > 3$. These coefficients are certainly small but not null, therefore this result will change when more accurate data will become available.

Thus, when using a-coefficients inversion, the regularization forces flatness in latitude when there are no data and the resolution is poor. On the other hand, when using individual splittings, we are forcing the behavior of the rotation near the pole leading to an apparent, but not real, increase in the resolution. This result is however interesting from the point of view of exploring what one might get in terms of averaging kernel and latitudinal resolution if one had more a-coefficients or even individual splittings.

5.4. The rotation of surface layers

The rotation of layers just beneath the solar surface, and in the convection zone is of great importance for our understanding of the solar dynamo and its observed consequences. Some radial gradient of the solar rotation has been suspected in order to explain the different rotation rates, deduced from the observations of various surface indicators, as a consequence of the different depths where these tracers are anchored (e.g. Snodgrass & Ulrich 1990). Therefore it is of interest to look at the

rotation rate calculated in this zone by inverting helioseismic data. In the two year dataset, modes with $\nu/L < 40$ μHz are no longer thought to be subject to systematic errors and according to Figs. 1 and 2 we believe that the number of superficial p-modes are now enough to try to describe the rotation between 0.85 and 0.95 solar radii.

The introduction of the surface constraints does not modify the solution below $0.95R_\odot$. Above this depth, the contribution of surface constraints increases and represents more than 70 percent in the calculation of the inferred rotation rate at the surface (Fig. 6).

In Figs. 7 and 8 the solution reaches a maximum at $0.9R_\odot$ between the pole and 30° of latitude. The radial and latitudinal resolution obtained at $0.9R_\odot$ ($\Delta_r \simeq 0.06R_\odot$, $\Delta\theta \simeq 13^\circ$ at $\theta_0 = 45^\circ$ in Fig. 10) indicates that the positive gradient between 0.85 and $0.90R_\odot$ may be real in zones between 30° and 60° of latitudes.

The discussion in Sect. 4.2.3 has shown that the LOWL data are more compatible with the plasma observations than with the small magnetic feature observations. Figure 7 shows that the inferred rotation rate at $0.95R_\odot$ is close to the small magnetic features rate Ω_m ($\Omega \simeq 464$ nHz at the equator). Therefore our inversion should argue in favor of this depth for the location where small magnetic features are anchored. Nevertheless, this result is different from the one obtained by Thompson et al. (1996) with Global Oscillation Network Group (GONG) data in which the inferred rotation rate at the surface (without setting surface constraints) is close to the rate deduced from the observation of small magnetic features and reaches a maximum near $0.95R_\odot$ with a value $\Omega \simeq 470$ nHz at the equator which can correspond to the value observed by Snodgrass & Ulrich (1990) for the rotation of supergranular network. From the inversion of LOWL data, this value is never reached but the observation of modes with higher degrees is certainly necessary for making a more reliable inference about the rotation of these layers.

Finally, we note that Antia et al. (1996), who have investigated the Sun's rotation rate in the equatorial plane by inverting BBSO datasets for the years 1986, 1988, 1989 and 1990, have found a locally enhanced rotation rate near $0.9R_\odot$. They have pointed out that this behavior shows variation with time. Our solution covering years 1994 to 1996 does not show a bump with significant amplitude near $0.9R_\odot$ in the equatorial plane.

5.5. The solar tachocline

At the base of the convection zone, from 0.75 down to 0.65 solar radii, the rotation rate makes a transition to a latitudinally independent behavior which persists in the whole radiative interior. This transition layer is sometimes called the solar tachocline and the evaluation of its thickness which can be related to the horizontal behavior of the turbulent viscosity is of primary importance for our understanding of the eddy diffusivity (Spiegel & Zahn 1992). If we assume that this transition occurs at all latitudes with roughly the same thickness, we can use in this zone the results obtained by inverting a-coefficients that provide worse latitudinal resolution but better radial resolution than the inversion of individual splittings. Unfortunately, the radial resolution reached in the transition zone ($\Delta r \simeq 0.08R_\odot$ at the equator down to $\Delta r \simeq 0.14R_\odot$ at the pole in Fig. 9) does not allow us to specify how sharp this transition is. It is not more than 0.1 solar radius but it could be less. Thus in our analysis, the solar tachocline remains unresolved, even with a two year dataset. The radial resolution reached at $0.7R_\odot$ with the one year dataset was slightly poorer (namely $\Delta r \simeq 0.083R_\odot$ compared to $\Delta r \simeq 0.076R_\odot$ at the equator). This small increase in the radial resolution could be due to the lower errors of the 2 year dataset but we think that we are approaching the fundamental limit of resolution at least at the base of the convection zone with this modeset. Further improvement will be very difficult and we may need to resort to non-linear inversion methods. For this work, continuing the ground-based observations in addition to the space missions would be very important if the width and position of the solar tachocline does not vary too much during the solar cycle.

5.6. The rotation of the core

Below $0.4R_\odot$ our solution is compatible with a core that rotates slower than the radiative interior and gives $\Omega_0 = 260 \pm 80$ nHz for the value in the center. As already discussed in Tomczyk et al. (1996), this low value of Ω_0 is partly due to the low frequency splittings measured for the modes $l = 1$ and that we use in our inversion. Nevertheless, at these depths the averaging kernels are large, not well localized and consist of several peaks, so that the result and the corresponding errors are difficult to interpret. In particular, the latitudinal independence found at these depths results from the choice $j = 1$ in the regularization term T_μ Eq. (13).

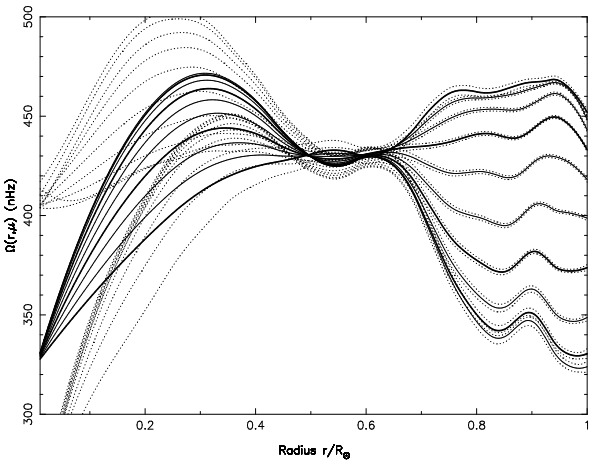


Fig. 11. Inferred rotation rate obtained by inverting individual splittings with $j = 2$ in the regularization term T_μ Eq. (13), $\lambda_r = 10^{-6}$, $\lambda_\mu = 10^{-3}$.

Figure 11 shows an instructive example of a solution obtained by setting $j = 2$ and taking the trade-off parameters

given by the corner of the L-curves that correspond to this choice (see Sect. 4.2.2). Above $0.4R_\odot$ the solution is roughly identical to the solution of Fig. 8. The fact that we insure the regularity of the solution at the center avoids finding several values at $r = 0$ and gives in that case $\Omega_0 = 330 \pm 80$ nHz, but the solution shows a significant latitudinal variation below $0.4R_\odot$ contrary to the case with $j = 1$. Therefore the latitudinal dependence is very sensitive to the order of the derivative used in the regularization term and reveals that a reliable description of the latitudinal dependence in this region requires data with lower errors for the low-degree p-modes. Thus we think that the choice $j = 1$ in our code provides an initial way to sound the very deep interior from such global inversions, without searching for a description of a latitudinal dependence in the core that requires very low errors in the data.

6. Conclusion

A two dimensional regularized least-squares inversion code with expansion of the solution in B-splines has been presented. It includes a condition that insures the regularity of the solution at the center and provides the possibility of adding surface constraints on the rotation rate.

We have inverted the two year LOWL rotational splitting dataset to derive the rotation rate of the solar interior matched to the observed plasma surface rotation rate. Both the inversion of the three a-coefficients and of the individuals splittings reconstructed from these a-coefficients have been performed. The comparison of the results gives an estimation of the improvement of the latitudinal resolution which could be obtained by the knowledge of the individual splittings.

Between 0.4 and $0.85R_\odot$, our results are in good agreement with the previous work of Tomczyk et al. (1995b) who have used the first three month dataset. The small maximum at $0.4R_\odot$ obtained previously is however smoothed for polar latitudes and disappears for equatorial rotation.

The 2 year dataset allows a description of the internal rotation rate with depth and latitude from 0.4 up to 0.95 solar radii with increasing radial resolution. At the base of the convection zone, the width of the transition zone is found to be smaller than 0.1 solar radii, in agreement with Thompson et al. (1996). We have shown that the LOWL data are compatible with the surface rotation estimated by plasma observations and confirm an increase of the rotation below the surface up to values measured by magnetic feature observations for equatorial latitudes.

Our solution is compatible with a solar core that rotates slower than the radiative interior. However, improved observations are needed to sound the region below $0.4R_\odot$ more accurately and with latitudinal resolution. In addition to the ground based networks, the instruments aboard the SOHO satellite will hopefully provide these observations in the near future and add the possibility of detecting low frequency p-modes as well as g-modes which have their maximum amplitude in the solar core.

Acknowledgements. The numerical computations have been performed on the Cray C98 (IDRIS, CNRS, Orsay). We acknowledge financial support from the GDR 131 from CNRS. S. Tomczyk acknowledges support from the US National Science Foundation through base funding of HAO/NCAR. We wish to thank the anonymous referee for his constructive remarks.

Appendix A: the space of solutions

In this work, we search the rotation rate as a piecewise polynomial of arbitrary order in two dimensions. Let us define more precisely what piecewise polynomials are: a piecewise polynomial $\mathcal{P}(q)$ of order m on a given partition Δ of $[q_1, q_n]$ $\Delta \equiv [q_1 < q_2 < ... < q_{n-1} < q_n]$ is defined as a function which coincides, on each sub-interval $[q_i, q_{i+1}]$ $1 \leq i < n$ with a polynomial of degree $m-1$. We can define at each break point the kind of connection which is required between the right and the left pieces of polynomials. Formally, the rules of connection can differ from one break point to the next: at some of them, $\mathcal{P}(q_i)$ can be discontinuous, at some others the left and right pieces can be tied to fulfilling the continuity of their first derivatives or only of $\mathcal{P}(q_i)$, ...etc.

It can be shown that a basis of such a space of piecewise polynomials can be obtained from B-splines in 1 dimension and a tensorial product of B-splines in two dimensions (Schumaker 1981). B-splines basis are a local basis. Moreover, at a given q ($q \in [q_1, q_n]$), only m B-splines of order m are not identically zero and their sum is equal to 1. These properties have two principal useful consequences in our case. First they are easy to compute and the evaluation of the rotation at a given target location needs only a few calculations. Second, they allow us to easily study the boundary conditions in the core and at the solar surface.

Using $\varphi_p(0) = \delta_{p,1}$ and $\varphi_p(R_\odot) = \delta_{p,n_r}$ we obtain respectively at the surface and the center:

$$\Omega(R_\odot, \mu) = \sum_{q=1}^{n_\mu} \omega_{n_r q} \psi_q(\mu), \tag{A1}$$

$$\lim_{r \to 0} \frac{\partial \Omega(r, \mu)}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow \omega_{1q} = \Omega_0 = \Omega(0, \mu)\ \forall q\ \forall \mu. \tag{A2}$$

From Eq. (A1), the knowledge of the surface rotation at n_μ different and well chosen latitudes allows us to fix in theory the n_μ coefficients $\omega_{n_r q}$, $(q = 1..n_\mu)$ which form a vector named $\mathbf{\Omega_2}$ in the following. Nevertheless, the observations of the surface motions Eq. (6) are given with some error bars. Moreover, the depth which defines the solar surface depends on the choice of indicator and may differ from the surface of the solar model which gives the upper boundary for the p-modes. Consequently, we prefer to include these observations in the minimization procedure rather than to calculate directly the vector $\mathbf{\Omega_2}$ only from data concerning the motion of the surface.

The relation Eq. (A2) allows us to search less coefficients to describe the core than for the rest of the solar interior. This is reasonable because of the lack of observed modes able to describe this zone even if we invert data including both low and intermediate degrees. This introduces a scalar value Ω_0 which is the value of the rotation at the center of the Sun and that

is used only to describe the rotation rate in depth where the first B-spline $\varphi_1(r)$ is not identically zero i.e. in most practical cases under 0.2 solar radii (see Sect. 4.1, Fig. 2)

The relation Eq. (9) becomes:

$$\Omega(r,\mu) = \Omega_0\varphi_1(r) \; + \; \varphi_{n_r}(r)\sum_{q=1}^{n_\mu}\omega_{n_r q}\psi_q(\mu) + \sum_{p=2}^{n_r-1}\sum_{q=1}^{n_\mu}\omega_{pq}\varphi_p(r)\psi_q(\mu). \quad \text{(A3)}$$

Appendix B: the functions $J(\Omega)$

We apply a least-squares method on values of both observed splittings and observed surface rotation. More precisely, we search the vector

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega_1} \\ \cdots \\ \boldsymbol{\Omega_2} \\ \cdots \\ \Omega_0 \end{bmatrix} \text{ where : } \quad \begin{cases} \boldsymbol{\Omega_1} \equiv \left(\omega_{pq}\right)_{\substack{p=2..n_r-1 \\ q=1..n_\mu}} \\ \boldsymbol{\Omega_2} \equiv \left(\omega_{n_r q}\right)_{q=1..n_\mu} \end{cases} \quad \text{(B1)}$$

by minimizing the quantity:

$$J^{(w)}(\boldsymbol{\Omega}) = ||\boldsymbol{P^{(w)}}(\boldsymbol{W} - \boldsymbol{R\Omega})||^2 + \lambda_s \, ||\boldsymbol{P_s}(\boldsymbol{\Omega_s} - \boldsymbol{L\Omega_2})||^2, \quad \text{(B2)}$$

where :

- $\boldsymbol{P^{(w)}}$, $\boldsymbol{P_s}$ are the diagonal matrix of the inverse of errors given on splittings and surface rotation values. These errors are therefore used as weights in the whole minimization procedure.
- $\boldsymbol{W}$ is the vector of observed splittings $\Delta\nu_{nlm}$,
- $\boldsymbol{R}$ is a matrix computed by the discretization of Eq. (2) using Eq. (A3) and Gaussian integrations.
- $\boldsymbol{\Omega_s}$ is the vector of the values of the surface rotation $\boldsymbol{\Omega_s} \equiv (\Omega(R_\odot, \mu_i))_{i=1..n_\mu}$ according to Eq. (6),
- $\boldsymbol{L}$ is a matrix defined by: $L \equiv \left(L_{iq}\right)_{\substack{i=1..n_\mu \\ q=1..n_\mu}}$ $L_{iq} = \psi_q(\mu_i)$ according to Eq. (A1)and
- λ_s is a parameter used to define the weight assigned to the fit of surface observations. If $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}(\lambda_s)$ is the solution of the problem:

  $$\min_{\boldsymbol{\Omega}} J^{(w)}(\boldsymbol{\Omega}), \quad \text{(B3)}$$

  and $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ the solution of the equality constrained least-squares problem:

  $$\min_{\boldsymbol{L\Omega_2}=\boldsymbol{\Omega_s}} ||\boldsymbol{P^{(w)}}(\boldsymbol{W} - \boldsymbol{R\Omega})||^2, \quad \text{(B4)}$$

  then $\lim_{\lambda_s \to \infty} \tilde{\boldsymbol{\Omega}}(\lambda_s) = \tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ (Golub & Van Loan 1989). Therefore a high value of the parameter λ_s tends to give a good fit of these observations but one can take small values or even $\lambda_s = 0$ if the observed p-modes are thought to be adequate to describe the surface rotation.

Unfortunately, up to now most of the observers do not give individual splittings $\Delta\nu_{nlm}$ but rather few coefficients (typically $N_j^l = 5$ or 9) of their expansion on chosen polynomials $Q_j^l(m)$ (Eq. (15)). This latter equation can be rewritten in matrix form:

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{QA}, \quad \text{(B5)}$$

by building the vector $\boldsymbol{A}$ of odd indexed a-coefficients for all modes (n,l) and the appropriate rectangular matrix $\boldsymbol{Q}$ of polynomials $Q_i(m)(i = 1, 3, 5)$. Therefore, there are two ways for performing the inversion: we can build all individual splittings from Eq. (B5) and minimize $J^{(w)}(\boldsymbol{\Omega})$; or we can express a-coefficients as a linear combination of individual splittings:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}^\dagger\boldsymbol{W}, \quad \text{(B6)}$$

where $\boldsymbol{Q}^\dagger$ is the pseudo-inverse of $\boldsymbol{Q}$ (assuming that this one exists for the chosen polynomials), and minimize:

$$J^{(a)}(\boldsymbol{\Omega}) = ||\boldsymbol{P^{(a)}}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{R^{(a)}\Omega})||^2 + \lambda_s \, ||\boldsymbol{P_s}(\boldsymbol{\Omega_s} - \boldsymbol{L\Omega_2})||^2, \quad \text{(B7)}$$

where: $\boldsymbol{R^{(a)}} = \boldsymbol{Q}^\dagger\boldsymbol{R}$. (B8)

In this case we can use directly the quoted errors on the a-coefficients (matrix $\boldsymbol{P^{(a)}}$).

When we invert splittings, we must take care of weights that we assign to individual splittings through matrix $\boldsymbol{P^{(w)}}$: Eq. (15) implies that individual splittings calculated from a-coefficients are correlated and thus there is no evident diagonal matrix $\boldsymbol{P^{(w)}}$. One possibility is to calculate the true covariance matrix $\boldsymbol{B^{(w)}}$ on individual splittings using Eq. (B5):

$$\boldsymbol{B^{(w)}} = \boldsymbol{QP^{(a)}Q}^\top, \; (\boldsymbol{Q}^\top \text{ being the transpose of } \boldsymbol{Q}) \quad \text{(B9)}$$

and to take only the diagonal part of this matrix as matrix $(\boldsymbol{P^{(w)}})^{-2}$ (Sekii 1991; Corbard et al. 1995). This leads to individual errors that depend on m. In this work, however, we assume that individual splittings are uncorrelated and independent of m for each (n,l) (Schou et al. 1992) and we calculate their errors such that they lead at best in a least-squares sense to the errors given on the a-coefficients if these ones were calculated by a least-squares fit to individual splittings. By this way, we obtain individual errors that are higher than in the previous case especially for low m.

In order to have a more immediate interpretation of the result found by inverting individual splittings it will be of much interest to have accurate observations for individual splittings along with their associated errors. This is already the case with the ground based GONG experiment and should probably be possible with the SOHO space mission instruments.

In this paper $J(\boldsymbol{\Omega})$ denote both $J^{(a)}(\boldsymbol{\Omega})$ and $J^{(w)}(\boldsymbol{\Omega})$ depending on the kind of inversion we perform.

Appendix C: averaging kernels

For all linear inversion techniques, the inferred rotation rate at a target location (r_0, μ_0) can be expressed as a linear combination of the data. Namely, in our implementation these data are

the splittings $\Delta\nu_{nlm}$ and, if $\lambda_s \neq 0$, the observed rotation rates at the surface $\Omega_{\frac{m}{p}}(\mu_i)$:

$$\bar{\Omega}(r_0,\mu_0) = \sum_{nlm} C_{nlm}(r_0,\mu_0)\Delta\nu_{nlm} + \sum_{i=1}^{n_\mu} \tilde{C}_i(r_0,\mu_0)\Omega_{\frac{m}{p}}(\mu_i). \quad \text{(C1)}$$

Averaging kernels $\kappa(r_0,\mu_0,r,\mu)$ are defined by:

$$\bar{\Omega}(r_0,\mu_0) = \int_0^{R_\odot}\int_0^1 \kappa_{nlm}(r_0,\mu_0,r,\mu)\Omega(r,\mu)drd\mu. \quad \text{(C2)}$$

From Eqs. (2) and (C1) we get:

$$\kappa_{nlm}(r_0,\mu_0,r,\mu) = \sum_{nlm} C_{nlm}(r_0,\mu_0)K_{nlm}(r,\mu) + \sum_{i=1}^{n_\mu} \tilde{C}_i(r_0,\mu_0)\delta(r-R_\odot,\mu-\mu_i). \quad \text{(C3)}$$

Here $\delta(x,y)$ denote a Dirac distribution in two dimensions. Each surface constraint induces a term proportional to a δ function, localized at the corresponding point of the surface, in the averaging kernel. The same relations exist when a-coefficients are inverted instead of individual splittings.

From Eq. (C2) the value of the inferred rotation rate $\bar{\Omega}(r_0,\mu_0)$ can be regarded as a weighted average of the true rotation rate where the averaging kernel $\kappa(r,\mu,r_0,\mu_0)$ is the weighting function. Ideal averaging kernels would be close to a $\delta(r-r_0,\mu-\mu_0)$ function leading to $\bar{\Omega}(r_0,\mu_0)=\Omega(r_0,\mu_0)$. In practice averaging kernels have a peak near (r_0,μ_0) and we can evaluate the latitudinal and radial full width at mid height (FWMH) of this peak, $\Delta\theta$ and Δr, respectively. These quantities provide a measure of the resolution of the inversion in the sense that it gives a limit for the finest details that the inversion is able to resolve for a given depth and latitude. It should be noted that averaging kernels formally do not depend on the data but only on errors on these data. Nevertheless they depend on the regularization used (high regularization decreases the resolution) and the regularization used itself depends on the set of data that we want to invert. A complete description of averaging kernels and their properties can be found in Christensen-Dalsgaard et al. (1990) and Schou et al. (1994).

References

Antia H.M., Chitre S.M., Thompson M.J., 1996, A&A 308, 656

Appourchaux T., Toutain T., Telljohann U., 1994, A&A 294, L13

Barrett R.K., 1993, On the optimal choice of regularization parameter for the inversion of solar oscillation data. In: Brown T.M. (ed) GONG 1992: Seismic Investigation of the Sun and Stars (A.S.P. Conf. Ser. vol. 42), Astr. Soc. of the Pacific, San Francisco, p. 233

Chaplin W.J., Elsworth Y., Howe R., et al., 1996, MNRAS 280, 849

Christensen-Dalsgaard J., Berthomieu G., 1991, Theory of Solar Oscillations. In: Cox A.N., Livingstone W.C., Matthews M.S. (eds) Solar Interior and Atmosphere. Univ. of Arizona Press, Tucson, p. 401

Christensen-Dalsgaard J., Schou J., 1988, Differential rotation in the Solar Interior. In: Domingo V., Rolfe E.J. (eds) Seismology of the Sun and Sun-like Stars (ESA SP-286), ESA Publication Division, Noordwijk, p. 149

Christensen-Dalsgaard J., Schou J., Thompson M.J., 1990, MNRAS 242, 353

Corbard T., Berthomieu G., Gonczi G., Provost J., Morel P., 1995, Solar Rotation from 2D Inversion. In: Hoeksema J.T., Domingo V., Fleck B., Battrick B. (eds) Fourth Soho Workshop: Helioseismologie (ESA SP-376 vol. 2). ESA Publication Division, Noordwijk, p. 289

Craig I.J.D., Brown J.C., 1986, Inverse Problems in Astronomy: A Guide to Inversion Strategies for Remotely Sensed Data. Adam Hilger, Bristol

Cuypers J., 1980, A&A 89, 207

Duvall T.L. Jr., Dziembowski W.A., Goode P.R., et al., 1984, Nature 310, 22

Dziembowski W.A., Goode P.R., Libbrecht K.G., 1989, ApJ 337, L53

Fröhlich C., Romero J., Roth H., et al., 1995, Sol. Phys., 162, 101

Gabriel A.H., Grec G., Charra J., et al., 1995, Sol. Phys, 162, 61

Golub G.H., Van Loan C.F., 1989, Matrix Computations (2nd Edition). The Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore

Gough D.O., 1981, MNRAS 196, 731

Hansen C.J., Cox J.P., Van Horn H.M., 1977, ApJ 217, 151

Hansen P.C., 1992a, Inverse Problems 8, 849

Hansen P.C., 1992b, SIAM Review 34, 561

Komm R.W., Howard R.F.,Harvey, J.W. 1993, Sol. Phys. 143, 19

Harvey J.W., Hill F., Hubbard R.P., et al., 1996, Science 272, 1284

Lazrek M., Pantel A., Fossat E., et al., 1996, Sol. Phys., 166, 1

Pijpers F.P., Thompson M.J., 1996, MNRAS, 279, 498

Scherrer P.H., Bogart R.S., Bush R.I., et al., 1995, Sol. Phys. 162, 129

Schou J., 1991, On the 2-dimensional Rotational Inversion Problem. In: Gough D.O., Toomre J. (eds) Lecture Notes in Physics, Vol. 388, Challenges to Theories of the structure of Moderate Mass Stars, Springer-Verlag, Berlin, p. 93

Schou J., Christensen-Dalsgaard J., Thompson M.J., 1992, ApJ 385, L59

Schou J., Christensen-Dalsgaard J., Thompson M.J., 1994, ApJ 433, 389

Schröter E.H., 1985, Sol. phys. 100, 141

Schumaker L.L., 1981, Spline Functions: Basic Theory, John Wiley and Sons, New York

Sekii T., 1990, Two-Dimensional Inversion of Rotational Splitting Data. In: Osaki Y., Shibahashi H. (eds) Lecture Notes in Physics, Vol. 367, Progress of Seismologie of the Sun and stars, Springer-Verlag, Berlin, p. 337

Sekii T., 1991, PASJ 43, 381

Sekii T., 1993, MNRAS 264, 1018

Snodgrass H.B., 1984, Sol. phys. 94, 13

Snodgrass H.B., Ulrich R.K., 1990, ApJ 351, 309

Spiegel E.A., Zahn J.-P., 1992, A&A 265, 106

Thompson A.M., 1992, A&A 265, 289

Thompson A.M., Craig I.J.D., 1992, A&A 262, 359

Thompson M.J., Toomre J., Anderson E.R., et al., 1996, Science 272, 1300

Tikhonov A.N., Arsenin V.Y., 1977, Solutions of Ill-Posed Problems, Winston, Washington D.C.

Tomczyk S., Streander K., Card G., Elmore D., Hull H., Cacciani A., 1995a, Sol. Phys. 159, 1

Tomczyk S., Schou J., Thompson M.J., 1995b, ApJ 448, L57

Tomczyk S., Schou J., Thompson M.J., 1996, Bull. Astr. Soc. India 24, 245
Unno W., Osaki Y., Ando H., Saio H., Shibahashi H., 1989, Nonradial oscillations of stars (2nd edition). University of Tokyo press, Japan
Woodard M.F., Libbrecht K.G., 1993, ApJ 402, L77

This article was processed by the author using Springer-Verlag LaTeX A&A style file *L-AA* version 3.

Article 2

Differential Rotation and Dynamics of the Solar Interior

M. J. Thompson, J. Toomre, E. R. Anderson, H. M. Antia, G. Berthomieu, D. Burtonclay, S. M. Chitre, J. Christensen-Dalsgaard, **T. Corbard**, M. DeRosa, C. R. Genovese, D. O. Gough, D. A. Haber, J. W. Harvey, F. Hill, R. Howe, S. G. Korzennik, A. G. Kosovichev, J. W. Leibacher, F. P. Pijpers, J. Provost, E. J. Rhodes Jr., J. Schou, T. Sekii, P. B. Stark, P. R. Wilson

Science, Volume 272, Number 5266, 31 May 1996

Differential Rotation and Dynamics of the Solar Interior

M. J. Thompson, J. Toomre, E. R. Anderson, H. M. Antia, G. Berthomieu, D. Burtonclay, S. M. Chitre, J. Christensen-Dalsgaard, T. Corbard, M. DeRosa, C. R. Genovese, D. O. Gough, D. A. Haber, J. W. Harvey, F. Hill, R. Howe, S. G. Korzennik, A. G. Kosovichev, J. W. Leibacher, F. P. Pijpers, J. Provost, E. J. Rhodes Jr., J. Schou, T. Sekii, P. B. Stark, P. R. Wilson

Splitting of the sun's global oscillation frequencies by large-scale flows can be used to investigate how rotation varies with radius and latitude within the solar interior. The nearly uninterrupted observations by the Global Oscillation Network Group (GONG) yield oscillation power spectra with high duty cycles and high signal-to-noise ratios. Frequency splittings derived from GONG observations confirm that the variation of rotation rate with latitude seen at the surface carries through much of the convection zone, at the base of which is an adjustment layer leading to latitudinally independent rotation at greater depths. A distinctive shear layer just below the surface is discernible at low to mid-latitudes.

On the time scale of stellar evolution, the sun is a middle-aged star. The observed surface rotation rates of young solar-type stars are up to 50 times that of the sun. It is therefore believed that the sun has been losing angular momentum over its lifetime through its magnetized wind, thereby gradually spinning down its outer convection zone and probably the bulk of its interior. The effectiveness of the overall spin-down of the star is difficult to estimate from stellar evolution theory, because delicately balanced circulations and instabilities that would tend to mix the interior—and magnetic fields that may retard or modify such processes—must be taken into account (*1*). This has led to suggestions that the sun might still have a rapidly rotating core, perhaps highly magnetized, reflecting its primordial past. The apparent deficit of neutrinos coming from the sun's energy-generating core has also prompted ideas for readjusting the chemical composition and stratification in models of the nuclear-burning core, and such adjustments have implications for the mixing of angular momentum in that region (*2*). Tracking of surface features has shown that the sun does not rotate as a solid body: it rotates once in ~25 days near the equator and in ~33 days near the poles. Further, the rotation rate of sunspots at low and mid-latitudes is somewhat faster than that deduced from Doppler shifts of the surface plasma; this finding suggests that the magnetic fields of the spots may be

M. J. Thompson and R. Howe are in the Astronomy Unit, Queen Mary and Westfield College, University of London, Mile End Road, London E1 4NS, UK. J. Toomre, M. DeRosa, and D. A. Haber are at the Joint Institute for Laboratory Astrophysics, University of Colorado, Boulder, CO 80309–0440, USA. E. R. Anderson, J. W. Harvey, F. Hill, and J. W. Leibacher are at the National Solar Observatory (NSO), National Optical Astronomy Observatories (NOAO), Post Office Box 26732, Tucson, AZ 85726–6732, USA. H. M. Antia and S. M. Chitre are at the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 400005, India. G. Berthomieu, T. Corbard, and J. Provost are at the Observatoire de la Cote d'Azur, 06304 Nice Cedex 4, France. D. Burtonclay and P. R. Wilson are in the School of Mathematics, University of Sydney, Sydney, NSW 2006, Australia. J. Christensen-Dalsgaard and F. P. Pijpers are at the Theoretical Astrophysics Center, Aarhus University, DK-8000 Aarhus C, Denmark. C. R. Genovese is in the Department of Statistics, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA 15213, USA. D. O. Gough and T. Sekii are in the Institute of Astronomy, University of Cambridge, Cambridge CB3 0HA, UK. S. G. Korzennik is at the Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics, 60 Garden Street, Cambridge, MA 02138, USA. A. G. Kosovichev and J. Schou are at Hansen Experimental Physics Laboratory Annex, Stanford University, Stanford, CA 94305–4085, USA. E. J. Rhodes Jr. is in the Department of Physics and Astronomy, University of Southern California, Los Angeles, CA 90089, USA. P. B. Stark is in the Department of Statistics, University of California, Berkeley, CA 94720–3860, USA.

rooted to more rapidly rotating plasma deeper in the convection zone, which occupies the sun's outer 30% by radius (3).

Theoretical studies indicate that turbulent compressible convection couples with rotation to redistribute the angular momentum away from simple solid-body rotation, leading to differential rotation and meridional circulations. Moreover, the interplay of turbulent motions and rotation with magnetic fields is generally believed to be responsible for magnetic dynamo action that leads to the observed 22-year cycles of sunspots and solar magnetic activity (4). During the past decade, helioseismology has begun to provide the means to estimate the rotation profile of the interior of the sun. The helioseismic findings are not compatible with the predictions of most theoretical models of the rotation profile set up by turbulent convection in the sun's envelope (5), which raises serious doubts about our current understanding of global-scale solar convection. Here, we use the nearly continuous GONG observations to probe the dynamical state of the solar convection zone and the deeper radiative interior.

The horizontal structure of each global mode of oscillation of the sun is described by a spherical harmonic Y_ℓ^m of degree ℓ and order m, and the vertical structure is described by ℓ and the radial order n. Opposite signs of m correspond to modes propagating in opposite directions around the sun's equator. In a spherically symmetric star, the frequencies depend on n and ℓ but not on m, so for each (n,ℓ) pair there is a $(2\ell + 1)$-fold degeneracy. Rotation breaks the spherical symmetry and lifts the degeneracy. Advection causes a wave propagating with the sun's rotation to have a higher measured frequency than would a similar wave propagating against the rotation. The difference in frequency of a pair of oppositely propagating modes is proportional to m times a weighted average of the rotation rate $\Omega(r,\theta)$ in the region of radius r and latitude θ where the modes have appreciable amplitude. We define the frequency splitting $\Delta\nu_{n\ell m}$ to be half the value of this difference. Each frequency splitting measures a longitudinal and temporal average of the zonal flows over the period of the observations (6). Different modes have different spatial sensitivity, so the observed frequency splittings can be used to make inferences about spatial variations in Ω.

There were several early attempts (7, 8) to measure rotational splittings, but the first definitive results yielding estimates of Ω over a range of depths were obtained from observation of intermediate-degree sectoral ($m = \pm\ell$) modes (9). The frequency splittings yielded inferences for Ω close to the equatorial plane, which suggested that much of the interior of the sun rotates slightly less rapidly than does the surface, whereas the central region appears to rotate more rapidly. Such data also indicated that the quadrupole moment J_2 of the sun's exterior gravitational field is consistent with general relativity. These studies were soon followed by full-disk imaging observations that yielded information on a wide variety of tesseral ($0 < |m| < \ell$) modes, thereby providing estimates of the internal rotation away from the equatorial plane (10–17).

Helioseismic data have revealed that the surface rotation rate persists through much of the convection zone on radial lines, and that there is a transition at or near the base of the convection zone to rotation that is independent of latitude. The sidereal rotation rate beneath the convection zone—roughly 440 nHz—is such that the latitudinally averaged specific angular momentum appears to be nearly constant across the convection zone boundary, which suggests that there is no net torque exerted across the transition (11, 18). The rotation in the radiative interior beneath the convective envelope seems to be consistent with rigid-body rotation. The rotation rate of the core is less certain; some reported low-degree splittings favor a rotation rate faster than the equatorial rate at the surface (8, 19), and others favor a somewhat slower rate (17, 20).

Helioseismic estimates of the pattern of rotation in the convection zone differ strikingly from predictions based on theoretical models. The convection in early numerical simulations of rotating convection in spherical shells was dominated by columnar roll-like cells orientated in the north-south direction. The tilting of these cells yielded Reynolds stress terms that drove zonal flows, which appeared as differential rotation (21). The convection models predicted that Ω was nearly constant along the axes of the columnar cells, and thus that angular velocity was nearly constant on cylinders aligned with the rotation axis and decreased with increasing depth in the equatorial plane. In contrast, the helioseismic data imply that angular velocity is roughly constant on radial lines. Recent numerical studies capable of describing more turbulent compressible flows have yielded more intricate profiles for Ω, although there is still some tendency for angular velocity to be constant on cylinders close to the equator (22). A likely explanation of the discrepancy between simulation and helioseismic inferences is that the spatial resolution in the theoretical convection models is capable of describing only mildly turbulent flows, whereas fully developed turbulence involving coherent structures embedded in otherwise chaotic flow fields may yield quite different mean flows and rotation profiles.

Interpreting Frequency Splittings

The splitting $\Delta\nu_{n\ell m}$ caused by the rotation $\Omega(r,\theta)$ can be written as

$$\Delta\nu_{n\ell m} = \frac{m}{2\pi}\int K_{n\ell m}(r,\theta)\Omega(r,\theta)r\,dr\,d\theta \quad (1)$$

where $K_{n\ell m}$ are weighting functions known as rotation kernels (Fig. 1). The kernels reflect the vertical and horizontal structure of the mode eigenfunctions. Because the spherical harmonics are either purely symmetric or purely antisymmetric about the equatorial plane, the amplitude of oscilla-

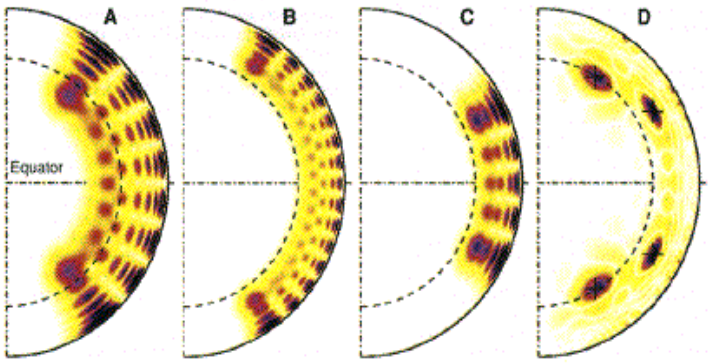


Fig. 1. (**A** to **C**) Meridional cuts through three rotation kernels for modes with frequencies $\nu \approx 1500$ μHz, for (A) $\ell = 15$, $m = 8$; (B) $\ell = 28$, $m = 14$; and (C) $\ell = 28$, $m = 24$. The color scale indicates the absolute magnitude of the kernel; dark colors (black and blue) represent the largest values, and light colors (yellow and white) represent values close to zero. The latitudinal extent of the kernels varies with m/L, and the radial extent varies with w/L. Except close to the deepest point where it has appreciable amplitude, each kernel is nearly a product of a function of radius and a function of latitude. (**D**) Meridional cut through averaging kernels for a RLS inversion (as in Fig. 3B), for target radii and latitudes $r = 0.70R$, 60° and $r = 0.82R$, 30°. The averaging kernels are symmetric about the equatorial plane, so that they are also peaked at latitudes −60° and −30°. The four crosses indicate target locations.

tion is symmetric about the equator, and hence so too are the rotation kernels. Consequently, Eq. 1 implies that the splitting is sensitive only to that component of Ω that is symmetric about the sun's equatorial plane. Other contributions to the splitting might come from latitudinal variations in structure or from a magnetic field that is axisymmetric about the rotation axis. Such contributions are distinguishable from the rotation splitting because only the latter is antisymmetric in m.

Because the integrals of the rotation kernels are close to unity, the overall magnitude of the observed splittings readily provides an estimate of the sun's internal rotation rate. A simple way to proceed further would be to model the internal rotation profile with a few parameters, use Eq. 1 to compute the splittings corresponding to such a profile, and adjust the parameters to match the observed splittings. A more systematic approach would take account of the fact that different modes are sensitive to the rotation in different parts of the interior in a way that varies systematically with mode parameters. Modes sample the rotation rate in a cavity that extends from the surface down to a depth that increases with ν/L, where ν is the frequency of the mode and $L = \sqrt{\ell(\ell+1)}$. Hence low-degree modes are sensitive to rotation from the surface to the core, whereas high-degree modes are only sensitive to the rotation close to the surface. In the latitudinal direction, modes sample the rotation between latitudes $\pm\cos^{-1}(m/L)$. Thus, the dependence of the splittings on ν/L and m/L may guide the construction of forward models for the rotation as a function of radius and latitude. For instance, splittings of modes with $m \approx \pm\ell$ show how the near-equatorial rotation varies with depth (Fig. 2). Each value of ν/L corresponds to a radius r_t to which such a mode penetrates, and thus the splitting represents a weighted average of the equatorial rotation between the surface and the radial location r_t. Thus the GONG data reveal that in the equatorial regions, as depth increases, the rotation rate first increases and then decreases. Suitable combinations of splittings sample the rotation rate at other latitudes (*23*). A data combination appropriate for a latitude of 30° (Fig. 2) shows that the sun rotates less rapidly at this latitude than at the equator, as is also observed from surface measurements. The rotation initially increases with increasing depth at this latitude, but this increase in rotation is less strong than at the equator.

Alternatively, various inverse techniques can be used; here we apply two such techniques to the GONG data. Suppose that it is possible to find a linear combination of the rotation kernels that is peaked at some chosen location within the sun and small elsewhere (Fig. 1). Because Eq. 1 is linear, the same linear combination of the measured splittings provides a weighted average of the internal rotation rate in the sun, weighted by the so-called averaging kernel. If the averaging kernel is localized, it yields an estimate of the rotation rate in some localized region of the solar interior. Repeating this process for different target locations yields a picture of the rotation rate inside the sun.

The construction of localized kernels is the essence of the optimally localized averages (OLA) method, also known as the Backus-Gilbert method (*24, 25*). Another approach to inversion is to fit a parametric model of the internal rotation rate to the data with a least-squares fit. Because our problem is ill-conditioned, we use a regularized least-squares (RLS) method with a smoothing term that penalizes solutions that vary on small length scales. In our formulation, the solution at each point is a linear combination of the data, and thus it provides an estimate of the rotation rate as sampled by the corresponding linear combination of the rotation kernels, just as in OLA (*26*).

Inferences from GONG Data

Inversions of GONG splitting data by the OLA and RLS methods (Fig. 3), in the region where they can reasonably be determined with the 4-month data set, are in good agreement (*27–29*). In the convection zone above latitude −30°, the data show that the rotation rate at a fixed latitude is roughly independent of depth, so that the variation with latitude is similar to that seen at the surface. Near the equator, the rotation rate increases just below the surface and reaches a maximum at roughly $r = 0.95R$ (where R is the radius of the sun). It then gradually decreases with increasing depth in the convective envelope. At the base of the convection zone near $r = 0.7R$, there is a pronounced transition at all latitudes to nearly uniform rotation at greater depths (Fig. 4). The structure of the transition is not resolved by the data. Thus, the GONG data support earlier deductions that the surface-like differential rotation is smoothed out near the base of the convection zone and that the rotation below this zone appears to become independent of latitude. The GONG data currently permit reliable inferences only to a depth of $r \approx 0.4R$, and the

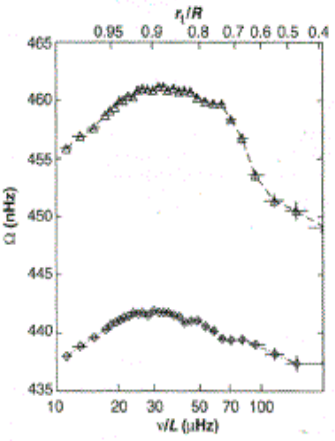


Fig. 2. Combinations of the first three odd splitting coefficients (*23*) corresponding to the equatorial region (upper curve) and latitude 30° (lower curve), plotted as functions of ν/L. The plotted points are averages over bins in ν/L; the horizontal bars indicate the width of the bins, and the vertical bars are the SD of the mean as calculated from the uncertainties in the individual splitting coefficients. These combinations are roughly weighted averages of the rotation (at each of the two latitudes) between the surface and the lower turning point radius r_t (top axis). The average rotation in the equatorial region is greater than at latitude 30°, and at both latitudes the rotation initially increases with increasing depth below the surface but decreases at greater depth.

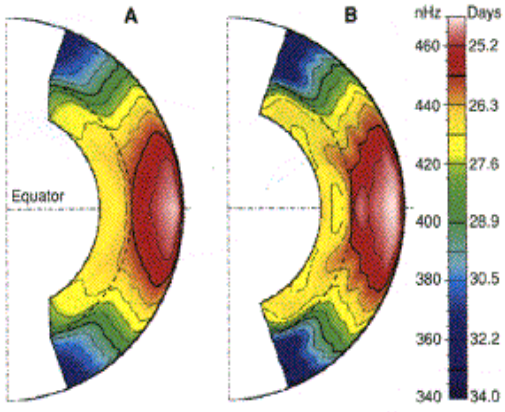


Fig. 3. Sidereal rotation rate inside the sun, as inferred from 4 months of GONG data on the basis of (**A**) an OLA 1 ⊗ 1 inversion (*25, 28*) and (**B**) an RLS inversion (*29*). The color key indicates the rotation rate in nanohertz and the corresponding period in days. The contour spacing is 10 nHz; the highest contour line is at 460 nHz. The approximate base of the convection zone is indicated by the dashed line at $r = 0.7R$. The slightly more jagged appearance of the RLS solution results from a different balance between resolution and noise in the two inversions. Particularly noticeable is the local maximum in the rotation rate a little below the surface in the equatorial region. This shear layer appears to persist at least to mid-latitudes.

use of global modes yields little information near the poles (30). These inversions indicate the presence of two layers with strong horizontal shear in the mean azimuthal velocity, one positioned just below the surface and the other at the base of the convection zone. In contrast, gradients in Ω are mild in the rest of the convective envelope. These results are in accord with analyses of earlier helioseismic data. Our confidence in the inferences made from the nearly continuous GONG data is enhanced by the improved determination of frequency splittings with m, because GONG spectra do not suffer from daily side lobes, which plague single-site, ground-based observations.

The presence of an upper shear layer is consistent with the observation that at low latitudes, sunspots and supergranulation patterns rotate faster than does the surface gas (31). Perhaps near-surface convective motions with overturning times that are short relative to the rotation period (and thus are only mildly influenced by Coriolis forces) conserve their specific angular momentum as they move radially inward and toward the rotation axis, leading to a faster latitudinally dependent rotation rate than at the solar surface (32). Alternatively, recent numerical simulations of highly turbulent rotating convection within limited domains (33) exhibit prominent shear layers close to surfaces that bound the zone of convection, where the radial velocity vanishes and across which no net stresses are communicated. The convection models yield such shear layers only in the presence of intense turbulence that has ordered structures, and such turbulence has not yet been attained in models of convection in full spherical shells spanning a broader physical domain. Yet the real solar convection zone must be far more turbulent than any flows studied by simulation (22), and the added complexities of magnetic fields and the ionization zones of hydrogen and helium close to the surface of the convection zone must also be considered.

It has been conjectured that the combined presence of the ionization zones and the rapid variation in stratification near the surface may contribute to the lateral deflection of large-scale convective motions, possibly leading to substantial horizontal flows below the surface and only relatively feeble motions in the directly observable atmosphere. Such giant cells are expected to have horizontal dimensions comparable to the depth of the convecting shell. Giant cells have not yet been observed with any certainty, but the structure of the upper shear layer as inferred from helioseismic data, and the manner in which it varies with latitude, may eventually provide clues to the nature of coherent long-lived structured flows that may coexist with small-scale turbulence within the solar convection zone. The extent to which the shear layer extends to higher latitudes is uncertain from current observations that use the global modes; the inversions suggest that the shear changes sign at mid-latitudes (Fig. 3).

An alternative way of probing the upper shear layer is provided by helioseismic analyses of acoustic wave fields within a localized area, with the use of time-distance or ring-diagram methods (34). Ring analysis applied to some GONG data is shown in Fig. 5. If one-dimensional inversions in depth are performed, mosaics of such measurements can be used to map the mean flows with respect to depth beneath each patch. The local mean horizontal flows appear to spiral with increasing depth in the immediate subsurface layers, which suggests that the structure of shearing flows may be more intricate than that deduced from the properties of the global modes. Such local-area techniques would benefit from higher spatial resolution that future upgrades to GONG may provide.

The second shear layer at the base of the convection zone (Figs. 3 and 4) is a transition from the angular velocity profile of the convective envelope to a profile of possible solid-body rotation in the deeper radiative interior (35). This transition layer is likely to be dynamically complicated, for it is just below, or may even be part of, the overshooting region in which penetrating convective motions (probably in the form of discrete plumes) are rapidly decelerated as they encounter the stable stratification of the interior. Helioseismic findings that the radial gradient of the rotation rate is small in the convection zone itself have shifted attention to this transition layer as the site of the magnetic dynamo (36). To assess the properties of the region that is available for making and storing the magnetic fields, it would be helpful to know the nature of the stratification and the mean shearing flows achieved in the transition layer. However,

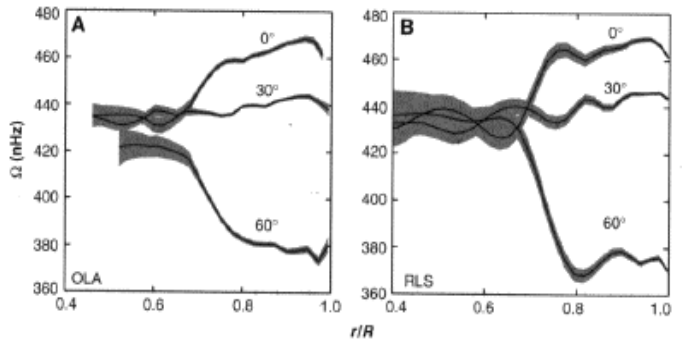


Fig. 4. Sections at latitudes 0°, 30°, and 60° through (**A**) the OLA inversion solution and (**B**) the RLS inversion solution (Fig. 3). Formal error bars (±1 SD) are indicated by the shaded regions (30). Both inversions indicate that surface-like differential rotation persists through the bulk of the convection zone, with a transition near the base of the convection zone to a flow that is consistent with latitudinally independent rotation.

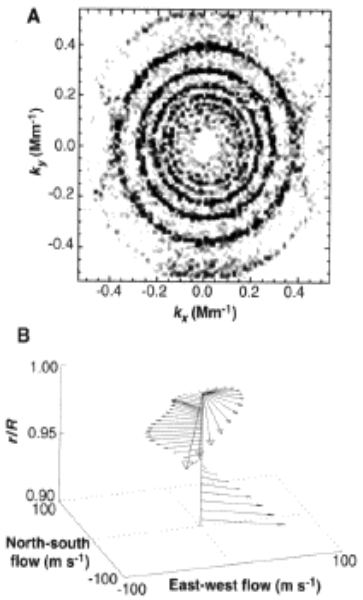


Fig. 5. Ring-diagram analysis of the superposition of local acoustic plane waves, each of which is advected locally by the horizontal component of the mean flow beneath the solar surface. The procedure here uses GONG multistation data in which a 45° subraster (involving 96^2 pixels and centered on the equator) is tracked at the solar rotation rate over a 56-hour interval. (**A**) Multiple rings (corresponding to different values of order n) are evident in the cut through the k_x-k_y-ν power spectrum at constant frequency ν = 3.5 mHz, where k_x and k_y are the eastward and northward components of the horizontal wave number. (**B**) The displacement of such rings can be used to infer the effective mean horizontal velocity sensed by the acoustic waves over a range of depths (34), shown as the spiraling set of arrows denoting amplitude and direction of this mean flow with respect to proportional radius r/R just below the surface.

inferences about the transition in rotation pattern and in mean stratification are still somewhat uncertain because of the resolution achieved in the inversions. With available data, the characteristic full width at half maximum (FWHM) of an averaging kernel peaked at low latitudes near the base of the convection zone is roughly $0.1R$, which is therefore essentially the radial resolution. However, forward modeling and inversions of artificial data indicate that the present inversion results are consistent with an abrupt transition (*37*). Beneath this transition layer, down to radius $0.4R$ where we can reliably make inferences with this data set, the rotation of the radiative interior appears to be much like that of solid-body rotation. However, although solid-body rotation may seem plausible because it represents the lowest energy state for a specified total angular momentum, it is uncertain how this state may be achieved within the sun. Models that incorporate the transport of angular momentum by slow circulations and their hydrodynamic instabilities favor an interior, and especially a core, with a rotation rate considerably faster than that of the solar surface (*1*). A weak connected magnetic field pervading the whole of the radiative interior could cause this region to rotate uniformly (*38*); presumably, the field does not penetrate the shear layer, where it would be stretched, but has been expelled by the turbulence (*39*). It has also been suggested that internal gravity waves excited by penetrative convection propagate inward, transporting angular momentum radially (*40*). However, the observed limited depletion of lithium in the solar envelope places important constraints on those spin-down processes that would also tend to mix material from the convection zone to the hotter regions beneath, where the lithium would be destroyed (*41*).

Helioseismic probing of the deep radiative interior should help to resolve these questions; we can expect great improvements in the resolution and range of depths over which we can make reliable inferences as we accumulate more data from GONG. Similar results to those in Figs. 3 and 4 have also been derived from the GONG data set by other inversion methods and by forward modeling; these results strengthen our conclusions regarding the rotation rate. It must be borne in mind that the rotation rate we have derived from the splittings of the global modes is a north-south symmetric average and an average over longitude and time. Moreover, the limited spatial resolution (*42*) results in smoothing of the inferred rotation rate of the sun. The examples of Jupiter and Saturn, which are likewise rotating, convecting bodies, suggest that the sun might have strong zonal jets and structured flows in addition to broader variations of differential rotation. Observing for longer periods will enable frequencies to be measured even more accurately, with consequent improved spatial resolution (*43*). However, the mean flows within the sun might not be steady over periods of a year or more; in that case, inverting time-averaged splitting data will only provide a picture of the time-averaged dynamics. The analyses of wave properties over more localized areas with the use of time-distance or ring-diagram approaches (*34*), both of which can be accomplished over shorter intervals in observing time, may serve as an important complement to the sampling afforded by the use of the global modes. The dynamics of the solar convection zone and deeper interior are likely to involve a diverse range of temporal and spatial scales of behavior (*22*), the resolution of which will require the extended imaging data sets that are now becoming available from GONG and associated helioseismic experiments.

REFERENCES AND NOTES

1. Rotational histories of low-mass stars like the sun are discussed in L. W. Hartmann and R. W. Noyes, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **25**, 271 (1987); M. H. Pinsonneault, S. D. Kawaler, S. Sofia, P. Demarque, *Astrophys. J.* **338**, 424 (1989); B. Chaboyer, P. Demarque, M. H. Pinsonneault, *ibid.* **441**, 865 (1995).
2. Possible dynamical processes in the solar core are discussed in D. O. Gough, in *Solar-Terrestrial Relationships and the Earth Environment in the Last Millennium*, G. Castagnoli-Cini, Ed. (Soc. Italiana di Fisica, Bologna, 1988), pp. 90–132; W. J. Merryfield, J. Toomre, D. O. Gough, *Astrophys. J.* **367**, 658 (1991); S. Ghosal and E. A. Spiegel, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **61**, 161 (1991). Computation of modifications to the neutrino flux is considered in D. O. Gough, *Ann. N.Y. Acad. Sci.* **647**, 119 (1991).
3. The average sidereal rotation rate $\Omega/2\pi$ from photospheric Doppler measurements is −452 nHz at the equator, 432 nHz at 30°, and 369 nHz at 60° [R. K. Ulrich *et al.*, *Sol. Phys.* **117**, 291 (1988)]. The rotation rate determined by tracking sunspots varies with the size of the spot group [R. Howard, P. A. Gilman, P. I. Gilman, *Astrophys. J.* **283**, 373 (1984)] or with the age of the spots [E. Nesme-Ribes *et al.*, *Astron. Astrophys.* **274**, 563 (1993)]. Average sunspot rotation rates are 467 nHz and 465 nHz, respectively, near the equator, and 444 nHz and 450 nHz at 30°. See also E. H. Schröter, *Sol. Phys.* **100**, 141 (1985).
4. P. A. Gilman, in *Physics of the Sun*, P. A. Sturrock, T. E. Holzer, D. M. Mihalas, R. K. Ulrich, Eds. (Reidel, Dordrecht, Netherlands, 1986), vol. 1, pp. 95–160; S. K. Solanki, *Space Sci. Rev.* **63**, 1 (1993); F. Cattaneo, in *Solar Magnetic Fields*, M. Schüssler and W. Schmidt, Eds. (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993), pp. 261–275; P. R. Wilson, *Solar and Stellar Activity Cycles* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994).
5. D. O. Gough and J. Toomre, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **29**, 627 (1991).
6. The effect of large-scale flows on mode frequencies and linewidths is discussed by E. M. Lavely and M. H. Ritzwoller, *Astrophys. J.* **403**, 810 (1993).
7. Low-degree oscillations were studied through Doppler shifts in light from the entire solar disk (*8*) [G. Grec, E. Fossat, M. A. Pomerantz, *Sol. Phys.* **82**, 55 (1983)] and through fluctuations in the limb-darkening function [H. Hill, R. J. Bos, P. R. Goode, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1794 (1982)].
8. A. Claverie *et al.*, *Nature* **293**, 443 (1981).
9. Sectoral modes were studied with a cylindrical lens that folded the solar image into the entrance slit of a spectrograph aligned with the solar equator [T. L. Duvall Jr. and J. W. Harvey, *Nature* **310**, 19 (1984)], and splitting data were inverted (T. L. Duvall Jr. *et al.*, *ibid.*, p. 22).
10. Frequency splittings for intermediate-degree modes were done with the Fourier Tachometer, the progenitor of the GONG instrument [T. M. Brown and C. A. Morrow, *Astrophys. J.* **314**, L21 (1987)], and the data were inverted [(*11*); see also T. M. Brown, *Nature* **317**, 591 (1985)].
11. T. M. Brown *et al.*, *Astrophys. J.* **343**, 526 (1989).
12. Intermediate-degree frequencies and splittings from Big Bear Solar Observatory, using Doppler imaging with a tunable birefringent filter, were reported for a 1986 campaign [K. G. Libbrecht, *Astrophys. J.* **336**, 1092 (1989)], with further campaigns during 1988–1990 [K. G. Libbrecht and M. F. Woodard, *Nature* **345**, 779 (1990); M. F. Woodard and K. G. Libbrecht, *Astrophys. J.* **402**, L77 (1993)]. For discussions of rotation inversions, see J. Christensen-Dalsgaard and J. Schou, in *Seismology of the Sun and Sun-Like Stars*, E. J. Rolfe, Ed. (ESA SP-286, ESA, Noordwijk, Netherlands, 1988), pp. 149–153; W. A. Dziembowski, P. R. Goode, K. G. Libbrecht, *Astrophys. J.* **337**, L53 (1989); D. O. Gough *et al.*, *Astron. Soc. Pac. Conf. Ser.* **40**, 93 (1993); M. F. Woodard and K. G. Libbrecht, *Science* **260**, 1778 (1993).
13. Intermediate- and high-degree mode parameters deduced from South Pole Ca II intensity observations were reported in T. L. Duvall Jr., J. W. Harvey, M. A. Pomerantz, *Nature* **321**, 500 (1986); T. L. Duvall Jr. *et al.*, *Astrophys. J.* **324**, 1158 (1988); T. L. Duvall Jr., J. W. Harvey, S. M. Jefferies, M. A. Pomerantz, *ibid.* **373**, 308 (1991); S. M. Jefferies *et al.*, *ibid.* **377**, 330 (1991); T. L. Duvall Jr. *et al.*, *ibid.* **410**, 829 (1993). The most recent South Pole instrumentation now serves as the High Degree Helioseismometer (HDH) [K. T. Bachmann, T. L. Duvall Jr., J. W. Harvey, F. Hill, *ibid.* **443**, 837 (1995)].
14. Extensive sets of intermediate- and high-degree frequencies and splittings observed from Mount Wilson with a Doppler magneto-optical analyzer have been reported [S. Tomczyk *et al.*, in *Seismology of the Sun and Sun-Like Stars*, E. J. Rolfe, Ed. (ESA SP-286, ESA, Noordwijk, Netherlands, 1988), pp. 141–147], and the data have been inverted [S. G. Korzennik *et al.*, *ibid.*, pp. 117–124; E. J. Rhodes Jr. *et al.*, *Astrophys. J.* **351**, 687 (1990)]. For inferences from 1988 and 1990 campaigns, see S. G. Korzennik *et al.*, in *Proceedings of the Oji International Seminar Progress of Seismology of the Sun and Stars*, Y. Osaki and H. Shibahashi, Eds. (Springer-Verlag, Berlin, 1990), pp. 341–348; P. R. Goode *et al.*, *Astrophys. J.* **367**, 649 (1991); S. G. Korzennik, A. Cacciani, E. J. Rhodes Jr., *Astron. Soc. Pac. Conf. Ser.* **42**, 201 (1993); S. G. Korzennik *et al.*, *ibid.* **76**, 12 (1995).
15. The low- and intermediate-degree (LOWL) magneto-optical analyzer [S. Tomczyk *et al.*, *Sol. Phys.* **159**, 1 (1995)] has produced a long campaign of observations from Mauna Loa, Hawaii. For rotation inversions, see S. Tomczyk, J. Schou, M. J. Thompson, *Astrophys. J.* **448**, L57 (1995).
16. Recent interpretations of low-ℓ splittings have been reported from the International Research on the Interior of the Sun (IRIS) network [E. Fossat *et al.*, *Astron. Soc. Pac. Conf. Ser.* **76**, 24 (1995)], from the Birmingham Solar Oscillation Network (BISON) (Y. Elsworth *et al.*, *ibid.*, p. 43) (*17*), and from the Interplanetary Helioseismology by Irradiance (IPHIR) measurements (T. Toutain, *ibid.*, p. 34).
17. Y. Elsworth *et al.*, *Nature* **376**, 669 (1995).
18. W. A. Dziembowski and P. R. Goode, *Astron. Soc. Pac. Conf. Ser.* **42**, 225 (1993).
19. A. Jiménez *et al.*, *Astrophys. J.* **435**, 874 (1994).
20. T. Toutain and A. G. Kosovichev, *Astron. Astrophys.* **284**, 265 (1994); T. Appourchaux *et al.*, in *Fourth SOHO Workshop Helioseismology*, T. Hoeksema, V. Domingo, B. Fleck, B. Battrick, Eds. (ESA SP-376, ESA, Noordwijk, Netherlands, 1995), vol. 2, pp. 265–270; S. Tomczyk, J. Schou, M. J. Thompson, *Bull. Astron. Soc. India*, in press.
21. For numerical simulations of convection constrained by rotation within spherical shells, see G. A. Glatzmaier, *Astrophys. J.* **291**, 300 (1985); P. A. Gilman and J. Miller, *Astrophys. J. (Suppl.)* **61**, 585 (1986); G. A. Glatzmaier, in *The Internal Solar Angular Velocity*, B. R. Durney and S. Sofia, Eds. (Reidel, Dord-

Contribution 2

Internal rotation and dynamics of the Sun from GONG data

S.G. Korzennik, M.J. Thompson, J. Toomre

and

the GONG INTERNAL ROTATION TEAM

Proceedings of IAU181 Symposium: Sounding Solar and Stellar Interior, J. Provost & F.X. Schmider (eds.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, p. 211, 1997

INTERNAL ROTATION AND DYNAMICS OF THE SUN FROM GONG DATA

S. G. KORZENNIK
Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics
60 Garden St, Cambridge MA 02138, USA

M. J. THOMPSON
Astronomy Unit, Queen Mary & Westfield College
Mile End Rd, London E1 4NS, UK

J. TOOMRE
Joint Institute for Laboratory Astrophysics
University of Colorado, Boulder CO 80309, USA

AND

THE GONG INTERNAL ROTATION TEAM

1. Introduction

We report inferences for the Sun's internal rotation from GONG months 4–10 averaged power spectra.[1] In keeping with the international collaborative nature of the GONG project, the results presented here are based on the work of several groups around the world inverting the GONG data and sharing their results via the world-wide web. These groups are at the Observatoire de la Côte d'Azur, Nice (T. Corbard, G. Berthomieu, J. Provost); Theoretical Astrophysics Center, Aarhus (J. Christensen-Dalsgaard, F. Pijpers); Center for Astrophysics, Cambridge MA (A. Eff-Darwich, S. Korzennik); QMW, London (R. Howe, M. Thompson, in collaboration with J. Schou, Stanford); Institute of Astronomy, Cambridge (T. Sekii, D. Gough);

[1]This work utilizes data obtained by the Global Oscillation Network Group (GONG) project, managed by the National Solar Observatory, a Division of the National Optical Astronomy Observatories, which is operated by AURA, Inc. under a cooperative agreement with the National Science Foundation. The data were acquired by instruments operated by the Big Bear Solar Observatory, High Altitude Obseratory, Learmonth Solor Observatory, Udaipur Solor Observatory, Instituto de Astrofísico de Canarias, and Cerro Tololo Interamerican Observatory.

University of Sydney (D. Burtonclay, Li Yan, P. Wilson); and Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (H. Antia, S. Chitre).

2. Key issues

The first inferences made by the team from GONG data were presented in the special GONG issue of Science (Thompson *et al.* 1996). The present paper is a report on work in progress towards a more mature understanding of the inferences that can be drawn from the GONG data at the present time. Two principal datasets have been used, both based on averaged 7-month (GONG months 4–10) power spectra. One set comprises individual m frequencies from the GONG project pipeline (Hill *et al.* 1996), in the ranges $\nu < 5000\,\mu Hz$ and $0 \leq l \leq 150$: this set contains 109 483 frequencies with IERR and BAD flags[2] both zero, though individual inverters will generally have made smaller selections and/or fitted low-order polynomials in m to these frequencies. The second set consists of 7 910 Clebsch-Gordon a coefficients in approximately the same ranges of frequency and degree ($1111\,\mu Hz \leq \nu \leq 4563\,\mu Hz$, $5 \leq l \leq 150$), obtained by S. Korzennik using a completely different frequency estimation procedure.

In addition to the global picture of the internal rotation of the Sun, the particular aspects of the solar rotation that we have identified as likely targets for study with these data are:

- near-surface shear layer
- shear layer at the base of the convection zone (tachocline)
- variations within the convection zone
- latitudinal constancy in the radiative interior
- rotation of the core

Another important issue that must be addressed is the reliability of the inferences that we make, and the sources of uncertainty. Thus we wish to assess:

- uncertainties coming from the data reduction (peak finding)
- discrepancies from inverting different observations
- discrepancies between different inversions of the same data

Then we might hope to give an answer to the question posed by John Leibacher during this conference: "How can we render more certain our inferences from the data?".

[2] IERR≠0 indicates a problem within the peak-find itself; BAD≠0 indicates that the estimated mode parameters fail some post-processing criterion

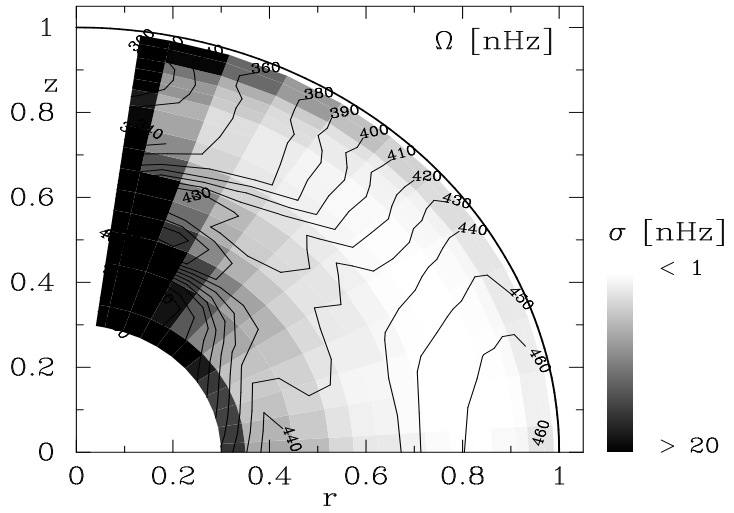


Figure 1. Inversion of GONG project frequencies using $1 \otimes 1$ SOLA (Aarhus group). Contours of isorotation are shown, superimposed on a grey-scale plot of the formal errors. A very dark background means a less reliable determination.

3. Results

Figure 1 shows the solar rotation profile inferred from individual m splittings using a $1 \otimes 1$ SOLA inversion. Similar results are shown by Sekii (these proceedings). Results from two other methods – RLS and 2D SOLA – applied to these same data are illustrated in Fig. 2. All of the inversions show the same overall behaviour: the persistence of surface-like differential rotation through much of the convection zone; enhanced rotation around $r = 0.95R$; a transition to essentially latitudinally-independent rotation beneath the convection zone. The inversions compared in Fig. 2 are in quite good agreement, even though the RLS used individual m splittings and the 2D SOLA used a coefficients only up to a_7. The small but systematic differences in the convection zone (in particular at 60° latitude) need to be investigated but probably can be understood in terms of the differences in averaging kernels: specifically, the RLS kernels have structure near the surface, so that the interior solution may be biased by the near-surface rotation rate. The averaging kernels differ even more in the deeper interior, where the present data constrain the rotation rate rather poorly. The large asymmetric horizontal bars on the high-latitude SOLA inversion at around $0.4R$ indicate that the method failed to localize a kernel at this target location.

The sensitivity to different peak-bagging reductions applied to the same

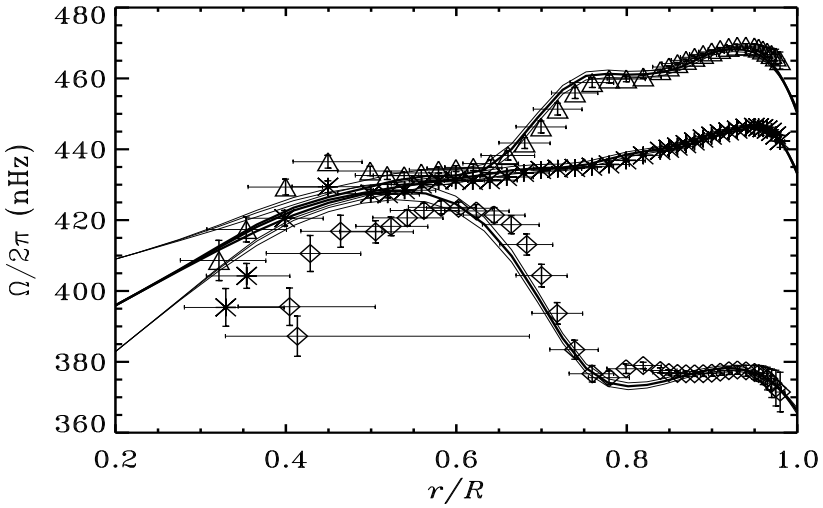


Figure 2. Inversions of GONG project frequencies using 2D RLS (solid curves; QMW group) and 2D SOLA (symbols; Aarhus group) at latitudes 0°, 30°, 60°. ± 1-σ formal errors are indicated by extra curves and by vertical error bars on the symbols; horizontal bars represent radial resolution of the averaging kernels.

GONG power spectra is illustrated in Fig. 3, where the results of applying the same 1.5D RLS inversion to a coefficients from the GONG project and from Sylvain Korzennik are compared. The two panels show similar comparisons with similar methods, but from two groups of collaborators. The inferred differences from the two data reductions are slight in the convection zone and outer radiative interior. Only in the deep interior do the two datasets produce strikingly different results (panel a), with the project data indicating a slow rotation while the Korzennik data favour a roughly uniform rotation profile. Because the rotation in the deep interior is poorly constrained, the solution in $r < 0.4R$ is largely a result of extrapolation according to the regularization used. For this reason, in the inversion in panel b, conditions of zero radial and latitudinal gradient have been imposed on the solution at $r = 0.3R$, which effectively enforces a uniform rotation in the deep interior. While this may avoid giving a misleading impression caused by a wild extrapolation in the core, it too is an a priori prejudice and in this case serves to mask the discrepancy between the two datasets.

To investigate the effect of inverting data from different experiments, we have compared inversions of GONG project frequencies with inversions of splittings derived from two-year averaged LOWL data ($5 \leq l \leq 95$). Results of a 1.5D RLS inversion of both datasets are shown in Fig. 4. The

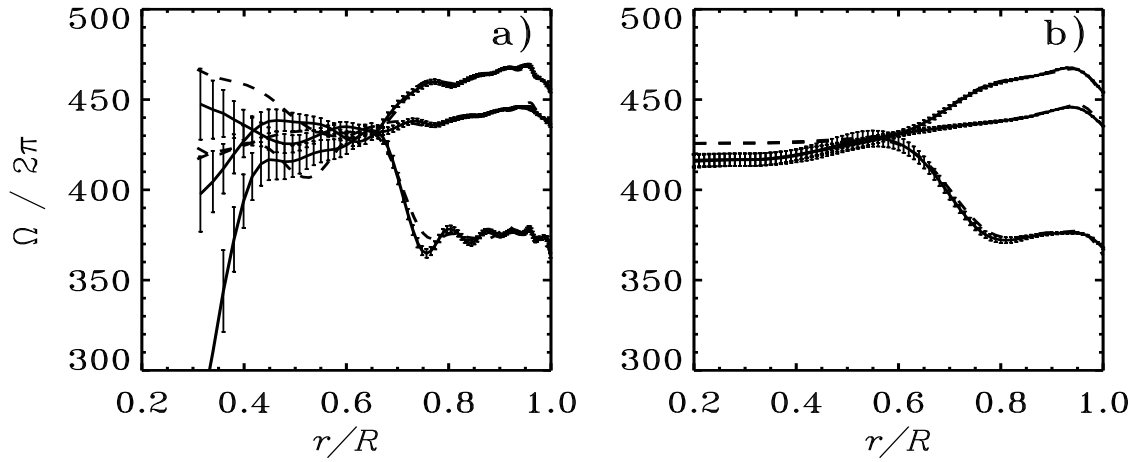


Figure 3. Comparison of inferences from project (continuous curves, with error bars) and SGK a coefficients (broken curves) using 1.5D RLS. The two panels show (a) results from CfA group; (b) results from TIFR group. The solution is depicted at latitudes 0° (equator), 30° and 60°.

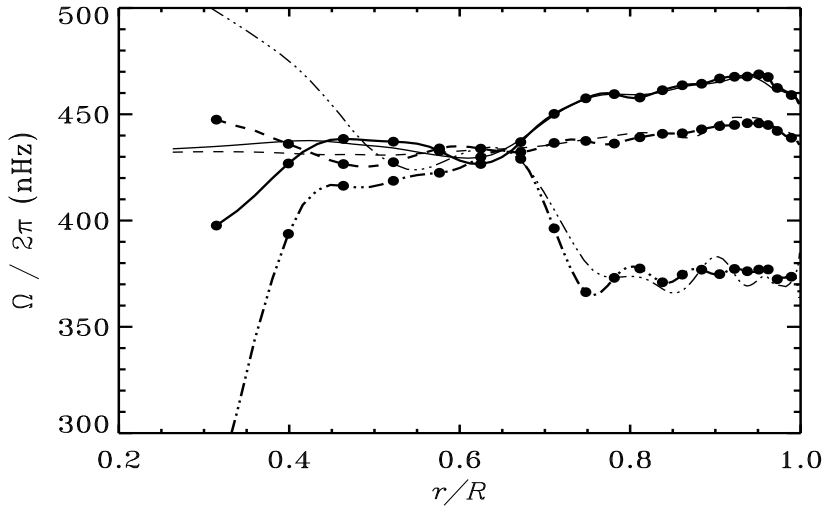


Figure 4. Comparison of inferences from GONG project frequencies and from LOWL frequencies, using a 1.5D RLS inversion (CfA group). The curves with solid dots are the GONG results (as in Fig. 3a). The solution is shown for latitudes 0° (solid curves), 30° (dashed) and 60° (triple-dot dashed).

main difference is beneath $r = 0.5R$: comparing with Fig. 3a, it is clear that the differences would have been much smaller in this region if the Korzennik peak-bagging of the GONG data had been used instead of the GONG project frequencies. Given that the LOWL frequencies were determined by J. Schou using an independent peak-bagging procedure (Schou 1992), this could be an indication that the project procedure is causing a systematic error in the inferred rotation beneath $0.5R$. Aside from that, the most obvious differences between the LOWL and GONG inversions are in the convection zone at 60° latitude: beneath $0.8R$ these would again have been reduced by comparing instead with Korzennik GONG frequencies, while the oscillations in the LOWL solution above $0.8R$ are probably an indication that the inversion parameters need to be chosen to give a little more smoothing in this region.

To summarize our results on the sensitivity of our inferences to changing the observational dataset, the peak-bagging method and the inversion technique, all three lead to some generally small but noticeable differences in the solutions for the internal rotation. Judging from our findings, the uncertainties from all of these are similar in magnitude. In the deep interior (say beneath $0.4R$) the solutions are more poorly constrained by the data and the differences are larger.

A new measurement of some interest to solar dynamo theorists and those interested in the dynamics of the solar interior is the thickness of the tachocline (the layer at the base of the convection zone where the rotation speed changes rather abruptly). According to the analysis of Spiegel & Zahn (1992), the thickness is determined by the turbulent Prandtl number, i.e. the ratio of the horizontal viscous diffusion coefficient to the (radiative) coefficient of thermal diffusion. The inversion procedures have only a finite resolution, which means that the tachocline may be much thinner than is at first sight suggested by the fairly gradual transitions evident in the inferred rotation profiles (Figs. 2-4). Indeed, if the regularization is modified so that a discontinuity at $0.7R$ is not penalized, the solution of a 2D RLS inversion of GONG data "chooses" to adopt just such a discontinuity (compare Fig. 5a with Fig. 5b). By fitting a simple analytical model profile to BBSO data, Kosovichev (1996) recently deduced a thickness of the tachocline of $(0.09 \pm 0.04)R$. Using a similar model, both in a forward sense and to interpret their inversions, Charbonneau *et al.* (1996) inferred from LOWL data that the layer is thinner, probably no more than $0.06R$, with a hint also that the tachocline is prolate. By making a nonlinear least-squares fit to the GONG data of a rotation profile incorporating a transition of adjustable position and width, Sekii (these proceedings) infers that the tachocline is centred on $r = 0.696R$ and has width $0.064R$. This value is not very different from that considered by Spiegel & Zahn. It is interesting

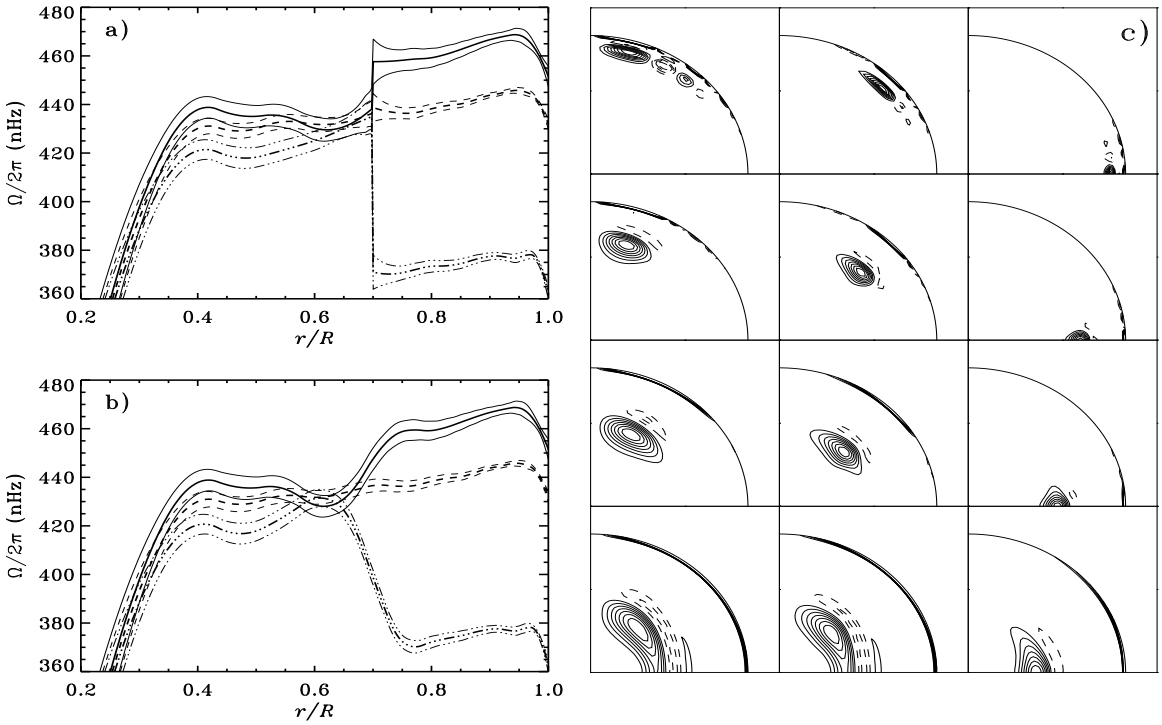


Figure 5. (a) Solution at latitudes 0° (solid), 30° (dashed) and 60° (triple-dot dashed) for a 2D RLS of GONG data, allowing the solution to adopt a discontinuity at the base of the convection zone. Adjacent curves indicate ± 1-σ error limits. (b) As (a) but not allowing a discontinuity ('standard' 2D RLS). (c) Averaging kernels corresponding to the solution in panel b, at target latitudes (left to right) 90°, 45° and 0° and radii (top to bottom) $0.9R$, $0.7R$, $0.55R$, $0.4R$. (Nice group)

to note also that the value of the almost uniform angular velocity Ω_c in the radiative interior, about 0.94 of the equatorial value Ω_0 in the convection zone, is another indication of the stress in the tachocline. The purely horizontal viscous stress based on two-dimensionally isotropic turbulence assumed by Spiegel & Zahn leads to $\Omega_c = 0.91\Omega_0$, whereas if the turbulence were isotropic in three dimensions, and large-scale advection were unimportant, Ω_c would be $0.96\Omega_0$ (Gough 1985). The intermediate observed value suggests perhaps that reality lies between these two extremes. It is important to recognise also that perhaps a more radical modification to our theoretical ideas should be entertained, such as transport by anisotropic two-dimensional turbulence or by Lorentz forces.

With only slight differences, all our inversions show that the inferred rotation rates at latitudes 0°, 30° and 60° converge below the base of the convection zone. How firmly can we therefore say that the rotation in the radiative interior is independent of latitude? To assess this, we inspect av-

eraging kernels (Fig. 5c). The kernels show how the solution is a weighted average of the true rotation rate, and hence indicate the resolution achieved. At radius $0.7R$, averaging kernels can be localized at a wide range of latitudes, indicating that latitudinal variation can be well-resolved. At radii as small as $0.4R$, however, averaging kernels corresponding to different latitudes are very similar to one another and so the inferred values of the rotation at different latitudes are in fact all similar weighted averages of the true rotation: hence it is no surprise that the inferred rotation appears to be independent of latitude, because the inversion has almost no latitudinal resolution at those depths. (Note that at slightly greater radii, the inferred rotation in Fig. 5b does exhibit some latitudinal variation: this may be caused by data error.) At radius $0.55R$ it is still possible to localize kernels at different latitudes with the GONG modeset; yet here the solution exhibits no significant latitudinal variation. Thus beneath the tachocline and down to $0.55R$ we have strong evidence that the surface latitudinal differential rotation has been eliminated and that the rotation rate is independent of latitude. Beneath that point, however, we do not at present have the latitudinal resolution to say from the GONG data whether or not the rotation varies with latitude.

It is encouraging that, to a first approximation, we get similar results for the Sun's internal rotation using different data, different peak-bagging procedures and different inversion methods. However, to address subtler questions we need to understand the differences that arise from all these three sources: these differences are fairly small throughout much of the Sun, but are substantial in the deep interior. As the random errors are reduced and we push our inversions harder, the systematic errors will become even more important. Clearly, more work is still required both in peak-bagging and in the inversions to get better agreement.

References

Charbonneau, P. *et al.* (1996) Observational Constraints on the Dynamical Properties of the Shear Layer at the Base of the Solar Convection Zone, in *Sounding Solar and Stellar Interiors*, Proc. Symposium IAU 181, poster volume, in press

Gough, D.O. (1985) Theory of solar oscillations, in *Future missions in solar, heliospheric and space plasma physics*, eds Rolfe, E. & Battrick, B., ESA SP-235, ESTEC, Noordwijk, 183 – 197

Hill, F. *et al.* (1996) The Solar Acoustic Spectrum and Eigenmode Parameters, *Science*, **272**, 1292

Kosovichev, A.G. (1996) Helioseismic Constraints on the Gradient of Angular Velocity at the Base of the Solar Convection Zone, *Astrophys. J. Letters*, **469**, L61

Schou, J. (1992) On the Analysis of Helioseismic Data, PhD Thesis, Aarhus University.

Spiegel, E.A. & Zahn, J.-P. (1992) The solar tachocline, *Astron. Astrophys.*, **265**, 106

Thompson, M.J. *et al.* (1996) Differential Rotation and Dynamics of the Solar Interior, *Science*, **272**, 1300

Chapitre 5

La tachocline

La zone de transition rapide entre les deux régimes de rotation (différentielle en latitude dans la zone convective et rigide dans la zone radiative interne), la **tachocline**, fait actuellement l'objet de nombreuses études théoriques (Spiegel & Zahn 1992, Elliott 1997, Rüdiger & Kitchatinov 1997, Canuto 1998, Gough & McIntyre 1998).

Les caractéristiques de la tachocline (position, largeur) qui peuvent être déduites des observations héliosismiques constituent des contraintes importantes pour les études théoriques de la dynamique interne.

- La connaissance de la position du centre r_c et de la largeur w de la tachocline permet de savoir si une proportion importante de la tachocline se trouve dans les couches instables de la zone convective ou au contraire dans les couches stables de la zone radiative. Ces paramètres déterminent la zone dans laquelle peuvent se produire des instabilités et des possibilités de mélange des éléments chimiques. La zone de cisaillement que représente la tachocline fait de cette zone le siège probable de la dynamo solaire (voir par exemple le modèle 'interface dynamo' (Parker 1993, Charbonneau & MacGregor 1997)).

- Par ailleurs, le rapport de la largeur sur la position de la tachocline (w/r_c) peut être relié directement au coefficient de viscosité horizontale et constitue donc une contrainte importante pour la modélisation de la turbulence (Spiegel & Zahn 1992). Ce rapport peut également être relié à l'amplitude d'un éventuel champ magnétique interne permettant d'obtenir une rotation rigide de l'intérieur radiatif (Rüdiger & Kitchatinov 1997, Gough & McIntyre 1998).

- Le rapport Ω_0/Ω_1 de la vitesse de rotation de la zone radiative sur la vitesse de rotation dans la zone convective à l'équateur est également un test important qui permet de différencier la théorie de Spiegel & Zahn (1992) basée sur une approximation de la viscosité turbulente avec un coefficient de viscosité horizontal dominant de celle de Gough (1985) pour laquelle les contraintes verticales dominent dans la tachocline (Gough 1997, Gough & Sekii 1998).

Il est donc très important de pouvoir estimer précisément les caractéristiques de la tachocline à partir des observations de splittings. La variation latitudinale de ces caractéristiques peut également être un test pour la théorie (Eliott 1997). Cependant, dans un première étape, je me suis restreint à l'étude du profil équatorial de la tachocline par inversion 1D des splittings sectoraux (voir § 3.1.3) assimilés à la somme des coefficients a d'indices impairs fournis par les observateurs.

Après avoir montré que la détermination des paramètres décrivant la tachocline ne peut pas être menée par une simple application des méthodes d'inversion linéaires classiques décrites précédemment (§5.1), je présente les deux approches que j'ai explorées, la 'super-résolution' (§5.2) et la régularisation adaptative que j'ai introduite dans le cadre de l'héliosismologie (§§5.3, 5.4). Pour ces deux types de méthodes, la stratégie de choix des paramètres de régularisation et l'estimation des incertitudes sur le résultat calculée par simulation de Monte-Carlo sont détaillées §5.5. Les résultats obtenus sont présentés et discutés en relation avec les théories sur la tachocline en §5.6.

5.1 Position du problème et les différentes approches

5.1.1 Définition des paramètres caractéristiques de la tachocline

Les études théoriques de la tachocline fournissent des contraintes sur quelques paramètres donnant le profil général de la zone de transition: le centre r_c, la largeur w ainsi que les valeurs Ω_0 et Ω_1 de la rotation dans la zone radiative et au fond de la zone convective.

Le résultat d'une inversion RLS avec une grille de discrétisation suffisamment fine peut potentiellement conduire à une solution assez complexe au niveau de la tachocline et il convient de définir une stratégie pour extraire de la solution les paramètres que l'on considérera comme caractérisant la tachocline.

Sachant que la rotation est rigide dans l'intérieur radiatif (au moins jusqu'à $0.4R_\odot$ et que la rotation de la zone convective dans le plan équatorial dépend peu du rayon (au moins entre $0.7R_\odot$ et $0.8R_\odot$ sur la solution LOWL **Fig. 4.3a**), une possibilité est de modéliser le profil équatorial de la tachocline par une simple fonction erreur erf de la forme:

$$\Omega_{eq}(r) = \hat{\Omega}_0 + \frac{1}{2}(\hat{\Omega}_1 - \hat{\Omega}_0)\left(1 + erf\left(\frac{r - \hat{r}_c}{0.5\hat{w}}\right)\right) \quad 0.4R_\odot < r < 0.8R_\odot. \tag{5.1}$$

Je définis donc dans ce travail les paramètres de la tachocline comme étant ceux de la fonction erf qui s'ajustent au mieux à la rotation solaire entre $0.4R_\odot$ et $0.8R_\odot$ dans le plan équatorial.

Un ajustement de la solution obtenue par inversion donne une estimation $(\bar{\Omega}_0, \bar{\Omega}_1, \bar{w}, \bar{r}_c)$ des paramètres cherchés $(\hat{\Omega}_0, \hat{\Omega}_1, \hat{w}, \hat{r}_c)$.

5.1.2 Limitations de l'approche classique

La première question qui se pose lorsque l'on veut étudier une structure particulière du profil de rotation à partir des méthodes inverses linéaires est de savoir si cette structure est spatialement résolue par l'inversion des données disponibles.

La résolution, estimée comme étant la largeur à mi hauteur des noyaux de résolution, ne dépend pas de la valeur des splittings mesurés mais uniquement de l'ensemble de modes observés et des erreurs attribuées aux mesures de splittings. En $0.7R_\odot$ les données actuelles conduisent typiquement à une résolution radiale entre $0.09R_\odot$ et $0.11R_\odot$ et une résolution en latitude voisine de 10° (voir **Tab. 4.2**).

La largeur en rayon de la transition entre les deux régimes de rotation, mesurée à l'équateur sur les profils de rotation obtenus par inversion (voir par exemple **Figs. 4.3a 4.4b**), se situe autour de $0.1R_\odot$ donc du même ordre que la résolution en $0.7R_\odot$. La première conclusion est donc de dire que **la tachocline n'est pas résolue par les méthodes inverses linéaires à partir des observations actuelles. La largeur est évaluée à $0.1R_\odot$ mais peut être inférieure**

5.1.3 Les nouvelles approches possibles

En utilisant l'information que l'on a déjà acquise sur le profil de la rotation interne, il est néanmoins possible de tenter de préciser les caractéristiques de cette zone à partir des observations. Pour cela trois approches sont envisageables:

1. **Une 'analyse directe'** dans laquelle on suppose connue la forme générale de la rotation et on modélise la transition avec peu de paramètres (par exemple par une fonction erf) que l'on ajuste au mieux avec les données. Il s'agit en fait d'inversions non linéaires avec très peu de paramètres ne nécessitant pas de régularisation (Kosovitchev 1996, 1998; Antia et al 1998; Charbonneau 1998).

2. **Une 'déconvolution locale'** encore appelée **méthode de 'super-résolution'** (Thompson 1998). Pour cela on utilise à la fois la connaissance acquise sur le profil de rotation hors de la tachocline et l'information sur les noyaux de résolution pour 'déconvoluer localement' (voir Sect. 5.2) le résultat (Charbonneau et al. 1998a, b; Corbard et al. 1998c (Article 3)).

3. **Une régularisation adaptative** utilisant des méthodes d'inversion non linéaires, similaires à celles couramment utilisées en imagerie (Charbonnier et al. 1997) qui préservent les variations rapides de la solution (Corbard et al. 1998a, c, d).

Toutes ces approches ont été développées très récemment parallèlement aux études théoriques de la tachocline. J'ai pour ma part mené une étude systématique de la deuxième approche en analysant l'influence, sur la détermination des paramètres de la tachocline, du choix des paramètres de régularisation des méthodes d'inversion linéaires de type 'RLS localement déconvolué'. J'ai ensuite développé une méthode non linéaire plus élaborée dont le principe, préserver les zones à fort gradient du processus de

régularisation, semble plus appropriée pour l'analyse de la tachocline. Ceci correspond à la troisième approche ci dessus qui n'avait pas été explorée auparavant dans le contexte de l'héliosismologie.

5.2 Obtenir une 'super-résolution' à partir d'une inversion linéaire

L'idée pour cette approche est d'utiliser l'information sur la résolution de la méthode inverse au niveau de la tachocline pour 'inverser' localement le processus de lissage engendré par la régularisation. La démarche générale est donc la suivante:

1. évaluer les caractéristiques de la tachocline sur la solution obtenue par inversion
2. calculer le noyau de résolution au centre de la transition puis corriger les paramètres caractéristiques de la tachocline en tenant compte de la résolution de l'inversion

A partir de l'estimation $\bar{r}_c$ du centre de la tachocline, le noyau de résolution $\kappa(r, \bar{r}_c)$ est approché par une gaussienne de la forme:

$$\kappa(r, \bar{r}_c) \simeq \exp[-(r - \bar{r}_c)^2/\Delta_r^2] \tag{5.2}$$

En faisant l'hypothèse que le noyau de résolution est invariant par translation dans un domaine autour de $\bar{r}_c$ c'est à dire que $\kappa(r, r_0)$ a la même forme quelque soit r_0 dans ce domaine, la relation (3.27) devient une relation de convolution. Si l'on suppose que la rotation est bien approchée par une fonction erf de la forme (5.1), alors la convolution avec une gaussienne (5.2) donne une autre fonction erf mais de largeur plus grande que l'on assimile à la largeur $\bar{w}$ mesurée sur le résultat de l'inversion. La relation entre la largeur mesurée $\bar{w}$ et la 'vraie largeur' $\hat{w}$ est alors donnée par la largeur corrigée $\bar{w}_c$ définie par:

$$\hat{w} = \bar{w}_c \equiv \sqrt{\bar{w}^2 - 4\Delta_r^2} \tag{5.3}$$

L'hypothèse selon laquelle les noyaux de résolution sont invariants par translation n'est valable que dans un petit domaine autour de r_c et l'approximation par une convolution n'est donc pas strictement correcte.

Cette technique que j'ai appelée de 'déconvolution locale' permet cependant d'obtenir une estimation quantitative du lissage opéré par l'inversion. Elle a été introduite par Charbonneau et al. (1998a) pour une méthode de type OLA. L'étude systématique de cette procédure que j' ai effectuée dans le cadre de la méthode RLS m'a permis de fixer ses limitations et son domaine de validité (Corbard et al. 1998c, Article 3). Les principales conclusions de cette étude sont reprises dans la section 5.6.

Notons enfin que cette approche suppose que le noyau de résolution est suffisamment piqué pour pouvoir être approché par une gaussienne au voisinage de $0.7R_\odot$. Les noyaux issus d'une inversion RLS avec régularisation de Tikhonov remplissent bien

cette condition mais il s'est avéré que ce n'est pas le cas pour les noyaux associés à la méthode (linéaire) MTSVD (voir Article 3, Fig. 6). Pour les méthodes non linéaires la notion de noyaux de résolution perd son sens et la "déconvolution" n'est donc pas envisageable. Pour la méthode MTSVD et les méthodes non linéaires, on se restreint donc à identifier les caractéristiques de la tachocline directement à partir du profil obtenu à l'issue de l'inversion.

5.3 Vers une nouvelle approche de la régularisation

5.3.1 Pourquoi?

La régularisation de Tikhonov avec un terme quadratique permet d'obtenir un système linéaire d'équations normales facile à résoudre mais impose une contrainte globale sur la solution qui tend à lisser les variations rapides et ne permet pas de retrouver d'éventuelles discontinuités. Réduire cette contrainte peut, localement, permettre de retrouver de forts gradients mais la perte de régularisation dans les autres zones conduit en général à des oscillations de part et d'autre des zones de variations rapides. Ce comportement, appelé *phénomène de Gibbs* est typique pour une solution obtenue à partir d'une régularisation de Tikhonov lorsque la fonction à reconstruire contient à la fois des zones lisses et des zones de variations rapides.

L'idée de cette nouvelle approche est de chercher à supprimer ou à diminuer localement la régularisation dans les zones où il existe de forts gradients afin de ne pas lisser la solution à cet endroit et de conserver la régularisation ailleurs.

5.3.2 Comment?

Premières idées

La première idée est naturellement d'utiliser la fonction de poids introduite dans le terme de régularisation pour pondérer localement la régularisation. Cette piste n'a pas été explorée en l'absence de contraintes précises sur le choix des fonctions de poids. Nous verrons que la méthode développée plus loin utilise ce principe mais d'une manière totalement différente et dans un cadre plus général.

Une autre possibilité (voir Contributions 2 et 3) est d'utiliser une base de B-splines discontinues qui ne pénalise pas, localement, un fort gradient. Cette approche appliquée aux données GONG m'a permis de montrer que, si la possibilité est laissée à la solution d'être discontinue en $0.7R_\odot$, alors l'inversion RLS 'choisit' d'adopter cette discontinuité. Le gain sur l'accord avec les données (le χ^2) est faible. Il montre que ces données sont compatibles avec l'existence d'une discontinuité du profil de rotation sous la zone convective.

Ces deux approches présentent néanmoins l'inconvénient de nécessiter la connaissance a priori de l'endroit où l'on veut diminuer ou supprimer la régularisation.

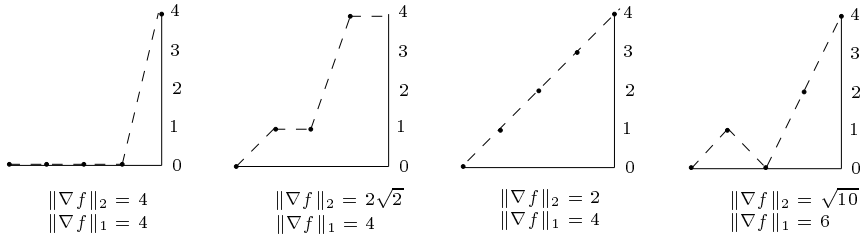


FIG. 5.1 – *Comparaison des normes $\mathcal{L}^1$ et $\mathcal{L}^2$. Les courbes en tirets représentent les fonctions f sur lesquelles on calcule le terme de régularisation. D'après Blanc-Féraud (1998).*

Utilisation de la norme $\mathcal{L}^1$

J'ai déjà évoqué la possibilité de choisir un terme de régularisation qui ne soit pas quadratique mais qui corresponde à une norme $\mathcal{L}^1$. Pourquoi l'utilisation de cette norme est-elle potentiellement plus intéressante pour notre problème?

Le terme de Tikhonov (quadratique) discrétisé s'écrit sous la forme du carré d'une norme $\mathcal{L}^2$ soit $\|\mathbf{L}\tilde{\mathbf{\Omega}}\|_2^2$ (Eq. 4.11) où $\mathbf{L}$ représente la discrétisation d'un opérateur de dérivée première ou seconde. Dans le cas d'une dérivée première on peut donc noter formellement ce terme par $\|\nabla\tilde{\mathbf{\Omega}}\|_2^2$. Un terme de régularisation basé sur la norme $\mathcal{L}^1$ sera noté $\|\nabla\tilde{\mathbf{\Omega}}\|_1$. La **figure 5.1** compare les deux normes pour quatre fonctions définies sur quatre points et variant entre 0 et 4. La norme $\mathcal{L}^2$ est minimale pour la fonction linéaire alors que la norme $\mathcal{L}^1$ est la même pour la fonction linéaire que pour les deux premières solutions présentant des variations rapides. Lors d'une minimisation, l'emploi de la norme $\mathcal{L}^2$ favorisera donc une solution lissée alors que l'emploi de la norme $\mathcal{L}^1$ ne permettra pas de distinguer les trois premières fonctions f. Le choix d'une solution plus ou moins lisse sera fait uniquement en fonction de l'accord avec les données (minimisation du terme χ^2). Ceci illustre simplement le fait que la norme $\mathcal{L}^1$ est moins pénalisante que la norme $\mathcal{L}^2$ vis à vis des variations rapides de la solution. Le dernier exemple de la **figure 5.1** illustre par ailleurs qu'une solution oscillante reste pénalisée dans les deux cas.

La méthode d'inversion basée sur une régularisation avec minimisation de la norme $\mathcal{L}^1$ que j'ai utilisée est la méthode PP-TSVD. La minimisation de la norme $\mathcal{L}^1$ n'étant pas un processus linéaire, cette méthode représente une première tentative d'utilisation des méthodes de régularisation non linéaires en héliosismologie. Les simulations de Monte-Carlo (voir § 5.5) ont cependant montré que, pour un niveau de bruit similaire à celui des données LOWL, cette méthode tend à imposer des discontinuités même pour des profils de rotation ayant une largeur supérieure à $0.05R_\odot$. La dispersion des résultats des simulations rend difficile l'interprétation du résultat obtenu à partir des données. Ceci m'a incité à explorer d'autres méthodes

Une partie des difficultés rencontrées avec la méthode PP-TSVD provient du fait que cette méthode est basée sur une troncature SVD et un paramètre de régularisation

discret. On peut penser que la méthode de variation totale, équivalente de PP-TSVD mais avec un paramètre continu, pourrait donner de meilleurs résultats. Il est cependant apparu qu'il était plus intéressant de considérer une classe plus générale de fonctions de régularisation, utilisées par ailleurs en imagerie, permettant de préserver les zones de forts gradients.

Une théorie plus générale de la régularisation

L'idée est de définir le critère à minimiser sous la forme générale:

$$J(\bar{\Omega}(r)) = \chi^2(\bar{\Omega}(r)) + \lambda^2 \int_0^1 \varphi\left(\left|\frac{d^q\bar{\Omega}(r)}{dr^q}\right|\right) dr, \tag{5.4}$$

et de chercher quelles sont les fonctions φ adaptées à notre problème particulier, c'est à dire préserver les zones à fort gradients.

Remarquons que cette formulation générale du critère comprend comme cas particulier la régularisation de Tikhonov pour $\varphi(t) = t^2$ et la méthode de Variation Totale pour $\varphi(t) = t$.

Pour trouver les propriétés que doit satisfaire la fonction φ, il est utile de regarder les équations d'Euler associées à la minimisation du critère (5.4). Il est possible de discrétiser le terme de régularisation par:

$$\int_0^{R_\odot} \varphi\left(\left|\frac{d\bar{\Omega}(r)}{dr}\right|\right) dr = J_2(\mathbf{\Omega}) = \sum_{p=1}^{N_r-1} c_p \varphi\left(\left|\mathbf{L\Omega}\right|_p\right). \tag{5.5}$$

$(c_p)_{p=1,N_p-1}$ sont les poids de la méthode de quadrature utilisée pour l'intégration, $\mathbf{L}$ représente l'opérateur de dérivée première ou seconde et $\left|\mathbf{L\Omega}\right|_p$ est la valeur absolue de la composante p du vecteur $\mathbf{L\Omega}$.

Le critère discrétisé s'écrit donc:

$$J(\mathbf{\Omega}) = \chi^2(\mathbf{\Omega}) + \lambda^2 J_2(\mathbf{\Omega}), \tag{5.6}$$

et avec les notations du § 4.1.3, on obtient les équations d'Euler par:

$$\nabla J(\mathbf{\Omega}) = 0 \Longleftrightarrow (\mathbf{R}^\top\mathbf{R} + \lambda^2\mathbf{L}^\top\mathbf{B}(\mathbf{\Omega})\mathbf{L})\mathbf{\Omega} = \mathbf{R}^\top\mathbf{W} \tag{5.7}$$

où la matrice diagonale $\mathbf{B}(\mathbf{\Omega})$ est définie par:

$$\mathbf{B} = diag(b_p) \quad \text{avec} \quad b_p = c_p \times \frac{\varphi'\left(\left|\mathbf{L\Omega}\right|_p\right)}{2\left|\mathbf{L\Omega}\right|_p} \tag{5.8}$$

Les éléments de cette matrice dépendent donc du gradient de la solution en chaque point de grille. Pour $\varphi(t) = t^2$ (régularisation de Tikhonov) $\varphi'(t)/2t = 1$, la matrice $\mathbf{B}$ est indépendante de la solution et les équations d'Euler se réduisent à un système linéaire. Pour une fonction φ quelconque les équations d'Euler ne sont plus linéaires et la méthode de régularisation est appelée *méthode de régularisation non linéaire.*

5.4 Application de la régularisation non linéaire pour l'étude de la tachocline solaire

D'après l'équation (5.7), il apparaît que ce sont les propriétés de la fonction de poids $\varphi'(t)/2t$ qui vont permettre de sélectionner les fonctions φ adaptées à notre problème:

- Dans la limite des faibles gradients nous voulons préserver une régularisation de Tikhonov, on doit donc avoir:

$$0 < \lim_{t \to 0} \frac{\varphi^{'}(t)}{2t} = M < \infty \tag{5.9}$$

  où M est une constante non nulle positive.

- Par contre, pour les forts gradients, nous voulons diminuer, ou même supprimer, la régularisation, donc:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\varphi^{'}(t)}{2t} = 0 \tag{5.10}$$

- Il est de plus naturel de choisir une fonction qui soit décroissante entre ces deux limites. Choisir une fonction strictement décroissante évitera par ailleurs des instabilités numériques. On ajoute donc une troisième condition sur la fonction de poids:

$$\frac{\varphi^{'}(t)}{2t} \qquad \text{strictement décroissante sur } [0, +\infty[\tag{5.11}$$

L'ensemble des fonctions φ vérifiant ces trois propriétés est très vaste et recouvre notamment aussi bien des fonctions convexes que non convexes. Une grande partie des techniques de régularisation utilisées en imagerie peut rentrer dans ce cadre général de la régularisation pour des fonctions φ particulières (Charbonnier et al. 1997, Teboul et al. 1998). Il faut donc dans un premier temps définir la fonction φ vérifiant les trois propriétés ci-dessus et paraissant adaptée à notre problème puis trouver un algorithme pour résoudre les équations d'Euler non linéaires.

5.4.1 Le choix de la fonction φ

Tout d'abord il faut choisir entre fonction convexe ou non convexe. Il a été montré en imagerie (Blanc Féraud 1998) qu' une fonction non convexe peut être mieux adaptée à des gradients très importants alors que les fonctions convexes permettent également de retrouver des transitions relativement douces. En ce qui concerne la tachocline solaire l'incertitude sur le gradient de rotation reste grande. Ceci est donc en faveur du choix d'une fonction φ convexe. De plus, ce choix permet d'assurer l'existence d'un minimum unique du critère (5.4) et évite les instabilités numériques plus généralement liées à l'utilisation des fonctions non convexes.

Les propriétés de la norme $\mathcal{L}^1$ illustrée **figure 5.1** semblent intéressantes pour notre problème mais la fonction $\varphi(t) = t$ correspondant à la méthode de variation totale (TV) ne satisfait pas la propriété (5.9). Notons que, la méthode PP-TSVD étant équivalente à une méthode de variation totale, cela peut expliquer en partie les difficultés rencontrées pour l'exploitation de cette méthode: la non dérivabilité en 0 de la fonction $\varphi(t)$ associée peut conduire à des instabilités numériques qui se traduisent par une grande dispersion des résultats lors des simulations de Monte-Carlo. A la lumière du formalisme précédent il est possible de construire une fonction φ proche de la valeur absolue pour conserver les propriétés de la norme $\mathcal{L}^1$ mais avec un comportement quadratique à l'origine pour préserver la régularisation des zones à faibles gradients. Cela conduit à la fonction de régularisation convexe utilisée en imagerie par Charbonnier et al. (1994, 1997):

$$\varphi(t) = 2\sqrt{\left(\frac{t}{\delta}\right)^2 + 1} - 2, \qquad \frac{\varphi'(t)}{2t} = \frac{1}{\delta^2\sqrt{\left(\frac{t}{\delta}\right)^2 + 1}} \tag{5.12}$$

Le paramètre de régularisation δ est utilisé pour fixer l'importance relative de la partie quadratique et de la partie linéaire de la fonction φ sur le domaine de variation du gradient de la solution. Il doit donc être fixé en fonction de notre connaissance a priori du gradient que l'on cherche à préserver de la régularisation. L'étude de l'influence du choix de ce paramètre sur la détermination des caractéristiques de la tachocline est reprise §5.5.2.

5.4.2 L'algorithme ARTUR: théorie et pratique

L'algorithme que j'ai utilisé pour minimiser les équations d'Euler non linéaires associées au choix (5.12) de la fonction φ est une adaptation d'un algorithme utilisé en imagerie nommé ARTUR pour *Algebraic Reconstruction Technic Using Regularisation* (Charbonnier et al. 1994, 1997).

La méthode de minimisation utilisée est basée sur un résultat théorique important concernant la *régularisation semi quadratique* introduite par Geman & Reynolds (1992).

Théorie de la régularisation semi quadratique

Charbonnier et al. (1997) ont démontré le théorème suivant (voir aussi Geman & Reynolds 1992):

Si la fonction φ satisfait les 3 propriétés (5.9, 5.10, 5.11) alors il existe une fonction convexe ψ telle que:

$$\forall t \geq 0, \varphi(t) = \min_{\bar{b}\in[0,M]} \bar{b}t^2 + \psi(\bar{b}) \tag{5.13}$$

et la valeur $\bar{b}_t$ pour laquelle le minimum est atteint, est unique et donnée par:

$$\bar{b}_t = \frac{\varphi'(t)}{2t} \tag{5.14}$$

Ce théorème permet de reformuler le problème de la minimisation du critère (5.4) en ajoutant une variable $\bar{b}_p$ relative au gradient en chaque point de grille $p = 1, N_r - 1$. On définit alors une nouvelle fonctionnelle:

$$J^*(\mathbf{\Omega}, \bar{\mathbf{b}}) = \chi^2(\mathbf{\Omega}) + \lambda^2 \sum_{p=1}^{N_r-1} c_p \left\{ \bar{b}_p \left(|\mathbf{L}\mathbf{\Omega}|_p \right)^2 + \psi(\bar{b}_p) \right\}. \tag{5.15}$$

de telle sorte que:

$$\min_{\mathbf{\Omega}} J(\mathbf{\Omega}) = \min_{\mathbf{\Omega}, \bar{\mathbf{b}}} J^*(\mathbf{\Omega}, \bar{\mathbf{b}}) \tag{5.16}$$

La minimisation de ce nouveau critère porte donc sur un plus grand nombre de variables mais celui ci présente le grand avantage d'être quadratique relativement à $\mathbf{\Omega}$ (si les variables b_p sont fixées, d'où le terme *semi quadratique*). Dans ce cas le calcul $\mathbf{\Omega}$ revient à résoudre simplement un système linéaire. Si au contraire $\mathbf{\Omega}$ est fixé le théorème précédent donne les variables $\bar{b}_p$ qui minimisent le critère par:

$$\bar{b}_p = \frac{\varphi'(|(\mathbf{L}\mathbf{\Omega})_p|)}{2\,|(\mathbf{L}\mathbf{\Omega})_p|} \tag{5.17}$$

Il a été démontré par Charbonnier et al. (1997) que, pour une fonction φ convexe vérifiant les trois propriétés (5.9, 5.10, 5.11) de préservation des forts gradients, le minimum d'un tel critère peut être atteint par un algorithme itératif minimisant successivement le critère relativement aux variables $\mathbf{\Omega}$ et $\bar{\mathbf{b}}$.

Implémentation de l'algorithme ARTUR

Les considérations précédentes conduisent à un schéma itératif très simple pour lequel on résout à l'itération k le système linéaire:

$$\left(\mathbf{R}^\top\mathbf{R} + \lambda^2\mathbf{L}^\top\mathbf{B}(\mathbf{\Omega}^{k-1})\mathbf{L}\right)\mathbf{\Omega}^k = \mathbf{R}^\top\mathbf{W}. \tag{5.18}$$

où la matrice $\mathbf{B}(\mathbf{\Omega}^{k-1})$ est calculée par (5.8) à partir du gradient de la solution obtenue à l'itération $k-1$. Il s'agit donc d'une *méthode adaptative* dans laquelle l'information sur le gradient d'une solution est utilisée pour modifier *localement* la régularisation à l'étape suivante.

Il faut donc se fixer une estimation initiale, une méthode pour résoudre le système linéaire, un critère d'arrêt des itérations et un choix pour les deux paramètres de régularisation λ et δ.

L'estimation initiale $\mathbf{\Omega}^0$ est choisie constante. Cela correspond à un gradient nul partout. D'après le choix (5.12) de la fonction φ et l'expression (5.8) de la matrice $\mathbf{B}$, le système (5.18) correspond alors à une simple inversion de Tikhonov avec λ/δ comme paramètre de régularisation. Donc **la première itération ARTUR donne la solution Tikhonov avec $\bar{\lambda} = \lambda/\delta$ comme paramètre de régularisation**.

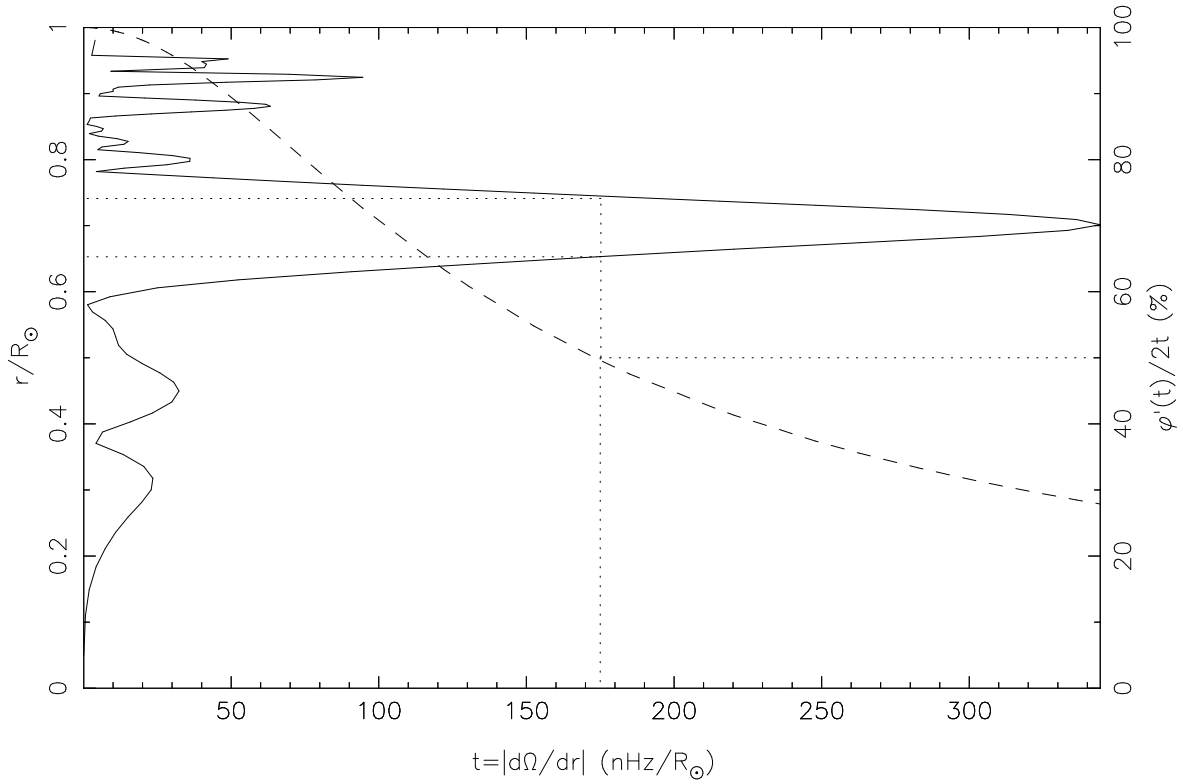


FIG. 5.2 – *Le trait continu montre, en fonction du rayon, le module t du gradient d'une solution obtenue à la première itération de la méthode ARTUR à partir de données simulées correspondant à une rotation discontinue en* $0.7R_\odot$. *La ligne pointillée donne, pour chaque valeur du gradient, la valeur de la fonction de poids* $\varphi'(t)/2t$ *pour* $\delta = 100$. *Cette valeur représente le taux de régularisation qui sera appliqué à la deuxième itération comparé à la première itération. Un taux de* 100% *signifie que l'on ne change pas la régularisation, en dessous on 'dérégularise'. Dans le cas présent, une diminution* $\geq 50\%$ *de la régularisation sera appliquée dans la zone* $0.65 \leq r/R_\odot \leq 0.75$ *délimitée par les deux traits horizontaux en pointillés*

Sachant que l'algorithme ARTUR va chercher à 'dérégulariser' dans les zones à forts gradients, il faut que la solution à la première itération ne soit pas trop lisse de façon à déjà faire apparaître les gradients importants mais pas trop oscillante de façon à ce que les gradients dus au bruit ne soient pas renforcés au cours des itérations. Les simulations ont montré qu'un choix de $\bar{\lambda}$ situé entre les deux stratégies automatiques du maximum de courbure de la 'courbe L' (λ_L) et de la Validation Croisée (λ_{GCV}) permet d'obtenir un bon compromis entre ces deux exigences pour la première itération. La première étape consiste donc à effectuer une inversion de Tikhonov à l'aide d'une décomposition GSVD de $(\mathbf{R}, \mathbf{L})$ permettant de déterminer, avec l'équivalent d'une seule inversion, λ_L et λ_{GCV} puis $\bar{\lambda}$.

La décomposition GSVD est néanmoins coûteuse en temps de calcul et elle n'est pas utilisée pour les itérations suivantes. J'ai choisi d'utiliser plutôt une méthode de gradients conjugués pré-conditionnée. En utilisant la solution précédente de l'algorithme ARTUR comme point de départ pour cette méthode de descente, on obtient un double processus itératif très performant dans lequel le nombre d'itérations nécessaires pour trouver la solution du système linéaire décroît très rapidement à chaque itération ARTUR.

Le choix du critère d'arrêt des itérations peut être relié au choix du paramètre δ. Ce paramètre pondère le gradient de la solution et, en définissant la forme de la fonction de poids $\varphi'(t)/2t$, il fixe le taux de dérégularisation souhaité pour l'itération k en fonction du gradient trouvé à l'itération $k-1$. Le taux de dérégularisation va s'accroître au cours des itérations jusqu'à la convergence. Donc arrêter les itérations avant convergence reviendrait aussi, mais d'une manière moins facile à quantifier, à fixer le taux de dérégularisation. J'ai choisi de laisser converger l'algorithme et d'étudier en détail les implications du choix de δ. Le critère de convergence utilisé est basé sur la différence (en norme quadratique) entre les solutions de deux itérations successives:

$$\frac{\|\mathbf{\Omega}^k - \mathbf{\Omega}^{k-1}\|_2}{\|\mathbf{\Omega}^k\|_2} \leq 10^{-6} \tag{5.19}$$

Il reste donc à choisir δ. Je donne ici le principe de ce choix et les implications sur la détermination de la largeur de la tachocline seront discutés §5.5.

Le principe du choix de ce paramètre est illustré par la **figure 5.2**. On se base en fait sur notre connaissance a priori du gradient cherché. Sachant que l'inversion de Tikhonov ne permet pas de résoudre la tachocline, le gradient maximum obtenu au voisinage de $0.7R_\odot$ par cette inversion nous donne le gradient minimum attendu pour la tachocline. On utilise la variation du gradient de la première itération ARTUR en fonction du rayon pour fixer le taux de dérégularisation associé à chaque valeur du gradient. Sur la **figure 5.2**, le choix $\delta = 100$ revient à diminuer la régularisation de 50 à 70% dans les zones où le gradient obtenu à la première itération est supérieur à $175\text{nHz}/R_\odot$ soit entre $0.65R_\odot$ et $0.75R_\odot$. Ce choix est celui qui a été retenu pour les simulations de Monte-Carlo et l'inversion des données LOWL.

5.5 Estimation des incertitudes: influence de la régularisation et simulations de Monte-Carlo

5.5.1 Principes et difficultés

Nous avons vu la difficulté d'interpréter les incertitudes obtenues sur les solutions des inversions linéaires régularisées. Pour une détermination globale de la rotation cette difficulté pouvait en partie être compensée par la comparaison des résultats obtenus par différentes méthodes et l'étude de leur sensibilité à la régularisation. On peut estimer que cette approche donne un idée réaliste de l'incertitude sur le résultat mais l'interprétation statistique reste floue.

J'ai également suivi cette approche pour l'étude de la tachocline en comparant §5.6 les résultats de 4 méthodes d'inversion différentes (2 méthodes linéaires RLS, MTSVD, et 2 méthodes non linéaires PP-TSVD et ARTUR) et en effectuant une étude systématique de l'influence du choix du paramètre de régularisation pour chacune des méthodes.

Cependant, pour l'étude de la tachocline, nous cherchons des caractéristiques fines du profil de rotation et il est apparu important de pouvoir obtenir une incertitude sur ces quantités dont la signification statistique soit mieux établie. C'est pourquoi j'ai réalisé des simulations de type Monte-Carlo sur l'ensemble du processus conduisant à l'estimation des paramètres. Pour celà, j'ai construit des ensembles de splittings calculés pour des profils de rotation simulés par une rotation différentielle de la zone convective et une transition de largeur variable vers une rotation rigide de l'intérieur radiatif. Ces données simulées sont ensuite bruitées en ajoutant pour chaque mode une erreur distribuée selon une loi gaussienne d'écart type correspondant à celui estimé pour les observations.

La mise en place des simulations de Monte-Carlo sur un grand nombre de réalisations du bruit requiert que le processus soit optimisé (pour que l'étude puisse être menée dans des temps de calcul raisonnables) et surtout puisse être entièrement automatisé. Il est donc indispensable de définir une stratégie automatique pour le choix des paramètres.

Stratégie automatique pour la 'super-résolution'

Le choix d'une stratégie automatique s'est fait dans un premier temps en analysant, sur une simulation, l'influence du choix du paramètre de régularisation λ sur la détermination des paramètres de la tachocline.

On s'attend à ce que le choix de λ ait une grande incidence sur l'estimation $\bar{w}$, puisqu'il fixe le taux de lissage de la solution mais on souhaite que le résultat corrigé (ou 'déconvolué localement') soit beaucoup moins sensible à ce choix puisque la résolution qui sert de terme correctif évolue également avec la régularisation.

Les **figures 5.3a, b** montrent que ceci est effectivement bien vérifié pour les paramètres situés entre λ_{GCV} correspondant à la stratégie GCV et λ_L correspondant au

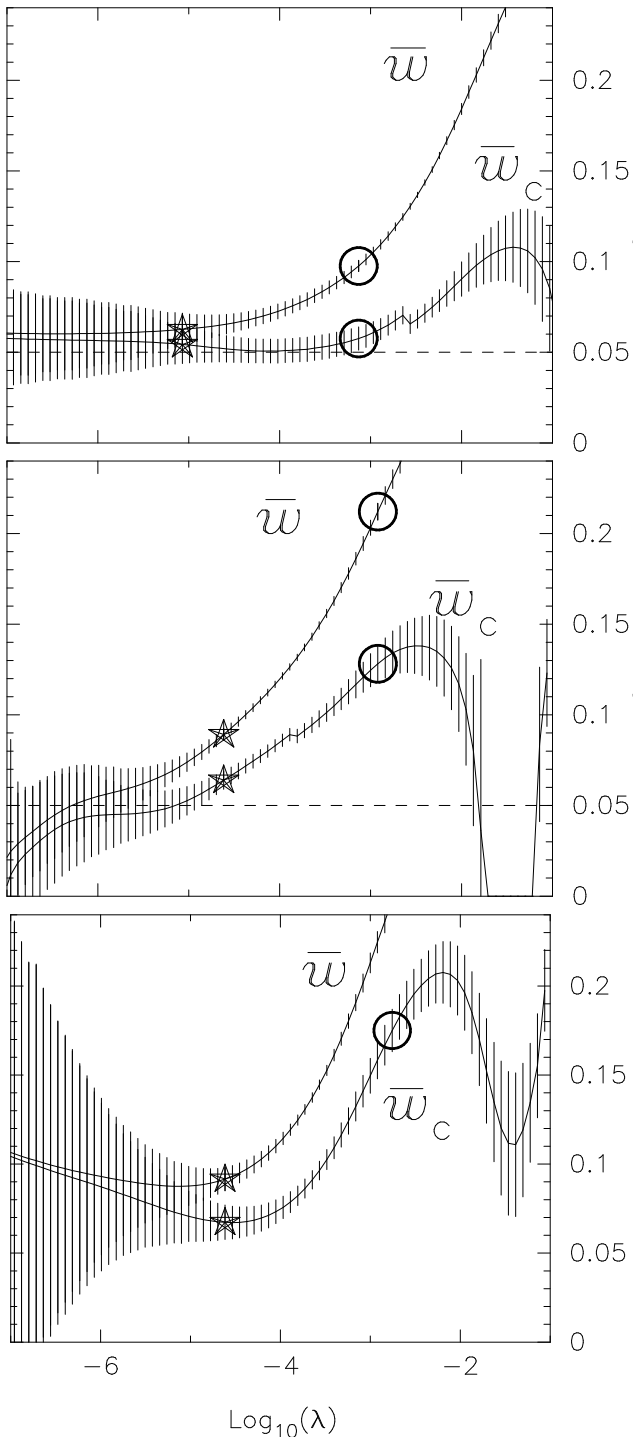


FIG. 5.3 – *Variation, en fonction du logarithme du paramètre de régularisation, de la largeur $\bar{w}$ (en fraction de rayon solaire) obtenue par l'ajustement de la solution par une fonction erf et de la largeur corrigée $\bar{w}_c$ après 'déconvolution locale'. L'étoile indique le choix λ_{GCV} par validation croisée (§3.2.5) et le cercle le choix λ_L au maximum de courbure de la 'courbe L' (§3.2.5). Les barres d'erreur représentent la qualité de l'ajustement de la solution par la fonction erf.* **(a, haut)** *Pour des données simulées à partir d'une rotation dont la largeur est $0.05 R_\odot$ (trait pointillé) et pour un niveau de bruit faible,* **(b, milieu)** *Comme a) mais pour un niveau de bruit correspondant à celui des données LOWL* **(c, bas)** *Pour les données LOWL*

maximum de courbure de la 'courbe L' (voir § 3.2.5), lorsque le niveau de bruit est faible (correspondant à des erreurs environ trois fois plus faibles que celles estimées pour les observations, **Fig. 5.3a**). Pour un niveau de bruit plus réaliste (**Fig. 5.3b**) la 'déconvolution locale' ne parvient plus à corriger systématiquement l'estimation de la largeur qui reste donc très sensible au choix du paramètre de régularisation même si la valeur corrigée est systématiquement meilleure que la valeur non corrigée.

Le choix GCV correspond systématiquement à une régularisation plus faible que le choix au maximum de courbure de la 'courbe L'. La **figure 5.3b** montre que, sur cet exemple, le choix λ_{GCV} conduit à une meilleure estimation de la largeur. **Finalement les simulations de Monte-Carlo sur un grand nombre (500) de réalisations du bruit ont montré que la stratégie GCV donne effectivement systématiquement une meilleure estimation de la largeur pour des largeurs initiales entre $0.03R_\odot$ et $0.11R_\odot$. Ce choix a donc été retenu pour la régularisation de Tikhonov avant déconvolution locale.**

Stratégie automatique pour ARTUR

Nous avons vu que le choix de $\bar{\lambda}$ est lié aux propriétés souhaitées pour la solution à la première itération. Un choix intermédiaire entre λ_{GCV} et λ_L a été retenu pour les simulations de Monte-Carlo. Les exemples des **figures 5.3a, b** montrent que l'on a $\lambda_L \simeq 100 * \lambda_{GCV}$. On a donc choisi, pour les simulations, de calculer systématiquement λ_L au maximum de courbure de la 'courbe L' et de prendre $\bar{\lambda} = \lambda_L/10$. Pour certaines réalisations des erreurs ce choix correspond à une solution à la première itération très lissée et pour d'autres à une solution déjà très oscillante. Idéalement ce choix, entre les deux limites λ_L et λ_{GCV}, devrait être effectué pour chaque réalisation des erreurs. Le choix intermédiaire retenu correspond au choix donnant les meilleurs résultats en moyenne sachant que, s'il était possible, un examen systématique de la solution à la première itération pour chaque réalisation des erreurs pourrait conduire à de meilleurs résultats. Lors de l'application aux données LOWL, la solution obtenue à la première itération avec un choix $\bar{\lambda} = \lambda_L/10$ s'est avérée trop lisse et le choix $\bar{\lambda} = \lambda_{GCV}$ a été retenu.

En ce qui concerne le choix de δ, l'étude des propriétés du χ^2 permet de définir un domaine acceptable pour ce paramètre. Pour les données LOWL ce domaine se situe entre 60 et 200 (Article 4, Fig. 7). Les simulations de Monte-Carlo ont montré que l'on obtient un résultat optimal sans biais pour $\delta = 100$.

5.5.2 Résultats obtenus pour l'estimation des erreurs

Les simulations de Monte-Carlo ont été menées pour des rotations artificielles de largeurs données inférieures à $0.1R_\odot$ sur un ensemble de modes correspondant à ceux observés par l'instrument LOWL et avec des erreurs estimées à partir de ces mêmes données.

Ces simulations ont montré que la technique de 'super résolution' et l'algorithme ARTUR permettent de retrouver les largeurs des rotations artificielles, sans biais significatifs et avec une incertitude de $\pm 0.02 R_\odot$ correspondant à la dispersion de 68.3%[1] des résultats obtenus, pour chaque largeur, à partir de 500 réalisations différentes des erreurs.

Les simulations de Monte-Carlo ont également permis de définir la stratégie pour le choix automatique des paramètres de régularisation qui semblait la plus appropriée. L'incertitude de $\pm 0.02 R_\odot$ trouvée pour la largeur de la tachocline est probablement une limite fixée à la fois par l'ensemble de modes utilisé et par notre modélisation du bruit basée sur l'estimation des incertitudes contenues dans les données LOWL. Le choix des paramètres étant ainsi fixé, il n'y a pas, en théorie, de raison de ne pas faire confiance en l'estimation de l'incertitude obtenue par simulation de Monte-Carlo. Néanmoins plusieurs considérations nous ont amenés à penser que cette incertitude pouvait être sous estimée.

- Premièrement cette estimation de l'incertitude est basée sur notre modélisation du bruit contenu dans les données. Cette modélisation ne tient pas compte d'éventuelles corrélations et les incertitudes données par les observateurs sur une partie des splittings peuvent avoir été sous estimées. Le fait que, pour la méthode ARTUR, le choix automatique de $\bar{\lambda}$ qui s'est révélé être le meilleur en moyenne sur toute les réalisations du bruit lors des simulations, n'ait pas pu être utilisé strictement pour les données tend également à montrer que notre modélisation du bruit est imparfaite.

- Pour le niveau de bruit des données LOWL, les simulations nous ont montré que l'estimation de la largeur est très sensible au choix des paramètres (λ pour Tikhonov déconvoluée et δ pour ARTUR, voir **Fig. 5.3c** et **5.4** respectivement). Il semble donc difficile de ne pas tenir compte de la variation du résultat en fonction de ces paramètres et ceci m'a conduit à porter l'estimation de l'incertitude sur la largeur à $\pm 0.03 R_\odot$. La comparaison de **figures 5.3a** et **5.3b** montre cependant que si un niveau de bruit plus faible est atteint, le choix du paramètre entre les deux limites correspondant aux deux stratégies automatiques, GCV et maximum de courbure de la 'courbe L', n'aura que peu d'influence sur la solution, ce qui devrait permettre une interprétation plus facile des résultats.

- La comparaison entre les résultats des diffrentes méthodes d'inversion, MTSVD, Tikhonov 'déconvolué' et PP-TSVD, appliquées aux données LOWL met en évidence une dispersion relativement importante de la largeur estimée.

  L'utilisation de la méthode MTSVD sans déconvolution avec le critère GCV donne des barres d'erreurs d'ordre $0.02 R_\odot$ sur l'estimation de la largeur mais conduit à un biais correspondant à une surestimation de la largeur. Ce biais est

1. 68.3% correspond à la probabilité de se trouver à moins de 1σ de la moyenne pour une distribution gaussienne

néanmoins relativement constant (compris entre $0.02R_\odot$ et $0.03R_\odot$) quelque soit la largeur initiale entre $0.03R_\odot$ et $0.11R_\odot$. D'autre part, les simulations de Monte-Carlo ont montré que la méthode PP-TSVD, basée sur une régularisation non linéaire, conduit à une dispersion très importante des résultats notamment pour des largeurs initiales assez éloignées de la discontinuité ($0.05R_\odot < w < 0.1R_\odot$), ce qui rend difficile l'interprétation des résultats obtenus par cette méthode, tant que de telles largeurs ne peuvent pas être exclues a priori. Néanmoins, cette méthode conduit, en moyenne, à une sous estimation de la largeur. L'information sur ces biais systématiques, mis en évidence par les simulations avec les méthodes MTSVD et PP-TSVD, a été utilisée pour fixer le domaine d'incertitude sur la largeur de la tachocline à la valeur de $\pm 0.03R_\odot$ (Article 3).

En conclusion, les simulations de Monte Carlo m'ont conduit à fixer une limite inférieure de $\pm 0.02R_\odot$ pour l'incertitude sur la largeur de la tachocline mais le niveau de bruit contenu dans les données LOWL utilisées ne permet pas d'assurer que cette limite est effectivement atteinte. L'ensemble des considérations précédentes m'a amené à conclure qu'une incertitude de $\pm 0.03R_\odot$ sur la largeur de la tachocline à partir de l'ensemble des méthodes que j'ai mises en œuvre est probablement plus réaliste.

Les autres paramètres de la tachocline sont moins sensibles au choix de la régularisation. L'étude menée dans Corbard et al. (1998c, Article 3) montre cependant que des biais systématiques provenant notamment de l'effet sur les splittings sectoraux de la variation en latitude de la rotation dans la zone convective, peuvent exister. Ils ont été pris en compte pour l'estimation finale de ces paramètres. L'ensemble des résultats obtenus sur l'estimation des paramètres de la tachocline est résumé et discuté dans la section suivante.

5.6 Les caractéristiques de la tachocline solaire

5.6.1 Synthèse des résultats

A partir des données LOWL, la comparaison des méthodes Tikhonov déconvoluées localement, MTSVD et PP-TSVD, l'étude systématique de l'influence du choix du paramètre de régularisation ainsi que les simulations de Monte-Carlo m'ont conduit à une estimation de la largeur de la tachocline dans le plan équatorial de:

$$w/R_\odot = 0.05 \pm 0.03.$$

Les autres paramètres de la tachocline sont moins sensibles au choix de la régularisation et ont été estimés par:

$$r_c/R_\odot = 0.695 \pm 0.005, \quad \Omega_0 = 431 \pm 3.5\text{nHz}, \quad \Omega_1 = 459 \pm 1.5\text{nHz}.$$

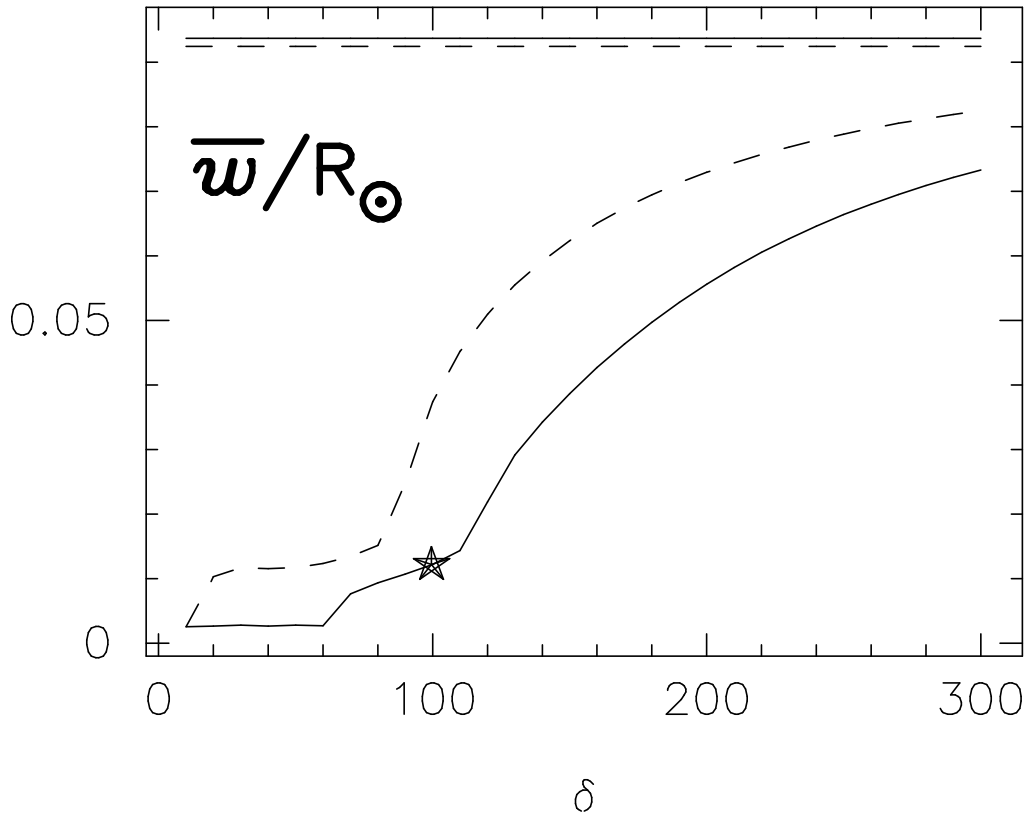


FIG. 5.4 – *Variation, en fonction du paramètre δ, de la largeur de la tachocline déduite de l'ajustement de la solution ARTUR par une fonction erf (cf. Eq. 5.20)(ligne pleine). Ce résultat correspond à l'inversion des données LOWL, le choix optimal de δ (δ=100) désigné par les simulations de Monte-Carlo est montré par une étoile. La ligne pointillée indique le résultat obtenu, pour chaque δ, par un ajustement de la solution avec une fonction erf sans partie linéaire (Eq. 5.1). Les lignes horizontales montrent le résultat (indépendant de δ) de l'ajustement de la solution RLS (Tikhonov). La largeur corrigée par une déconvolution locale utilisant les noyaux de résolution est $w \simeq 0.06 R_\odot$.*

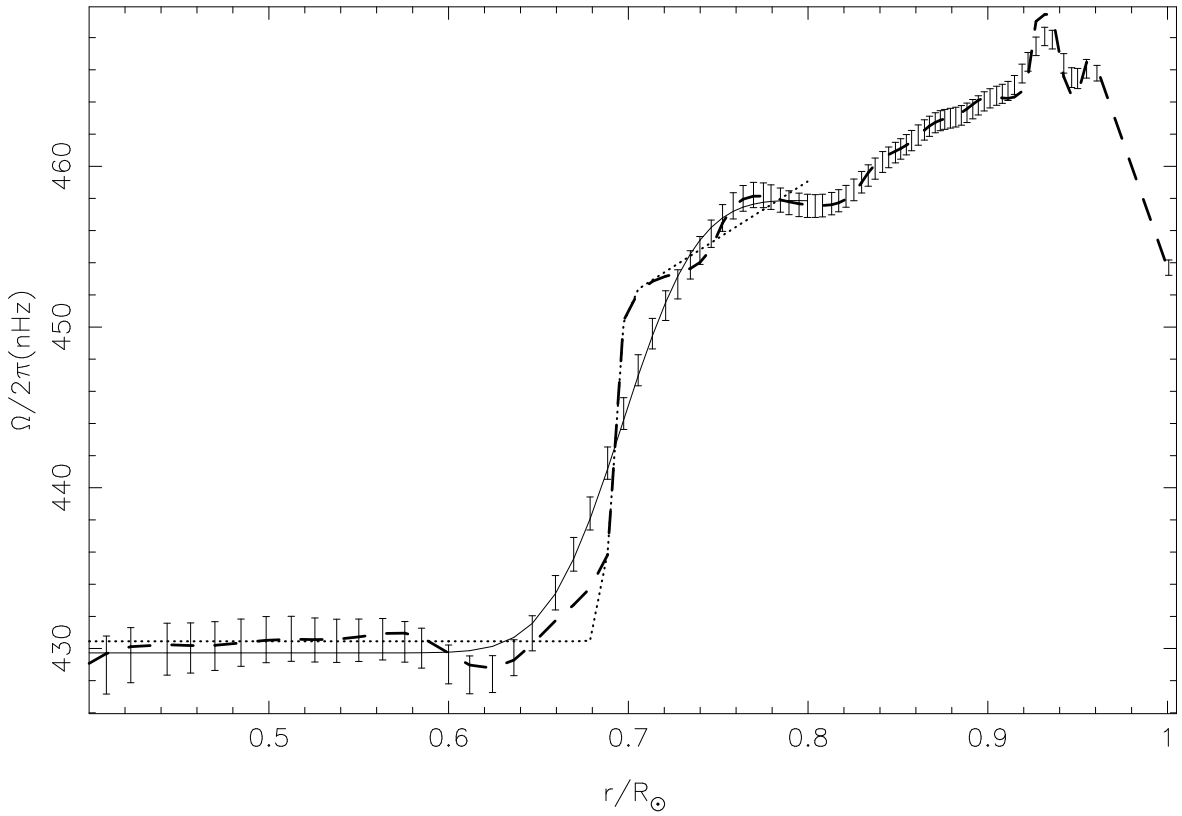


FIG. 5.5 – *Rotation solaire dans le plan équatorial déduite des données LOWL. Les barres d'erreur verticales données en chaque point de grille sont les erreur à* 1σ *estimée pour la solution RLS (Tikhonov). La ligne en tirets représente la solution ARTUR obtenue avec* $\bar{\lambda} = \lambda_{GCV}$ *et* $\delta = 100$*. L'ajustement par une fonction (Eq. (5.20)) de ces deux solutions est montré respectivement par la ligne pleine et la ligne pointillée.*

Le résultat de l'inversion de ces mêmes données LOWL avec une régularisation non linéaire et l'algorithme ARTUR est présentée **figure 5.5**. J'ai montré que cette solution, qui présente un double palier au dessus de $r = 0.7R_\odot$, est mieux approchée si l'on ajoute une composante linéaire entre $0.7R_\odot$ et $0.8R_\odot$ à la simple fonction erf définie par l'équation (5.1).

$$\Omega_{fit}(r) = \Omega'_0 + \frac{\Omega'_1 - \Omega'_0}{2}\left(1 + erf\left(\frac{r - r'_c}{0.5w'}\right)\right) + \alpha(r - 0.7R_\odot). \tag{5.20}$$

L'ajustement de la solution par une telle fonction conduit aux paramètres suivants:

$$\Omega'_0 = 430.5\text{nHz} \quad \Omega'_1 = 452.0\text{nHz}, \quad r'_c = 0.691R_\odot \; et \quad w' = 0.01R_\odot$$

La pente de la partie linéaire entre $0.7R_\odot$ et $0.8R_\odot$ est estimée à $\alpha = 70.0\text{nHz}/R_\odot$. La signification du paramètre Ω_0, valeur moyenne de la rotation entre $0.4R_\odot$ et le bas de la tachocline reste inchangée et la valeur trouvée pour ce paramètre est en accord avec le résultat précédent. Néanmoins, le changement de la fonction d'ajustement donne une signification légèrement différente aux paramètres Ω'_1, w' et r'_c qui ne sont donc pas directement comparables aux précédents. La valeur de la rotation en $0.8R_\odot$ est obtenue par $\Omega'_0 + 0.1\alpha$ soit 459nHz ce qui est en accord avec l'estimation Ω_1. Le centre r'_c de la transition est trouvé légèrement plus à l'intérieur de la zone radiative mais reste compatible avec la valeur obtenue pour r_c. Enfin la largeur w' est trouvée en dehors de l'intervalle de confiance à 1σ estimée pour w. Plusieurs remarques s'imposent concernant la comparaison des deux estimations.

- Nous avons vu qu'elles ne correspondent pas strictement à la même définition de la largeur de la tachocline. La **figure 5.4** montre qu'un ajustement de la solution obtenue avec l'algorithme ARTUR (pour $\delta = 100$) par une simple fonction erf conduit à une largeur de $0.032R_\odot$. Néanmoins cet ajustement est moins bon (au sens des moindres carrés) que celui obtenu avec une partie linéaire. On pourrait dès lors se demander ce que donnerait l'utilisation de l'ajustement avec partie linéaire pour les solutions obtenues avec les autres méthodes, notamment l'inversion de Tikhonov localement déconvoluée. En fait, pour cette méthode l'utilisation d'une telle fonction d'ajustement n'est pas justifiée car la solution, avant déconvolution, est lissée et très bien approximée par une simple fonction erf entre $0.4R_\odot$ et $0.8R_\odot$ et la déconvolution (supposant les noyaux de résolutions gaussiens) ne peut que conduire à une autre fonction erf plus étroite. Ceci constitue donc une différence fondamentale entre les deux approches: en cherchant à dérégulariser localement, **la méthode ARTUR est potentiellement capable de révéler plus de détails sur la forme de la transition qu'une méthode basée sur l'interprétation d'une solution nécessairement lissée par un terme de régularisation global**.

- Les détails révélés par la méthode ARTUR, c'est à dire l'existence de 2 paliers approchés par une partie linéaire au dessus de la transition, seront d'autant plus

significatifs que la zone pourra être considérée comme bien contrainte par les données. En effet le processus de dérégularisation s'opère là où de forts gradients sont trouvés. Si cela correspond à une zone où la solution est mal contrainte par les données, alors le processus va tendre à produire des oscillations qui ne devront pas être considérées comme réelles. Autrement dit, la méthode ARTUR est basée sur l'hypothèse que la zone de fort gradient peut être bien décrite par les données seules sans introduction d'information a priori via la régularisation. Seule une diminution des erreurs associées aux splittings des modes décrivant cette zone pourra confirmer la validité de cette hypothèse et par là la validité de la structure mise en évidence.

- Les simulations de Monte Carlo, appliquées à des tachoclines de différentes largeurs, ont démontré que, pour le même choix du paramètre δ, la méthode ARTUR est capable, contrairement au cas PP-TSVD étudié précédemment, de trouver pour toutes les transitions (même les plus larges) une incertitude du même ordre de grandeur. Ceci nous permet d'avoir une assez grande confiance en notre résultat. Ces simulations donnent également une estimation de l'incertitude sur la largeur de $0.02R_\odot$ mais la très grande sensibilité de l'estimation de la largeur au choix de δ illustrée **Fig. 5.4** montre que cette estimation n'est réaliste que si les simulations de Monte Carlo et donc notre modélisation de la rotation et du bruit sont très bonnes. Autrement dit **les simulations de Monte Carlo associées à la méthode ARTUR conditionnent non seulement la validité de l'estimation de l'incertitude mais aussi celle de l'estimation de la largeur elle même par l'intermédiaire du choix de** δ. On peut estimer pour la largeur maximale de la tachocline la valeur $0.05R_\odot$ correspondant à la valeur maximale acceptable de 200 pour δ. La prise en compte des corrélations entre les estimations de splittings de modes différents ou entre les coefficients décrivant le splitting d'un même mode, par exemple, pourrait modifier légèrement le choix du δ donnant les meilleurs résultats de simulations et influencer l'estimation de la largeur. Là encore, seule une meilleure connaissance des propriétés statistiques des erreurs associées aux observations pourra confirmer la validité de notre modélisation et donc la fiabilité du résultat.

- L'ensemble des points précédents souligne le fait que la méthode ARTUR suppose qu'une très grande confiance est accordée aux données associées à la description de la tachocline et à la connaissance de leurs propriétés statistiques. Le χ^2 normalisé correspondant aux modes ayant leurs points tournants entre $0.6R_\odot$ et $0.8R_\odot$ est de 1.070 pour la solution Tikhonov non déconvoluée (de largeur $0.09R_\odot$), de 1.067 pour une solution de largeur $0.05R_\odot$ correspondant à la solution déconvoluée et de 1.064 pour la solution ARTUR (de largeur $0.01R_\odot$). L'amplitude de ces variations est très faible et n'est significative que si il n'y a pas de biais dans l'estimation des splittings et des erreurs associés à ces modes. Néanmoins, de ce point de vue, le gain dû à la méthode ARTUR est double de celui atteint par la déconvolution locale.

En conclusion, la méthode de régularisation non linéaire est mieux adaptée au problème particulier de l'estimation de la largeur de la tachocline que la déconvolution locale d'une méthode linéaire. La faible largeur ($w = 0.01R_\odot$) trouvée par cette méthode, associée à l'incertitude de $0.02R_\odot$ issue des simulations de Monte Carlo permet, même en tenant compte de la grande sensibilité du résultat au choix des paramètres, d'exclure les largeurs supérieures à $0.05R_\odot$ comme étant représentatives des données LOWL.

Ce résultat devra bien sûr être confirmé par l'analyse d'autres données. De ce point de vue les splittings observés par l'instrument MDI à bord de SoHO devrait se révéler très intéressants. Un travail sur ce sujet est en cours (Corbard et al. 1998a).

5.6.2 Comparaisons avec d'autres travaux

TAB. 5.1 – *Comparaison des estimations de la position et la largeur de la tachocline paramétrée par une fonction erf (5.1). Basu (1997) utilise une paramétrisation différente mais les valeurs reportées ici ont été converties pour être directement comparables. Le résultat de Corbard (1998d) correspond à l'ajustement par la fonction (5.20) comportant une partie linéaire entre* $0.7R_\odot$ *et* $0.8R_\odot$. $^{(*)}$ *Conclusion la plus certaine d'après l'étude de la sensibilité aux paramètres.*

	$r_c/R_\odot$	$w/R_\odot$	données
Kosovichev (1996)	0.692 ± 0.005	0.09 ± 0.04	BBSO
Basu (1997)	0.7050 ± 0.0027	0.048 ± 0.013	GONG
Corbard et al. (1998c)	0.695 ± 0.005	0.05 ± 0.03	LOWL
Corbard et al. (1998d)	0.691 ± 0.004	0.01 ± 0.03 $< 0.05^{(*)}$	LOWL
Charbonneau et al.(1998a)	0.704 ± 0.003	0.0498 ± 0.012	LOWL
Charbonneau et al.(1998b)	0.693 ± 0.003	0.039 ± 0.017	LOWL
Charbonneau (1998)		0.044 ± 0.016	LOWL

Simultanément à mes propres investigations, d'autres travaux ont été menés sur l'estimation des paramètres de la tachocline à partir des données LOWL, GONG et BBSO. Le **tableau 5.1** compare les différentes estimations obtenues pour la largeur et la position de la tachocline.

Mes résultats concernent la partie équatoriale de la tachocline estimée à partir des coefficients a_1, a_3 et a_5 des données LOWL. Le résultat de Charbonneau (1998b) utilise les mêmes données mais sélectionne uniquement les modes ayant leurs points tournants entre $0.5R_\odot$ et $0.8R_\odot$ et les valeurs reportées **tableau. 5.1** concernent également la composante équatoriale de la tachocline. Ce résultat a été obtenu par ajustement (par

minimisation du χ^2) d'un modèle à 9 paramètres par algorithme génétique, il est directement comparable et en bon accord avec mes propres résultats montrant une tachocline équatoriale très étroite, située sous la base de la zone convective définie par la limite de la stratification adiabatique et estimée à $0.713 \pm 0.001 R_\odot$ par Basu & Antia (1997).

Les résultats de Kosovitchev (1996) et Charbonneau et al. (1998a) portent sur l'inversion, également par minimisation du χ^2 pour un modèle de rotation avec peu de paramètres, des coefficients a_3 uniquement et représentent donc une moyenne en latitude sur la composante latitudinale des noyaux de rotation associés à ce coefficient. D'après (2.12) et (A.7) cette composante est proportionnelle à $\sin^2(\theta)(5\cos^2 -1)$. Il se trouve que cette fonction change de signe au voisinage de $\theta = 60°$, ce qui correspond à la colatitude où il y a également un changement de signe du gradient de rotation au niveau de la tachocline. Cette propriété tend donc à faire en sorte que la signature de la tachocline soit essentiellement incluse dans le coefficient a_3 mais la comparaison avec le résultat obtenu à l'équateur n'est possible que si l'on suppose que la tachocline est à symétrie sphérique (position et largeur indépendantes de la latitude).

Enfin les résultats de Charbonneau (1998) et Basu (1997) supposent explicitement la symétrie sphérique. L'analyse de Charbonneau (1998) est basée sur l'utilisation de réseaux neuronaux qui peuvent être considérés comme des estimateurs statistiques différents de celui du χ^2 et celle de Basu (1997) utilise une paramétrisation différente de la tachocline qui conduit, à partir des données BBSO, à des résultats très similaires à ceux de Charbonneau et al. (1998a) concernant les données LOWL.

Ces résultats issus de méthodes d'analyse très différentes sont globalement consistants. Seul Kosovitchev (1996) trouve une largeur supérieure à $0.05 R_\odot$ mais l'incertitude estimée sur cette valeur est aussi la plus grande. Tous situent le centre de la tachocline significativement (à 1σ) sous la base de la zone convective. Néanmoins, la position maximale en rayon de la partie supérieure de la tachocline compatible avec les incertitudes à 1σ est compris entre $0.715 R_\odot$ et $0.757 R_\odot$ pour l'ensemble des analyses donc toujours à l'intérieur de la zone convective.

5.6.3 Implications pour les modèles de la dynamique interne

Plusieurs modèles théoriques ont été développés pour décrire la tachocline qui prédisent d'une part sa largeur et d'autre part le rapport $q = \Omega_0/\Omega_1$ ou la latitude Φ à laquelle la rotation à la base de la zone convective est égale à celle de l'intérieur radiatif Ω_0.

Le rapport $q = \Omega_0/\Omega_1$ et l'angle Φ

La rotation rigide de la zone radiative déduite des observations est estimée à 430 ± 5nHz (§4.3.2, voir aussi Article 3). La **figure 5.6** montre, en fonction de la latitude, le profil de rotation trouvé à partir des données MDI au fond de la zone convective c'est à dire $r_{zc} = 0.713 R_\odot$. D'après cette figure, la rotation rigide de l'intérieur radiatif, c'est à

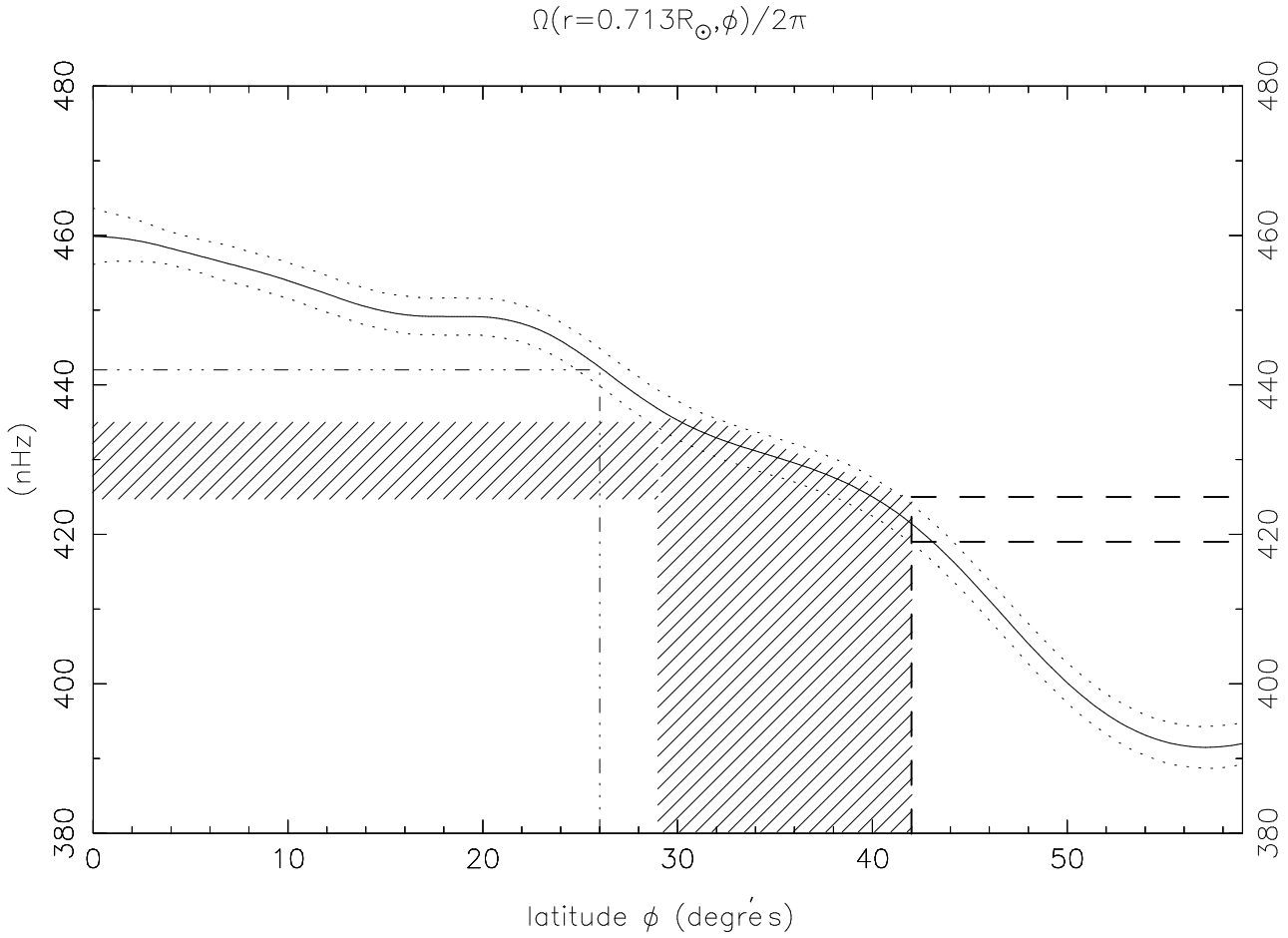


FIG. 5.6 – *Variation de la rotation au fond de la zone convective ($r_{zc} = 0.713 R_\odot$) en fonction de la latitude correspondant à la solution (Fig. 4.5) obtenue par inversion 2D des données MDI (———). Les lignes (·····) montrent les incertitudes à 1σ. La prédiction théorique de Spiegel et Zahn (1992) donne la valeur de la rotation rigide de la zone radiative comme étant égale à celle du fond de la zone convective à $\Phi = 42°$ de latitude qui conduit à une valeur de Ω_0 comprise entre 419 nHz et 425 nHz (------). Le domaine hachuré donne l'intervalle de confiance à 1σ pour Ω_0 tel qu'il est déduit des données ($\Omega_0 = 430 \pm 5 nHz$, voir §4.3.2). Ceci correspond à une angle Φ compris entre 29° et 42°. Les lignes (—·—·—·—) correspondent à la théorie de Gough (1985).*

dire à la base de la tachocline (430 ± 5 nHz) correspond, compte tenu des incertitudes sur la solution de l'inversion, à la rotation en $0.713 R_\odot$ pour des latitudes entre 29° et 42° soit :

$$29° < \Phi < 42° \tag{5.21}$$

Par ailleurs, les valeurs $\Omega_0 = 430 \pm 5$nHz, et $\Omega_1 = 460 \pm 4$nHz compatibles avec les observations MDI (**figure 5.6**) et LOWL (Article 3) conduisent à un rapport $0.92 \leq q \leq 0.95$. Ces résultats ont été obtenus par inversion RLS 2D avec un terme de régularisation global de Tikhonov. Si l'on considère maintenant le résultat de la méthode ARTUR (1D) appliquée aux données LOWL (**Fig. 5.5**), la rotation dans le plan équatorial présente deux paliers entre $0.7 R_\odot$ et $0.8 R_\odot$. Le premier palier (autour de $0.713 R_\odot$) correspond à une valeur de la rotation de 453nHz ce qui conduit à un rapport $q = 430/453 = 0.95$ et, compte tenu des incertitudes, à un intervalle de confiance $0.93 < q < 0.97$. L'ensemble des inversions sur les données LOWL et MDI indiquent donc:

$$0.92 < q < 0.97 \tag{5.22}$$

Le modèle proposé par Spiegel et Zahn (1992) décrit la tachocline comme une couche limite turbulente créée par les instabilités de cisaillement sous la zone convective. Ils supposent que la viscosité horizontale domine dans cette couche ce qui permet d'obtenir une rotation indépendante de la latitude à la base de la tachocline. Dans cette théorie, une rotation différentielle en latitude est imposée à la base de la zone convective comme une condition aux limites pour la description de la tachocline. Ce modèle conduit à une prédiction de $\Phi = 42°$ pour la latitude à laquelle la rotation à la base de la zone convective correspond à la rotation rigide à la base de la tachocline. La prédiction de la théorie de Spiegel et Zahn se situe donc à la limite supérieure de l'intervalle de confiance (5.21) à 1σ basé sur les observations.

Le modèle de Gough (1985) suppose au contraire une turbulence à trois dimensions avec un terme de viscosité verticale important. Cette théorie nécessite l'introduction d'un processus supplémentaire pour rendre rigide la rotation à la base de la tachocline et prédit une valeur de 0.96 pour le rapport $q = \Omega_0/\Omega_1$. Seule l'inversion ARTUR place cette prédiction dans l'intervalle de confiance (5.22) basé sur les observations.

A titre de comparaison, en prenant $\Omega_1 = 460$nHz (Fig. 5.6) la prédiction de Spiegel et Zahn ($\Phi = 42°$) conduit à $\Omega_0 \sim 422$nHz et à un rapport $q \sim 0.92$ et la prédiction de Gough ($q = 0.96$) conduit à $\Omega_0 = 442$nHz ce qui correspond (d'après la Fig. 5.6) à $\Phi = 26°$.

Les observations conduisent donc d'une manière générale à des valeurs intermédiaires entre les deux prédictions théoriques avec lesquelles elles sont marginalement en accord à 1σ.

La largeur w

En ce qui concerne la largeur de la tachocline, la théorie de Spiegel et Zahn donne une relation entre la largeur w de la tachocline, la position du bas de la zone convective $r_{zc} = 0.713 R_\odot$, la valeur de la rotation rigide de l'intérieur radiatif Ω_0, coefficient de viscosité horizontal ν_H, le coefficient de diffusivité thermique κ et la fréquence de Brunt-Väisälä N.

$$w \simeq 0.955\ r_{zc} \sqrt{\frac{\Omega_0}{N}} \left(\frac{\kappa}{\nu_H}\right)^{1/4} \tag{5.23}$$

Cette expression permet de relier les propriétés de la turbulence à l'intérieur de la tachocline à l'estimation de sa largeur. Cependant la fréquence de Brunt-Väisälä décroît rapidement vers 0 à la base de la zone convective et l'utilisation de cette formule requiert de supposer l'existence d'une zone de pénétration convective située juste sous la base de la zone convective et d'obtenir une estimation de la fréquence de Brunt-Väisälä au fond de cette zone. Un modèle solaire (Morel et al. 1997) donne $\kappa \simeq 10^7$ cm^2 s^{-1} et des valeurs de N comprises entre 100μHz et 200μHz autour du centre de la tachocline. On peut prendre une valeur moyenne $N \sim 150\mu$Hz ce qui correspond à $\Omega_0/N \sim 3\ 10^{-3}$. Une largeur de la tachocline de $w = 0.01 R_\odot$ comme celle déduite des données LOWL par la méthode ARTUR conduit alors à un fort coefficient de viscosité horizontale de $\nu_H = 2\ 10^9$ cm^2 s^{-1} alors que la valeur limite en accord avec les observations, $w = 0.05 R_\odot$, conduit à $\nu_H = 3\ 10^6$ cm^2 s^{-1}. Il faut noter que dans la théorie de Spiegel et Zahn, la largeur de la tachocline n'est pas définie par une fonction erf mais par la distance entre le bas de la zone convective et l'endroit où la rotation équatoriale devient égale à la rotation rigide. Pour la solution ARTUR (**Fig. 5.5**) cela conduit à une largeur de $0.063 R_\odot$ et à un coefficient de viscosité horizontale $\nu_H = 10^6$ cm^2 s^{-1}. Ces estimations donnent des ordres de grandeurs pour ν_H mais cette quantité variant en puissance quatrième de l'inverse de la largeur, obtenir une incertitude relative raisonnable sur cette quantité exige une définition précise de la largeur et une incertitude relative faible sur celle-ci.

Kumar & Quataert (1997) et Zahn et al. (1997) ont suggéré qu'un autre mécanisme basé sur le transport du moment angulaire par des ondes de gravité générées à la base de la zone convective peut conduire à l'établissement d'une rotation rigide de l'intérieur radiatif. Néanmoins Gough & McIntyre (1998) suggèrent, par comparaison avec les observations de l'interaction entre ondes de gravité et rotation dans l'atmosphère terrestre, que ce processus devrait au contraire tendre à engendrer une rotation différentielle en latitude à la base de la zone convective et ne peut se révéler efficace pour supprimer la rotation différentielle que beaucoup plus profondément dans le cœur. Ces auteurs pensent donc que seul l'existence d'un champ magnétique poloïdal à grande échelle permet d'expliquer la rotation rigide et donnent une relation entre la largeur de la tachocline et la valeur du champ magnétique valable sous la même approximation que précédemment pour la valeur de Ω_0/N.

$$|B_0| = 5\ 10^{-15} \left(\frac{r_c}{w}\right)^9 \text{ (Gauss)} \tag{5.24}$$

Les estimations, obtenues avec ARTUR, $r_c = 0.691 R_\odot$ et $w = 0.01 R_\odot$ conduisent à un champ magnétique $B_0 \sim 180$ Gauss. Là encore il ne s'agit que d'un ordre de grandeur car la puissance neuvième impose, pour obtenir une incertitude relative faible sur la valeur du champ, d'avoir une définition précise de la largeur de la tachocline et une incertitude relative très faible sur cette quantité. Je note cependant que cette valeur du champ magnétique est compatible avec la limite supérieure de $0.3MG$ estimée par Basu (1997) à partir de l'analyse des coefficients d'indices pairs décrivant les splittings des données GONG. Cette limite proposée par Basu correspond à une borne inférieure pour la largeur de la tachocline de $0.0044 R_\odot$, valeur qui ne peut pas être exclue actuellement. A l'opposé, la limite supérieure de $0.05 R_\odot$ trouvée par inversion pour w donne une valeur limite inférieure de 10^{-4} Gauss pour le champ magnétique.

Notons enfin que, dans la théorie de Gough & McIntyre(1998), la circulation méridienne qui se produit dans la tachocline a pour effet d'homogénéiser l'abondance en hélium et d'expliquer la différence en vitesse du son entre le Soleil et les modèles mise en évidence dans une étroite zone sous la zone convective par les inversions des fréquences d'oscillation (voir par exemple Gonczi et al. 1998). En assimilant la largeur de cette zone à celle de la tachocline Elliott et al. (1998) trouvent une largeur de $0.018 R_\odot$ en accord avec la solution obtenue par ARTUR.

Contribution 3

The solar rotation rate from inversion of the first GONG datasets

T. Corbard, G. Berthomieu, J. Provost

Proceedings of IAU181 Symposium: Sounding Solar and Stellar Interior, J. Provost & F.X. Schmider (eds.), poster volume, p. 77, 1998

The solar rotation rate from inversion of the first GONG datasets

T. Corbard[1], G. Berthomieu[1], J. Provost[1]

[1] Laboratoire G.-D.Cassini, Observatoire de la Cote d'Azur, Nice

ABSTRACT

This poster gives some results obtained by inverting the first GONG datasets for the rotational splittings with a full 2D Regularized Least-Squares (2D RLS) method. The resolution of the inversion is studied using averaging kernels and a low regularization leading to an upper limit of $0.1R_\odot$ for the width of the transition zone at the base of the convective zone. In addition, preliminary works on the introduction of a discontinuous basis of B-splines is presented and we show how this leads to averaging kernels that are better localized on each side of the discontinuous breakpoint.

1. Basic equations and inverse method

For a mode of oscillation (n,l), the observed frequency shift due to the angular velocity $\Omega(r,\mu)$ (r being the normalized solar radius and μ the cosine of the colatitude) is related to the solar model by the linear expression:

$$\Delta\nu_{nlm} = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} K_{nlm}(r,\mu)\Omega(r,\mu)drd\mu \qquad (1)$$

where the kernel $K_{nlm}(r,\mu)$ associated with the mode depends on the model and is assumed to be known exactly.

The inverse method used is a 2D RLS method in which we search the unknown rotation as a linear combination of piecewise polynomials, projected on a tensorial product of B-spline basis (Corbard et al., 1996). The distribution of break points in radius is calculated such that the number of observed modes having their turning points between two consecutive break points is constant. We can define at each break point the kind of connection which is required between the right and the left pieces of polynomials. Formally, the rules of connection can differ from one break point to the next: at some of them, the polynomials can be discontinuous, at some others the left and right pieces can be tied to fulfilling the continuity of their first derivatives or only of the polynomials themselves, ...etc. In this work this possibility is used to allow the solution to be discontinuous at a given break point. In this case the regularization is applied on the left and right sides of the break point separately.

The spatial resolution of the inversion at a point (r_0,μ_0) can be estimated by the the radial and latitudinal full widths at mid height of the so called averaging kernels $\kappa(r_0,\mu_0,r,\mu)$ defined in Corbard et al. (1996).

2. GONG datasets used

The first dataset (dataset I hereafter) is a combination of both concatened spectra of GONG months 4 to 8 for degrees lower than $l = 30$ and averaged spectra concerning GONG months 4 to 7 for degrees up to $l = 150$. It contains 1987 modes with $1200 < \nu_{nl} < 5000\ \mu$Hz. Splittings are given by their expansion on Legendre polynomials with coefficients up to a_9.

The second dataset (dataset II) has been obtained from averaged spectra of GONG months 4 to 10 for degrees $2 \leq l \leq 150$. It contains 2103 modes (n,l) $l \leq 150$ with $1200 < \nu_{nl} < 5000\ \mu$Hz. Splittings are given by their expansion on orthogonal polynomials with coefficients up to a_9. The orthogonal polynomials are defined in Ritzwoller & Lavely (1991).

In both cases individual splittings and their corresponding errors have been calculated from their expansion on polynomials and inversions have been performed from these individual splittings.

3. Results from dataset I and low regularization

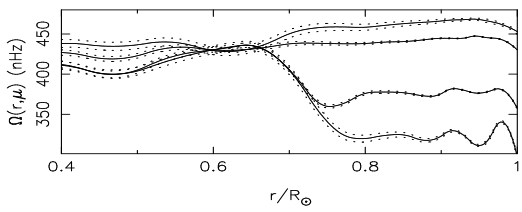


Figure 1: Rotation rate versus solar radius for latitudes $0, 30, 60, 90°$ obtained with dataset I

Figure 1 shows the inferred rotation rate for a choice of trade-off parameters that tends to minimize the χ^2 value rather than the regularization term. This leads to a solution with some oscillations especially in zones near the solar pole where the solution is not well constrained by the data but the transition zone is less smoothed by the regularization term. Compared to results obtained with an optimal choice of trade-off parameters based on an L-curve analysis (Corbard et al. 1996), this inferred rotation rate has a sharper transition zone (about $0.10R_\odot$) and the

averaging kernels at this location ($r = 0.7R_\odot$) are better peaked with an increasing radial resolution ($\Delta r = 0.08R_\odot$ at mid latitude). Inversion performed with lower regularization doesn't enable to produce better radial resolution and increases the effect of input errors. Thus, this inversion is the one that gives the best radial resolution at this target location without increasing too much the effect of input errors. The fact that the width of the transition zone decreases when the resolution increases allows us to say that the transition occurs in a zone between 0.66 and 0.76 solar radius but it might be sharper.

At $0.55R_\odot$ averaging kernels are, for this inversion, sufficiently well localized in latitude so that the latitudinal independence of the inferred rotation rate at this depth can be considered as real. Below this depth we find again a latitudinal dependence but this may be an artifact of the errors and this latitudinal dependence below $0.55R_\odot$ is of lower importance with dataset II.

4. Preliminary works using dataset II and a discontinuous Basis of B-splines

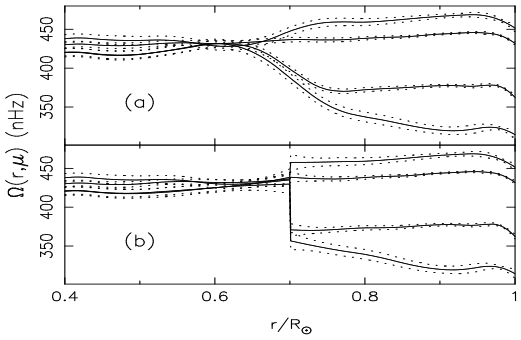


Figure 2: Rotation rate versus solar radius for latitudes $0, 30, 60, 90°$ obtained with dataset I. (a) Without discontinuous basis (b) With a basis discontinuous at $0.7R_\odot$

The solution obtained from dataset II is shown on the Fig. 2a for radius above $0.4R_\odot$. The inferred rotation rate is in good agreement with the previous one for latitudes below 60° and is less oscillating near the pole. As the observed modes and the trade-off parameters are the same as for dataset I, we can think that these zones are now better constrained by the data. Nevertheless we can not exclude that the regularization acts not exactly by the same way on the two datasets so that the regularization could be more important with dataset II.

We are studying the possibility of using a discontinuous basis of B-splines to estimate the thickness of the transition zone. An example is given on the Fig. 2b that shows the solution obtained when we allow the rotation to be discontinuous at the base of the convection zone ($0.7R_\odot$). The χ^2 value obtained for this solution and the resolutions are almost the same than with the standard basis indicating that the data are compatible with a very sharp transition zone.

Averaging kernels obtained at the equator and $0.69R_\odot$ are shown on Fig. 3 (full lines) for the solutions obtained with and without setting a discontinuous basis at $0.7R_\odot$. Although, without discontinuous basis the averaging kernel was equally distributed around $0.7R_\odot$, with a discontinuous basis the major part of the kernel is below $0.7R_\odot$. By this way the value of the rotation rate obtained at $0.69R_\odot$ is less influenced by the true rotation above $0.7R_\odot$ and this could explain its lower value in Fig. 2b than in Fig 2a. This may argue in favor of a solid rotation up to $0.69R_\odot$ but this conclusion would have been more reliable if the averaging kernel had strictly no part above $0.70R_\odot$. Furthermore the new averaging kernel is more oscillating between 0.72 and $0.9R_\odot$ so that its interpretation is harder. A symmetrical example is shown on Fig. 3 (dashed lines) by the averaging kernels calculated at the equator and $0.71R_\odot$ with and without allowing the rotation to be discontinuous at $0.7R_\odot$. This could explain by similar way the higher value obtained just above $0.7R_\odot$ when we perform the inversion with a discontinuous basis.

This work is very preliminary and we think that numerical experiments on the reconstruction of some arbitrary given test rotation rates should be useful to calibrate the effect of introducing a discontinuous basis.

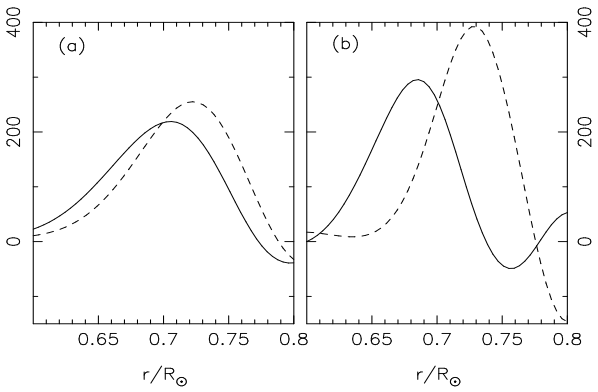


Figure 3: Averaging kernels computed at the equator and $0.69R_\odot$ (full lines) or $0.71R_\odot$ (dashed lines). (a) Without discontinuous basis, (b) With a basis discontinuous at $0.7R_\odot$

REFERENCES

1. Corbard T., Berthomieu G., Provost J., et al., 1996, submitted to A&A

2. Ritzwoller M.H., Lavely E.M., 1991, ApJ 369, 557

ARTICLE 3

Inferring the equatorial solar tachocline from frequency splittings

T. Corbard, G. Berthomieu, J. Provost, P. Morel

Astronomy and Astrophysics 330, p. 1149, 1998

Astron. Astrophys. 330, 1149–1159 (1998)

ASTRONOMY
AND
ASTROPHYSICS

Inferring the equatorial solar tachocline from frequency splittings

T. Corbard, G. Berthomieu, J. Provost, and P. Morel

Laboratoire G.-D. Cassini, CNRS UMR 6529, Observatoire de la Côte d'Azur, BP 4229, F-06304 Nice Cedex 4, France

Received 17 July 1997 / Accepted 24 October 1997

Abstract. Helioseismic inversions, carried out for several years on various ground-based and spatial observations, have shown that the solar rotation rate presents two principal regimes: a quasi-rigid rotation in the radiative interior and a latitude-dependent rotation in the whole convection zone. The thin layer, named solar tachocline, between these two regimes is difficult to infer through inverse techniques because of the ill-posed nature of the problem that requires regularization techniques which, in their global form, tend to smooth out any high gradient in the solution. Thus, most of the previous attempts to study the rotation profile of the solar tachocline have been carried out through forward modeling. In this work we show that some appropriate inverse techniques can also be used and we compare the ability of three 1D inverse techniques combined with two automatic strategies for the choice of the regularization parameter, to infer the solar tachocline profile in the equatorial plane. Our work, applied on LOWL (LOWL is an abbreviation for low degree denoted by L) two years dataset, argue in favor of a very sharp ($0.05 \pm 0.03 R_\odot$) transition zone located at $0.695 \pm 0.005 R_\odot$ which is in good agreement with the previous forward analysis carried out on Global Oscillations Network Group (GONG), Big Bear Solar Observatory (BBSO) and LOWL datasets.

Key words: Sun: interior – Sun: oscillations – Sun: rotation – methods: numerical

1. Introduction

Helioseismic inversions of the solar p-modes frequencies splitted by rotation have shown that there is, at the base of the convection zone, a thin transition layer separating two regimes of rotation, a strong differential rotation in the convection zone and a quasi rigid rotation in the radiative interior (e.g. Thompson et al. 1996; Corbard et al. 1997). This layer, called tachocline, is supposed to play an important role in the solar dynamo, in the transport of angular momentum and in the mixing of chemical elements. Its position r_c and thickness w give constraints to the theories describing its structure and evolution (Spiegel & Zahn 1992; Gough & Sekii 1997). Different estimations of these parameters have been obtained so far mostly by using forward methods (Kosovichev 1996; Charbonneau et al. 1997; Basu 1997).

The aim of this work is to test and compare the ability of some inversion methods to infer the location and the width of the solar tachocline, and then to apply these methods to helioseismic data. We compare three 1D least-squares methods. They differ essentially by the mean used to regularize the ill-posed inverse problem of inferring the equatorial solar rotation rate from the observed frequency splittings. The first method is the most commonly used Regularized Least-Squares (RLS) method with Tikhonov regularization (Tikhonov & Arsenin 1977), the second one is the Modified Truncated Singular Value Decomposition (MTSVD) introduced by Sekii and Shibahashi (1988) which uses a regularization term of the same form but with a discrete truncation parameter instead of the continuous Tikhonov regularization parameter. The third method, introduced by Hansen & Mosegaard (1996), is called Piecewise Polynomials TSVD (PP-TSVD) and is a modification of the MTSVD method that can preserve discontinuities of the solution.

In Sect. 2, we briefly recall the inverse problem and define our parameterization of the tachocline. Sect. 3 gives the two strategies studied in this work for inferring the rapid variation of the rotation. We test these methods by inverting artificial data in Sect. 4 and then, in Sect. 5, we use this study in order to infer the location and thickness of the solar tachocline in the equatorial plane from data observed by the LOWL instrument (Tomczyk et al. 1995).

2. Direct analysis and parameterization of the tachocline

Frequency splittings $\Delta\nu_{nlm} = \nu_{nlm} - \nu_{nl-m}$ between modes with the same radial order n and degree l but different azimuthal orders m are induced by the solar rotation $\Omega(r,\theta)$ expressed as a function of the radius r and colatitude θ. For a slow rotation, assumed to be symmetric about the equator, and moderate or high degree modes, these splittings are given by:

$$\Delta\nu_{nlm} = m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{R_\odot} K_{nl}(r) P_l^m(\cos\theta)^2 \; \Omega(r,\theta) \; \sin\theta \; dr \; d\theta, \quad (1)$$

Send offprint requests to: T. Corbard

where $K_{nl}(r)$ are the so-called rotational kernels that can be calculated for each mode from a solar model (Morel et al. 1997). In the following, they are assumed to be known exactly. There exists additional terms that are not taken into account in Eq. (1) but, as discussed in Corbard et al. (1997), they do not influence inversion above $0.4R_\odot$. As the aim of this work is not to sound the rotation of the core, Eq. (1) is a good approximation. $P_l^m(\cos\theta)$ are normalized Legendre functions. Their asymptotic property leads, as discussed by Antia et al. (1996), to the following expression that shows the sectoral (i.e. $l = m$) modes splittings as weighted averages of the equatorial rotation rate $\Omega_{eq}(r) = \Omega(r, 90°)$:

$$\Delta\nu_{nll} \simeq l \int_0^{R_\odot} K_{nl}(r)\, \Omega_{eq}(r)\, dr. \tag{2}$$

We note that the validity of this 1D approximation is l-dependent. Indeed, the higher the degree, the more the latitudinal kernel $P_l^l(\cos\theta)^2 \sin\theta$ is peaked at the equator.

Following Charbonneau et al. (1997), we define the location and the width of the transition zone in the equatorial plane as the parameters $\hat{r}_c$ and $\hat{w}$ respectively of the following erf function which fits the rotation law in this plane:

$$\Omega_{eq}(r) = \hat{\Omega}_0 + \frac{1}{2}(\hat{\Omega}_1 - \hat{\Omega}_0)\left(1 + erf\left(\frac{r - \hat{r}_c}{0.5\hat{w}}\right)\right). \tag{3}$$

Here $\hat{\Omega}_0$ and $\hat{\Omega}_1$ represent the mean values of the rotation in the radiative interior and in the convection zone respectively.

In order to compare different 1D inverse methods, we have built several sets of theoretical sectoral frequency splittings that correspond to different given rotation laws with fixed parameters r_c, w, Ω_0, Ω_1 but with a function of the colatitude in order to mimic the latitudinal differential rotation of the convection zone:

$$\Omega(r,\theta) = \Omega_0 + \frac{1}{2}(\Omega_1 - A\cos^2\theta - B\cos^4\theta - \Omega_0)\left(1 + erf\left(\frac{r - r_c}{0.5w}\right)\right) \tag{4}$$

Evidently, for any choice of constants A and B, the searched parameters for these rotation laws are $\hat{r}_c = r_c$, $\hat{w} = w$, $\hat{\Omega}_0 = \Omega_0$ and $\hat{\Omega}_1 = \Omega_1$. We compute the splittings $\Delta\nu_{nll}$ from Eq. (1) for a set of modes corresponding to the set of LOWL data used in Corbard et al. (1997) and we add a normally distributed noise $\delta\nu_{nll} \in \mathcal{N}(0, \sigma_{nl})$. For each mode (n, l) the standard deviation of the noise σ_{nl} has been taken equal to:

$$\sigma_{nl} = \frac{\bar{\sigma}_{nl}}{\sqrt{k_\sigma}}, \tag{5}$$

where $\bar{\sigma}_{nl}$ is the error derived from the observers' uncertainties for a splitting $\Delta\nu_{nll}$, and k_σ is an integer used to vary the level of the noise that we introduce in the data. Doing this, we take into account the fact that the error obtained on the observed splitting varies with the frequency and the degree of the mode which is certainly more realistic than taking the same average standard deviation for all the modes. From those noisy splittings, the equatorial rotation profile is obtained by inverting Eq. (2) and this profile is then fitted by the erf function Eq. (3) leading to the parameters $\bar{r}_c$, $\bar{w}$, $\bar{\Omega}_0$, $\bar{\Omega}_1$ which will be compared to the initial parameters.

3. Strategies for inferring rapid variations of the rotation

The three inverse methods used in this work are detailed in Appendix A. They all use a grid of 50 points in radius distributed according to the density of turning points of observed modes. The most important difficulty in inferring the thickness of the tachocline from inverse methods results from the fact that the problem of solving Eq. (2) is an ill-posed problem and this is strengthened by the fact that rotational kernels give redundant information about the outer part of the sun whereas they have only low amplitude in the solar core for the observed mode set. Numerically, this produces a high value for the condition number (defined as the maximum singular value divided by the smallest singular value) of the discretized problem Eq. (A5) (typically $\Lambda_{max}/\Lambda_{min} \simeq 2 \times 10^8$ in our implementation) and the singular values decay rapidly. This high value of the condition number means that the solution of the initial problem is highly sensitive to the numerical errors and the noise contained in the data. Therefore we have to introduce some a-priori knowledge on the rotation profile. Unfortunately this regularization tends to smooth out every rapid variation in the solution. By using global regularization, we make the implicit assumption that the real rotation is smooth everywhere and therefore the information about the thickness of a rapid variation of the rotation profile is not directly readable from the solutions obtained by classic inversions. There are however several ways for overcoming these difficulties.

3.1. Local deconvolution of the result obtained from linear inversions: the use of averaging kernels

The first way is to have a good understanding of the process by which the inversion smoothes the solution: using this information, we may be able to inverse this process and to acquire a more realistic view of the rotation. This is what Charbonneau et al. (1997) have done in combination with the so-called Subtractive Optimal Localized Average (SOLA) (Pijpers & Thompson 1992, 1994) method. This can be generalized for any linear inversion as RLS method used in this work. The solution $\bar{\Omega}(r_0)$ obtained at a target location r_0 can be viewed as a weighted average of the 'true rotation' $\Omega(r)$, the weighting function being the averaging kernel $\kappa(r, r_0)$ that can always be estimated at any r_0:

$$\bar{\Omega}(r_0) = \int_0^{R_\odot} \kappa(r, r_0)\Omega(r)\, dr. \tag{6}$$

If we suppose that the averaging kernels obtained at any depth can be approximated by a translation of the averaging kernel obtained at the middle of the transition i.e. $\kappa(r, \hat{r}_c)$, then we can define κ_c by $\kappa_c(r - \hat{r}_c) \equiv \kappa(r, \hat{r}_c)$ and Eq. (6) reduces to a convolution equation:

$$\bar{\Omega}(r_0) = \int_0^{R_\odot} \kappa_c(r - r_0)\Omega(r)\, dr \Leftrightarrow \bar{\Omega}(r) = \kappa_c(r) * \Omega(r) \tag{7}$$

Finally, if the 'true rotation' can be well approximated by an erf function of the form given by Eq. (3), and if we approximate the kernel $\kappa_c(r - r_0)$ by a Gaussian function of the form:

$$\kappa_c(r - r_0) \simeq \exp\left[-(r - r_0)^2/\Delta_r^2\right], \quad (8)$$

then the inferred solution is also an erf function of the form Eq. (3) but with a larger width $\bar{w}$. A simple deconvolution gives the following relation between the searched width $\hat{w}$ and the inferred width $\bar{w}$:

$$\hat{w} = \bar{w}_c \equiv \sqrt{\bar{w}^2 - 4\Delta_r^2}, \quad (9)$$

which defined the corrected inferred width $\bar{w}_c$.

This result is valid only under a large number of assumptions that may be quite distant from the reality. Especially the reduction to a convolution form is certainly not valid because of the extent of averaging kernels that tend to increase rapidly toward the solar core. Moreover the profile of the rotation rate may be much more complicated than a simple erf function. However, the tachocline is thin and the averaging kernels have nearly the same profile in its whole extent. Thus this is certainly a good approach to get a quantitative idea of how the inversion enlarges the 'true rotation' transition. We note that if we obtain $\Delta_r > \bar{w}/2$ this certainly means that some of the previous assumptions are not valid. In this work, we have applied this 'deconvolution method' on the solutions obtained by Tikhonov inversions computed as explained in Appendix A.1.. We estimate that this cannot be made for MTSVD method because the corresponding averaging kernels are less well peaked and exhibit a more oscillatory behavior (see Fig. 6 hereafter).

3.2. Non linear regularization

The second way to estimate the location and thickness of the tachocline, is to build inverse methods that are capable of producing solutions with steep gradients. The idea is to apply a local regularization instead of the global Tikhonov regularization term. This leads to a non linear problem and piecewise smooth solutions. This approach has recently found useful applications in image processing for edge-preserving regularization (Aubert et al. 1994) and total variation (TV) denoising (Vogel & Oman 1996, 1997). In particular, the TV of f is defined as the 1-norm of the first derivative of f and this is the definition of smoothness that we use in the PP-TSVD inverse method. Therefore, the results obtained by this method, detailed in Appendix A.2., represent a first attempt to use this class of inversion with non linear regularization on helioseismic data.

4. Tests with artificial data: results and discussion

4.1. The key: how to choose regularization parameters

Whichever regularized inverse method we use, a very important point is the choice of the regularization parameter which can be a discrete truncation parameter k (MTSVD, PP-TSVD, Eq. (A12)) or a continuous parameter λ (Tikhonov, Eq. (A9)). This choice is specially important if we want to infer a quantity

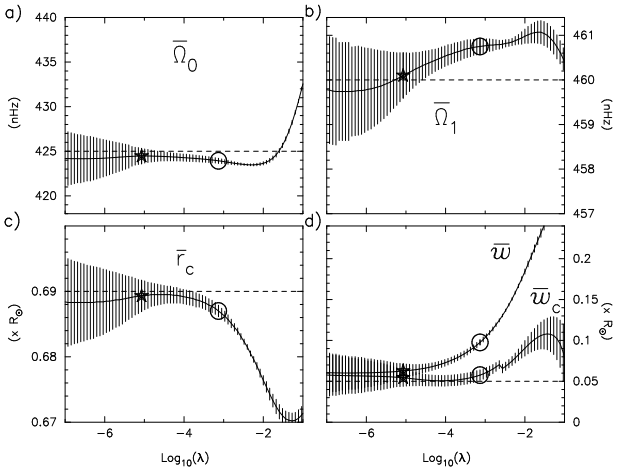


Fig. 1a–d. Inferred parameters $\bar{\Omega}_0$, $\bar{\Omega}_1$, $\bar{r}_c$, $\bar{w}$ and corrected inferred parameter $\bar{w}_c$ against the logarithm of the Tikhonov regularization parameter λ. Error bars result from the fit of the solution by an erf function taking into account the propagation of noise through the inverse process but not the existing correlations between the results obtained at two different radius. The initial parameters are indicated by dashed lines. The GCV and L-curve choices are shown by the full star and the circle respectively. The input rotation law was not dependent on the latitude ($A = B = 0$) and the level of noise was small ($k_\sigma = 10$).

like the width of a zone with high gradients which is directly affected by the regularization. Several methods for choosing the regularization parameter have been proposed that tend to establish a balance between the propagation of input errors and the regularization (see e.g. Badeva & Morozov (1991), Thompson & Craig (1992) and Hansen (1992, 1994) for a general review and Thompson (1992), Barett (1993) and Stepanov & Christensen-Dalsgaard (1996) for applications in helioseismic inversions). In this work we test and compare the ability of two of these automatic strategies, namely the L-curve criterion (Hansen 1992) and the Generalized Cross Validation (GCV) criterion (Wahba 1977; Golub et al. 1979), to reproduce a good estimation of the tachocline profile from noisy data.

The importance of the choice of the regularization parameter can be illustrated by the following figures (Figs. 1, 2, 3, 4) where the results of the fit of the solution by an erf function are plotted as a function of the regularization parameter.

Fig. 1 represents the variation of the four erf-parameters $\bar{\Omega}_0$, $\bar{\Omega}_1$, $\bar{r}_c$ and $\bar{\omega}$ deduced from a Tikhonov inversion as a function of the logarithm of the regularization parameter. The four initial parameters were Ω_0 = 425 nHz, Ω_1 = 460 nHz, $r_c = 0.69 R_\odot$ and $w = 0.05 R_\odot$. In this case, called the 'ideal case' in the following, the added errors were small (k_σ=10) and the initial rotation law was not dependent on the latitude ($A = B = 0$). The choices designated by L-curve and GCV strategies are shown by the full star and the circle respectively. In addition we have plotted the corrected inferred width $\bar{w}_c$ given by Eq. (9) and computed by calculating systematically the averaging kernel at $r_0 = \bar{r}_c$ (as shown on Fig. 6a for the

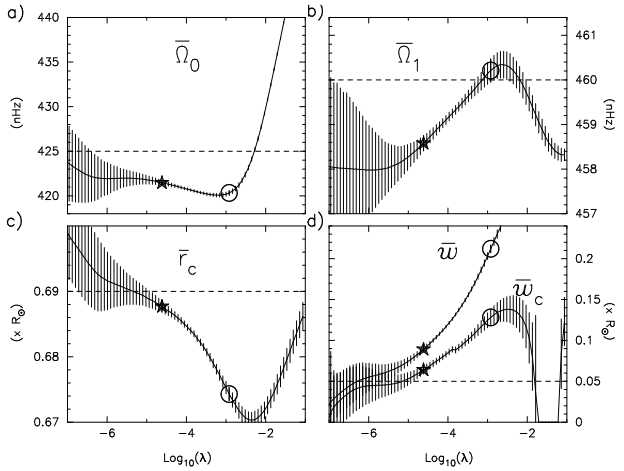


Fig. 2a–d. The same as in Fig. 1 but with more realistic input errors (k_σ = 1) and an input rotation profile with latitudinal variation in the convection zone (A = 55 nHz, B = 75 nHz).

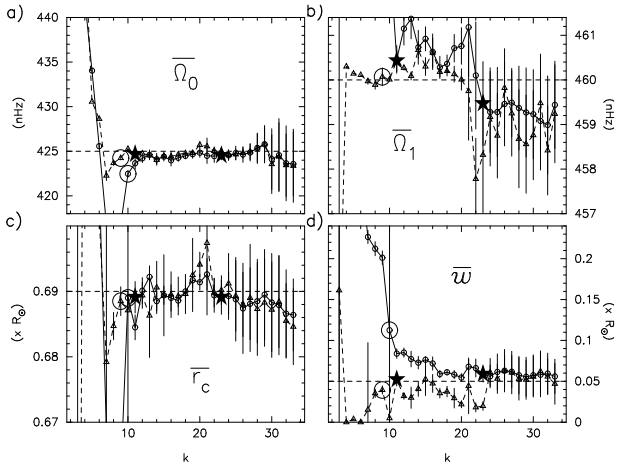


Fig. 3a–d. The same as in Fig. 1 ('ideal case') but for MTSVD (full line) and PP-TSVD (dashed line) methods and against the truncation parameter k. The L-curve choice for MTSVD method is outside the plot on panel **b**.

GCV choice). The GCV criterion leads always to a lower regularization than the L-curve choice and then tends to reduce the smoothing of the solution. In most of our tests, as in Figs. 1a, c, d, the GCV choice corresponds to a point where the errors deduced from the fit become small whereas the L-curve criterion gives a point beyond which a rapid variation of the fitted parameters with increasing regularization occurs. The fact that the values of the fitted parameters are nearly constant between these two points shows that, for this level of noise, the method is robust in that sense that the choice of the precise value of the regularization parameter is not a crucial point: any choice that tends to establish a balance between the propagation of input errors and the regularization is able to produce good results.

Let us now look at the behavior of this method for a more realistic example. For this we take a level of noise similar to the one given by observers (k_σ = 1) and we build frequency splittings of sectoral modes by taking into account a latitudinal variation of the rotation rate in the convection zone close to that derived by 2D inversions. We have set A = 55 nHz and B = 75 nHz which are mean values derived from observations of the plasma motion at the solar surface (Snodgrass & Ulrich 1990). This choice for the input rotation law and errors is referred as the 'realistic case' in the following. The Eq. (1) with $m = l$ has been used to compute the frequency splittings of sectoral modes and 1D Tikhonov inversions have been performed again in order to infer the equatorial rotation rate from Eq. (2).

Fig. 2 represents the results of these inversions in the same form as Fig. 1 and for the same initial erf-parameters. There are two essential points to be seen on this figure. The parameter Ω_0 in Fig. 2a is systematically under-estimated of about 4 nHz. A detailed analysis shows that this effect is strongly related to the introduction of a latitudinal variation of the rotation rate in the convection zone. The assumption, used in the 1D inversions, that sectoral modes are sensitive only to the equatorial component of the rotation rate is not valid for low degree l modes (e.g. Antia et al. 1996) , and these modes sound the deep interior. This may explain some perturbation for the determination of the parameter Ω_0 that represents the mean value of the rotation rate in the radiative interior. The difference between splittings of sectoral modes computed from Eq. (2) and Eq. (1) is below 1 nHz for the observed modes having their turning points above $0.4R_\odot$. The large resulting difference in Ω_0 is due to the fact that high l sectoral modes see only the equatorial rotation rate and then fix the inferred value $\bar{\Omega}_1$ equal (or nearly equal as in Fig. 2b) to the initial value Ω_1 while lower degrees sectoral modes are sensitive to the differential rotation of the convection zone and this effect can only be accounted for in the inverse rotation law by a substantial lowering in $\bar{\Omega}_0$. Furthermore we have checked that two rotation laws with the same Ω_1 but with a difference of 4 nHz in Ω_0 and two rotation laws with the same Ω_0 but with or without latitudinal variation in the convection zone, induce a difference of the same order in the sectoral modes frequency splittings.

The second important point is that, in Figs. 2c, d, the estimation $\bar{w}$ of the width of the tachocline increases rapidly between the GCV and the L-curve points whereas its location $\bar{r}_c$ decreases rapidly from $0.688R_\odot$ down to $0.674R_\odot$ As in Fig. 1d, the deconvolution made by using averaging kernels tends to correct this behavior for the estimation of the width but, in this case, the GCV choice remains over-estimated for about $0.015R_\odot$ and the L-curve choice is still very distant from the initial value. Tests made with different input parameters show that, as in Figs. 2c, d and for that level of noise, the GCV choice is always better than the L-curve choice for the estimation of the location and the width of the tachocline. This point will be illustrated and discussed in the next section for the estimation of widths between 0.03 and $0.11R_\odot$.

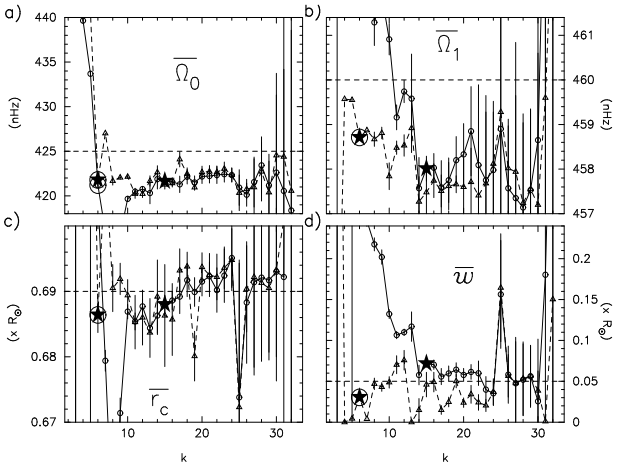


Fig. 4a–d. The same as in Fig. 2 ('realistic case') but for MTSVD (full line) and PP-TSVD (dashed line) methods and against the truncation parameter k. The L-curve choice for MTSVD method is outside the plot on panels **b**,**c** and **d**.

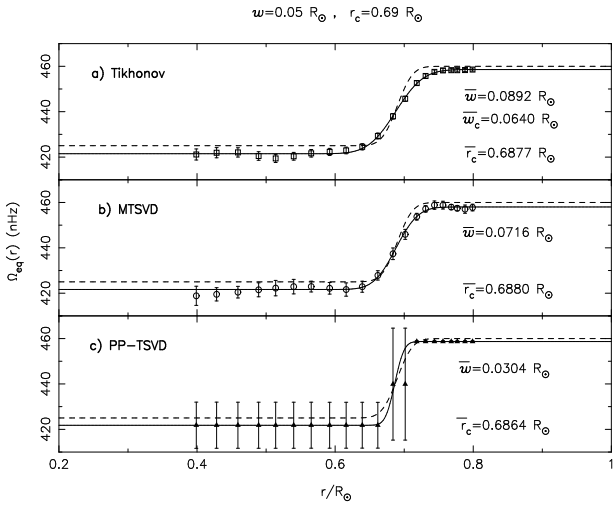


Fig. 5a–c. Solutions obtained between 0.4 and $0.8R_\odot$ from the three inverse methods with the GCV choice of regularization parameters. The input rotation law was the same as in Figs. 2, 4 ('realistic case'). The equatorial component of the initial law is shown by dashed line whereas the fits of the inverse solutions are shown by full lines.

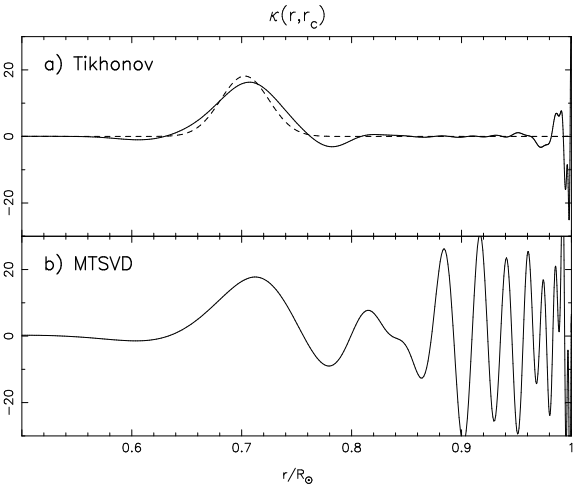


Fig. 6a and b. Averaging kernels computed at $r_0 = \bar{r}_c$. For Tikhonov method the dashed line represents the Gaussian approximation of the kernel used for the local deconvolution of the solution shown on Fig. 5a.

Similar figures (Figs. 3, 4) can be plotted for MTSVD and PP-TSVD methods where the continuous regularization parameter is replaced by the discrete truncation parameter. Results obtained in the 'realistic case' (Fig. 4) have again a larger dispersion and exhibit the same systematic deviation for the determination of Ω_0. Another interesting point is that, as shown on Figs. 3d, 4d and also in the next section, the PP-TSVD method tends to give an under-estimation of the width whereas the MTSVD method tends to give an over-estimation of this parameter. This may be very useful in order to give a bounded estimation of the true width. For these two methods, the choice of the optimal truncation parameter k through the L-curve criterion needs the evaluation of the curvature of discrete L-curve. This can be done carefully by an appropriate 2D curve fitting. Nevertheless our experience shows that it is difficult to do this systematically with the same fit procedure for any level of noise and input rotation law. Furthermore, when this is done carefully, this choice leads to results for the tachocline profile that are always worse than the ones obtained from the GCV choice. Thus, in the following, results are shown only with the GCV criterion for MTSVD and PP-TSVD methods.

Fig. 5 shows the solutions obtained from the three methods with the GCV choices indicated on Figs. 2 and 4. The error bars on the PP-TSVD method (Fig. 5c) were obtained by assuming that the method is linear i.e. the dependence of $\boldsymbol{H}$ (defined in Eq. (A16)) relatively to the data vector $\boldsymbol{W}$ is neglected. This is indeed not the case and a Monte-Carlo approach for estimating errors may be more realistic. We note however that the two other methods (Tikhonov and MTSVD) are linear only for a given regularization parameter. Since this parameter is chosen through automatic strategies, it depends also on the data. Thus, strictly speaking, these methods are also non-linear methods. Nevertheless, the automatic choices are built so that they are not too much sensitive to little change in the data and that justify the linear approximation. The corresponding averaging kernels computed at $r = \bar{r}_c$ (Fig. 6) show that whereas the Gaussian approximation is rather good for the Tikhonov method, the large oscillations in the convection zone obtained for the MTSVD method make difficult the use of a local deconvolution in that case.

4.2. Tests for width between 0.03 *and* 0.11 $R_\odot$

An important point is to test the ability of a method to give a good estimation of the erf-parameters for a large domain of

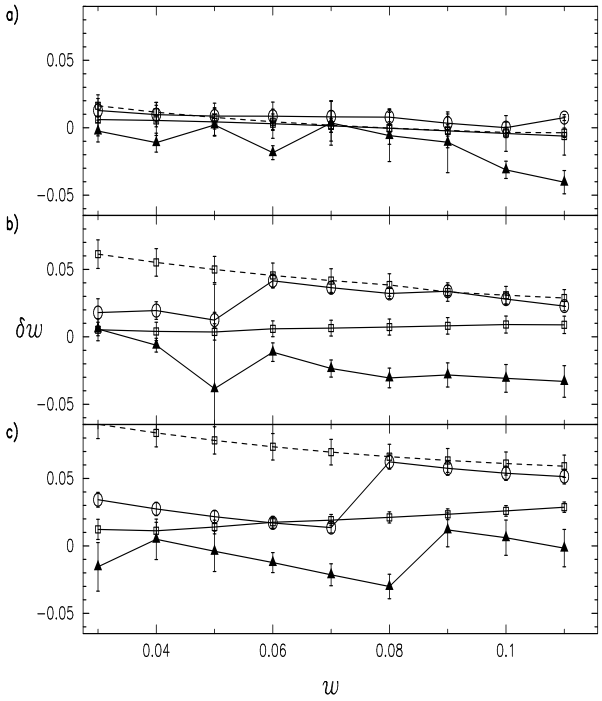


Fig. 7a–c. Difference between the inferred width and the initial width ($\delta w = \bar{w} - w$) against the initial width for PP-TSVD (triangles) and MTSVD (circles) methods, both computed with the GCV choice for the truncation parameter. Squares are for the Tikhonov method with GCV criterion (full line) and L-curve criterion (dashed line). For this latter method we plot the difference between the corrected inferred width and the initial width ($\delta w = \bar{w}_c - w$). **a** k_σ = 10, $A = B = 0$ as in Figs. 1, 3 ('ideal case'); **b** k_σ = 1, $A = B = 0$; **c** k_σ = 1, A = 55, B = 75 as in Figs. 2, 4 ('realistic case')

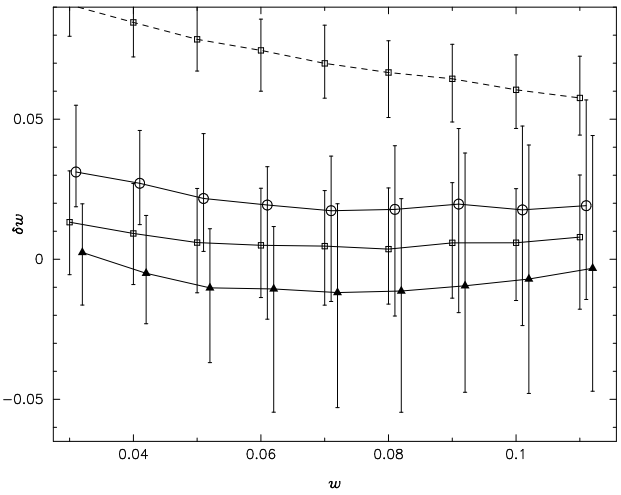


Fig. 8. The same as in Fig. 7c ('realistic case') but each points is the mean value of the results obtained for 500 realizations of input errors. Error bars represent a 68.3% confidence interval on w.

variation of the width of the tachocline. We first study in Fig. 7 the behavior of the different methods and automatic strategies between the 'ideal case' and the 'realistic case' for one realization of input errors. Then, in Fig. 8, we have carried out a Monte-Carlo approach in order to have a better estimation of the errors on the widths deduced from the fit of the solutions for the 'realistic case'.

Fig. 7 shows the inferred width $\bar{w}$ (for MTSVD and PP-TSVD methods) and the corrected inferred width $\bar{w}_c$ (for the Tikhonov method) as functions of the initial width w and for one realization of the input errors. Fig. 7a represents the same example as Figs. 1, 3 ('ideal case'), in Fig. 7b we increase the level of noise (k_σ = 1), and finally we set an input rotation law with a latitudinal dependence in the convection zone so that the Fig. 7c is for the same example as Figs. 2, 4 ('realistic case').

In Fig. 7a , the results for $\bar{w}$ fit the real value within $0.02R_\odot$ except for PP-TSVD and widths above $0.9R_\odot$, and the two regularization procedures (L-curve and GCV) give almost the same result.

The comparison of Figs. 7a and 7b clearly indicates that the results obtained for Tikhonov method with the L-curve criterion (dashed curves) are very sensitive to the level of noise and are not adapted to the actual errors of observed data. The deconvolution method using Tikhonov inversion with GCV criterion appears to be the less sensitive to the noise level and the most stable for widths between 0.03 and $0.11R_\odot$. We see again that the results obtained from MTSVD and PP-TSVD lead respectively to an over-estimation and an under-estimation of the real width. Fig. 7c illustrates the effect of a latitudinal dependence of the rotation in the convection zone: an increasing over-estimation of w from the Tikhonov method with GCV criterion and a general larger dispersion of the results.

In Fig. 8, we have performed 500 realizations of input errors for each initial width and each point shown in this figure represents the mean value of the 500 inferred or corrected inferred widths for a given initial width and a given method. Error bars represent a 68.3% confidence interval which contains the nearest 341 inferred widths from the mean value but they are not necessarily symmetric around this value. This study shows that the Tikhonov and PP-TSVD methods with the GCV criterion are the most reliable for estimating the width in the most realistic case. They lead, respectively to an over-estimation and under-estimation of the width of about $0.01R_\odot$ at the maximum for initial widths between $0.03R_\odot$ and $0.11R_\odot$. In that range, the standard deviation obtained for 500 realizations of input errors is around $0.02R_\odot$ for Tikhonov method and much larger (up to $0.05R_\odot$ for $w = 0.11R_\odot$) for PP-TSVD method which then appears to be well adapted only to infer very sharp transitions. Let ω_i represent the widths deduced from N_r hypothetical (non-observed) realizations of the unknown true width $\hat{\omega}$. In the Monte-Carlo method we suppose that we can approximate the distribution of $(\hat{\omega} - \omega_i,\ i = 1, ..N_r)$ by the distribution of $(\omega_o - \tilde{\omega}_i,\ i = 1, N_r)$ where ω_o is the width deduced from the observed dataset and $\tilde{\omega}_i$ are the widths deduced from datasets built by setting $\hat{\omega} = \omega_o$ in the model. As we can not insure that ω_o

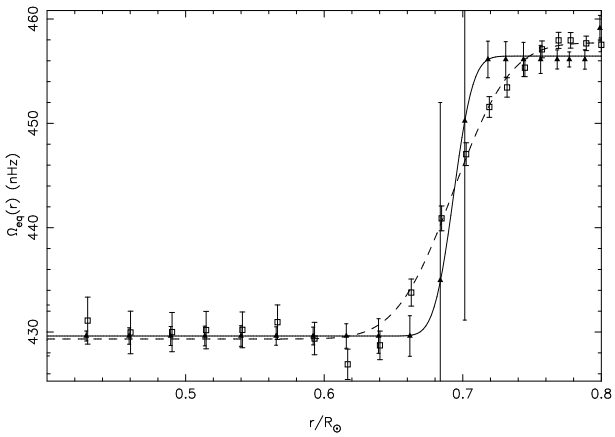


Fig. 9. Equatorial tachocline profiles obtained from LOWL data by PP-TSVD (triangles) and Tikhonov (squares) methods with GCV criterion. Error bars represent the 1σ errors estimated on the solution by assuming the linearity of the inversions. The full and dashed curves represent respectively the fit of the PP-TSVD and Tikhonov solutions by an erf-function between 0.4 and $0.8R_\odot$.

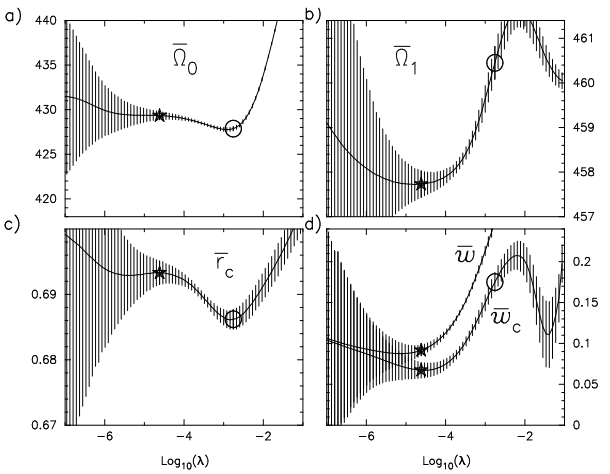


Fig. 10a–d. Variation of the inferred parameters $\bar{\Omega}_0, \bar{\Omega}_1, \bar{r}_c, \bar{w}$ and $\bar{w}_c$ as a function of the logarithm of the regularization parameter for the Tikhonov inversion of LOWL data. Graph markers have the same meaning as in Fig. 1. The L-curve choice of $\bar{w}$ is outside the plot on panel **d**.

is very close to $\hat{\omega}$, the underlying assumption is that, in the range of uncertainty concerning $\hat{\omega}$ (say $0.03 - 0.11R_\odot$), the way in which errors propagate through the inverse process does not vary rapidly (see e.g. Press et al. 1992). The fact that, in Fig. 8, error bars grow rapidly with the initial width for PP-TSVD method makes difficult the use of the Monte-Carlo results for estimating the statistical behavior of this method. There are nevertheless two factors that may introduce bias in these estimations of the errors on the inferred widths. First, the existing correlations between the inferred rotation values obtained at two different radius are not taken into account in the fit of the solution by an erf-function. Secondly, for the PP-TSVD method, the non-linearity of the method is not taken into account in the estimation of the propagation of noise through the inverse process. Making the fit in the right way, i.e. taking into account correlations, may lead to a lower dispersion of the results and then our estimation of the error on the inferred widths may be over-estimated. Nevertheless, the effects of these two approximations are not easy to estimate a priori and need a more complete analysis in future work.

5. Results for LOWL data

This section gives the results obtained from the two years (2/26/94-2/25/96) observations by the LOWL instrument in Hawaii (Tomczyk et al. 1995; Corbard et al. 1997). These data contain 1102 modes with degrees up to l = 99 and frequencies between 1200 and 3500 μHz. For each mode (n, l), individual splittings are given by, at best, five a-coefficients of their expansion on orthogonal polynomials defined by Schou et al. (1994). For this work, we assume that the previous simulations provide an estimation of the bias introduced by the methods and we use these values in order to correct the inferred tachocline parameters. This supposes the closeness of the model used in the simulation to the reality and a good estimation of the errors in the data. Furthermore, we use the sum of odd a-coefficients as a first approximation for the sectoral splittings i.e. $\Delta\nu_{nll} \simeq a_1^{nl} + a_3^{nl} + a_5^{nl}$. This approximation is exact for all the rotation laws such that $a_{2j+1}^{nl} = 0 \; \forall \; j > 2$ (which is the case for the rotation laws Eq. 4 used in our model). When this is not the case the latitudinal kernel associated to $a_1^{nl} + a_3^{nl} + a_5^{nl}$ is less peaked at the equator than the one associated to the sectoral splittings (i.e. $P_l^l(\cos\theta)^2 \sin\theta$, see Sect. 2) and thus $\hat{\Omega}_1$ represents a latitudinal average of the rotation in a larger domain around the equator. However the kernel associated to the sum of three a-coefficients is less l-dependent.

Results obtained by the three methods are summarized in Table 1. They are in very good agreement for the location of the tachocline and the mean values of the rotation rate in the radiative interior and convection zone but more dispersive concerning the determination of the width. The tests discussed above have shown that this may be related to the level of noise contained in the data. The equatorial tachocline profiles obtained by Tikhonov and PP-TSVD methods with GCV criterion are shown in Fig. 9. According to the previous sections, we use the GCV choice in order to infer the location and the width of the equatorial tachocline. Nevertheless, for Ω_0 and Ω_1 the L-curve choices may be useful in order to see the amplitude of the variation of the inferred parameters against the regularization parameter. The errors cited in this table are just the result of the fit of the solution by the erf-function. The variation of the inferred erf parameters against the regularization, as shown by Fig. 10 for the Tikhonov method, and the previous Monte-Carlo simulations can help us to estimate error bars that may be more realistic.

Table 1. Inferred erf-parameters obtained from LOWL data. The L-curve criterion has not been used for methods with discrete truncation parameters.

Methods	$\bar{\Omega}_0$ (nHz)		$\bar{\Omega}_1$ (nHz)		$\bar{r}_c/R_\odot$	$\bar{w}_{(c)}/R_\odot$
	GCV	L-curve	GCV	L-curve	GCV	GCV
Tikhonov	429.3 ± 0.5	427.9 ± 0.3	457.7 ± 0.3	460.4 ± 0.4	0.693 ± 0.002	0.067 ± 0.010
MTSVD	429.4 ± 0.7	-	457.0 ± 0.5	-	0.693 ± 0.003	0.062 ± 0.009
PP-TSVD	429.6 ± 0.2	-	456.4 ± 0.3	-	0.693 ± 0.009	0.031 ± 0.017

Fig. 10a shows that the evaluation of the mean value of the rotation rate in the radiative interior ($\hat{\Omega}_0$) is not much sensitive to the regularization. Nevertheless, we have shown in Sect. 4.1 that this parameter tends to be systematically under-estimated of about 4 nHz because of the influence of the latitudinal variation of the rotation in the convection zone on the low l sectoral splittings. For the sum $a_1^{nl} + a_3^{nl} + a_5^{nl}$ the latitudinal kernel is less l-dependent so that this systematic offset may be smaller than 4 nHz. We take this effect into account by increasing the estimation of the error and our final interval for this parameter becomes: $427.5 \leq \hat{\Omega}_0 \leq 434.5$ nHz. The mean value of the equatorial rotation rate in the convection zone is less subject to systematic errors but may be under-estimated by the GCV choice (cf. Figs. 2b, 4b, 5). The difference between the GCV choice and the L-curve choice is about 3 nHz on Fig. 10. Thus we estimate that $\hat{\Omega}_1 = 459.0 \pm 1.5$ nHz. We note that we do not attempt to use the points of the solution found under $0.4R_\odot$ or above $0.8R_\odot$ (cf. Fig. 9). Therefore $\hat{\Omega}_1$ does not take into account the eventual rapid variation of the rotation near the surface or at $0.9R_\odot$ (Antia et al. 1996) and $\hat{\Omega}_0$ is not sensitive to the core rotation. The ratio $q = \hat{\Omega}_0/\hat{\Omega}_1$ obtained from helioseismic data is an important test for the theories of the tachocline dynamics. Spiegel and Zahn's (1992) theory leads to $q = 0.90$ whereas Gough's (1985) one leads to $q = 0.96$. Our results give $0.93 < q < 0.95$ which is intermediate between the two theoretical estimates. Similar results have already been pointed out by Gough & Sekii (1997).

For the estimation of $\hat{r}_c$, we find in Fig. 10 that the L-curve criterion leads to a lower value than the GCV criterion as we had found in Fig. 2. As discussed in Sect. 4.1, we think that the GCV choice is more reliable but may lead to an under-estimation of about $0.002R_\odot$. Therefore our final estimation for the location of the center of the tachocline in the equatorial plane is: $\hat{r}_c = 0.695 \pm 0.005R_\odot$. This value, estimated in the equatorial plane, is intermediate between the two values previously obtained by forward methods (cf. Table 2). We note however that whereas our work just look for the equatorial component of the tachocline, the previous works assume that the solar tachocline presents the same profile at any latitude. This may lead to bias if, as suggested by Charbonneau et al. (1997) from LOWL data, the tachocline is prolate i.e. is located deeper at the equator than at higher latitudes.

The tests discussed in the previous sections show that the L-curve choice is not reliable for the estimation of the width and suggest three ways for estimating the width of the tachocline from GCV criterion:

First, the true value is supposed to lie between the MTSVD and PP-TSVD estimations. That gives $0.031R_\odot \leq \hat{w} \leq 0.062R_\odot$.

Secondly, for the Tikhonov method, since the error bars have roughly of the same amplitude in the whole range $0.03-0.11R_\odot$ of initial widths (Fig. 8) , we can use the Monte-Carlo simulation. Near $w = 0.07R_\odot$ (the inferred value reported in Table 1 being $\bar{w} = 0.067$), Fig. 8 shows that the Tikhonov method leads in mean to a systematic over-estimation of about $0.005R_\odot$ with a 68.3% confidence interval around $\pm 0.02R_\odot$. Thus we obtain by this way $\hat{w} \simeq 0.062 \pm 0.020R_\odot$.

Thirdly, the PP-TSVD method is though to produce, in mean, an under-estimation of the width of about $0.01R_\odot$ but with a larger dispersion of the results for the large widths so that we are not allowed to use straightforwardly our Monte-Carlo simulation. The 68.3% confidence intervals plotted in Fig. 8 indicate that the PP-TSVD method can lead to an inferred width around $0.03R_\odot$ (which is the value obtained from LOWL data) for initial widths up to $0.08R_\odot$. Therefore the interpretation of the result obtained by this method is not easy. This may indicate that the method is better suited to the search of transition zones known a priori to be very thin (searching for a width lower than $0.05R_\odot$ for example). Nevertheless, all the above discussions indicate $0.020 \leq \hat{w} \leq 0.070R_\odot$ as a reasonable interval for the true width, deduced from PP-TSVD method.

All these approaches are globally consistent but lead to a relatively large dispersion of the results. Therefore our final estimation of the width of the solar tachocline in the equatorial plane is: $\hat{w} = 0.05 \pm 0.03R_\odot$. This estimation is in very good agreement with the result obtained by Charbonneau et al. (1997) and remains compatible with the value given by Kosovichev (1996) (cf. Table 2).

6. Conclusions

This work presents an analysis of the determination of the characteristics of the tachocline at the equator by three different inverse methods. They are applied to the inversion of the splittings of the sectoral modes estimated as the sum of the three first odd coefficients of the expansion of the splittings in orthogonal polynomials defined by Schou et al. (1994). Two different choices of regularization parameters, the GCV and L-curve criteria, have

Table 2. Comparison of our results with previous forward analysis. Charbonneau et al. (1997) and our work are for the same LOWL dataset (2/26/94-2/25/96) whereas Kosovichev (1996) has used the 1986-90 BBSO datasets.

	$\hat{r_c}/R_\odot$	$\hat{w}/R_\odot$
This work	0.695 ± 0.005	0.05 ± 0.03
Charbonneau et al.	0.704 ± 0.003	0.050 ± 0.012
Kosovichev	0.692 ± 0.005	0.09 ± 0.04

been compared. Tests with artificial rotation laws have shown that in all cases the GCV criterion is less sensitive to the error level than the L-curve one and gives better results with low bias and dispersions in the range $0.03 - 0.011 R_\odot$ of searched widths. This choice of the GCV criterion is in agreement with Barett (1993) and Thompson(1992) in another context. Hansen (1992) has shown that the GCV criterion is less adapted to highly correlated errors than the L-curve one. Our work may indicate in turn that we can neglect, as it has been done, the unknown correlation in LOWL data.

Concerning the thickness of the tachocline, it appears that the MTSVD and PP-TSVD inversions give respectively an upper and lower estimate while the Tikhonov method corrected by deconvolution gives the most reliable determination. We have estimated the systematic effect of the latitudinal dependence of the rotation in the convection zone on the determination of the thickness of the tachocline and the rotation in the radiative interior. We have shown how the performance of the methods will be improved by lowering the level of noise in the data.

The methods have been applied to the LOWL two years dataset leading to an estimation of the position $\hat{r}_c = 0.695 \pm 0.005 R_\odot$ and the thickness $\hat{w} = 0.05 \pm 0.03 R_\odot$ of the equatorial tachocline. In addition, we have obtained an estimation of the equatorial rotation $\hat{\Omega}_0$ below the convection zone and above $0.4 R_\odot$ such that: $427.5 \leq \hat{\Omega}_0 \leq 434.5$ nHz and $\hat{\Omega}_1$ from the top of the convection zone up to $0.8 R_\odot$ such that $\hat{\Omega}_1 = 459.0 \pm 1.5$ nHz. Assuming that the rotation in the radiative interior is independent of latitude, this leads to a ratio $\hat{\Omega}_0/\hat{\Omega}_1$ between 0.93 and 0.95 which is intermediate between the two theoretical predictions.

Our results for the location and thickness of the equatorial tachocline are in agreement with the forward analysis of Charbonneau et al. (1997) and with those of Basu applied on BBSO and GONG datasets (Basu 1997) using a different parameterization of the tachocline. The forward analysis can be viewed as non-linear least-squares methods (least-squares methods because of the use of the χ^2 criterion and non linear because of the models used for the rotation profile) but using only a very few number of parameters (Charbonneau et al. (1997) use six parameters, Basu (1997) three and Kosovichev (1996) only two). This kind of methods depend thus strongly on our knowledge of the global rotation profile which can be reached only by inversion techniques. In particular, in the above-cited works the latitudinal dependence of the rotation is fixed (as in 1.5D inversions). In this work, we have tried to investigate the amount of informations about the tachocline that we can extract directly from the global inversions without a-priori knowledge (except for the regularization) on the rotation profile. There are less assumptions in this approach, and thus the tachocline parameters may be less constrained. The fact that the two approaches lead to similar results indicates in turn that the hypothesis used in the forward analysis are probably not too strong and are well adapted to the problem of inferring the tachocline from actual data.

One of the interest of this work was our first attempt to use an inverse method with non-linear regularization in helioseismic case. The PP-TSVD method leads to a very large dispersion of the results for widths above $0.05 R_\odot$ and then is difficult to interpret with actual data. Some efforts, in future work, should be useful to improve this kind of methods and the interpretation of their results taking into account their non-linearity.

Acknowledgements. We gratefully acknowledge T. Sekii for illuminating discussions and comments, S. Tomczyk and J. Schou for providing the LOWL data and the anonymous referee for constructive comments.

Appendix A: details of the three inverse methods used

We discretize Eq. (2) by:

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{R\Omega} \tag{A1}$$

where we have defined:

$$\boldsymbol{W} \equiv (W_i)_{i=1,N} \qquad W_i = \Delta\nu_{nll} + \delta\nu_{nll},\ i \equiv (n,l), \tag{A2}$$

N being the number of modes (n,l) (N = 1102 for LOWL data) and $\delta\nu_{nll}$ a normally distributed noise with a standard deviation defined in Eq. (5). We search the solution $\bar{\Omega}(r)$ as a piecewise linear function of the radius by setting:

$$\bar{\Omega}(r) = \sum_{p=1}^{N_p} \omega_p \varphi_p(r) \qquad \boldsymbol{\Omega} \equiv (\omega_p)_{p=1,N_p} \tag{A3}$$

where $\varphi_p(r)$, $p = 1, N_p$ are piecewise straight lines (N_p = 50 in this work) such that:

$$\forall p = 1..N_p,\ \exists\, r_p\ \in [0.,1.]\ /\ \bar{\Omega}(r_p) = \omega_p \tag{A4}$$

where r_p, $p = 1..N_p$ are fixed break points distributed according to the density of turning points of modes (Corbard et al., 1997). The matrix $\boldsymbol{R}$ is then defined by:

$$\boldsymbol{R} \equiv (R_{ip})_{\substack{i=1,N \\ p=1,N_p}} \qquad R_{ip} = \int K_{nl}(r)\varphi_p(r)dr \tag{A5}$$

For all the inverse methods discussed in this work, the aim is to find a solution that is able to produce a good fit of the data in chi-square sense. Unfortunately, the solution of this problem is not unique and allows oscillatory solutions that are not physically acceptable. So, we have to define a quantity that measures the smoothness of the solution and to insure that the final solution is sufficiently smooth to be acceptable.

For any solution $\mathbf{\Omega}$, we define the χ^2 value by:

$$\chi^2(\mathbf{\Omega}) = \|\boldsymbol{P}(\boldsymbol{R}\mathbf{\Omega} - \boldsymbol{W})\|_2^2 \tag{A6}$$

where $\boldsymbol{P} = diag(1/\sigma_{nl})$ and we define two measures of the smoothness of the solution $\mathbf{\Omega}$ by:

$$\beta_i(\mathbf{\Omega}) = \|\boldsymbol{L}\mathbf{\Omega}\|_i,\ i = 1, 2 \tag{A7}$$

where the vector i-norms $\|.\|_i$ are defined by $\|\boldsymbol{x}\|_i = (\sum_p |x_p|^i)^{1/i}$ and $\boldsymbol{L}$ is a discrete approximation of the first derivative operator such that:

$$\beta_1 \propto \int \left|\frac{\partial\Omega(r)}{\partial r}\right| dr \qquad \beta_2^2 \propto \int \left(\frac{\partial\Omega(r)}{\partial r}\right)^2 dr \tag{A8}$$

A.1. Tikhonov solution

The so called Tikhonov solution $\mathbf{\Omega}_\lambda$ solves the problem:

$$\min_{\mathbf{\Omega}} (\chi^2(\mathbf{\Omega}) + \lambda\beta_2^2(\mathbf{\Omega})), \tag{A9}$$

where $\lambda > 0$ is the continuous regularization parameter. In order to compare this method to the two other ones, it may be interesting to reformulate the problem as follow: For any λ we can show that there exist a value $\alpha(\lambda)$ for which $\mathbf{\Omega}_\lambda$ is the solution of the problem:

$$\min_{\mathbf{\Omega}\in S_\lambda} \beta_2(\mathbf{\Omega}); \quad S_\lambda = \{\mathbf{\Omega} \,/\, \|\boldsymbol{P}(\boldsymbol{R}\mathbf{\Omega} - \boldsymbol{W})\|_2 \leq \alpha(\lambda)\} \tag{A10}$$

The computation of these solutions for different regularization parameters have been carried out by using a generalized singular value decomposition of the pair $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{L})$ as explained and discussed extensively in Christensen-Dalsgaard et al. (1993).

A.2. MTSVD and PP-TSVD solutions

These methods are based on the SVD of the $N \times N_p$ $(N > N_p)$ matrix $\boldsymbol{R}$ which can be written:

$$\boldsymbol{R} = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{u}_i \Lambda_i \boldsymbol{v}_i^\top \tag{A11}$$

where $r \leq N_p$ is the rank of $\boldsymbol{R}$. The singular vectors are orthonormal, $\boldsymbol{u}_i^\top \boldsymbol{u}_j = \boldsymbol{v}_i^\top \boldsymbol{v}_j = \delta_{ij}$ for $i, j = 1, r$, and the singular values Λ_i are such that: $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq ... \geq \Lambda_r > 0$, $\Lambda_{r+1}, .., \Lambda_{N_p} = 0$. We then define the the TSVD of $\boldsymbol{R}$ as the matrix $\boldsymbol{R}_k$ built from Eq. (A11) but neglecting the $N_p - k$ smallest singular values.

$$\boldsymbol{R}_k = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{u}_i \Lambda_i \boldsymbol{v}_i^\top \tag{A12}$$

The integer $k < r$ is called the truncation parameter. It acts as a regularization parameter by eliminating the oscillatory behavior of the singular vectors associated with the smallest singular values. According to Eq. (A12), the rank of the matrix $\boldsymbol{R}_k$ is $k < r$ and then the problem of minimizing the quantity $\|\boldsymbol{P}(\boldsymbol{R}_k\mathbf{\Omega} - \boldsymbol{W})\|_2$ has not an unique solution and we have to use our smoothness criteria to select a physically acceptable solution among the set of solutions defined by:

$$S_k = \{\mathbf{\Omega} \,/\, \|\boldsymbol{P}(\boldsymbol{R}_k\mathbf{\Omega} - \boldsymbol{W})\|_2 = \text{minimum}\} \tag{A13}$$

With these notations, the so-called MTSVD solution $\mathbf{\Omega}_k^m$ is defined by:

$$\mathbf{\Omega}_k^m = \arg\min_{\mathbf{\Omega}\in S_k} \beta_2(\mathbf{\Omega}) \tag{A14}$$

whereas the so-called PP-TSVD solution $\mathbf{\Omega}_k^p$ is defined by:

$$\mathbf{\Omega}_k^p = \arg\min_{\mathbf{\Omega}\in S_k} \beta_1(\mathbf{\Omega}) \tag{A15}$$

The algorithms for computing these solutions are presented in Hansen et al. (1992) and Hansen & Mosegaard (1996) respectively.

We just recall some important properties of the PP-TSVD solution: For any $k < r$ the vector $\boldsymbol{L}\mathbf{\Omega}_k^p$ has at the most $k - 1$ non zero elements. As the matrix $\boldsymbol{L}$ is a discrete approximation of the first derivative, this means that the solution vector $\mathbf{\Omega}_k^p$ consists on $k_b \leq k$ constant blocks. From Eq. (A3) it follows that the inferred rotation $\bar{\Omega}(r)$ itself is obtained as a piecewise constant functions with a maximum of k pieces. The $k_b - 1$ break points of this solution are selected by the procedure among the N_p initials break points r_p. Therefore this inversion is able to produce a discontinuous solution without fixing a-priori the location of the discontinuity. Finally, we note that the solution $\mathbf{\Omega}_k^p$ obtained by this non-linear method can always be computed by applying a matrix $\boldsymbol{H}$, to the data but this matrix is also a function of the data i.e. $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{W})$. Thus we have:

$$\mathbf{\Omega}_k^p = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{W})\boldsymbol{W}. \tag{A16}$$

References

Antia H.M., Chitre S.M., Thompson M.J., 1996, A&A 308, 656

Aubert G., Barlaud M., Blanc-Féraud L., Charbonnier P., 1994, Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging, Reasearch Report no. 94-01, Univ. of Nice-Sophia Antipolis

Badeva V., Morozov V., 1991, Problèmes incorrectement posés - Théorie et applications, série Automatique, Mason, Paris

Barrett R.K., 1993, On the optimal choice of regularization parameter for the inversion of solar oscillation data. In: Brown T.M. (ed) GONG 1992: Seismic Investigation of the Sun and Stars (A.S.P. Conf. Ser. vol. 42), Astr. Soc. of the Pacific, San Francisco, p. 233

Basu S., 1997, MNRAS 288, 572

Charbonneau P., Christensen-Dalsgaard J., Henning R., et al., 1997, Observational constraints on the dynamical properties of the shear layer at the base of the solar convection zone. In: Provost J., Schmider F.X. (eds) Sounding solar and stellar interior, poster volume, OCA, in press

Christensen-Dalsgaard J., Hansen P.C., Thompson M.J., 1993, MNRAS 264, 541

Corbard T., Berthomieu G., Morel P., et al., 1997, A&A 324, 298

Golub H., Heath M., Wahba G., 1979, Technometrics 21, 215

Gough D.O., 1985, In: Future mission in solar heliosphere and space plasma physics, eds. E. Rolfe and B. Battrick, ESA publication division, SP-235, p.183
Gough D.O., Sekii T., 1997, On the solar tachocline. In: Provost J., Schmider F.X. (eds) Sounding solar and stellar interior, poster volume, OCA, in press
Hansen P.C., 1992, SIAM Review 34, 561
Hansen P.C., 1994, Numerical Algorithms 6, 1
Hansen P.C., Mosegaard K., 1996, Piecewise Polynomials Solutions Without a Priori Break Points, Numerical Linear Algebra with Applications 3 (6), 513
Hansen P.C., Sekii T., Sibahashi H., 1992, SIAM J. Sci. Stat. Comput. 13, 1142
Kosovichev A.G., 1996, ApJ 469, L61
Morel P., Provost J., Berthomieu G., 1997, A&A 327, 349
Pijpers F.P., Thompson M.J., 1992, A&A 262, L33
Pijpers F.P., Thompson M.J., 1994, A&A 281, 231
Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P., 1992, Numerical Recipes (2nd Edition), Cambridge Univ. Press
Schou J., Christensen-Dalsgaard J., Thompson M.J., 1994, ApJ 433, 389
Sekii T., Shibahashi H., 1988, An inversion method based on the Moore-Penrose generalized inverse matrix. In: Seismology of the Sun and Sun-Like Stars, Rolfe E.J. (ed) ESA SP-286, ESA Publication Division, Noordwijk, the Netherlands, p. 521
Snodgrass H.B., Ulrich R.K., 1990, ApJ 351, 309
Spiegel E.A., Zahn J.-P., 1992, A&A 265, 106
Stepanov A.A., Christensen-Dalsgaard J., 1996, On the choice of trade-off parameter in helioseismic SOLA inversion. In: B.H. Jacobsen, K. Mosegaard & P. Sibani (eds) Proc. Interdisciplinary Inversion Conference, University of Aarhus, May 22-24 1995, Lecture Notes in Earth Sciences 63, Springer, p. 54
Thompson A.M., 1992, A&A 265, 289
Thompson A.M., Craig I.J.D., 1992, A&A 262, 359
Thompson M.J., Toomre J., et al., 1996, Science 272, 1300
Tikhonov A.N., Arsenin V.Y., 1977, Solutions of Ill-Posed Problems, Winston, Washington D.C.
Tomczyk S., Streander K., Card G., et al., 1995, Solar Phys. 159, 1
Vogel C.R., Oman M.E., 1996, SIAM Journal of Scientific Computing, vol. 17, No. 1
Vogel C.R., Oman M.E., 1997, IEEE Transactions on Image Processing, submitted
Wahba G., 1977, SIAM J. Numer. Anal. 14, 651

This article was processed by the author using Springer-Verlag LaTeX A&A style file *L-AA* version 3.

Contribution 4

On the use of nonlinear regularization in inverse methods for the solar tachocline profile determination

Corbard T., Berthomieu G., Provost J., Blanc-Féraud L.

Proceedings of the SOHO6/GONG98 workshop, ESA SP-418, 1998

ON THE USE OF NONLINEAR REGULARIZATION IN INVERSE METHODS FOR THE SOLAR TACHOCLINE PROFILE DETERMINATION

T. Corbard[1], G. Berthomieu[1], J. Provost[1] & L. Blanc-Féraud[2]

[1]Laboratoire Cassini, CNRS UMR 6529, OCA , BP 4229, 06304 Nice Cedex 4, France
[2]Projet Ariana, CNRS/INRIA/UNSA, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 Sophia Antipolis Cedex, France

ABSTRACT

Inversions of rotational splittings have shown that the surface layers and the so-called solar tachocline at the base of the convection zone are regions in which high radial gradients of the rotation rate occur. The usual regularization methods tend to smooth out every high gradients in the solution and may not be appropriate for the study of a zone like the tachocline. In this paper we use nonlinear regularization methods that are developed for edge-preserving regularization in computed imaging (e.g. Blanc-Féraud et al. 1995) and we apply them in the helioseismic context of rotational inversions.

1. INTRODUCTION

The existence of high gradients in the solar rotation profile near the surface and at the base of the convection zone in the so-called *solar tachocline* (Spiegel & Zahn 1992) has been revealed by the inversions of the rotational splittings (see e.g. Thompson et al. (1996) and Schou et al. (1998) for the last results). The tachocline represents a thin zone where the differential rotation of the convection zone becomes rigid in the radiative interior. It is thought to be the place from where the solar dynamo originates and its precise structure is an important test for angular momentum transport theories. More precisely, the thickness of the tachocline can be related to the horizontal component of the turbulent viscosity and may be used as an important observational constraint on the properties of the turbulence (Spiegel & Zahn 1992; Gough & Sekii 1998; Elliot 1997).

Several works have already been performed to infer the fine structure of the tachocline (Charbonneau et al. 1998; Kosovichev 1996, 1998; Basu 1997; Corbard et al. 1998a; Antia et al. 1998) using both forward analysis and inverse techniques. For the inverse approach, it may be interesting to change the global constraint which tends to smooth out every high gradients in the solution and to find a way to preserve such zones in the inversion process. A first attempt in this direction has been carried out (Corbard et al. 1998a) by using a nonlinear regularization term through the PP-TSVD method (Hansen & Mosegaard 1996). An investigation of the possibility to use the elaborate nonlinear techniques, developed for edge-preserving regularization in computed imaging, in helioseismic context is being developed by Corbard et al. (1998b). Here we present preliminary results obtained by this method for the tachocline.

Section 2. briefly recalls the relation between the solar internal rotation and the helioseismic measured frequency splittings and presents the corresponding discretized inverse problem. We discuss in Section 3. the non linear approach of regularization in inverse techniques and the computational aspects. In Section 4., the choice of the regularizing parameters for the particular case of the solar rotation inversion and the preliminary results obtained with LOWL (Tomczyck et al. 1995, 2 years of data) and MDI (144 days, Schou et al. 1998) data are presented.

2. FORMULATION OF THE PROBLEM

In this paper we consider the 1D problem of inferring the solar equatorial rotation profile $\Omega_{eq} = \Omega(r, 90^\circ)$ from sectoral splittings (i.e. $m = l$) (e.g. Duvall et al. 1984; Antia et al. 1996)

$$\frac{\nu_{nll} - \nu_{nl0}}{l} \simeq \int_0^{R_\odot} K_{nl}(r)\ \Omega_{eq}(r)\ dr, \qquad (1)$$

where l, n, m are respectively the degree, the radial order and the azimuthal order, r is the solar radius and $K_{nl}(r)$ are the so-called rotational kernels that have been calculated for each mode from a solar model taken from Morel et al. (1997).

This approximation of the 2D integral equation which relates the internal rotation to the splittings, is valid only for high degree modes (e.g. Corbard 1997) but the influence of low degree modes on the determination of the tachocline and upper layers is thought to be small. Moreover the rotation is known to be rigid or quasi rigid in the radiative interior.

We search a solution $\bar{\Omega}(r)$ as a piecewise linear func-

tion of the radius by setting:

$$\bar{\Omega}(r) = \sum_{p=1}^{N_p} \omega_p \psi_p(r) \quad \Omega \equiv (\omega_p)_{p=1,N_p} \tag{2}$$

where $\psi_p(r)$, $p = 1, N_p$ are piecewise straight lines ($N_p = 100$ in this work) between fixed break points distributed according to the density of turning points of modes (cf. Corbard et al. 1997). The discretization of Equation 1 leads to the matrix equation:

$$W = R\Omega, \tag{3}$$

where $W \equiv (W_i/\sigma_i)_{i=1,N}$ is the vector of the N observed frequency splittings W_i weighted by the standard deviation σ_i given by observers for each mode $i \equiv (n, l)$. No correlation between the different modes is assumed. The matrix R is defined by:

$$R \equiv (R_{ip})_{\substack{i=1,N \\ p=1,N_p}} \quad R_{ip} = \frac{1}{\sigma_i} \int_0^{R_\odot} K_i(r)\psi_p(r)dr \tag{4}$$

An inverse method should lead to a solution that is able to produce a good fit of the data. We define the goodness of the fit in chi-square sense by the χ^2 value obtained for any solution $\bar{\Omega}(r)$:

$$\chi^2(\bar{\Omega}(r)) = \sum_{nl} \left[\frac{W_i - \int_0^{R_\odot} K_i(r)\bar{\Omega}(r)dr}{\sigma_i} \right]^2, \tag{5}$$

which can be written in the discretized form:

$$\chi^2(\Omega) = \|R\Omega - W\|_2^2. \tag{6}$$

3. NON LINEAR REGULARIZATION

3.1. Euler equations

The inverse integral problem is an ill-posed problem and the minimization of only the χ^2 value generally leads to oscillatory solutions that are not 'physically acceptable'. So, a regularization technique must be used in the minimization process. A large class of these techniques can be expressed in the general form of the minimization of a criterion J over the unknown solution $\bar{\Omega}(r)$:

$$J(\bar{\Omega}(r)) = \chi^2(\bar{\Omega}(r)) + \lambda^2 \int_0^{R_\odot} \varphi\left(\left| \frac{d^q\bar{\Omega}(r)}{dr^q} \right| \right) dr, \tag{7}$$

The so-called trade-off parameter λ is chosen so that it establishes a balance between the goodness of the fit of the data and the constraint introduced on the solution (cf. Section 4.). The order q of the derivative is usually taken equal to one or two. The two choices can lead to similar results with the appropriate choice λ in the domains where the solution is well constrained by the data. In this work we consider only smoothing term with first derivative.

For a general φ-function, one can write the criterion Equation 7 in a discretized form:

$$J(\Omega) = \chi^2(\Omega) + \lambda^2 J_2(\Omega), \tag{8}$$

where $J_2(\Omega)$ represents the discretized regularization term defined by:

$$J_2(\Omega) = \int_0^{R_\odot} \varphi\left(\left| \frac{d\bar{\Omega}(r)}{dr} \right| \right) dr = \sum_{p=1}^{N_p-1} c_p \varphi\left(|L\Omega|_p \right). \tag{9}$$

In this equation $(c_p)_{p=1,N_p-1}$ represent the weights used for the integration rule, L is a discrete approximation of the first derivative operator, and $|L\Omega|_p$ is the absolute value of the p-component of the vector $L\Omega$. The expression of c_p and L are given in Corbard et al. (1998b) for the simple case of the polynomial expansion Equation 2

The minimization of the criterion $J(\Omega)$ leads to the following Euler equations (discretized form):

$$\nabla J(\Omega) = 0 \Longleftrightarrow (R^\top R + \lambda^2 L^\top B(\Omega) L)\Omega = R^\top W \tag{10}$$

B is a diagonal matrix. Its elements depend on the gradient of the solution at each grid point:

$$B = diag(b_p) \quad \text{with} \quad b_p = c_p \times \frac{\varphi'\left(|L\Omega|_p \right)}{2\,|L\Omega|_p} \tag{11}$$

Two choices for the φ-function lead to well known regularization strategies:

- $\varphi(t) = t^2$ corresponds to the traditional Tikhonov approach with first derivative whereas
- $\varphi(t) = t$ is known as the *Total Variation* (TV) regularization method (e.g. Acar & Vogel 1994). It has been shown that this regularization method is able to recover piecewise smooth solutions with steep gradients (Vogel & Oman 1996).

The use of a general nonquadratic φ-function will lead to a nonlinear problem which requires an appropriate iterative method to be solved.

3.2. Properties of the weight function $\frac{\varphi'(t)}{2t}$

From the Euler equation (Equations 10 and 11) we can see that the function $\varphi'(t)/2t$ acts as a weight function in the smoothing process: at each grid point the gradient of the solution is used as an argument of

this function in order to set locally more or less regularization. This suggests an iterative process where the gradient of the solution at a given step is used for the computation of the regularization term at the next step. Three properties of the weighting function $\varphi^{'}(t)/2t$ are required to obtain a satisfactory solution and to preserve high gradients (Charbonnier et al. 1997):

1. no smoothing for high gradients:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\varphi^{'}(t)}{2t} = 0 \tag{12}$$

2. Tikhonov smoothing for low gradients:

$$0 < \lim_{t\to 0} \frac{\varphi^{'}(t)}{2t} = M < \infty \tag{13}$$

3.

$$\frac{\varphi^{'}(t)}{2t} \text{ strictly decreasing to avoid instabilities.} \tag{14}$$

Either convex or non-convex φ-functions may be chosen (see Charbonnier et al. (1997) and Teboul et al. (1998) for examples in both cases). A non-convex function may be more suited for the search of high gradients. But this choice leads to some numerical difficulties and instabilities related to the existence of local minima and may induce a high sensibility of the inverse process to the regularization parameters. At the opposite the choice of a convex function avoids these numerical problems and is more suitable for relatively smooth transition (Blanc-Féraud et al. 1995).

3.3. The iterative algorithm: ARTUR

Following Charbonnier et al. (1997) the inversion using non linear regularizing criterion can be solved by an iterative scheme named ARTUR (Algebraic Reconstruction Technic Using Regularization) that is easy to implement: at each step k we calculate the regularization term using the derivative of the previous estimate Ω^{k-1} and we simply compute the new estimate Ω^k by solving the linear system:

$$\Big(R^\top R + \lambda^2 L^\top B(\Omega^{k-1}) L\Big)\Omega^k = R^\top W. \tag{15}$$

For a convex φ-function, the convergence of this so-called algorithm has been established (Charbonnier et al. 1997). This is therefore an adaptative regularization method which uses the information on the derivative of the solution obtained at each step in order to improve the regularization at the next step. This requires an initial guess Ω^0 for the solution but we will show in the next section that a constant solution can ever be used as the starting point.

An example of artificial discontinuous rotation has been used to test the algorithm. The corresponding rotational splittings have been computed according to Equation 1 with addition of Gaussian noise with a standard deviation taken for each mode from the formal error given in observational data (cf. Corbard et al. 1998a). A second set of artificial data with the same rotational law and standard deviations divided by $\sqrt{10}$ has also been used.

At each step of ARTUR algorithm the linear system (Equation 15) has been solved using an iterative conjugate gradient method using Ω^{k-1} as starting point. This leads to a very fast algorithm where the number of conjugate gradient iterations needed to solve the linear system decreases at each ARTUR step (i.e. as k increases). The algorithm is stopped when the norm of the relative difference between two solutions at two successive steps is below 10^{-6} i.e.:

$$\frac{||\Omega^k - \Omega^{k-1}||_2}{||\Omega^k||_2} \leq 10^{-6} \tag{16}$$

The results are given in Figures 1 and 2 which show examples of ARTUR steps (upper window). It is seen how the ARTUR solution, starting from a smoothed Tikhonov solution, becomes steeper at each step. Comparison between Figures 1 and 2 shows the effect of the errors in the data which leads to a smoothing of the edges of the discontinuity.

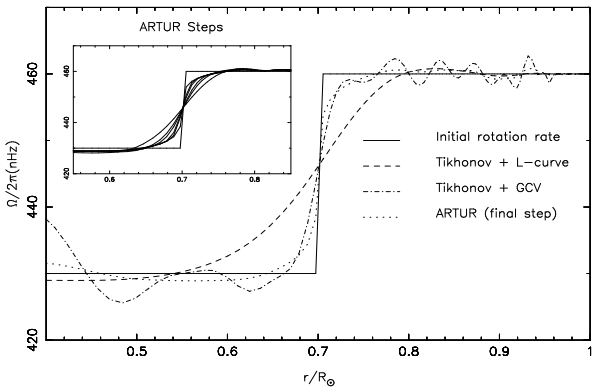


Figure 1. Solutions obtained by inverting splittings computed from a discontinuous one dimension rotation profile (full line) for the same mode set as in LOWL data and by adding some 'realistic' noise (see text). The standard Tikhonov solution is given for two different automatic choices of the regularizing parameter. The successive steps of ARTUR algorithm are given in the upper left window whereas the final step is shown on the main plot. The choice of the regularizing function and parameters for ARTUR algorithm are those discussed in Section 4. The solutions are plotted without error bars for clarity.

4. APPLICATION TO THE SOLAR ROTATION INVERSION

In the particular case of the solar tachocline, the uncertainty on the width of the transition zone is still large (see Table 2 of Corbard et al. (1998a) for a

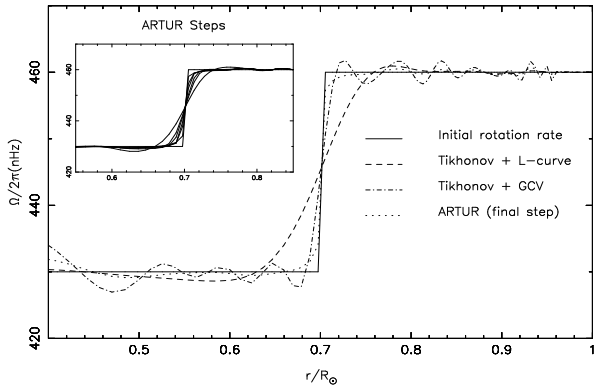


Figure 2. The same as Figure 1 but computed for a lower level of noise (standard deviations divided by $\sqrt{10}$). Comparison between Figures 1 and 2 shows the smoothing effect of the data noise level for the three methods.

summary of some previous works). Here we apply the non linear regularizing method to the LOWL and MDI sectoral splittings.

4.1. Choice of the φ-function

According to the previous discussion, we have chosen to consider a convex regularizing φ-function as Charbonnier et al. (1997):

$$\varphi(t) = 2\sqrt{t^2+1} - 2 \tag{17}$$

This function is close to the absolute value function used in TV regularization but has a quadratic behavior near 0 in order to smooth zones with small gradient moduli in addition to the linear behavior near infinity that preserves high gradient zones.

In addition to the usual regularizing parameter λ already introduced, we have included in the φ-function a parameter which scales the derivative of the solution. It allows to adapt the domain of gradient modulus where the solution is very weakly smoothed to the specific problem we consider.

$$J(\bar{\Omega}(r)) = \chi^2(\bar{\Omega}(r)) + \lambda^2 \int_0^{R_\odot} \varphi\left(\frac{1}{\delta}\left|\frac{d\bar{\Omega}(r)}{dr}\right|\right) dr \tag{18}$$

This simply leads to replace λ by $\overline{\lambda} = \lambda/\delta$ in Euler Equation 10 and to use

$$\varphi^{'}(t)/2t = 1/\sqrt{1+(t/\delta)^2} \tag{19}$$

where $t = |L\Omega|_p$ as weighting function in Equation 11.

Therefore we have to define a strategy to choose the two parameters $\overline{\lambda}$ and δ.

4.2. The choice of $\overline{\lambda}$

If the initial guess Ω^0 is a constant function, then, according to Equations 13 and 19, $M = 1$ and the solution at the first ARTUR step corresponds to a Tikhonov solution with $\overline{\lambda}$ as regularizing parameter. It has been shown in Corbard et al. (1998a) that the Generalized Cross Validation (GCV) strategy leads systematically to a less smoothed solution than the L-curve one (Hansen 1992) ($\lambda_{Lcurve} \simeq 100 * \lambda_{GCV}$ in that work) and therefore is more suited to the study of the tachocline. Nevertheless, this choice leads to spurious oscillations below and above the tachocline (see Figures 1, 2). As ARTUR algorithm will tend to enhance the high gradients found at the first step it is important to start with a solution smooth enough to avoid spurious oscillations with high gradients. At the opposite, the L-curve choice leads often to a solution which is too smooth and does not allow to exhibit the expected high gradients during the iterations. As the optimal choice of this parameter strongly depends on the level of noise included in the data (cf. Figures 1 and 2), it is important to define an automatic choice of this parameter so that we use the same strategy for different datasets or for different realizations of the noise. It consists in taking an intermediate value between the values of λ_{Lcurve} and λ_{GCV} for Tikhonov inversion. This has been used here to fix $\overline{\lambda}$ in ARTUR algorithm.

4.3. The choice of δ

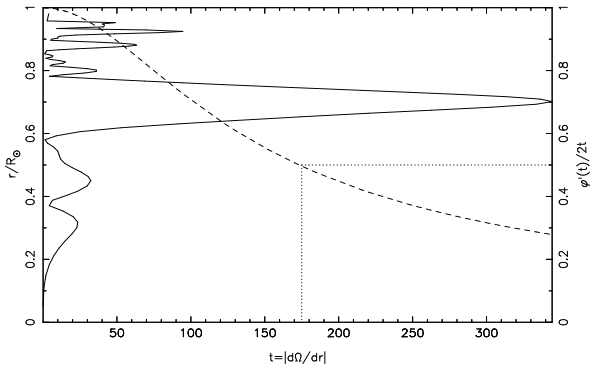


Figure 3. The full line shows the first derivative of a first step solution (cf. Figure 1) in ARTUR algorithm as a function of the fractional solar radius. For each value of the gradient, the dashed line gives the weight that will be given locally to the regularizing term at the second step of ARTUR algorithm. The dotted line indicates the gradient upon which the local regularization will be more than 50% smaller at the second step compared to the first step.

The parameter δ is introduced to adapt the shape of the weighting function to the gradient that we search to detect . Its value is chosen by looking at the derivative of the solution at the first iteration step. We have chosen for simplicity to keep this parameter constant during the iterations. Figure 3 shows as an example (full line) the first derivative of solution obtained at the first step by inverting artificial splittings which

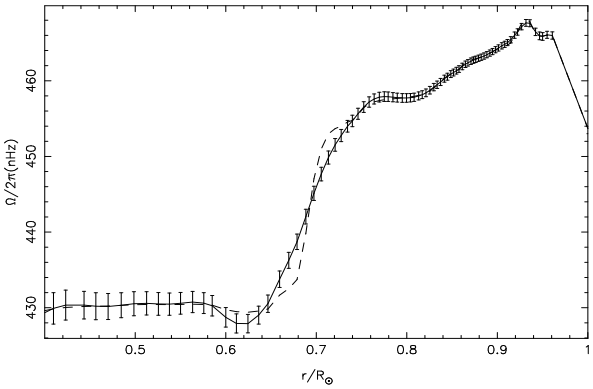


Figure 4. Solar equatorial rotation obtained by inverting LOWL data. Tikhonov solution is shown by the full line with error bars. The dashed line represents the final ARTUR step.

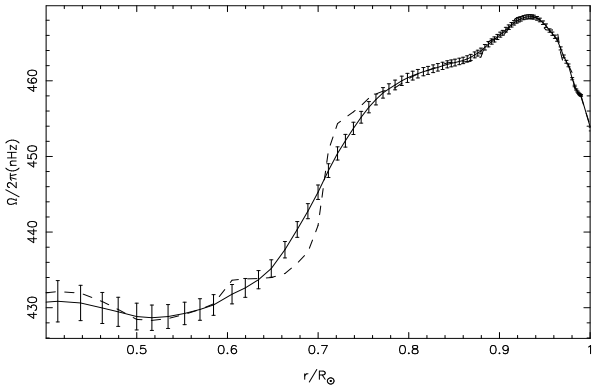


Figure 5. Same as Figure 5 for MDI data

have been computed for the discontinuous rotation law presented in the previous section (cf. Figure 1). The largest peak corresponds to the rapid variation in the tachocline, the smaller ones to spurious oscillations in the solution. The weighting function (Equation 19) is shown in dashed line for $\delta = 100$. According to Figure 3, the choice of $\delta = 100$ leads to regularize 50% less at the second step in that zones where the gradient of the first step solution is above ~ 175 nHz$/R_\odot$.

According to the previous results on solar rotation inversions, the width of the tachocline does not exceed 0.1 solar radius. This represents also the resolution reached at the tachocline localization ($\simeq 0.69R_\odot$) with a Tikhonov method using a regularizing parameter chosen near the corner of the L-curve. Furthermore we have a good estimate of the difference between the rotation rate above and below the transition ($\simeq 30$nHz in Corbard et al. (1998a)). Therefore we can estimate an order of magnitude of 300nHz$/R_\odot$ for the maximum gradient obtained at the first iteration of ARTUR process. This corresponds to the value in Figure 3. At the second step we want to preserve only high gradients i.e. to regularize less in that zones where high gradients have already been found at the first step. With our a priori knowledge of the maximum gradient at the first step (~ 300nHz, see also Figure 3), the choice of $\delta = 100$ sounds reasonable in the sense that it will tend to decrease the regularization especially in the tachocline. A smaller value would enhance the secondary peaks that may be induced by the data noise.

4.3.1. Results for the tachocline

Figures 1 and 2 show that ARTUR algorithm leads always to better results than Tikhonov inversion without 'local deconvolution' in the case of a discontinuous rotation profile. Furthermore, it is shown in Corbard et al. (1998b) that it can also lead to good results for simulated tachocline widths between 0.02 and $0.08R_\odot$.

Preliminary results have been obtained by inverting the sectoral splittings given by the 2 years LOWL data and the 144 days MDI data. The results of Tikhonov inversion and the last step of ARTUR algorithm are plotted in Figures 4 and 5. Tikhonov solutions are shown with error bars at each grid points which are deduced from the propagation of data noise through this linear process. ARTUR algorithm is nonlinear and therefore we can not compute formal errors in the same way.

In order to have an estimate of the uncertainties on the tachocline parameters derived by ARTUR algorithm, Monte-Carlo simulations with artificial splittings have been performed by Corbard et al. (1998b). The rotation profiles were taken as erf functions with different 'initial widths'. Each 'inferred width' is the mean value of the results obtained by fitting directly the solutions by an erf function, for 500 realizations of input errors. Error bars are estimated from a 68.3% confidence interval. From this study it seems that an uncertainty of $\pm 0.02R_\odot$ on the tachocline width can be reached with both ARTUR algorithm and Tikhonov inversion with a 'local deconvolution' using the averaging kernels computed at the center of the transition (see Corbard et al. 1998b).

The width of the tachocline estimated from LOWL data and by using ARTUR algorithm is $0.05 \pm 0.02R_\odot$ in good agreement with the value of $0.05 \pm 0.03R_\odot$ found for the same data in Corbard et al. (1998a) by studying systematically the effect of regularization on the determination of tachocline parameters for three inverse methods. A preliminary study of MDI data leads to a slightly larger width of $0.08R_\odot$ but Monte-Carlo simulation have not yet been performed that allows to give an estimate of the uncertainty on this value. For both dataset the widths obtained from Tikhonov inversions after 'local deconvolution' using averaging kernels are always larger ($\sim 0.1R_\odot$) than the estimates obtained with ARTUR algorithm.

We note that these estimates of the tachocline width have been obtained by fitting the solutions by an erf function between 0.4 and $0.8R_\odot$ and this may be better adapted to the shape of LOWL solution (Figure 4) which presents a step between 0.75 and $0.8R_\odot$. This step is not found with MDI data and this may explain the larger width found by our fit with these

data. One possibility for future work is to change our fitting function i.e. to change our definition of the tachocline width. However we have also to explain the different behavior of the two solutions near $0.8R_\odot$ and to look if this remains with longer time series of MDI experiment.

ACKNOWLEDGMENTS

We acknowledge SOI team and S. Tomczyk for allowing the use of MDI and LOWL data. SoHO is a project of international cooperation between ESA and NASA. This work has been performed using the computing facilities provided by the program "Simulations Interactives et Visualisation en Astronomie et Mécanique" (SIVAM, OCA, Nice) and by the "Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique" (IDRIS, Orsay). T. Corbard thanks the conference organizers for financial support.

REFERENCES

Acar, R., Vogel, C.R. 1994, Inverse Problems 10(6), 1217

Antia, H.M., Basu, S., Chitre, S.M. 1998, MNRAS, submitted

Antia, H.M., Chitre, S.M., Thompson, M.J. 1996, A&A 308, 656

Basu, S. 1997, MNRAS 288, 572

Blanc-Féraud, L., Charbonnier, P., Aubert, G., Barlaud, M. 1995, In: IEEE Proceedings of the 2nd International Conference of Image Processing, Washington DC, USA, p. 474

Charbonneau, P., Christensen-Dalsgaard, J., Henning, R., et al. 1998, In: Provost J., Schmider F.X. (eds.) IAU Symp. 181: Sounding Solar and Stellar Interior (poster volume). OCA & UNSA, Nice, p. 161

Charbonnier, P., Blanc-Féraud, L., Aubert, G., Barlaud, M. 1997, IEEE Trans. on Image Processing 6(2), 298

Corbard, T. 1997, In: Proceedings of IX IRIS meeting, in press

Corbard, T., Berthomieu, G., Morel, P., et al. 1997, A&A 324, 298

Corbard, T., Berthomieu, G., Provost, J., Morel, P. 1998a, A&A 330, 1149

Corbard, T., Blanc-Féraud, L., Berthomieu, G., Provost, J. 1998b, A&A, to be submitted

Duvall Jr, T.L., Dziembowski, W.A., Goode, P.R., et al. 1984, Nature 310, 22

Elliot, J.R. 1997, A&A 327, 1222

Gough, D.O., Sekii, T. 1998, In: Provost J., Schmider F.X. (eds.) IAU Symp. 181: Sounding Solar and Stellar interior (poster volume). OCA & UNSA, Nice, p. 93

Gough, D.O., Thompson, M.J. 1991, The inverse problem. In: Cox A.N., Livingston W.C., Matthews M. (eds.) Solar Interior and Atmosphere. The University of Arizona Press, Tucson, p. 519

Hadamard, J. 1923, Lectures on the Cauchy Problem in linear Partial Differential Equation, Yale University Press, New Haven

Hansen, C.J., Cox, J.P., Van-Horn, H.M. 1977, ApJ 217, 151

Hansen, P.C. 1992, SIAM Review 34, 561

Hansen, P.C., Mosegaard K. 1996, Numerical Linear Algebra with Applications 3(6), 513

Hansen, P.C., Sekii, T., Sibahashi, H. 1992, SIAM J. Sci. Stat. Comput. 13, 1142

Kirsch, A. 1996, An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems, Springer-Verlag, New York

Kosovichev, A.G. 1996, ApJ 469, L61

Kosovichev, A.G. 1998, In: Provost J., Schmider F.X. (eds.) IAU Symp. 181: Sounding Solar and Stellar Interior (poster volume). OCA & UNSA, Nice, p. 97

Morel, P., Provost, J., Berthomieu, G. 1997, A&A 327, 349

Schou, J., et al. 1998, ApJ, submitted

Spiegel, E.A., Zahn, J.P. 1992, A&A 265, 106

Teboul, S., Blanc-Féraud, L., Aubert, G., Barlaud M. 1998, IEEE Trans. on Image Processing 7(3)

Thompson, M.J. et al. 1996, Science 272, 1300

Tikhonov, A.N. 1963, Sov. Maths. Doklady 4, 1035

Tomczyk, S., et al. 1995, Solar Phys. 159, 1

Vogel, C.R., Oman, M.E. 1996, SIAM Journal of Scientific Computing 17(1)

Article 4

Non linear regularization for helioseismic inversions Application for the study of the solar tachocline

Corbard T., Blanc-Féraud L., Berthomieu G., Provost J.

soumis à Astronomy and Astrophysics le 31 Août 1998

ASTRONOMY
AND
ASTROPHYSICS

Non linear regularization for helioseismic inversions

Application for the study of the solar tachocline

T. Corbard[1], **L. Blanc-Féraud**[2], **G. Berthomieu**[1], **and J. Provost**[1]

[1] Laboratoire G.-D. Cassini, CNRS UMR 6529, Observatoire de la Côte d'Azur, BP 4229, 06304 Nice Cedex 4, France
[2] Projet Ariana, CNRS/INRIA/UNSA, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 Sophia Antipolis Cedex, France

Received 31 08 1998 / Accepted ?? ?? 1998

Abstract. Inversions of rotational splittings have shown that there exists a zone called solar tachocline at the base of the convection zone in which high radial gradients of the rotation rate occur. The usual linear regularization methods tend to smooth out every high gradients in the solution and may not be appropriate for the study of this zone. In this paper we apply in the helioseismic context of rotation inversions, regularization methods that have been developed for edge-preserving regularization in computed imaging. It is shown from Monte-Carlo simulations that this approach can lead directly to results similar to those reached by linear inversions but which required some assumptions on the shape of the transition in order to be deconvolved. The application of this method to LOWL data leads to a very thin tachocline. From the discussions on the parameters entering the inversion and the Monte-Carlo simulations, our conclusion is that the tachocline width is very likely below $0.05\,R_\odot$ which tends to lower our previous estimate of $0.05 \pm 0.03\,R_\odot$ obtained from the same dataset (Corbard et al. 1998).

Key words: Sun: rotation – Methods: numerical – Sun: interior – Sun: oscillations

1. Introduction

Helioseismic inverse problems consist in using the properties (namely frequencies or frequency splittings) of the oscillation pattern observed at the surface of the Sun in order to infer the internal variation of solar physical properties like the rotation rate, the sound speed or the density (see e.g. Gough & Thompson (1991) for a review). These problems can be expressed in terms of integral equations which represent ill-posed problems in the sense of Hadamard (1923).

The traditional approach used to override this difficulty consists in *regularizing the problem* by adding some a priori information on the solution (e.g. Kirsch 1996; Craig & Brown 1986). The well known Tikhonov regularization method (Tikhonov 1963) assumes a global smoothness of the solution by minimizing the norm of its derivative at a given order. Nevertheless, inversions for the solar rotation have shown (see e.g. Thompson et al. (1996) and Schou et al. (1998) for the last results) that high gradients exist in the solar rotation profile near the surface and at the base of the convection zone in the so-called *solar tachocline* (Spiegel & Zahn 1992).

Therefore the global smoothness initial a priori may not be appropriate for the study of these zones which are of particular interest for the study of solar dynamics. As a matter of fact, the tachocline represents a thin zone where the differential rotation of the convection zone becomes rigid in the radiative interior. It is thought to be the place from where the solar dynamo originates and its precise structure is an important test for angular momentum transport theories. More precisely, the thickness of the tachocline can be related to the horizontal component of the turbulent viscosity and may be used as an important observational constraint on the dynamics properties of the turbulence (Spiegel & Zahn 1992; Gough & Sekii 1998; Elliott 1997).

Several works have already been performed to infer the fine structure of the tachocline (Kosovichev 1996,1998; Basu 1997; Charbonneau et al. 1998; Antia et al. 1998; Corbard et al. 1998) using both forward analysis and inverse techniques. For the inverse approach, it may be interesting to change the global constraint which tends to smooth out every high gradients in the solution and to find a way to preserve these zones in the inversion process. A first attempt in that direction has been carried out (Corbard et al. 1998) by using a nonlinear regularization term through the Piecewise Polynomials-Truncated Singular Value Decomposition (PP-TSVD) method (Hansen & Mosegaard 1996) based on the use of a 1-norm. Nevertheless it has been shown that this method can produce solutions with sharp discontinuities even if the width of the tachocline is relatively large. This leads to very large error bars on the inferred width of high gradient zones and makes difficult the interpretation of the results obtained from real observations. Nevertheless, some more elaborate nonlinear technics have been developed for edge-preserving regularization in computed imaging and, in this paper, we investigate their use in helioseismic context.

Section 2 briefly recalls how the solar internal rotation can be related to the frequency splittings determined from helio-

Send offprint requests to: T. Corbard
Correspondence to: corbard@obs-nice.fr

seismic measurements and introduces the corresponding discretized inverse problem. The non linear approach of regularization in inverse techniques is introduced in Sect. 3 and the computational aspects are discussed in Sect. 4. For the particular case of the solar rotation inversion and the search of the tachocline width, the Sects. 5 and 6 show how the regularizing parameters have been chosen and give the results of Monte-Carlo simulations for the estimation of the uncertainty on the tachocline width. Finally, the results obtained with LOWL data are discussed in Sect. 7 and we conclude in Sect. 8.

2. The astrophysical problem and its discretization

The internal rotation $\Omega(r,\theta)$ of the Sun expressed as a function of the solar radius r and colatitude θ can be related (Hansen et al. 1977), through a 2D integral equation, to the observed frequency splittings $\Delta\nu_{nlm}$ where each mode of solar acoustic oscillations is characterized by the degree l, the radial order n and the azimuthal order m ($-l \leq m \leq l$).

In this work, we focus on the application of non linear inversion to the description of the tachocline profile in the equatorial plane. The so-called 'tachocline parameters' are obtained by fitting, between $0.4R_\odot$ and $0.8R_\odot$, the solution $\bar{\Omega}(r)$ of the inversion by an erf function of the form:

$$\Omega_{fit}(r) = \bar{\Omega}_0 + \frac{\bar{\Omega}_1 - \bar{\Omega}_0}{2}\left(1 + erf\left(\frac{r-\bar{r}_c}{0.5\bar{w}}\right)\right) + \bar{\alpha}(r-0.7). \quad (1)$$

This defines five tachocline parameters: $\bar{\Omega}_0$, $\bar{\Omega}_1$, $\bar{r}_c$, $\bar{w}$ and $\bar{\alpha}$. The coefficient $\bar{\alpha}$ has been introduced, following Antia et al. (1998), in order to take into account the linear behaviour sometimes found for the rotation rate in the convection zone just above the transition in the equatorial plane (see Sect. 7).

Thus, we consider the 1D problem of inferring the solar equatorial rotation profile $\Omega_{eq} = \Omega(r, 90°)$ from sectoral splittings (i.e. frequency splittings for modes with $m = l$) (e.g. Duvall Jr et al. 1984; Antia et al. 1996)

$$\frac{\nu_{nll} - \nu_{nl0}}{l} \simeq \int_0^{R_\odot} K_{nl}(r)\, \Omega_{eq}(r)\, dr, \quad (2)$$

where $K_{nl}(r)$ are the so-called rotational kernels that have been calculated for each mode from a solar model taken from Morel et al. (1997). They are assumed to be known exactly in the following.

This approximation of the 2D integral equation is valid only for high degree modes (e.g. Corbard 1997) but the influence of the low degree modes on the determination of the position and width of the tachocline and the rotation rate of the upper layers is thought to be small.

We discretize Eq. (2) by using a polynomial expansion method which leads to the matricial equation:

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{R\Omega}, \quad (3)$$

where we have defined the vector $\boldsymbol{W} \equiv (W_i/\sigma_i)_{i=1,N}$, of N observed frequency splittings W_i weighted by the standard deviation σ_i for each mode $i \equiv (n,l)$. The sectoral splittings have been approximated by the sum of the odd a-coefficients of their expansion on orthogonal polynomials provided by observers. The standard deviations have been computed straightforwardly from the uncertainties quoted on each a-coefficient. In this work, no correlation between the different modes is assumed.

We search a solution $\bar{\Omega}(r)$ as a piecewise linear function of the radius by setting:

$$\bar{\Omega}(r) = \sum_{p=1}^{N_p} \omega_p \psi_p(r) \qquad \boldsymbol{\Omega} \equiv (\omega_p)_{p=1,N_p} \quad (4)$$

where $\psi_p(r)$, $p = 1, N_p$ are piecewise straight lines ($N_p = 100$ in this work) between fixed break points distributed according to the density of turning points of modes (cf. Corbard et al. 1997). The discretization matrix $\boldsymbol{R}$ is then defined by:

$$\boldsymbol{R} \equiv (R_{ip})_{\substack{i=1,N \\ p=1,N_p}} \qquad R_{ip} = \frac{1}{\sigma_i}\int_0^{R_\odot} K_i(r)\psi_p(r)dr \quad (5)$$

An inverse method should lead to a solution that is able to produce a good fit of the data. We define the goodness of the fit in chi-square sense by the χ^2 value obtained for any solution $\bar{\Omega}(r)$:

$$\chi^2(\bar{\Omega}(r)) = \sum_{nl}\left[\frac{W_i - \int_0^{R_\odot} K_i(r)\bar{\Omega}(r)dr}{\sigma_i}\right]^2, \quad (6)$$

which can be written in the discretized form:

$$\chi^2(\boldsymbol{\Omega}) = ||\boldsymbol{R\Omega} - \boldsymbol{W}||_2^2. \quad (7)$$

3. Regularization: the non linear approach

Unfortunately, the inverse integral problem is an ill-posed problem and the minimization of only the χ^2 value generally leads to oscillatory solutions that are not 'physically acceptable' in that sense that they do not correspond to our a priori knowledge on the shape of the solution. So, we have to use regularization technics i.e. to introduce a priori informations in the minimization process. A large class of these technics, can be expressed in the general form of the minimization of a criterion J over the unknown solution $\bar{\Omega}(r)$:

$$J(\bar{\Omega}(r)) = \chi^2(\bar{\Omega}(r)) + \lambda^2 \int_0^{R_\odot} \varphi\left(\left|\frac{d^q\bar{\Omega}(r)}{dr^q}\right|\right) dr, \quad (8)$$

where λ is the so-called trade-off parameter which is chosen so that it establishes a balance between the goodness of the fit of the data and the constraint introduced on the solution (cf. Sect. 5). The order q of the derivative is usually taken equal to one or two. The two choices can lead to similar results with the appropriate choice of the regularizing parameter λ in the domains where the solution is well constrained by the data. However these two choices correspond to two different a priori on the solution. As the rotation is known to be quasi-rigid the radiative interior (at least down to $0.4R_\odot$), we have chosen

in this work to use the first derivative. We note however that the method described below can easily be generalized for any choice of the derivative.

Two choices for the φ-function lead to well known regularization strategies:

- $\varphi(t) = t^2$ leads to the traditional Tikhonov approach with first derivative whereas
- $\varphi(t) = t$ is known as the *Total Variation* (TV) regularization method (e.g. Rudin et al. 1992; Acar & Vogel 1994). This approach uses no more the square but instead the absolute value of the gradient of the solution. It has been shown that the solution is searched in BV space composed of Bounded Variation functions which admit discontinuity points. This regularization method is therefore able to recover piecewise smooth solutions with steep gradients (see e.g. Dobson & Santosa 1994; Vogel & Oman 1996, 1997). The PP-TSVD method of Hansen & Mosegaard (1996), already used in helioseismic context in Corbard et al. (1998) can be seen as a 'truncated version' (in that sense that the regularizing parameter is a discrete truncation parameter) of the TV regularization in the same way as the MTSVD method introduced by Shibahashi & Sekii (1988) (see also: Hansen et al. 1992; Corbard et al. 1998) was a 'truncated version' of the Tikhonov regularization.

For a general φ-function, one can write the criterion Eq. (8) in a discretized form:

$$J(\mathbf{\Omega}) = \chi^2(\mathbf{\Omega}) + \lambda^2 J_2(\mathbf{\Omega}), \tag{9}$$

where $J_2(\mathbf{\Omega})$ represents the discretized regularization term defined by:

$$\int_0^{R_\odot} \varphi\left(\left|\frac{d\bar{\Omega}(r)}{dr}\right|\right) dr = J_2(\mathbf{\Omega}) = \sum_{p=1}^{N_p-1} c_p \varphi\left(\left|\boldsymbol{L\Omega}\right|_p\right). \tag{10}$$

In this equation $(c_p)_{p=1,N_p-1}$ represent the weights used for the integration rule and $\boldsymbol{L}$ is a discrete approximation of the first derivative operator. $\left|\boldsymbol{L\Omega}\right|_p$ is the absolute value of the pth component of the vector $\boldsymbol{L\Omega}$. The expression of c_p and $\boldsymbol{L}$ are given in Appendix A for the simple case of the polynomial expansion Eq. (4)

The minimization of the criterion $J(\mathbf{\Omega})$ over each component ω_p of $\mathbf{\Omega}$ leads to the following Euler equations (discretized form):

$$\nabla J(\mathbf{\Omega}) = 0 \Longleftrightarrow (\boldsymbol{R}^\top \boldsymbol{R} + \lambda^2 \boldsymbol{L}^\top \boldsymbol{B}(\mathbf{\Omega}) \boldsymbol{L})\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{R}^\top \boldsymbol{W} \tag{11}$$

$\boldsymbol{B}$ being a diagonal matrix with elements that depend on the gradient of the solution at each grid point:

$$\boldsymbol{B} = diag(b_p) \quad \text{with} \quad b_p = c_p \times \frac{\varphi'\left(\left|\boldsymbol{L\Omega}\right|_p\right)}{2\left|\boldsymbol{L\Omega}\right|_p} \tag{12}$$

For $\varphi(t) = t^2$, $\boldsymbol{B}$ is independent of $\mathbf{\Omega}$ and these normal equations reduce to a linear system which corresponds to the usual Tikhonov regularization with first derivative. On the contrary, for a general φ-function, this leads to a nonlinear problem which requires an appropriate iterative method to be solved.

Now, with this general expression for the normal equations, the question is for our particular problem: what properties must the φ-functions satisfy to ensure the preservation of high gradients in the solution? The next section shows how the theoretical works developed in the field of computed imaging gives an answer to this question and leads to an algorithm for solving the non linear Euler equation that is easy to implement.

4. On the choice of the φ-function and the algorithm for solving nonlinear equation

4.1. Properties of the weighting function $\frac{\varphi'(t)}{2t}$

From the Euler equation (Eqs. (11) and (12)) we can see that the function $\varphi'(t)/2t$ acts as a weighting function in the smoothing process: at each grid point the gradient of the solution is used as an argument of this function in order to set locally more or less regularization. This suggests an iterative process where the gradient of the solution at a given step is used for the computation of the regularization term at the next step. We will show in the following that we can derive some basic properties of the weighting function so that high gradients can be preserved and such that an iterative algorithm for solving the Euler equation is possible. First let us look at the behaviour of the weighting function at the limits of low and high gradients:

- For low gradients we want to keep a Tikhonov regularization. From Eq. (11) this is the case if $\varphi'(t)/2t$ is a non null constant function.
- At the opposite, for high gradients we want to remove smoothing. This happens when $\varphi'(t)/2t$ is close to zero.
- Another property that sounds reasonable is to choose a decreasing function between these two limits. Furthermore, in order to avoid numerical instabilities we will choose only strictly decreasing weighting functions.

Therefore the choice of the φ function must be made taking into account the following three properties needed on the weighting function $\varphi'(t)/2t$ (Charbonnier et al. 1994, 1997):

1. Tikhonov smoothing for low gradients:
$$0 < \lim_{t \to 0} \frac{\varphi'(t)}{2t} = M < \infty \tag{13}$$
2. no smoothing for high gradients:
$$\lim_{t \to \infty} \frac{\varphi'(t)}{2t} = 0 \tag{14}$$
3. $\frac{\varphi'(t)}{2t}$ strictly decreasing on $[0, +\infty[$ to avoid instabilities. (15)

Within these conditions, the φ-function may be chosen either convex (Green 1990; Charbonnier et al. 1994) or non-convex (Perona & Malik 1990; Geman & McClure 1985;

Hebert & Leahy 1989) (see also Charbonnier et al. (1997) and Teboul et al. (1998) for examples in both cases). A non-convex function may be more suited for the search of high gradients. Nevertheless this choice leads to some numerical difficulties and instabilities related to the existence of local minima and this may induce a high sensibility of the inverse process to the choice of the regularization parameters (Blanc-Féraud et al. 1995). At the opposite the choice of a convex function may avoid these numerical problems and is more suitable for relatively smooth transition (Blanc-Féraud 1998).

We note that in the case of the TV regularization (or equivalently the PP-TSVD method) the function $\varphi(t) = t$ does not satisfy the first property (Eq. 13). This may explain the difficulties encountered by using this method (Corbard et al. 1998). For smooth transition, the dispersion of the results for different realizations of the noise became large indicating some instabilities in the inverse process. In light of the above formalism, this may be related to the non derivability of the corresponding weighting function $\varphi'(t)/2t$ at $t = 0$, which can lead to numerical instabilities.

4.2. The iterative algorithm: ARTUR

With these three conditions (13)(14)(15) it has been shown by Charbonnier et al. (1994, 1997) that the non linear criterion can be solved by using an iterative scheme named ARTUR (Algebraic Reconstruction Technic Using Regularization) that is easy to implement: at each step k we calculate the regularization term using the derivative of the previous estimate $\boldsymbol{\Omega}^{k-1}$ and we simply compute the new estimate $\boldsymbol{\Omega}^k$ by solving the linear system:

$$\left(\boldsymbol{R}^\top \boldsymbol{R} + \lambda^2 \boldsymbol{L}^\top \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\Omega}^{k-1}) \boldsymbol{L}\right) \boldsymbol{\Omega}^k = \boldsymbol{R}^\top \boldsymbol{W}. \tag{16}$$

When we use a convex φ-function, the convergence of this so-called *half quadratic algorithm* (minimization of a quadratic criterion at each step (Geman & Yang 1995)) to the minimum of the criterion Eq. (8) has been established (Charbonnier et al. 1997). This is also an adaptative regularization method which uses the information on the derivative of the solution obtained at each step in order to improve the regularization at the next step. This requires an initial guess for the solution but we will show in the next section that a constant solution can ever be used as the starting point. Figs. 1 and 2 show examples of ARTUR steps in the case of a discontinuous rotation rate and for two different levels of noise. At each step of ARTUR algorithm the linear system Eq. (16) has been solved using an iterative conjugate gradient method with Jacobi preconditioner (see e.g. Golub & Van-Loan 1989; Barrett et al. 1994) using $\boldsymbol{\Omega}^{k-1}$ as starting point. This leads to a very fast algorithm where the number of conjugate gradient iterations needed to solve the linear system decreases at each ARTUR step. The algorithm is stopped when the 2-norm of the relative difference between two solutions at two successive steps is below 10^{-6} i.e.:

$$\frac{||\boldsymbol{\Omega}^k - \boldsymbol{\Omega}^{k-1}||_2}{||\boldsymbol{\Omega}^k||_2} \leq 10^{-6} \tag{17}$$

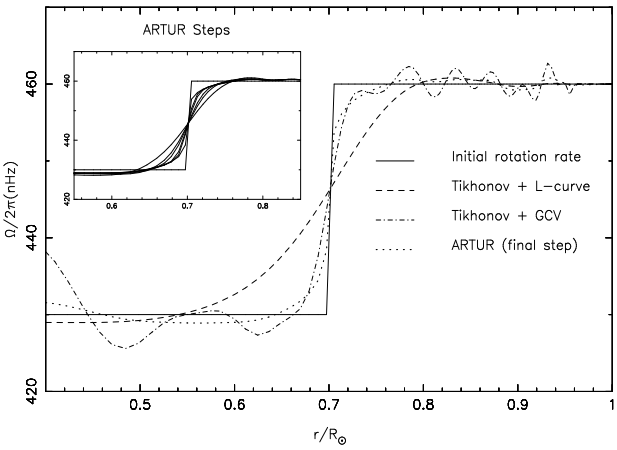


Fig. 1. Solutions obtained by inverting splittings computed from a discontinuous one dimension rotation profile (full line) for the same modeset as in LOWL data and by adding some 'realistic' noise (see text). The standard Tikhonov solution is given for two different automatic choices of the regularizing parameter. The successive steps of ARTUR algorithm are given in the upper left window whereas the final step is shown on the main plot. The choice of the regularizing function and parameters for ARTUR algorithm are those discussed in Sect. 5. The solutions are plotted without error bars for clarity.

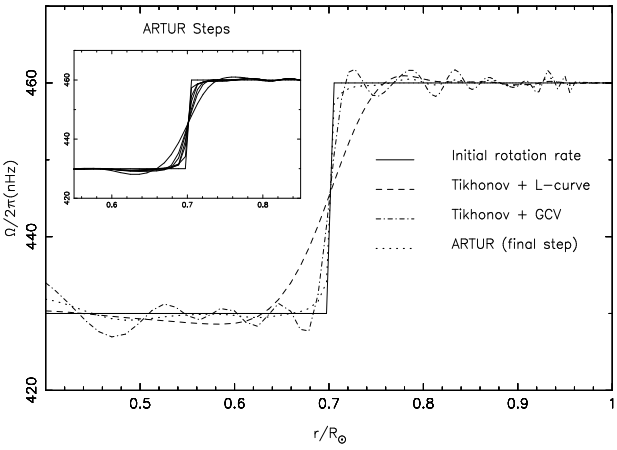


Fig. 2. The same as Fig. 1 but computed for a lower level of noise (standard deviations divided by $\sqrt{10}$). Comparison between Figs. 1 and 2 show the smoothing effect of the data noise level for the three methods.

5. The choice of φ-function and regularizing parameters for rotation inversion

5.1. The φ-function

In the particular case of the determination of the solar tachocline profile, the uncertainty on the width of the transition zone is still large (see Table 2 of Corbard et al. (1998) for a summary of some previous works). Therefore, according to the previous discussion, we have chosen to consider a convex

regularizing φ-function and we have used the one defined in Charbonnier et al. (1994, 1997):

$$\varphi(t) = 2\sqrt{t^2+1} - 2 \tag{18}$$

This function is close to the absolute value function used in TV regularization and PP-TSVD method but has a quadratic behaviour near 0 that satisfy the property Eq. (13) on the contrary of the absolute value.

5.2. The regularizing parameters

In addition to the usual regularizing parameter λ already introduced, it is necessary to include, in the φ-function, a parameter which allows to fix the threshold on the gradient modulus of the solution under which it is smoothed and upper which it is preserved. The criterion to be minimized becomes:

$$J(\bar{\Omega}(r)) = \chi^2(\bar{\Omega}(r)) + \lambda^2 \int_0^{R_\odot} \varphi\left(\frac{1}{\delta}\left|\frac{d\bar{\Omega}(r)}{dr}\right|\right) dr \tag{19}$$

This simply leads to replace λ by $\overline{\lambda} = \lambda/\delta$ in Euler Eq. (11) and to use

$$\varphi^{'}(t)/2t = 1/\sqrt{1+(t/\delta)^2} \tag{20}$$

where $t = \left|(\boldsymbol{L\Omega})_p\right|$ as weighting function in Eq. (12).

Therefore we have to define a strategy to choose the two parameters $\overline{\lambda}$ and δ. The following two sections describe the principles followed for these choices and that have been used for simulations with artificial datasets. The application to real data is discussed in Sect. 7.

5.2.1. The choice of $\overline{\lambda}$: using automatic strategies

If the initial guess is a constant function, then, according to the property 1 (Eq. 13) and Eq. (20), $M = 1$ and the solution at the first ARTUR step corresponds to a Tikhonov solution with $\overline{\lambda}$ as regularizing parameter. It has been shown in Corbard et al. (1998) that the Generalized Cross Validation (GCV) strategy (Wahba 1977) for the choice of the regularizing parameter in Tikhonov inversions leads systematically to better results concerning the evaluation of the tachocline parameters compared to the L-curve strategy (Hansen 1992). In fact, the GCV strategy leads systematically to a less smoothed solution than the L-curve one ($\lambda_{Lcurve} \simeq 100 * \lambda_{GCV}$ in that work) and therefore is more suited to the study of a zone with high gradients. Nevertheless, because of the low global regularization, this choice may lead to spurious oscillations below and above the tachocline (see Figs. 1, 2). ARTUR algorithm will tend to enhance the high gradients found at the first step. Therefore it is important to start with a solution smooth enough to avoid spurious oscillations with high gradients. The GCV choice for $\overline{\lambda}$ may therefore be not well adapted for ARTUR initial step and some experiment has shown that, at the opposite, the L-curve choice leads often to a solution which is too smooth and does not allow to exhibit the expected high gradients during the iterations. Nevertheless, the optimal choice of this parameter strongly depends on the level of noise included in the data and therefore it is important to define an automatic choice of this parameter so that we use the same strategy for different realizations of the noise in Monte-Carlo simulations (cf. Sect. 7). For these simulations we have chosen to compute the two previous optimal choice λ_{Lcurve} and λ_{GCV} for Tikhonov inversion and to take an intermediate value to fix $\overline{\lambda}$ in ARTUR algorithm.

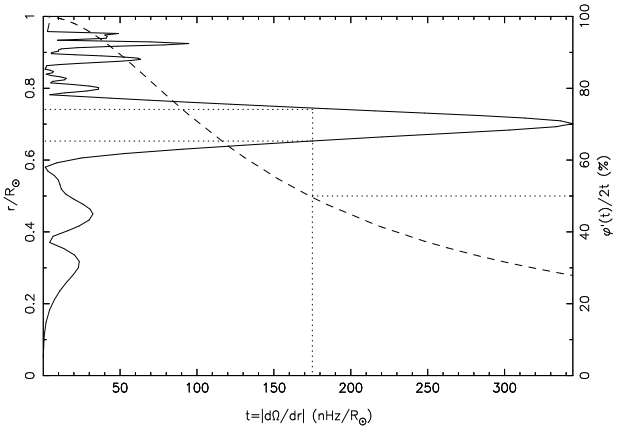


Fig. 3. The full line shows the first derivative of a first step solution (cf. Fig. 1) in ARTUR algorithm as a function of the fractional solar radius. For each value of the gradient, the dashed line gives the weight that will be given locally to the regularizing term at the second step of ARTUR algorithm. The dotted line indicates the gradient upon which the local regularization will be more than 50% smaller at the second step compared to the first step. This will occur for radius between $0.65R_\odot$ and $0.75R_\odot$.

5.2.2. The choice of δ: using our a priori knowledge on the searched gradients

The parameter δ has been introduced in order to adapt the shape of the weighting function to the gradient that we search to detect in a particular application. We have chosen for simplicity to keep this parameter constant during the iterations. As we start the iterative process with a constant guess rotation, the first step is independent of δ and thus we can use the solution obtained after this initial step in order to adapt the parameter δ to the gradients found in the first step solution. As we have shown that the first step of ARTUR algorithm correspond to a classic Tikhonov inversion, this way of choosing δ can be seen as a way to use our a priori knowledge (as given by Tikhonov inversion) of the searched gradients.

It is generally admitted that the width of the tachocline does not exceed 0.1 solar radius which is also the resolution typically reached near the tachocline localization ($\simeq 0.69R_\odot$) with a Tikhonov method applied to the current datasets. Furthermore we have a good estimate of the difference between the rotation rate above and below the transition ($\simeq 30$nHz in Corbard et al. (1998)). Therefore we can estimate a level of $300\text{nHz}/R_\odot$ for

the maximum gradient obtained at the first iteration of ARTUR process.

Figure 3 shows (full line) the first derivative of solution obtained at the first step by inverting artificial splittings which have been computed for a discontinuous rotation law (cf. Fig. 1) with a step of 30nHz and by adding some Gaussian noise with a standard deviation taken for each mode from the formal error given in LOWL data (cf. Corbard et al. 1998). The weighting function Eq. (20) is shown in dashed line for $\delta = 100$. At the second step we want to preserve only high gradients i.e. to regularize less in that zones where high gradients have already been found at the first step. For example, according to Fig. 3, the choice of $\delta = 100$ leads to regularize 50% less at the second step in that zones where the gradient of the first step solution is above ~ 175 nHz/$R_\odot$. For the particular realization of the noise introduced in artificial data this choice of $\delta = 100$ sounds reasonable in that sense that it will tend to decrease the regularization especially in the transition zone. A smaller value would enhance the secondary peaks that are induced by the data noise.

The maximum gradient obtained, at the first step, with artificial dataset (350nHz on Fig. 3) corresponds approximately to our previous estimate of 300nHz expected for real data. For the Monte-Carlo simulations done in order to estimate the errors (cf. Sect 6) the parameter δ has been fixed to $\delta = 100$. Nevertheless, the shape of the derivative of the solution after the first step is a function of the dataset through the intrinsic resolution of the modeset and the level of noise. Therefore with real data, the choice of δ will always be done by looking at the derivative profile after the first step. We will see however in Sect. 7 that other indicators can help in the choice of δ and that, according to these indicators, the choice $\delta = 100$ seems to be a good compromise for LOWL data too.

6. On the error estimation on tachocline parameters using nonlinear methods

For nonlinear methods, we can not compute straightforwardly the formal errors at each point of the solution as we can do for linear process. ARTUR algorithm solve a linear system at each step but the final result depends non linearly on the data because the coefficients of the matrix to be inverted at each step are functions of the data through the derivative of the previous estimate that is used as an argument of the weighting function.

Here, we focus only on having an estimate of the uncertainty on the width $\bar{w}$ and the location $\bar{r}_c$ of the tachocline. We can not obtain directly error bars on the solution and therefore the fit by an erf function does not give an estimate of the error on the inferred parameters. Instead, a first estimate of the uncertainty on the tachocline width inferred from ARTUR algorithm has been computed using a Monte-Carlo method applied on given rotation profiles simulated by erf functions with widths lying between $0.02R_\odot$ and $0.08R_\odot$ (with a step of $0.02R_\odot$) and located at $\bar{r}_c = 0.7R_\odot$. As ARTUR algorithm is non linear, we can not define averaging kernels but Fig. 4 shows that the final step of ARTUR algorithm leads directly to results similar

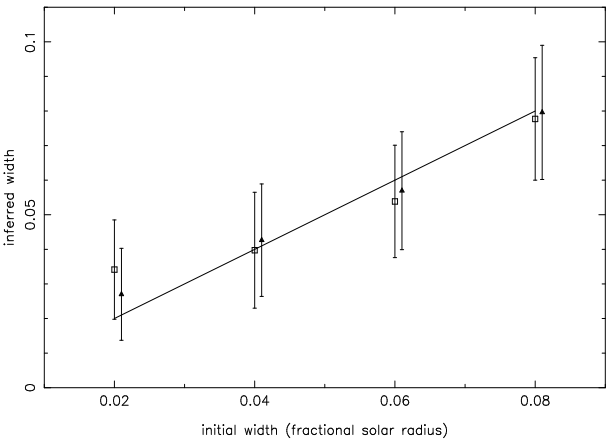


Fig. 4. Monte-carlo simulation for the estimation of the error on the width inferred with ARTUR algorithm (triangles). The rotation profile was taken as an erf function with different 'initial widths' and the 'inferred widths' are the mean value for 500 realizations of input errors of the results obtained by fitting directly the solutions by an erf function. Error bars represent a 68.3% confidence interval on the width. For comparison, the squares show the result obtained from Tikhonov method with GCV choice of the parameter after a 'local deconvolution' using the averaging kernels computed at the center of the transition (see Corbard et al. 1998).

to those reached by Tikhonov inversion after a 'local deconvolution' using the averaging kernels computed at the center of the transition (see Corbard et al. 1998). The 1σ error interval on the width is found to be ± 0.02nHz for widths in the range $0.02 - 0.08R_\odot$. The Monte-Carlo simulations have been performed for 500 realizations of the input errors for each initial width and the mean value over all the realizations (5×500) of the inferred center $\bar{r}_c$ is $0.701 \pm 0.004 R_\odot$. The center of the erf function seems therefore to be very well recovered by the inversion. Nevertheless, we must keep in mind that the center of the tachocline is defined as the center of the erf function that gives the best fit of the solution. This may not give an appropriate view of the tachocline profile if, for example, the solution is not found to be symmetric in the lower and upper parts of the tachocline when inverting real data.

An other important point is that the Fig. 4 demonstrates the ability of ARTUR algorithm to recover not only rotation with a discontinuity (as shown in the examples of Fig. 1 and 2) but also rotation with a relatively smooth transition. This property was not reached with PP-TSVD method and this was the reason of the difficulties encountered by Corbard et al. (1998) in interpreting the results obtained with this first non linear approach.

The uncertainty of ± 0.02nHz found for the tachocline width with both deconvolved Tikhonov and ARTUR approaches is probably related to the intrinsic resolution of the modeset and the level of noise contained in LOWL data. Even if both methods give similar results in mean, the two solutions can differ strongly for a particular realization of the noise. Furthermore, the two approaches are very different in their prin-

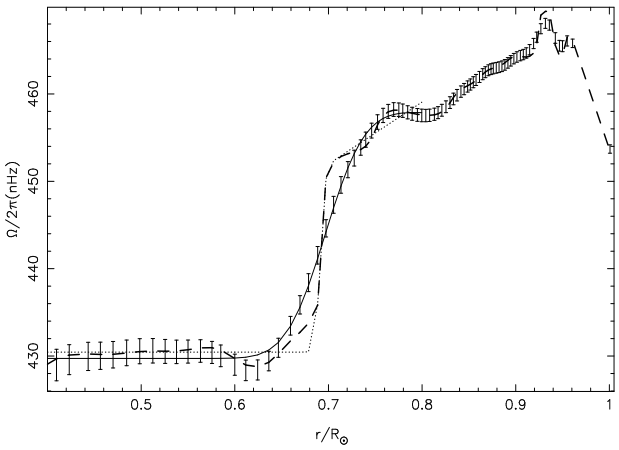


Fig. 5. Solar equatorial rotation rate estimated from LOWL data. The vertical error bars given at each grid points are the 1σ confidence intervals estimated for the T-GCV solution. The dashed line shows ARTUR solution obtained with $\bar{\lambda} = \lambda_{GCV}$ and $\delta = 100$. The fits by an erf function (Eq. (1)) of these two solutions are shown respectively by the full and the dotted lines. The fits have been computed only between $0.4R_\odot$ and $0.8R_\odot$ and the five parameters deduced from each fit are shown on Fig. 8

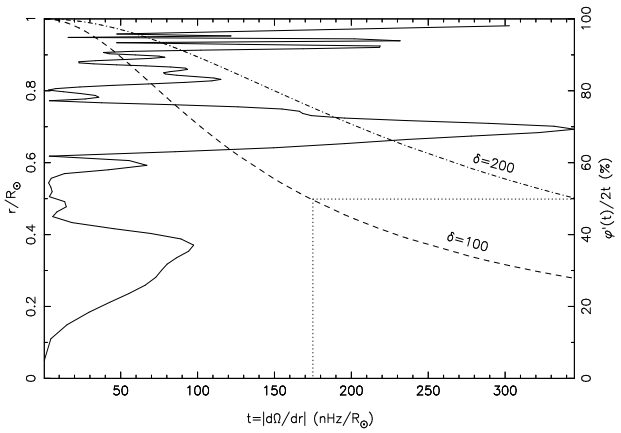


Fig. 6. The same as Fig. 3 but for LOWL data. The weighting function is shown for two choices of the parameter δ.

ciples and therefore it is very interesting to compare the two results with observed data.

7. Application to observed data

7.1. LOWL data

The LOWL instrument is a Doppler imager based on a Potassium Magneto-Optical Filter that has been operating on Mauna Loa, Hawaii since 1994 (see Tomczyk et al. (1995) for a detailed description). The dataset contains the description of the frequency splittings of 1102 modes (n, l) with degrees up to $l = 99$ and frequencies lower than $\nu = 3500$ μHz deduced from a two year period of observation (2/26/94 - 2/25/96). For each mode, individual splittings are given by, at best, five a-coefficients of their expansion on orthogonal polynomials defined by Schou et al. (1994). The sectoral splittings, related to the equatorial rotation profile through Eq. (2), have been approximated by the sum of the odd-indexed a-coefficients.

7.2. The choice of inversion parameters and ARTUR solution for LOWL data

As the first step of ARTUR algorithm is an usual Tikhonov inversion, we first present the results obtained from Tikhonov method and GCV choice of the regularization parameter (called T-GCV method hereafter). The equatorial profile obtained from T-GCV method and LOWL data is shown on Fig. 5. The fit of the solution with an erf function of the form Eq. (1) leads to a width of $w \simeq 0.09R_\odot$ (cf. Fig. 8d). By taking into account the width of the averaging kernel computed at $0.7R_\odot$, the corrected inferred width obtained from this 'local deconvolution' is $w \simeq 0.06R_\odot$.

Contrary to the example shown on Fig. 1 for simulated data, the GCV choice of the regularization parameter does not lead, with LOWL data, to an oscillating solution. This may indicate that this particular realization of the noise introduced in simulated data is rather different from the noise contained in LOWL data. The formal errors quoted on each a coefficient are perhaps overestimated. Furthermore our model assumes that the errors are uncorrelated which is probably not strictly the case. Therefore, with real data, the T-GCV solution may be a good starting point for ARTUR algorithm and we choose to take $\bar{\lambda} = \lambda_{GCV}$ so that the first ARTUR iteration leads to the T-GCV solution.

Figure 6 shows the absolute value of the first derivative of the T-GCV solution. High gradients are found not only in the tachocline but also near the surface (above $0.09R_\odot$). Nevertheless LOWL data provide only few high degree modes ($l \leq 99$ in these data) and we will focus only on the tachocline in this work. As discuss in Sect. 5.2.2 the Fig. 6 can help for the choice of the parameter δ. The weighting function is shown for two values of δ. The choice $\delta = 100$ leads to lower the regularization by more than a factor two at the second step in the tachocline and in the upper layers whereas the choice $\delta = 200$ will never decrease the regularization more than 50% of its level at the first step. From this figure, we can guess that a choice of $\delta < 100$ will tend to enhance spurious oscillations due to the noise whereas a choice $\delta > 200$ will lead to a result very similar to the T-GCV solution because only few points will be affected by the local change of regularization during ARTUR steps. Between these two limits it is however not clear which is the best choice for δ.

However, some indicators may help in the choice of δ:

– First, an important test for any global inversion is its capability of providing a good fit of the data. Figure 7c shows, as a function of δ, the normalized χ^2 value for the modes which have their turning points between $0.6R_\odot$ and $0.8R_\odot$. As expected this value is always lower for all ARTUR solutions than for the T-GCV solution because we tend to regularize less. The gain in the χ^2 value is however small because the regularization is decreased only locally on a small

Table 1. Comparison between our previous work on inferring the equatorial tachocline profile from LOWL data and the results obtained with non linear regularization applied to the same data. The previous estimates of the parameters and their errors have been reached from a comparison of three inverse methods among which was the T-GCV method. See Sect. 7.3 for a more detailed discussion on the tachocline width inferred from ARTUR algorithm

	$\bar{\Omega}_0$(nHz)	$\bar{\Omega}_1$(nHz)	$\bar{\alpha}$(nHz/$R_\odot$)	$\bar{r_c}/R_\odot$	$\bar{w}/R_\odot$
Corbard et al. (1998)	431.0 ± 3.5	459.0 ± 1.5	0	0.695 ± 0.005	0.05 ± 0.03
ARTUR	430.5	452.0	70.0	0.691	0.01

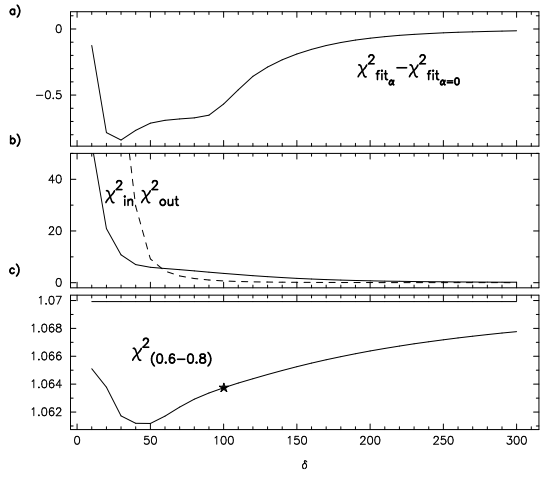


Fig. 7a-c. Variation of various χ^2 indicators with δ. **a** Difference between the goodness of the fits of ARTUR solutions by an erf function with or without a linear part (cf. Eq. (22)). **b** Difference between T-GCV and ARTUR solutions in and out of the zones where high gradients are expected (cf. Eq. (21)). **c** The normalized χ^2 value of ARTUR inversions for modes which have their turning points between $0.6R_\odot$ and $0.8R_\odot$. The horizontal line shows the value (1.07) obtained from T-GCV solution. The star symbol indicate the χ^2 value reached for the choice $\delta = 100$ retained for ARTUR algorithm.

area. The χ^2 value reaches a minimum for $\delta = 50$ but, as expected from Fig 6, for such low δ, ARTUR solution becomes very oscillating and a discontinuity ($w \simeq 0$) is found near the tachocline but in fact the solution is found piecewise constant with many discontinuities.

– There is another indicator that we can use showing that this value of $\delta = 50$ is not appropriate despite of the good χ^2 value reached with this parameter. One of the objectives of ARTUR method is to keep the same regularization as in Tikhonov method in zones without high gradients. Therefore one expects that the amount of change (compared to T-GCV solution) will be more important in the tachocline (and possibly near the surface) than in other zones. We note $\bar{\Omega}^\delta_A(r)$ the solution at the final step of ARTUR algorithm for a given δ and $\bar{\Omega}_T(r)$ the T-GCV solution and we define the two quantities:

$$\chi^2_{\left|\begin{smallmatrix} in \\ out \end{smallmatrix}\right.} = \frac{1}{N_{\left|\begin{smallmatrix} in \\ out \end{smallmatrix}\right.}} \sum_{p \in I_{\left|\begin{smallmatrix} in \\ out \end{smallmatrix}\right.}} \left(\bar{\Omega}^\delta_A(r_p) - \bar{\Omega}_T(r_p)\right)^2 \qquad (21)$$

where $I_{in} = \{p \ / \ 0.6 < \frac{r_p}{R_\odot} \leq 0.8 \text{ or } r_p > 0.9R_\odot\}$, $I_{out} = [1, N_p] - I_{in}$ and N_{in}, N_{out} are the sizes of the two sets. Fig. 7b is a plot of these two quantities. It shows that for δ lower than 60 ARTUR algorithm tends to change the solution even in zones where no high gradients are expected and that for a choice above $\delta \simeq 100$ there is no more changes in these zones as expected.

From these two criteria it seems that a choice of $\delta = 100$ is a good compromise between minimizing the χ^2 value for modes which have their turning points near the tachocline and operating changes essentially in zones where high gradients are expected which was the objective of the non linear regularization approach. The ARTUR solution is shown on Fig. 5 for this choice δ. The inferred tachocline parameters are summarize in Tab. 1 and compared to the results obtained by Corbard et al. (1998) for the same dataset. The estimates of the center of the tachocline and the rotation rate in the radiative interior obtained from ARTUR algorithm are in good agreement with our previous work. The inferred value of $\bar{\Omega}_1$ and $\bar{\alpha}$ are such that $\bar{\Omega}_1 + 0.1\bar{\alpha} \simeq 459$nHz which correspond to the rotation rate inferred at $0.8R_\odot$ and to the value of the $\bar{\Omega}_1$ parameter obtained by the fit of the T-GCV solution. The tachocline width inferred from ARTUR inversion ($w = 0.01R_\odot$) is smaller than our previous estimate but still compatible if we take into account an error of $0.02R_\odot$ as indicated by the Monte-Carlo simulations. The next section will give a more detailed discussion for the interpretation of this result by showing how the estimate of the width vary with the δ parameter and during the iterations of ARTUR process.

7.3. On the inferred tachocline width

Figure 8 shows how the parameters, inferred from a fit of the final step of ARTUR algorithm, are sensitive to the choice of δ. It shows that the relation $\bar{\Omega}_1 + 0.1\bar{\alpha} \simeq 459nHz$ is still valid for other choices of δ and that $\bar{\Omega}_0$ and $\bar{r}_c$ vary only little with δ whereas the inferred width increases rapidly for $\delta > 100$. It reaches $0.055R_\odot$ for $\delta = 200$ which is the limit for the choice of δ upper which we think that ARTUR algorithm is not effective. For large values of δ, the number of step in ARTUR process becomes very low, ARTUR solutions tend to T-GCV solution, and thus, tachocline parameters inferred from ARTUR solution tend to those inferred from T-GCV solution (cf. Fig. 8).

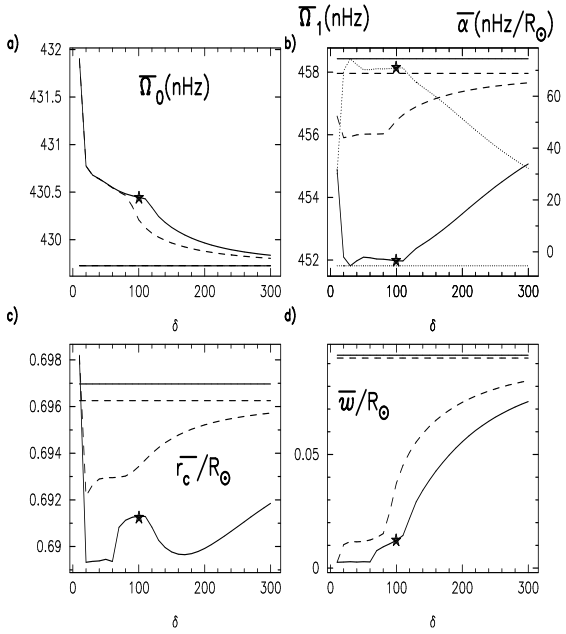


Fig. 8a-d. Variation with δ of the tachocline parameters as deduced by fitting ARTUR solutions by an erf function (cf. Eq. (1)). The dashed lines show the results obtained by searching only four parameters ($\bar{\Omega}_0$, $\bar{\Omega}_1$, $\bar{r}_c$, $\bar{w}$) after setting $\bar{\alpha} = 0$, whereas the full lines show the results obtained when $\bar{\alpha}$ is a free parameter of the fit. In this case the inferred value of $\bar{\alpha}$ is shown by the dotted line on panel b and the star symbols show the results obtained for $\delta = 100$. The horizontal lines indicate the values (independent of δ) of the tachocline parameters obtained by fitting the T-GCV solution. These lines represent limits for high δ of the parameters inferred from ARTUR solutions. On panel d the horizontal lines indicate the width as inferred directly by the fit of T-GCV solution. The width corrected by a 'local deconvolution' using averaging kernels, is $w \simeq 0.06 R_\odot$.

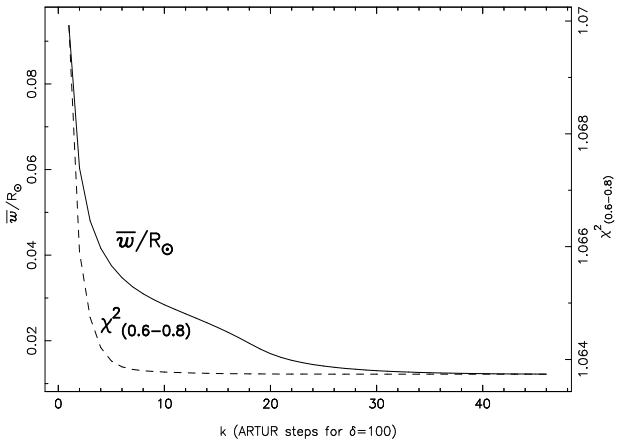


Fig. 9. Variation of the inferred width (full line) and the χ^2 value for modes which have their turning points between $0.6 R_\odot$ and $0.8 R_\odot$ (dashed line) as a function of the iteration number in ARTUR process for $\delta = 100$). The values found at the first step are equal to those obtained from the fit of the T-GCV solution shown as horizontal lines on Figs. 8d and 7c whereas the values obtained at the final step are shown by star graph markers on these plots.

We have tried to fit the solutions with or without the linear part after the transition (i.e. by searching for the best $\bar{\alpha}$ coefficient or by setting $\bar{\alpha} = 0$ in Eq. (1)). The goodness of the fit is defined by:

$$\chi^2_{fit_{\bar{\alpha}}}(\bar{\Omega}) = \frac{1}{N_{fit} - 5} \sum_{p \in I_{fit}} \left(\bar{\Omega}(r_p) - \Omega_{fit}(r_p)\right)^2 \qquad (22)$$

where I_{fit} is the set of indices given by $I_{fit} \equiv \{p \ / \ 0.4 \leq \frac{r_p}{R_\odot} < 0.8\}$, and N_{fit} is size of I_{fit}. We note $\chi^2_{fit_{\bar{\alpha}=0}}$ the goodness of a fit done with only four parameters ($\bar{\alpha} = 0$ in Eq. (1)). In this case the denominator of Eq. (22) becomes $N_{fit} - 4$. The two fits are almost equivalent when applied to the T-GCV solution ($\bar{\alpha} = -5$nHz when it is searched, cf. Fig. 8b), but the fit that allows a linear part has been found to be more suited for describing ARTUR solutions for all the choices of δ (cf. Fig. 7a). We note however that if one chooses to fit the solutions with $\bar{\alpha} = 0$ (i.e. to describe the tachocline by a simple erf function), then the inferred width would be systematically increased by a value up to $0.02 R_\odot$ (cf. Fig. 8d).

As the increase of the χ^2 value between $\delta = 100$ and $\delta = 200$ is low (cf. Fig 7a), and because of our previous estimate of $\pm 0.02 R_\odot$ for the uncertainty on the width, we can not exclude a width higher than $0.01 R_\odot$. Furthermore Fig. 9 shows that the minimum value of the χ^2 is reached after only six iterations of ARTUR process whereas the inferred width still decreases from $0.035 R_\odot$ down to $0.01 R_\odot$. This indicates that the data themselves do not allow us to choose between widths in that range. During the iterations as well as when we vary the value of δ, this is the amount of regularization introduced in high gradients zones that is changed. In that sense stopping the iteration of ARTUR process before its convergence according to the criterion Eq. (17) would be equivalent to increase the value of δ. As the amount of regularization that is needed is related to the level of noise contained in the data, the reliability of our result is strongly related to our knowledge of the data noise. As we have shown that the GCV criterion may reveal some discrepancies between the data noise and the simulated noise, the only way to become more confident on the appropriate choice of δ and thus on the result concerning the tachocline width inferred from this kind of non linear inversions will be to increase our knowledge of the statistical properties of the data noise and to compare with other datasets. However, even the values of the width found at the final step for $\delta = 200$ or at the sixth iteration with $\delta = 100$ are still below the value of $0.06 R_\odot$ inferred from T-GCV solution after a 'local deconvolution' and the use of non linear regularization argue in favor of a very sharp tachocline and even a discontinuity can not be excluded. Therefore our conclusion on the tachocline width is that it is very likely that it is less than $0.05 R_\odot$.

8. Conclusions

This work introduces in helioseismic context an approach of the inverse problem that use an adaptative regularization. This leads to a non linear problem that can be solved easily by an iterative process named ARTUR and that have been developed in the field of image processing. It is shown that this approach allows to recover high gradients in the solution and avoids the spurious oscillations (known as 'Gibbs phenomena') that may be found when we try to recover such sharp transition zones with the usual Tikhonov approach. Tests and Monte-Carlo simulations have shown that this method is as effective as Tikhonov inversion with 'local deconvolution' in order to recover the width of erf functions with widths up to $0.08R_\odot$ and with the same errors estimation of $\pm 0.02R_\odot$.

The inversion of LOWL data by ARTUR method gives an equatorial tachocline profile which differs from our previous work. These results argue in favor of sharp transition (down to a width of $0.01R_\odot$ with the adapted regularization parameters). From our study of the inferred width as a function of the parameter δ and our estimate of the uncertainty on this parameter we conclude that it is very likely that the width of the tachocline is less than $0.05R_\odot$. This estimate is somewhat different from our previous estimate of $0.05 \pm 0.03R_\odot$ which allow relatively smooth transitions up to $0.08R_\odot$.

The change in our estimate of the width is partly due to the fact that we have changed the fitting function that defined the tachocline parameters. It is shown here that adding a linear behaviour in the upper part of the erf function allow a better fit of the solution. Whereas the T-GCV solution (before any deconvolution) can be well approximated by a simple erf function between $0.4R_\odot$ and $0.8R_\odot$, the ARTUR solution is better approximated, in the upper part of the tachocline, by a linear function with a slope around $70\text{nHz}/R_\odot$ that goes from 452nHz at $0.7R_\odot$ up to 459nHz at $0.8R_\odot$. It was not possible to reach this conclusion from our previous approach using the T-GCV solution because the 'local deconvolution' used in this approach supposed explicitly that the rotation profile can be well approximated by a simple erf function (without linear behaviour). It will be therefore very interesting to study in future works and with other datasets the rotation profile just above the tachocline in order to become more confident on our result.

An important contribution of the non linear regularization approach is that it allows to find directly a solution with sharp transitions without fixing a priori the shape of the transitions as it is necessary in forward modeling or when we deconvolve a solution obtained from linear methods. In order to describe the tachocline with only few parameters, we can afterwards choose a shape for the fitting function that is adapted to the solution found.

Finally, we note that this approach of inversion with non linear regularization may find other applications in the helioseismic context for all the problems where high gradients are expected in the solutions. We have shown that this is the case for the rotation of the surface layers that can be studied more accurately with instruments like MDI on board SoHO or the GONG network which observe high degree modes. This algorithm may also be apply to the sound speed peak found between the Sun and the model by structure inversions. The thickness of this peak located in the tachocline can be related to the width of the mixed zone which is supposed to exist just below the convection zone (e.g. Morel et al. 1998). Some recent work (Elliott et al. 1998) have used a linear inversion which has been deconvolved to give an estimate of $0.02R_\odot$ for this width. It is interesting to note that this is of the same order as our estimate of the tachocline width deduced from the rotation profile. As the sound speed anomaly profile is also a zone with high gradients in the solution of an inverse problem, the use of non linear regularization may also be an alternate approach to address this problem in future works.

Acknowledgements. We gratefully acknowledge S. Tomczyk and J. Schou for providing the LOWL data. This work has been performed using the computing facilities provided by the program "Simulations Interactives et Visualisation en Astronomie et Mécanique" (SIVAM, OCA, Nice) and by the "Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique" (IDRIS, Orsay).

Appendix A: terms of the discretization

In our application, the polynomial expansion Eq. (4) is such that:

$$\psi_p(r) = \begin{cases} \frac{r - r_{p-1}}{r_p - r_{p-1}} & (\text{if } r_{p-1} < r \leq r_p) \\ \frac{r_{p+1} - r}{r_{p+1} - r_p} & (\text{if } r_p < r \leq r_{p+1}) \end{cases} \quad \text{(A1)}$$

where $(r_p)_{p=0,N_p+1}$ are the fixed break points distributed according to the density of turning points of modes. We have:

$$0 = r_0 = r_1 < r_2 < ..r_{N_p-1} < r_{N_p} = r_{N_p+1} = R_\odot, \quad \text{(A2)}$$

therefore, each coefficient ω_p of the expansion Eq. (4) simply represents the solution at the radius r_p:

$$\forall\ p = 1, ..N_p \ \ \bar{\Omega}(r_p) = \omega_p. \quad \text{(A3)}$$

Furthermore, with this expansion of the solution, the first derivative of $\bar{\Omega}(r)$ is represented by a piecewise constant function. Therefore, in this trivial case, one can take in Eq. (10):

$$c_p = r_{p+1} - r_p, \quad p = 1, ..N_p - 1 \qquad \boldsymbol{C} \equiv diag(c_p) \quad \text{(A4)}$$

and the first derivative operator is defined by the bi-diagonal matrix:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{L}^{(1)} \quad \text{(A5)}$$

with:

$$\boldsymbol{L}^{(1)}_{i,j} = -\delta_{i,j} + \delta_{i,j-1} \begin{cases} i = 1, N_p - 1 \\ j = 1, N_p \end{cases}, \quad \text{(A6)}$$

δ being the usual Kronecker symbol.

References

Acar R., Vogel C.R., 1994, Inverse Problems 10(6), 1217

Antia H.M., Basu S., Chitre S.M., 1998, MNRAS, submitted

Antia H.M., Chitre S.M., Thompson M.J., 1996, A&A 308, 656

Barrett R., Berry M., Chan T.F., et al., 1994, Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods, SIAM, Philadelphia, PA

Basu S., 1997, MNRAS 288, 572

Blanc-Féraud L., 1998, Problèmes inverses mal posés. In: Schatzman E. (ed.) Cours de Structure Interne: Génération et Interprétation des Oscillations Sollaires. Obs. de Paris-Meudon, DASGAL, Meudon, France

Blanc-Féraud L., Charbonnier P., Aubert G., Barlaud M., 1995, Nonlinear image processing: Modeling and fast algorithm for regularization with edge detection. In: IEEE Proceedings of the 2nd International Conference of Image Processing, Washington DC, USA, p. 474

Charbonneau P., Christensen-Dalsgaard J., Henning R., et al., 1998, Observational constraints on the dynamical properties of the shear layer at the base of the solar convection zone. In: Provost J., Schmider F.X. (eds.) IAU Symp. 181: Sounding Solar and Stellar Interior (poster volume). OCA & UNSA, Nice, p. 161

Charbonnier P., Aubert G., Blanc-Féraud L., Barlaud M., 1994, Two deterministic half-quadratic regularization algorithms for computed imaging. In: IEEE Proceedings of the 1st International Conference of Image Processing, Austin, USA, p. 168

Charbonnier P., Blanc-Féraud L., Aubert G., Barlaud M., 1997, IEEE Trans. on Image Processing 6(2), 298

Corbard T., 1997, Inferring the internal rotation of the sun from low degree helioseismology. In: Cacciani A. (ed.) Proceedings of IX IRIS meeting

Corbard T., Berthomieu G., Morel P., et al., 1997, A&A 324, 298

Corbard T., Berthomieu G., Provost J., Morel P., 1998, A&A 330, 1149

Craig I.J.D., Brown J.C., 1986, Inverse Problems in Astronomy: a guide to inversion strategies for remotely sensed data, Adam Hilger Ltd, Bristol

Dobson D., Santosa F., 1994, Inverse Problems 10, 317

Duvall Jr T.L., Dziembowski W.A., Goode P.R., et al., 1984, Nature 310, 22

Elliott J.R., 1997, A&A 327, 1222

Elliott J.R., Gough D.O., Sekii T., 1998, Helioseismic determination of the solar tachocline thickness. In: Korzennik S.G., Wilson A. (eds.) Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars. ESA Publications Division, Noordwijk, The Netherlands

Geman D., Yang C., 1995, IEEE Trans. on Image Processing 4(7), 932

Geman S., McClure D.E., 1985, Baysian image analysis: an application to single photon emission tomography. In: Assoc. A.S. (ed.) Proc. atist. Comput. Sect., Washington DC, USA, p. 12

Golub G.H., Van-Loan C.F., 1989, Matrix Computations (2nd edition), Chapt. 10, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, USA

Gough D.O., Sekii T., 1998, On the solar tachocline. In: Provost J., Schmider F.X. (eds.) IAU Symp. 181: Sounding Solar and Stellar interior (poster volume). OCA & UNSA, Nice, p. 93

Gough D.O., Thompson M.J., 1991, The inverse problem. In: Cox A.N., Livingston W.C., Matthews M. (eds.) Solar Interior and Atmosphere. The University of Arizona Press, Tucson, p. 519

Green P.J., 1990, IEEE Trans. on Medical Imaging MI-9, 1, 84

Hadamard J., 1923, Lectures on the Cauchy Problem in linear Partial Differential Equation, Yale University Press, New Haven

Hansen C.J., Cox J.P., Van-Horn H.M., 1977, ApJ 217, 151

Hansen P.C., 1992, SIAM Review 34, 561

Hansen P.C., Mosegaard K., 1996, Numerical Linear Algebra with Applications 3(6), 513

Hansen P.C., Sekii T., Sibahashi H., 1992, SIAM J. Sci. Stat. Comput. 13, 1142

Hebert T., Leahy R., 1989, IEEE Trans. on Medical Imaging MI-8, 2, 194

Kirsch A., 1996, An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems, Springer-Verlag, New York

Kosovichev A.G., 1996, ApJ 469, L61

Kosovichev A.G., 1998, Seismic obseervation of solar tachocline. In: Provost J., Schmider F.X. (eds.) IAU Symp. 181: Sounding Solar and Stellar Interior (poster volume). OCA & UNSA, Nice, p. 97

Morel P., Provost J., Berthomieu G., 1997, A&A 327, 349

Morel P., Provost J., Berthomieu G., 1998, How solar models fit the soho observations. In: Korzennik S.G., Wilson A. (eds.) Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars. ESA Publications Division, Noordwijk, The Netherlands

Perona P., Malik J., 1990, IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence PAMI-12, 7, 629

Rudin L.I., Osher S., Fatemi E., 1992, Physica D 60, 259

Schou J., Christensen-Dalsgaard J., Thompson M.J., 1994, apj 433, 389

Schou J., et al., 1998, apj, submitted

Shibahashi H., Sekii T., 1988, An inversion method based on the moore-penrose generalized inverse matrix. In: Rolfe E.J. (ed.) Seismology of the Sun and Sun-Like Stars. ESA Publication Division, Noordwijk, the Netherlands, p. 521

Spiegel E.A., Zahn J.P., 1992, A&A 265, 106

Teboul S., Blanc-Féraud L., Aubert G., Barlaud M., 1998, IEEE Trans. on Image Processing 7(3)

Thompson M.J., Toomre J., et al., 1996, Science 272, 1300

Tikhonov A.N., 1963, Sov. Maths. Doklady 4, 1035

Tomczyk S., Streander K., Card G., et al., 1995, sp 159, 1

Vogel C.R., Oman M.E., 1996, SIAM Journal of Scientific Computing 17(1)

Vogel C.R., Oman M.E., 1997, IEEE Trans. on Image Processing, submitted

Wahba G., 1977, SIAM J. Numer. Anal. 14, 651

Chapitre 6

La rotation du coeur

La rotation du cœur solaire ($r < 0.25R_\odot$) contribue au splitting des modes de bas degrés ($l = 1-4$). Néanmoins seule une petite partie du noyau de rotation de ces modes a de l'amplitude dans le cœur si bien que leurs splittings sont en fait très peu sensibles à la rotation du cœur. Une grande précision sur la mesure des splittings de bas degrés est donc requise pour étudier cette rotation. D'une manière plus quantitative, Fossat (1995) estime que seul 5% de la valeur du splitting provient de la rotation du cœur ce qui conduit à une augmentation du splitting de seulement 22 nHz si la rotation du cœur est deux fois plus rapide que celle (435 nHz) de la zone radiative au dessus de $0.4R_\odot$.

6.1 Mesures des splittings de bas degrés

La **figure 6.1** montre les splittings sectoraux (GOLF), ou les coefficients a_1 (GONG, MDI), des modes de bas degrés issus de différentes observations en fonction du point tournant associé à chaque mode. Pour l'instrument GOLF, et d'une manière générale les observations en disque intégré (IRIS, BiSON), seules les composantes du multiplet telles que $l - m$ est pair sont visibles en raison de l'orientation de l'axe de rotation par rapport à la ligne de visée. Cela ne permet pas, pour $l = 2, 3$, de déterminer le coefficient a_1 et la quantité mesurée correspond au splitting sectoral ($m = l$). Pour les instruments (MDI, GONG) permettant une résolution spatiale du disque solaire toutes les composantes du multiplet sont accessibles et l'on peut déterminer le coefficient a_1. Pour $l = 1$, splitting sectoral et coefficient a_1 sont équivalents. D'une manière générale le splitting sectoral d'un mode de degré l est donné par la somme des l coefficients a d'indices impairs (voir Eqs. 2.5, 2.8) et la différence entre le coefficient a_1 et le splitting sectoral est liée à la dépendance en latitude de la rotation qui se traduit par l'existence de coefficients a_3, a_5, etc.., non nuls (mais faibles).

La dispersion des résultats (**Fig. 6.1**) ainsi que l'incertitude sur la mesure des splittings individuels ayant leurs points tournants sous $0.2R_\odot$ est en général bien supérieure à 20 nHz. Néanmoins, si le splitting des modes de bas degrés est peu dépendant de la fréquence (c.à.d. de l'ordre radial n pour l donné) ou si cette dépendance est plus

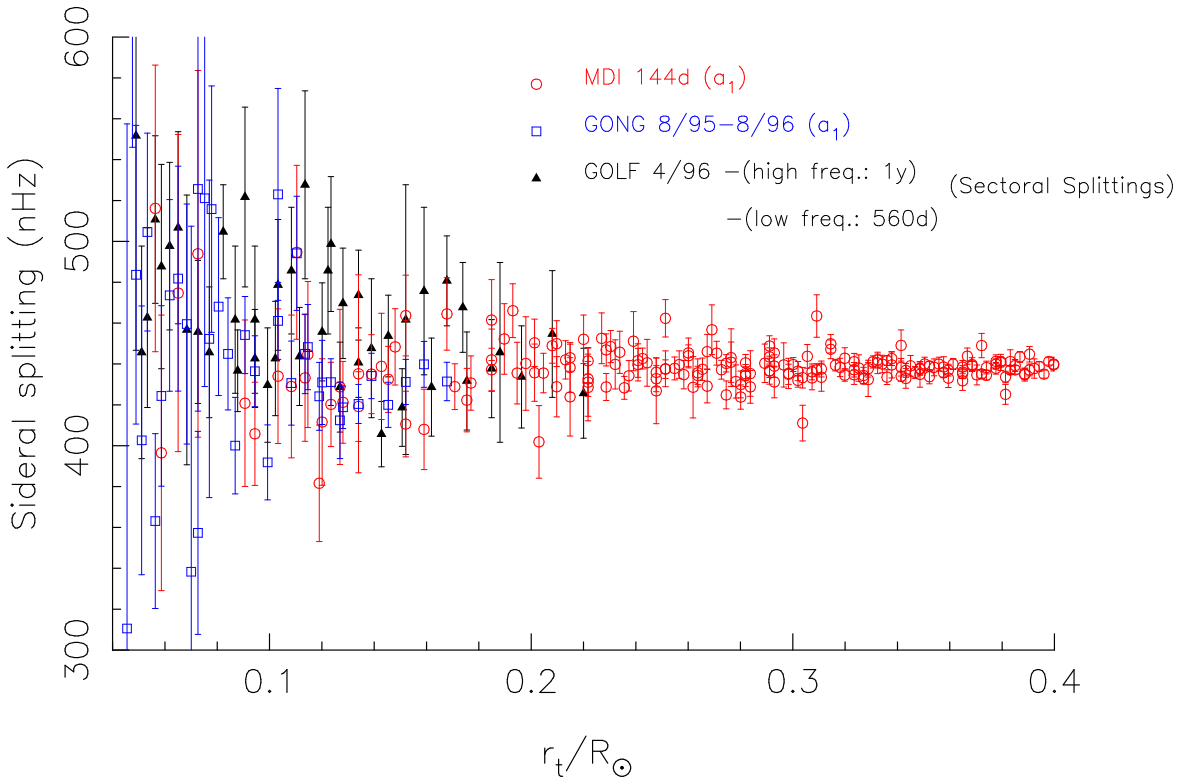


FIG. 6.1 – *Splittings sectoraux (GOLF) et coefficients a_1 (GONG et MDI) avec leurs barres d'erreur en fonction des points tournants des modes.*

faible que l'incertitude attribuée à chaque mesure individuelle, alors on peut espérer obtenir une plus grande précision sur la valeur des splittings moyennés sur plusieurs ordres radiaux.

Les moyennes pondérées par les erreurs des splittings issus de différentes observations sont représentées **figure 6.2** pour $l = 1 - 4$. **L'incertitude sur ces moyennes est typiquement comprise entre ± 5 nHz et ± 15 nHz ce qui reste élevé compte tenu de la discussion précédente. La dispersion des résultats issus des différentes observations est beaucoup plus grande et certaines moyennes sont incompatibles à 1σ.** Si l'on exclut une variation de la rotation au cours des différentes périodes d'observations cela indique probablement une sous estimation des erreurs par les différentes équipes. On note cependant un très bon accord entre toutes les observations pour le splitting moyen des modes $l = 2$ estimé à 435 ± 15nHz.

Les incertitudes sur les splittings peuvent avoir de multiples origines. Il y a d'abord la nature stochastique de l'excitation des modes de pression qui peut conduire à une mauvaise identification des composantes du multiplet. Cette incertitude peut être modélisée d'une manière théorique en prenant en compte notamment le rapport signal/bruit, la durée des observations et la largeur des pics liée au processus d'amortissement des modes, ou estimée par des simulations de Monte-Carlo (Toutain & Appourchaux 1994). Des biais peuvent être introduits par une modélisation mal adaptée du spectre qui doit prendre en compte le recouvrement partiel des modes, les corrélations entre les différentes composantes d'un multiplet (Appourchaux et al. 1998b) et une éventuelle dissymétrie dans le profil des pics ou dans les amplitudes des différentes composantes du multiplet (Appourchaux et al. 1998a). D'une manière générale, l'extraction des splittings du spectre des oscillations constitue en lui même un problème inverse non linéaire dont la résolution n'est pas triviale et les différentes méthodes ou stratégies utilisées pour l'analyse du spectre (Appourchaux 1998, Fossat 1998, Roca Cortés 1998) peuvent conduire à des erreurs systématiques. De plus, d'un point de vue numérique, des biais peuvent être introduits par le fait que les méthodes non linéaires peuvent occasionnellement converger vers des minima locaux (Fossat 1998) ou être sensibles aux valeurs initiales choisies pour les paramètres à déterminer (Lazrek et al. 1997).

L'étude précise de ces différentes sources d'incertitudes et de biais dans les mesures est probablement l'étape la plus importante actuellement afin de bien comprendre l'origine des différences constatées entre les déterminations par les divers groupes. Ce travail nécessaire ne fait pas l'objet de cette thèse. Je me suis pour ma part attaché, avec les données disponibles, à étudier les problèmes liés à l'interprétation des splittings tels qu'il sont donnés par les observateurs et l'incertitude qui en résulte sur la rotation du cœur.

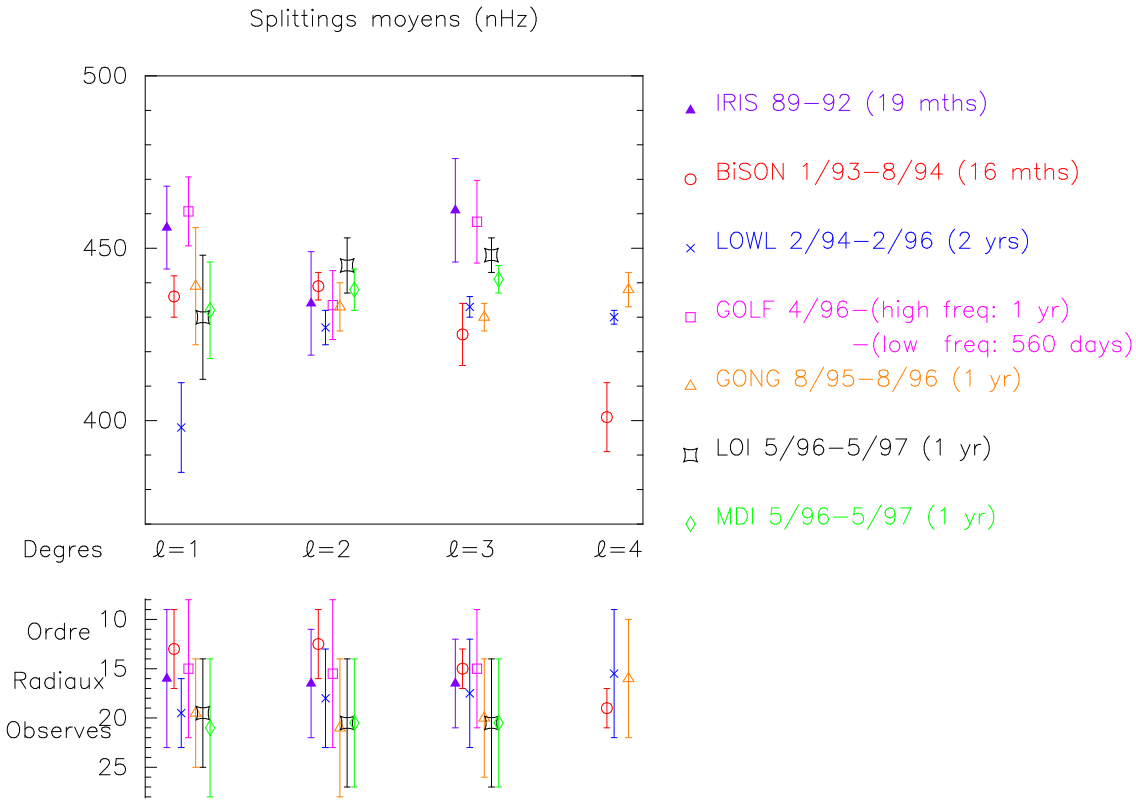


FIG. 6.2 – *Moyennes pondérés par les erreurs, des splittings sectoraux (IRIS, BiSON, LOWL, GOLF) ou des coefficients a_1 (GONG, LOI, MDI) des modes de bas degrés. Les ordres radiaux observés sur lesquels se font la moyenne sont indiqués en bas de la figure.*

Les mesures **IRIS** *couvrent une période de 19 mois d'observations avec quatre séries temporelles obtenues en 1989, 1990, 1991 et 1992 (Gelly et al. 1997). Les splittings IRIS montrés ici sont des moyennes pondérées de mesures obtenus par plusieurs méthodes appliquées aux mêmes spectres moyennés (Lazrek et al. 1996, Gizon et al. 1997).*

Les données **BiSON** *ont été acquises par Chaplin et al. (1996).*

Les splittings **LOWL** *ont été calculés à partir de données décrites Tab. 4.1.*

Les données **GONG (l=1,2,3)** *ont été analysées par Rabello-Soares & Appourchaux (1998). Le splitting* **GONG (l=4)** *est tiré des donnés GONG décrites Tab. 4.1.*

Les splittings **GOLF** *ont été estimés au sein de la collaboration GOLF (Roca Cortés and the GOLF team 1998).*

Les splittings **LOI et MDI** *correspondent à la première année d'observations à bord de SoHO (Appourchaux et Toutain, communication privée, voir (Appourchaux and the VIRGO team 1998) et (Toutain et Kosovichev 1998))*

6.2 Spécificités de l'inversion pour le coeur

En dessous de $0.4R_\odot$, la dépendance en latitude de la rotation est intrinsèquement mal contrainte par les données. En effet, les splittings de bas degrés l ne peuvent donner accès qu'à un nombre restreint $(2l+1)$ d'ordres azimutaux m différents qui seuls contiennent la signature d'une éventuelle rotation différentielle en latitude. La démarche couramment employée pour étudier la rotation du cœur consiste donc à se ramener à une équation à une dimension (le rayon) soit en se plaçant à une latitude donnée (par exemple l'équateur) soit en cherchant une certaine moyenne en latitude de la rotation. Je montre dans la suite que ces deux cas peuvent conduire à des biais non négligeables si l'on cherche à estimer la rotation sous $0.2R_\odot$.

1. Tous les modes ayant de l'amplitude dans le plan équatorial, on se place le plus souvent à l'équateur en utilisant la relation (3.18) reliant les splittings sectoraux à la rotation équatoriale. J'ai montré §3.1.3 que cette approximation n'est pas valable pour les modes de bas degrés car les splittings sectoraux de ces modes sont sensibles également à la rotation de couches éloignées de la zone équatoriale. La rotation étant différentielle dans la zone convective et le maximum étant atteint dans le plan équatorial, cela conduit à une sous estimation de la rotation dans le cœur. J'ai montré, en utilisant la rotation différentielle de la zone convective déduite des inversions 2D, que cela est équivalent à introduire un biais de $\sim$ 12nHz sur les splittings $l=1$, $\sim$ 8 nHz sur les splittings $l=2$, $\sim$ 6 nHz sur les splittings $l=3$ etc.. (Contribution 7, Fig. 2). La connaissance de la rotation différentielle en latitude dans la zone convective peut donc être utilisée pour corriger ce biais en partie, mais une certaine incertitude demeure sur cette connaissance et l'influence d'une éventuelle dépendance en latitude de la rotation dans le coeur est ignorée. Cela peut donc conduire à une sous estimation de l'incertitude sur le résultat de l'inversion.

2. Une équation 1D reliant les coefficients a_1 à une moyenne en latitude de la rotation $\tilde{\Omega}_1(r)$ se déduit de l'équation (2.10) associée à un développement de la dépendance en latitude de la rotation sur des polynômes orthogonaux $dP_j(\mu)/d\mu$ $j=1,3,5...$ Les noyaux de rotation en rayon sont alors les mêmes $(K_{nl}(r))$ que pour la relation entre splitting sectoraux et rotation équatoriale (Voir Contribution 7). La solution $\tilde{\Omega}_1(r)$ ainsi obtenue ne correspond à la rotation réelle que dans les zones où celle-ci est indépendante de la latitude, sinon il s'agit d'une moyenne telle que : $\tilde{\Omega}_1(r) = 3/2 \int_0^1 (1-\mu^2)\Omega(r,\mu)d\mu$. Dans ce type d'inversion l'équation intégrale 1D utilisée est exacte même pour les splittings de bas degrés et le résultat n'est donc en principe pas biaisé comme dans le cas précédent. Néanmoins, pour les observations en disque intégré (IRIS, GOLF, BiSON), on ne dispose en général pas des coefficients a_1 (pour $l>1$) mais uniquement des splittings sectoraux. C'est à ce niveau qu'un biais peut être introduit par l'inversion. En effet soit l'on inverse ces splittings sectoraux en conjonction avec les splittings sectoraux d'autres données pour les degrés $l>3$, auquel cas on se retrouve dans le cas

précédent où des biais sont introduits par le fait que l'approximation 1D n'est pas exacte pour les bas degrés, soit on assimile les splittings sectoraux de bas degrés à des coefficients a_1 et on les inverse avec les coefficients a_1 relatifs aux modes $l > 3$ issus d'autres données auquel cas un biais peut être introduit si les coefficients a_3 (pour $l = 2$) ou a_3 et a_5 (pour $l = 3$) ne sont pas nuls. Là encore on peut essayer de corriger ce biais en estimant les coefficients a_3 et a_5 à partir d'autres données ou d'un profil de rotation dont on se donne la dépendance en latitude.

Je regroupe dans la suite par le terme d''approximation 1D' ces deux sources de biais de nature différentes. Dans le premier cas le biais provient de l'utilisation d'une approximation 1D non valable pour les bas degrés, dans le second cas le biais provient du mélange de données (coefficients a_1 et splittings sectoraux) qui ne correspondent pas à la même moyenne en latitude de la rotation.

D'une manière générale (à 2D ou dans une 'approximation 1D') les méthodes de types OLA (MOLA ou SOLA) sont préférées pour étudier la rotation du cœur car les noyaux de rotation sont mieux localisés et l'interprétation plus facile. Néanmoins, dans les deux cas il n'est pas possible, avec les données actuelles, de localiser un noyau de résolution sous $0.15R_\odot$ (voir Contributions 6, 7). Le résultat d'une inversion globale de type RLS est utile car il permet, en examinant les résidus de l'inversion, de détecter les cas où l'incertitude sur certains splittings a été sous estimée ou la mesure biaisée. De tels aller-retour entre observateurs et inverseurs conduisant à un réexamen de la détermination de certains splittings permet par la suite d'acquérir une plus grande confiance en la réalité des résultats obtenus. Cette démarche a été utilisée pour l'analyse des splittings GOLF.

6.3 Résultats

D'après ce qui précède, il y a trois approches possibles qui permettent d'obtenir la rotation centrale du Soleil.

1. On peut utiliser une inversion 2D en tenant compte du fait qu'on ne peut pas obtenir d'information en latitude dans le cœur. J'ai comparé (Contribution 5) les résultats obtenus par inversion 2D RLS des données IRIS et BiSON, dont les splittings $l = 1, l = 3$ sont incompatibles à 1σ, combinées aux données LOWL (pour $l \geq 4$). L'utilisation, dans le code 2D RLS, de la contrainte de régularité au centre (voir §4.1.2) permet d'obtenir une seule valeur moyenne de la rotation dans le cœur. **Le résultat (Fig. 6.3) ainsi obtenu dans le cœur par inversion RLS est sensible aux différences qui existent entre les mesures des splittings de bas degrés**. La faible valeur du splitting $l = 1$ des données LOWL conduit à une rotation qui décroît rapidement sous $0.2R_\odot$. Les solutions et les barres d'erreurs trouvées avec les splittings IRIS et BiSON sont en bon

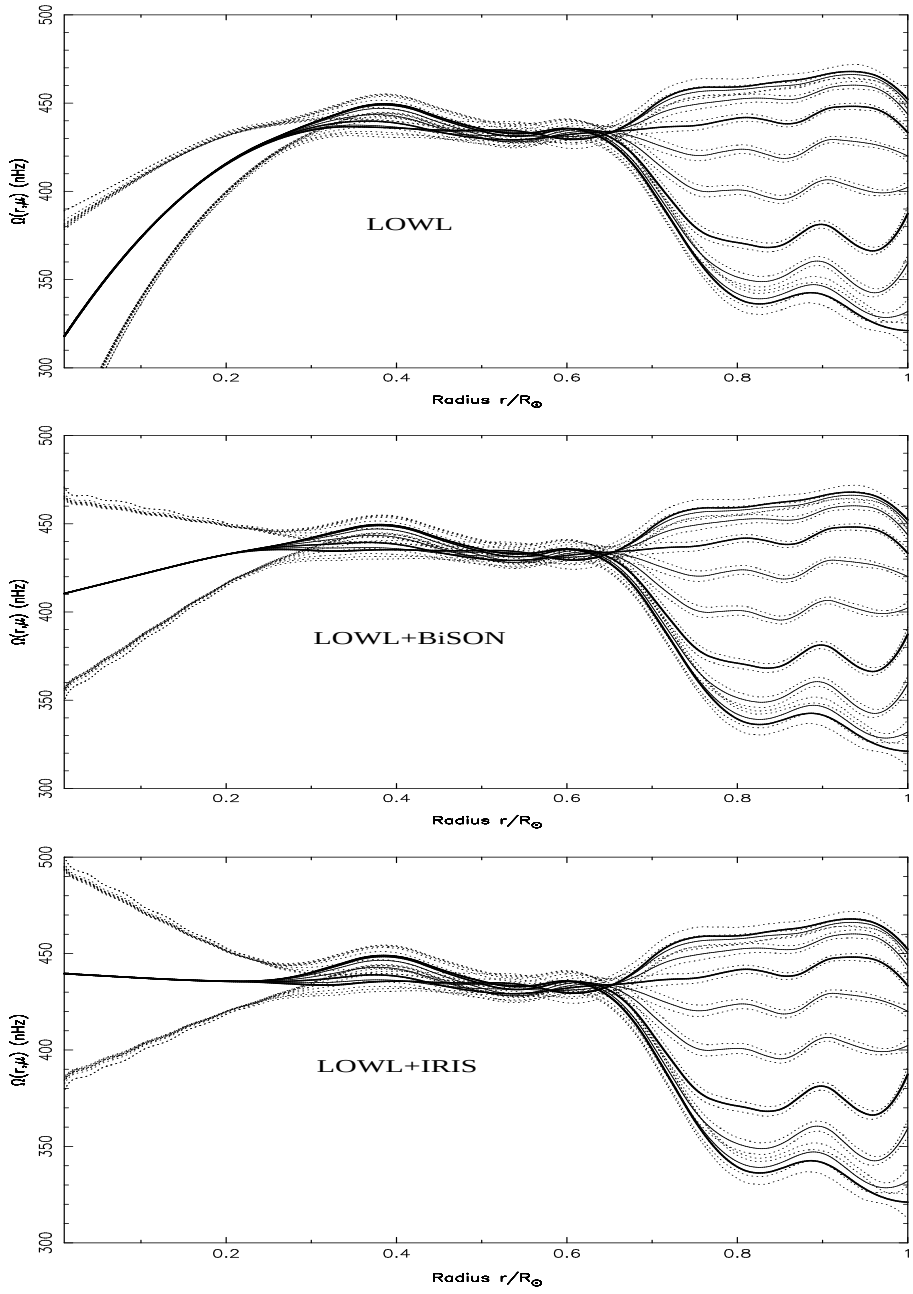


FIG. 6.3 – *Ces figures, obtenues par inversion 2D RLS des données indiquées, montrent la sensibilité de la méthode d'inversion aux diverses données disponibles pour les splittings de bas degrés*

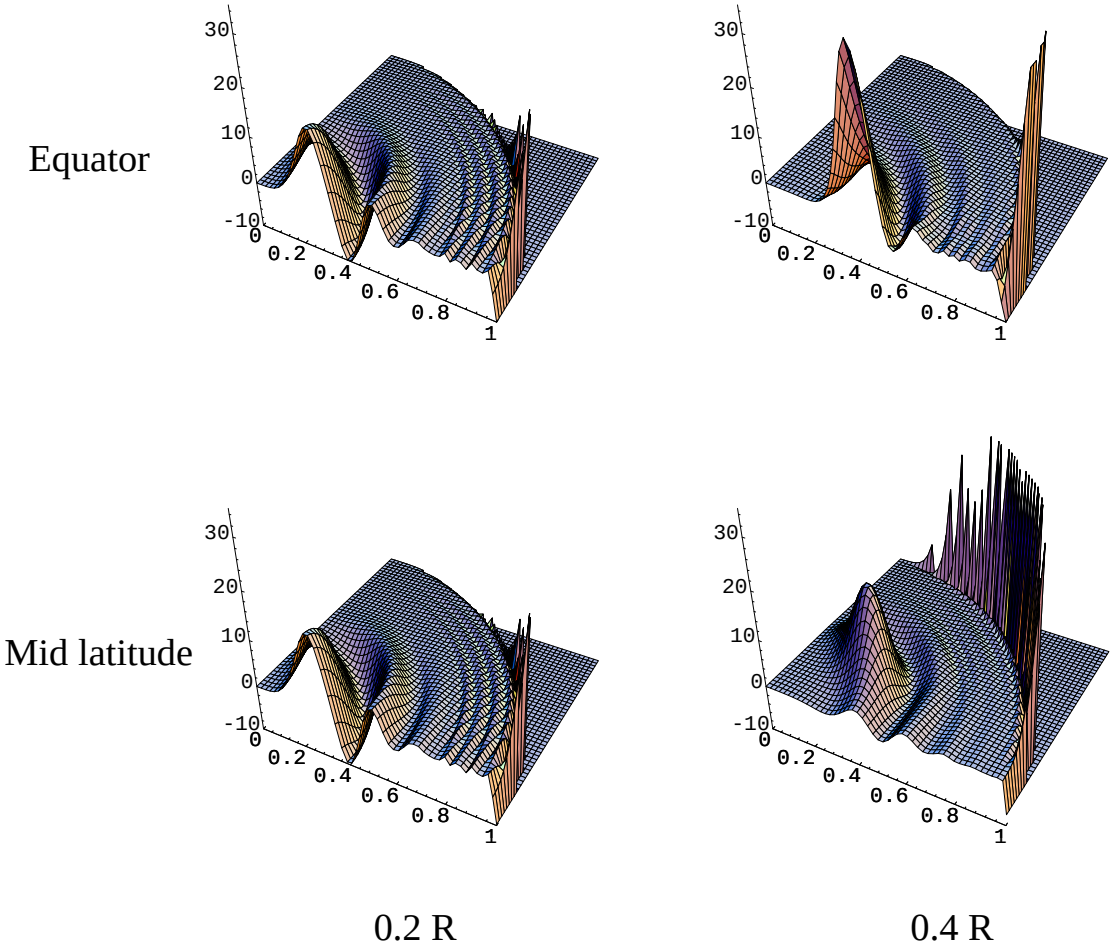


FIG. 6.4 – *Noyaux de résolution d'une méthode 2D RLS appliquée aux données LOW+IRIS. Les noyaux présentés ont été calculés en* $0.2R_\odot$ *et* $0.4R_\odot$ *à l'équateur et à mi-latitude. Les pics de surface restent non résolus avec la grille utilisée pour le graphique et leur contribution à l'intégrale totale (en rayon et latitude) des noyaux est négligeable.*

accord avec une rotation rigide du cœur (légèrement plus rapide que la zone radiative pour IRIS et légèrement moins rapide pour BiSON). Les barres d'erreurs obtenues avec les données LOWL semblent exclure (à 1σ) une rotation rigide du cœur. Cependant, le splitting moyen des modes $l = 1$ déterminé à partir des données LOWL (2 ans) a récemment été réestimé par S. Tomczyk à 432 ± 25 nHz (voir Appourchaux 1998). La valeur du splitting ainsi que l'incertitude ont donc été réévaluées à la hausse rendant ces observations compatibles à la fois avec celle de BiSON et celle d'IRIS. Il en ressort que **l'ensemble des données IRIS, BiSON et LOWL montre un bon accord avec une rotation rigide depuis le bas de la zone convective jusque dans le cœur**. Une analyse préliminaire par inversion 2D RLS des splittings portant seulement sur les 8 premiers mois d'observation de GOLF (Lazrek et al. 1997) indiquait une rotation légèrement décroissante du cœur mais également compatible avec une rotation strictement rigide (Contribution 6). Les noyaux de résolution associés à l'inversion RLS dans le cœur étant très oscillants, il est néanmoins difficile d'obtenir une interprétation locale claire du résultat (**Fig. 6.4**). Les méthodes de type OLA à 2D commencent à être développées (Chaplin et al. 1998, Rabello-Soares et al. 1998) pour l'étude de la rotation du cœur mais il n'est pas possible de localiser les noyaux de résolution en latitude.

2. Si les coefficients a_1 sont disponibles pour tous les modes, on peut utiliser la relation 1D entre ceux-ci et la moyenne de la rotation en latitude $\tilde{\Omega}_1$. Cette approche a été suivie pour inverser les données GONG de bas degrés en conjonction avec les données MDI, les deux ensembles de données fournissant les coefficients a_1 pour tous les modes observés (Contribution 7). Cette inversion montre une rotation solide jusqu'en $0.3R_\odot$ puis légèrement décroissante pour atteindre 380 ± 60 nHz entre $0.15R_\odot$ et $0.22R_\odot$.

3. On peut également utiliser l'une des deux 'approximations 1D' (§6.2) en essayant de corriger au moins en partie le biais introduit par la prise en compte de notre connaissance de la dépendance en latitude de la rotation dans la zone convective. Cette approche a été suivie pour interpréter les splittings sectoraux de bas degrés de GOLF en conjonction avec les observations de MDI (Contribution 7) et a conduit à une rotation rigide jusqu'à $0.3R_\odot$ puis croissante atteignant 500 ± 60nHz entre $0.15R_\odot$ et $0.25R_\odot$. La collaboration que j'ai mise en place au sein de l'équipe GOLF a permis de confronter les résultats de méthodes MOLA et SOLA (1D) appliquées strictement aux mêmes données par différents 'inverseurs' (Contribution 7). Les deux méthodes conduisent à des résultats similaires lorsqu'elles utilisent la même 'approximation 1D'.

   D'une manière générale les biais introduits par l'utilisation d'approximations 1D sont faibles et n'influencent que très peu la solution au dessus de $0.2R_\odot$. Par contre, lorsque l'on essaye d'estimer la rotation *en dessous* de $0.2R_\odot$ en utilisant des noyaux de résolution correspondant à une faible régularisation (qui seuls

peuvent être localisés sous $0.2R_\odot$, voir Contribution 6, Fig. 4), ces biais même faibles peuvent conduire à des écarts très importants ($>$ 90nHz) sur la solution. Les diverses approches utilisées pour corriger ces biais, toutes basées sur une connaissance a priori de la dépendance en latitude de la rotation, conduisent à des résultats comparables (Contribution 7) montrant, pour les données GOLF, une valeur moyenne de la rotation entre $0.1R_\odot$ et $0.2R_\odot$ de 560 ± 90 nHz. Les barres d'erreurs associées ($\pm$90nHz) et la très grande sensibilité aux biais rendent ces résultats obtenus sous $0.2R_\odot$ très peu significatifs.

L'étude de l'influence sur la solution des différentes approximations faites pour résoudre le problème inverse montre que les biais observationnels ne sont pas la seule cause permettant d'expliquer les différents résultats d'inversions 1D des splittings de bas degrés notamment pour les solutions trouvées sous $0.2R_\odot$. Les effets dûs aux 'approximations 1D' restent faibles et probablement négligeables par rapport à l'incertitude liée à la dispersion des résultats des différentes observations mais ils devront être pris en compte pour obtenir des résultats fiables sous $0.2R_\odot$ lorsqu' un meilleur accord sera obtenu à partir des divers instruments et méthodes d'analyse des spectres.

Il faut également souligner l'importance du choix des données utilisées pour les degrés intermédiaires et élevés. A titre d'exemple, alors que l'inversion des données GONG de bas degrés ($l = 1, 2, 3$) associées aux données MDI donne une rotation décroissante au dessous de $0.3R_\odot$ (Contribution 7), l'inversion de ces même données associées aux autres splittings GONG ($l > 3$) ne montre pas de décroissance de la rotation en $0.2R_\odot$ et semble indiquer une rotation légèrement plus rapide ($\sim 450nHz$) autour de $0.3R_\odot$ (Rabello-Soares et al. 1998).

En conclusion, l'inversion de l'ensemble des observations conduit à **une rotation rigide ($\sim$ 430nHz) s'étendant de la base de la zone convective jusqu'à** $0.3R_\odot$. Entre $0.2R_\odot$ et $0.3R_\odot$ certaines données (GOLF, IRIS) sont en faveur d'une rotation plus rapide et d'autres (BiSON, GONG, LOWL) en faveur d'une rotation moins rapide. Dans tous les cas l'augmentation ou la diminution en $0.2R_\odot$ n'excède pas 50nHz par rapport à la rotation rigide de la zone radiative et **l'ensemble des solutions restent compatibles avec une rotation rigide s'étendant jusqu'à** $0.2R_\odot$**. Entre** $0.15R_\odot$ **et** $0.2R_\odot$ **les incertitudes sur les divers résultats sont voisines de** $\pm$100**nHz et les solutions obtenues sont très sensibles à tout biais d'observations, d'analyse des spectres ou introduit par la méthode d'inversion. Cela nous conduit à considérer comme peu fiables les résultats obtenus entre** $0.15R_\odot$ **et** $0.2R_\odot$**. Aucun noyau de résolution ne peut actuellement être localisé sous** $0.15R_\odot$ **si bien que tout résultat présenté sous ce rayon ne peut être interprété que comme une extrapolation des résultats obtenus dans les couches supérieures.**

Contribution 5

The solar core rotation from LOWL and IRIS or BiSON data

T. Corbard, G. Berthomieu, J. Provost, E. Fossat

Proceedings of IAU181 Symposium: Sounding Solar and Stellar Interior, J. Provost & F.X. Schmider (eds.), poster volume, p. 79, 1998

The solar core rotation from LOWL and IRIS or BiSON data

T. Corbard[1], **G. Berthomieu**[1], **J. Provost**[1], **E. Fossat**[2]

[1] Laboratoire G.-D.Cassini, Observatoire de la Cote d'Azur, Nice
[2] Departement d'Astrophysique, UNSA, Nice

ABSTRACT

The solar core rotation is investigated by means of a 2D regularized least square inversion. A reliable rotation rate above $0.4R_\odot$ is obtained by using the rotational splittings measured between 1994 and 1996 with the data of the LOWL instrument which can observe both low and intermediate degree p-modes. For sounding the deeper layers, we have alternately added the most recent published splittings of the IRIS and the BiSON network groups. These two sets have been known to be inconsistent at more than a 3-sigma level. The consequences of this difference on the behaviour of the rotation rate inside the solar core, seen by the global inversion, are studied and discussed in this poster.

1. Observed rotational splitting frequencies

An observable consequence of the solar rotation is that the azimuthal degeneracy of global modes of oscillation is raised. The rotational splitting is defined by $\Delta\nu_{nlm} = \frac{\nu_{nlm}-\nu_{n10}}{m}$, where ν_{nlm} denotes the frequency of the mode of degree l, radial order n and azimuthal order m. Recent results obtained by various groups for the low degree rotational splittings have been used here.

The IRIS measurements cover a total of 19 months of observation with 4 time series obtained in 1989, 1990, 1991, 1992. The splittings are weighted averages of the results obtained by different methods applied on the same averaged spectra (Lazrek et al. 1996).

The BiSON data have been collected between 05/01/93 and 08/23/94. The splittings and their errors are obtained for each mode (n,l) by Chaplin et al. (1996) from the 16-month power spectrum.

The LOWL data contain 1102 modes (n,l) with degrees up to $l = 99$ and frequencies lower than $\nu = 3500\mu Hz$. For each mode, individual splittings are given by, at best, three a-coefficients of their expansion on orthogonal polynomials defined by Schou et al. (1994). LOWL values have been calculated from the data covering 2 years of observation between 2/26/94 and 2/25/96 (communicated by Steven Tomczyk). Individuals splittings have been built from the given a-coefficients and their uncertainties have been calculated by assuming that the splittings are uncorrelated and independent of m for each (n,l) and such that they lead at best (in least-squares sense) to the quoted errors given on the a-coefficients.

2. The 2D RLS inversion method

For low rotation the frequency shifts are given by:

$$\Delta\nu_{nlm} = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} K_{nlm}(r,\mu)\Omega(r,\mu)drd\mu \qquad (1)$$

where $\Omega(r,\mu)$ is the unknown rotation rate versus depth and latitude, $\mu = \cos(\theta)$, θ is the colatitude and r the normalized solar radius. The kernels $K_{nlm}(r,\mu)$ depend on the model and the eigenfunctions of the mode which are assumed to be known exactly.

We search for the unknown rotation as a linear combination of piecewise polynomials, projected on a tensorial product of B-spline basis. A complete description of the method and the choice of the parameters used for inverting LOWL data can be found in Corbard et al. (1996). The inferred rotation $\tilde{\Omega}(r_0,\mu_0)$ at a point (r_0,μ_0) is obtained as a linear combination of the data $\Delta\nu_{nlm}$. Thus from Eq.(1) it follows that averaging kernels $\kappa(r_0,\mu_0,r,\mu)$, which are a linear combination of rotational kernels K_{nlm}, exist such that:

$$\tilde{\Omega}(r_0,\mu_0) = \iint \kappa(r_0,\mu_0,r,\mu)\ \Omega(r,\mu)drd\mu \qquad (2)$$

The radial and latitudinal full widths at mid height (Δr and $r\Delta\theta$) of these kernels provide an estimation of the spatial resolution of the inversion at a point (r_0,μ_0). It increases with lower regularizing term, at the expense of larger errors on the solution.

3. Results and discussion

Figure 1 shows the inferred rotation rate for four latitudes $(0, 30, 60, 90^\circ)$ obtained by inverting LOWL data, LOWL+IRIS data and LOWL+BiSON data. The 3 solutions differ only at radius smaller than 0.2 $R_\odot$ and show no latitudinal dependencies below this depth. The solution obtained between 0.4 and $0.95R_\odot$ is discussed in Corbard et al. (1996). These results show that the different values given by observers for the low l splittings lead to different behaviours of the inferred rotation rate in the core. Therefore the inversion is sensitive to the actual observational differences.

The LOWL data are in favor of a core that rotates slower than the radiative interior. The solutions with IRIS and BiSON data are compatible and show that

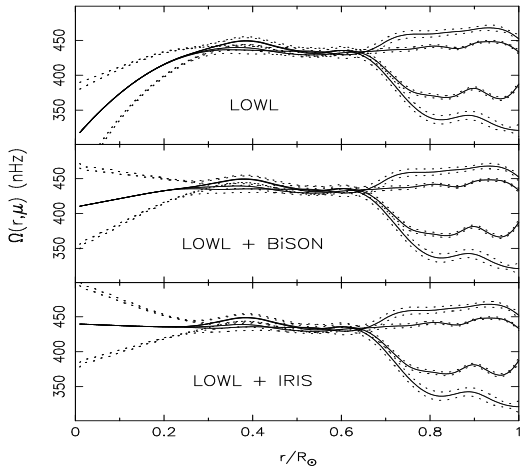


Figure 1: Rotation rate versus solar radius for latitudes $0, 30, 60, 90^\circ$ obtained with three sets of data.

an extension to the solar core of the rather uniform rotation found in the outer radiative interior could explain the observed splittings. The differences between LOWL and IRIS or BiSON data (especially for $l = 1$) are sufficient to produce solutions that are not identical. Nevertheless all the available observations argue against theories for angular momentum transport which predict a rotation rate at $0.2R_\odot$ much higher than the equatorial rotation rate. However solar core layers are intrinsically not well constrained so that little variation in the data could produce important variation in the solution. Although the 1σ error bars shown on the figure are large below $0.2R_\odot$, we can not insure that the true rotation rate lies inside these error bars. In fact these bars represent the uncertainties on a weighted averaged of the rotation rate. In an attempt to have a best interpretation of our results we must have a look at the weighting function given by the so-called averaging kernels.

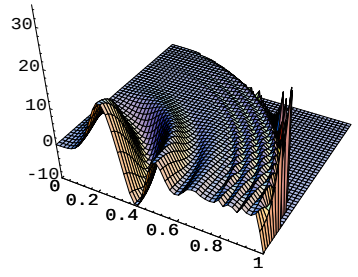


Figure 2: Averaging kernel at $r_0 = 0.2R_\odot, \theta_0 = 45^\circ$.

Figure 2 shows a 3D mid latitude averaging kernel obtained at $0.2R_\odot$ Contrary to the kernels at $0.4R_\odot$ which are well localized, (Corbard et al. 1996), the kernels at $0.2R_\odot$ for mid latitude and equator are not distinguishable and are both localized at the equator and $0.28R_\odot$. This result shows that our inversion is not able to detect a latitudinal dependency of the rotation rate even if it exists at $0.2R_\odot$ and that the solution obtained at all latitudes below $0.3R_\odot$ is an estimation of the rotation rate in the equatorial plane. Another problem arises from the fact that the averaging kernels calculated at $r_0 = 0.2R_\odot$ and below this depth are localized between 0.25 and $0.28R_\odot$. This indicates that the true rotation rate at a target location below $0.2R_\odot$ contributes only for a few part in the calculation of the inferred rotation rate at this location.

In conclusion our results lead to a solar core rotation of the order or smaller than the surface rotation at mid latitude and rule out core rotation significantly larger than surface rotation. The inversion is sensitive to the actual observational differences. Nevertheless the interpretation of the value of the rotation rate obtained below $0.2R_\odot$ depends strongly on the behavior of the rotation rate in the radiative interior. We note however that the integral of the averaging kernel between 0.25 and $0.6R_\odot$ is null. Thus, if we suppose that the rotation rate is constant in the radiative interior and down to $0.25R_\odot$, we can interpret the value obtained at $0.2R_\odot$ as a weighted averaged of the true rotation rate between 0.1 and $0.25R_\odot$ the weighting function being the corresponding part of the averaging kernel. Nevertheless although the solid rotation found between 0.4 and $0.6R_\odot$ is thought to be reliable, its extension down to $0.25R_\odot$ is more speculative and some little gradients in these zones can modify significantly the interpretation of the value of the rotation rate found at $0.2R_\odot$ and deeper. A better understanding of the rotation of the core should require a better agreement between the different analysis of the different observations. Some other global inversion techniques as SOLA (Pijpers & Thompson 1992) should be helpful by searching explicitly averaging kernels without any negative part. Such kernels, even larger than those obtained in this work should be useful to complete the interpretation of our results in the core.

REFERENCES

1. Chaplin W.J., Elsworth Y., Howe R., 1996, MNRAS 280, 849
2. Corbard T., Berthomieu G., Provost J., et al., 1996, submitted to A&A
3. Lazrek M., Pantel A., Fossat E., et al., 1996, Sol. Phys., 166, 1
4. Pijpers F.P., Thompson M.J., 1992, A&A 262, L33 ApJ 448, L57
5. Schou J., Christensen-Dalsgaard J., Thompson M.J., 1994, ApJ 433, 389

Contribution 6

"Inferring the internal rotation of the Sun from low degree helioseismology"

T. Corbard

Proceedings of IX IRIS meeting (Capodimonte July 1997)
A. Cacciani (ed), 1998

Inferring the internal rotation of the Sun from low degree helioseismology

T. Corbard

Laboratoire G.-D.Cassini, Observatoire de la Cote d'Azur, Nice

ABSTRACT

In this presentation, I investigate the internal rotation of the Sun (below $0.4R_\odot$) from some observations of low degree frequency splittings. I compare the results obtained with two inverse methods applied on the first GOLF eight months dataset combined with the LOWL two years dataset. The emphasis is made on the study of the effects of underestimated errors or bias that may be present in the data or introduced by the inverse method itself.

1. Forward model

For low rotation the observed frequency splittings are given by:

$$\Delta\nu_{nlm} \equiv \frac{\nu_{nlm} - \nu_{nl0}}{m} = \int_0^\pi \int_0^{R_\odot} K_{nlm}(r,\theta)\Omega(r,\theta)\sin\theta dr d\theta + \varepsilon_{nlm}, \tag{1}$$

where $\Omega(r,\theta)$ is the unknown rotation rate versus depth r and colatitude θ and ε_{nlm} are observational errors assumed to be uncorrelated and normally distributed with a standard deviation σ_{nlm} taken equal to the error given by observers on the corresponding splitting. The kernels $K_{nlm}(r,\theta)$ depend on the model and on the eigenfunctions of the modes which are assumed to be known exactly. We note that, most of the observers actually do not give directly the individual splittings but rather a small number of the so-called a-coefficients of their expansions on a set of orthogonal polynomials. Assuming that the relation between individual splittings and these coefficients is linear, an equation similar to Eq. (1) can be established by computing the appropriate kernels $K^a_{nlj}(r,\theta)$ related to each a_j-coefficient.

In order to investigate the rotation below $0.4R_\odot$ where the latitudinal dependence is particularly not well constrained because of the few azimuthal orders provided by the low l degree modes able to sound these zones, one may want to simplify the problem by assuming that the rotation rate has only small (smaller than in the convection zone) variations in latitude. With this assumption it can be shown that Eq. (1) is well approximated by:

$$\Delta\nu_{nlm} = \int_0^\pi \int_0^{R_\odot} \tilde{K}_{nl}(r)[P_l^m(\cos\theta)]^2\Omega(r,\theta)\sin\theta dr d\theta + \varepsilon_{nlm}, \tag{2}$$

where P_l^m are Legendre functions normalized such that $\int_0^\pi [P_l^m(\cos\theta)]^2 \sin\theta d\theta = 1$ and $\tilde{K}_{nl}(r)$ radial kernels (eg. Cuypers (1980)) . One possibility is then to carry out a full 2D inversion of Eq. (2) but constraining the solution to have no latitudinal variation in the deep interior (Corbard et al. 1997a). The solution obtained in the core by this way represents an average of the core rotation between the equator and the pole.

Another possibility is to search for the rotation rate at a given latitude only i.e. to reduce the problem to a 1D inverse problem. Since the most constrained zone is the equatorial one, we try to investigate only the equatorial rotation rate. For this purpose we use the following property of the Legendre functions for $m = l$:

$$[P_l^l(cos(\theta)]^2 = C_l(sin\theta)^{2l} \qquad\qquad C_l = \frac{(2l+1)!}{2^{2l+1}(l!)^2} \tag{3}$$

which shows that, for high degrees l, the major contribution to sectoral splittings $\Delta\nu_{nll}$ comes from the equatorial rotation rate $\Omega_{eq}(r) = \Omega(r,\pi/2)$. This leads to the commonly used 1D integral equation (see e.g. Antia et al. 1996, Corbard et al. 1997b):

$$\Delta\nu_{nll} = \int_0^{R_\odot} \tilde{K}_{nl}(r)\Omega_{eq}(r)dr + \varepsilon_{nll} \tag{4}$$

Nevertheless this approximation is valid only for high degrees l. For lower degrees the sectoral splittings are sensitive not only to the equatorial rotation but also to the rotation rate in a large angular domain around the equator. The extent of this domain will be estimated in the following and I will discuss the influence of this approximation on the estimation of the core rotation using Eq. (4).

2. Inverse methods used

I have used 2 different inverse methods:

- A Regularized Least-Squares method with Tikhonov regularization. For this method we project the equatorial rotation rate on a spline basis $\Omega_{eq}(r) = \sum_{k=1}^{N} \omega_k \varphi_k(r)$ and we search the ω_k coefficients by minimizing the quantity (in the 1D case):

$$\sum_{nl} \left[\frac{\Delta\nu_{nll} - \sum_{k=1}^{N} \omega_k \int_0^{R_\odot} \tilde{K}_{nl}(r)\varphi_k(r)dr}{\sigma_{nll}} \right]^2 + \lambda \sum_{k=1}^{N} \omega_k \int_0^{R_\odot} \left(\frac{d\varphi_k(r)}{dr} \right)^2 dr \qquad (5)$$

  where λ is a regularization parameter chosen for establishing a balance between the goodness of the fit of data and the smoothness of the solution. This is a global linear method and then the value of the rotation obtained at any radius r_0 is a linear combination of the data:

$$\Omega_{eq}(r_0) = \sum_{nl} C_{nl}(r_0)\Delta\nu_{nll} \qquad (6)$$

  By replacing in Eq. (4) we obtain:

$$\Omega_{eq}(r_0) = \int_0^{R_\odot} \left(\sum_{nl} C_{nl}(r_0)\tilde{K}_{nl}(r) \right) \Omega_{eq}(r)dr + \sum_{nl} C_{nl}(r_0)\varepsilon_{nl} \qquad (7)$$

  The function in parentheses is called averaging kernel at r_0. The result obtained at r_0 will be easier to interpret as a local average of the rotation when this kernel is well-peaked and without strong oscillatory behavior. The second term of the sum shows how any bias in the data can lead to bias in the solution which depends on the amplitude of the $C_{nl}(r_0)$ coefficients and may be important.

- A Multiplicative Optimal Localized Average (MOLA) method (or Backus-Gilbert method). With this 'local method' we search directly the coefficients $C_{nl}(r_0)$ which are able to peak the averaging kernel near r_0. This is done by minimizing the quantity:

$$\int_0^{R_\odot} (r - r_0)^2 \left(\sum_{nl} C_{nl}(r_0)\tilde{K}_{nl}(r) \right) dr + \mu \sum_{nl} C_{nl}(r_0)\sigma_{nl}^2 \qquad (8)$$

  subject to the constraint: $\int_0^{R_\odot} \sum_{nl} C_{nl}(r_0)\tilde{K}_{nl}(r)dr = 1$

  μ is a regularization parameter which establishes a balance between the thickness of the averaging kernel and the error on the solution.

3. Low degree splitting observations

Some observations of low degree ($l \leq 4$) splittings are summarized in **Fig. 1**. The values plotted are weighted averages over the radial order ranges shown on the bottom of the figure. The inversions using IRIS and BiSON data have been discussed in Corbard et al. (1996) but have not been used for this work. The GONG $l = 1, 2$ splittings have been estimated by Appourchaux and Rabello Soares (1997, private communication). The results discussed in Sec. 4 are for GOLF ($l = 1 - 3$) + LOWL ($l = 4 - 99$) data whereas the averaging kernels shown in Sec. 5 have been computed using GONG modeset and errors estimated by Appourchaux and Rabello Soares for $l = 1, 2$ and taken from the GONG months 4-10 dataset for $l = 3 - 99$.

4. Results with GOLF+LOWL data

On **Fig. 2**, the full 2D RLS inversion of Eq. (2) is shown by continuous lines for ten latitudes between the equator and the pole. Dotted lines represent the 1σ error bars on the solution. The equatorial rotation rate obtained by a MOLA 1D inversion of Eq. (4) is shown by the crosses. The widths of these crosses are related to the full widths at mid height of the averaging kernels shown at the bottom of the figure.

The two solutions are in good agreement down to $0.3R_\odot$ and tend to show a slightly decreasing rotation rate between $0.3R_\odot$ and $0.1R_\odot$. The fact that the MOLA solution obtained at $0.23R_\odot$ is lower than the solution

at $0.17R_\odot$ may be related to the fact that the splitting $l = 2$ is lower of about 20 nHz than the splitting $l = 1$ in GOLF data (cf **Fig. 1**). We note that the averaging kernel computed at $r_0 = 0.1R_\odot$ is peaked at $0.17R_\odot$ and leads to a very important error bar ($\pm$105 nHz). Therefore we estimate that we can not obtain any reliable estimation of the rotation below $0.2R_\odot$.

5. Study of the balance between resolution and error with GONG data

For a given modeset and the corresponding observational errors we can ask two questions concerning the ability of an inverse method to sound the rotation of the core.

- What is the deepest depth below which we can not peak averaging kernels?
- What are the width of this deepest kernel and the corresponding error on the solution?

Figure 3 shows the individual GONG $l = 1, 2$ splittings plotted against the turning points of the modes. **Figure 4** shows the averaging kernels obtained from these data (adding GONG 4-10 data for $3 \leq l \leq 99$) with MOLA method and two different regularization parameters μ (cf Eq. (8)). These two choices lead to 'thin kernel' (upper figure) or 'large kernels' (lower figure) but we can not peak kernels below $0.15R_\odot$. This gives an answer to the first question. The corresponding error on the solution (question 2) is around $\pm$100nHz. Therefore, in principle, we are able to give an average of the equatorial rotation rate between 0.1 and $0.2R_\odot$ within $\pm$100 nHz. In fact, as expected, tests show that the solutions computed using the two averaging kernels peaked below $0.2R_\odot$ are very sensitive to any bias in the data (a bias of 10 nHz in the $l = 1, 2$ splittings leads to a change of more than 100 nHz in the solutions). The dispersion of the individual splittings (**Fig. 3**) and of the weighted averages obtained from the different instruments (**Fig. 1**) show that a bias of more than 10 nHz can not be excluded. Therefore the solutions computed using these 'thin kernels' are not thought to be reliable and it seems more reasonable to use the 'large kernels' which are less sensitive to bias and lead to an error bar of about only $\pm$20 nHz.

The final answers to the two questions for the GONG dataset are then that we can obtain an average of the equatorial rotation rate between 0.15 and $0.35R_\odot$ within $\pm$20 nHz. Nevertheless this is valid only under the assumption that:

1. errors given on individual splittings are not underestimated,
2. there is no bias introduced by the inverse method.

The unique way to become confident concerning the point 1 will be to obtain less dispersion on the estimation of individual splittings (**Fig. 3**) and to obtain fully consistent estimations from all the space and ground-based instruments (**Fig. 1**).

For the point 2, as explained in Sec. 1, the reduction to a 1D inverse problem is not valid for low degrees. This may lead to systematic errors in the determination of the core rotation and we have to study this point more in details.

6. Study of the bias introduced by 1D inverse method

It is known that any bias in the data leads to very important changes on the solution obtained below $0.2R_\odot$. The 1D inverse method can also introduce a bias just because the sectoral splittings of low degrees are not sensitive only to the equatorial rotation. The latitudinal extent of the domain around the equator that influences the sectoral splittings can be estimated for each degree l by approximating the latitudinal kernel $[P_l^l(\cos\theta)]^2 \sin\theta$ that arises in Eq. (2) by a rectangular window of the same area and with a height given by the maximum value of the latitudinal kernel (i.e. C_l) which, according to Eq. (3), is its value at $\theta = \pi/2$. The width of the window $\theta_l = 1/(2C_l)$ is then such that:

$$\Omega_{eq}^l(r) \equiv \int_0^\pi \Omega(r,\theta)[P_l^l(\cos\theta)]^2 \sin\theta d\theta \simeq C_l \int_{\frac{\pi}{2}-\theta_l}^{\frac{\pi}{2}+\theta_l} \Omega(r,\theta) d\theta \tag{9}$$

Simple calculus gives for example $\theta_1 \simeq 38°$, $\theta_2 \simeq 31°$, $\theta_3 \simeq 26°$and $\theta_4 \simeq 23°$ for the low degrees. For higher degrees, the width decrease with increasing l ($\theta_{10} \simeq 15°$ down to $\theta_{99} \simeq 5°$ which corresponds to the highest degree used in this work). If we consider the surface rotation law deduced from Doppler velocity measurements (Snodgrass & Ulrich, 1990) (and which is consistent with LOWL data (Corbard et al., 1997)), the surface rotation at 38° of latitude is slower of about 63 nHz than at the equator. In first approximation, this difference

remains in the whole convective zone and this may lead to an important under-estimation of the core rotation. In order to study this effect, we can calculate the difference between the sectoral splittings computed from Eq. (2) and from Eq. (4) by assuming that the rotation rate is given by the surface law in the whole convection zone and is constant below. This difference is plotted against the turning points of the modes in **Fig. 5** showing that this difference becomes rapidly important below $0.2R_\odot$ up to more than 10 nHz for the $l = 1$ modes. Adding artificially 10 nHz to the $l = 1$ splittings and 7 nHz to the $l = 2$ splittings produces no difference in the solution above $0.3R_\odot$, a slightly more rapid ($\simeq +10$ nHz) rotation between 0.2 and $0.3R_\odot$, and very important changes ($\geq +90$nHz) if we use the 'thin kernels' to infer the rotation below $0.2R_\odot$. Therefore we conclude again that the results obtained below $0.2R_\odot$ are not reliable. Furthermore this shows that a 2D MOLA method should be better to infer the rotation between 0.2 and $0.3R_\odot$. Another possibility is to calibrate the effect of neglecting the latitudinal dependence of the rotation and to take this effect into account by assuming a known rotation law in the convection zone.

7. Conclusion

This is a very preliminary work on the determination of the core rotation from low degree helioseismology. I have tried to show which are the difficulties and the limits of such investigations through inverse methods. The most important results obtained are:

- From actual data (i.e. modeset and errors) we can not obtain a reliable estimation of the core rotation below $0.2R_\odot$. If we try to use the 'thin' kernels that we can peak below this point, this leads to an error of over ± 100 nHz on the solution and the result is very sensitive to any bias in the data which can not be excluded from the comparison of the different low degree splitting observations. In turn, we expect to be able to produce an estimation of an average of the rotation rate between 0.15 and $0.3R_\odot$ which may be reliable if there is no important variation of the rotation in this domain.
- The 1D approximation (Eq. (4)) concerning only the equatorial rotation may lead to an underestimation of the core rotation. Thus, in future work, we have to use a full 2D inversion or, at least, to calibrate this effect when using 1D inversions.
- The results obtained below $0.3R_\odot$ with the global RLS method are difficult to interpret because of the oscillatory behavior of the averaging kernels. Nevertheless, it can be used in combination with MOLA method by showing modes which are suspected to have underestimated errors.

From this work, there is no real conclusion about the value of the rotation rate below $0.3R_\odot$. More work and calibrations of the methods, taking into account the above points, are needed for this. We note however, that if the results obtained from the 2D inversion performed on LOWL+GOLF data are to be believed, the solution is consistent with a constant or slightly decreasing rotation rate between 0.4 and $0.2R_\odot$.

Acknowledgments. The numerical computations have been performed on the Cray C98 (IDRIS, CNRS, Orsay). We gratefully acknowledge S. Tomczyk and J. Schou for providing LOWL data, T. Appourchaux, C. Rabello Soares and the GONG team for providing GONG data and M. Lazrek and the GOLF team for providing GOLF data.

REFERENCES

1. Antia H.M., Chitre S.M., Thompson M.J., 1996 The Sun's rotation in its equatorial plane, A&A 308, 656
2. Chaplin W.J., Elsworth Y., Howe R., 1996, Solar core rotation: low-degree solar p-mode rotational splitting results from BISON, MNRAS 280, 849
3. Corbard T., Berthomieu G., Provost J., Fossat E., 1996, The solar core rotation from LOWL and IRIS or BiSON data, To appear in Proceedings of IAU181 Symposium
4. Corbard T., Berthomieu G., Provost J., et al., 1997a, The solar rotation rate from LOWL data: A 2D regularized least-squares inversion using B-splines, 1996, A&A 324, 298
5. Corbard T., Berthomieu G., Provost J., Morel P., 1997b, Inferring the equatorial solar tachocline from frequency splittings, submitted to A&A
6. Cuypers J., 1980, On the calculation of the frequency splitting of adiabatic nonradial stellar oscillations by slow differential rotation, A&A 89, 207
7. Gelly B., Fierry-Fraillon D. et al., 1997, Solar P-mode frequencies from the IRIS network, A&A 323, 235
8. Lazrek M., Pantel A., Fossat E., et al., 1996, Is the solar core rotating faster or slower the the envelope?, Sol. Phys., 166, 1
9. Snodgrass H.B., Ulrich R.K., 1990, Rotation of Doppler features in the solar photosphere, ApJ 351, 309

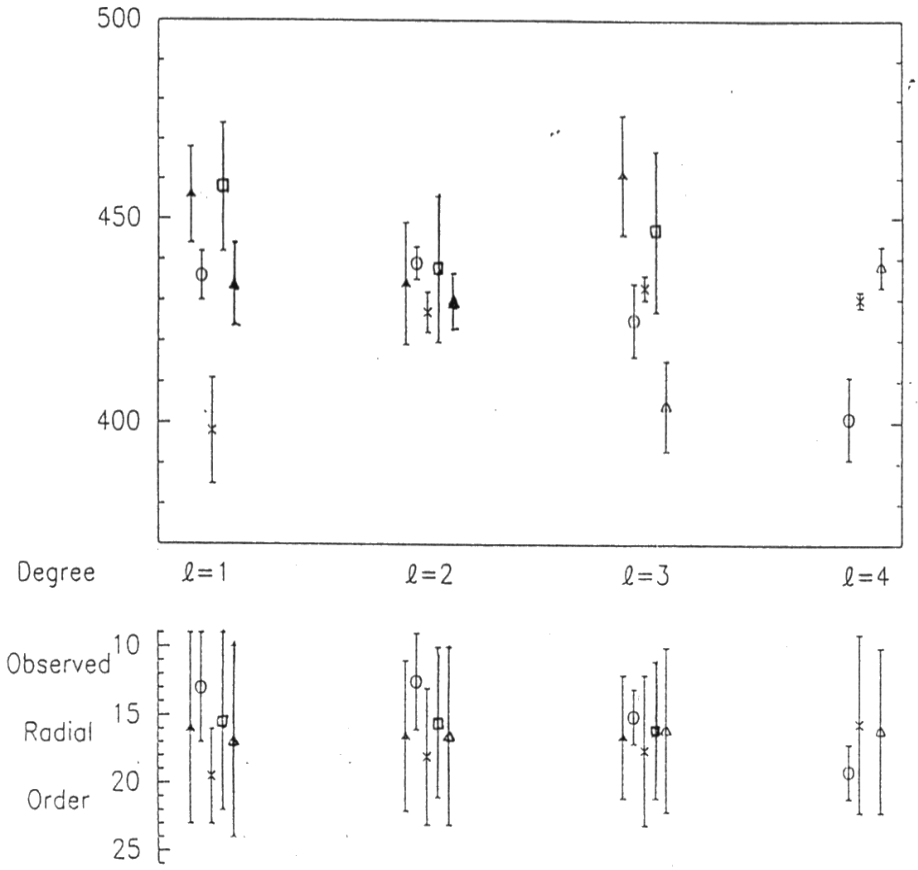


Fig.1: Weighted averaged low degree splittings from various observations. The corresponding radial order ranges are shown at the bottom.

▲ • IRIS measurements cover a total of 19 months of observations with 4 time series obtained in 1989, 1990, 1991 and 1992 (Gelly et al. 1996). The given splittings are the weighted averages of the results obtained by different methods applied on the same averaged spectra (Lazrek et al. 1996).

○ • BiSON data have been collected between 05/01/93 and 08/23/94 by Chaplin et al. (1996)

× • LOWL values have been calculated from the data covering 2 years of observation between 2/26/94 and 2/25/96 (communicated by S. Tomczyk).

△ • GONG data ($l = 1, 2$) have been analyzed by T. Appourchaux & C. Rabello Soares from the GONG observations made between 02/26/95 and 02/26/96 (private communication). ($l = 3, 4$) are for 7 months of observations (GONG months 4-10) (communicated by the GONG team)

□ • GOLF splittings have been estimated by M. Lazrek from the first eight months (04/11/1996-12/31/96) of GOLF observations (private communication)

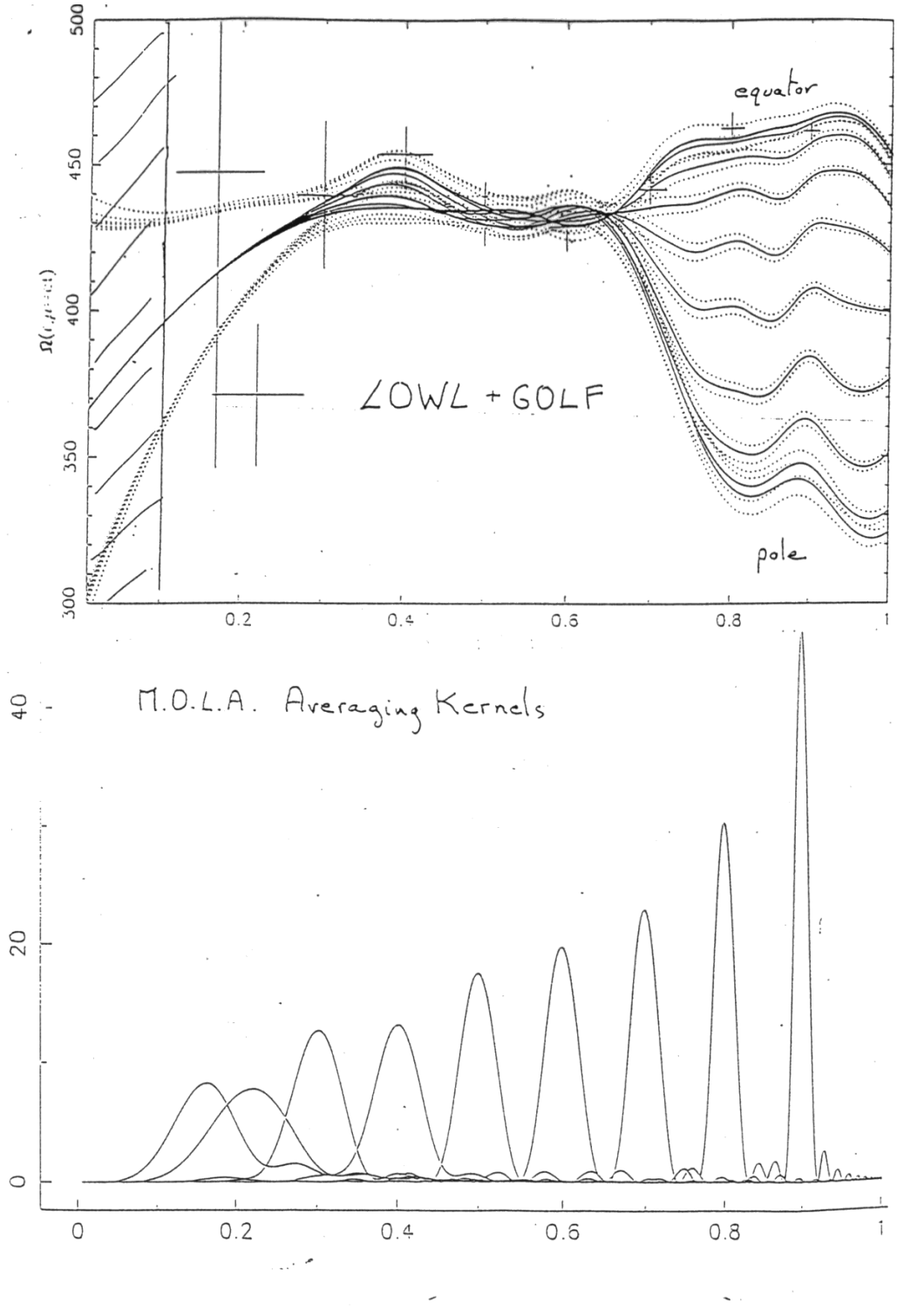


Fig.2: 2D RLS inversion of LOWL+GOLF data at ten latitudes between the equator and the pole(full lines). Dotted lines are the corresponding 1σ error bars. The crosses represent the results obtained from 1D MOLA inversion in the equatorial plane. The corresponding MOLA averaging kernels are shown at the bottom.

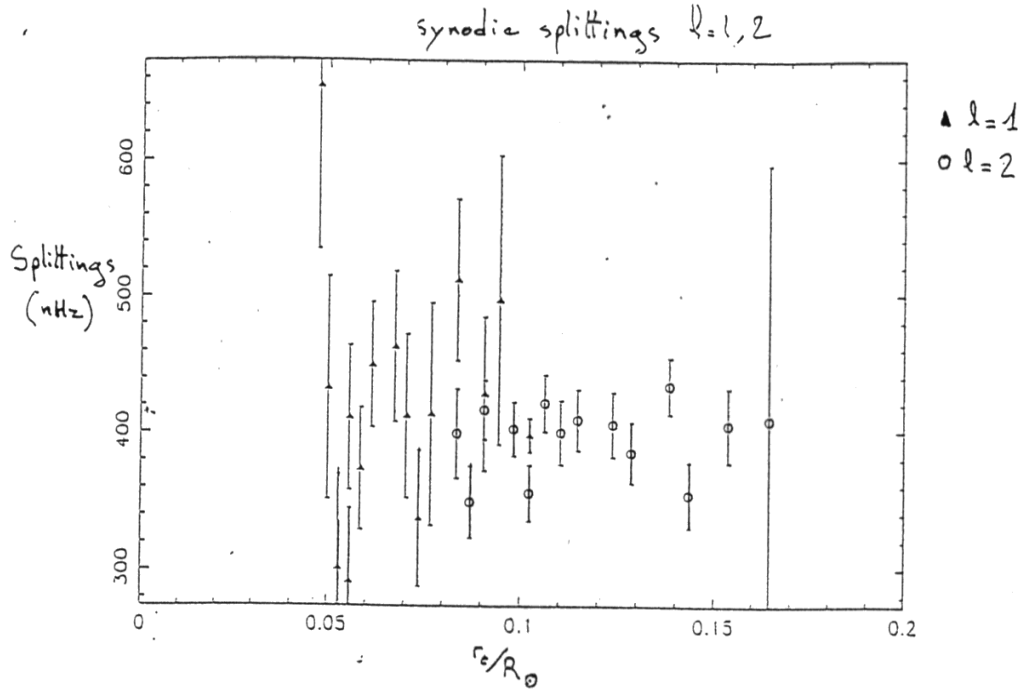
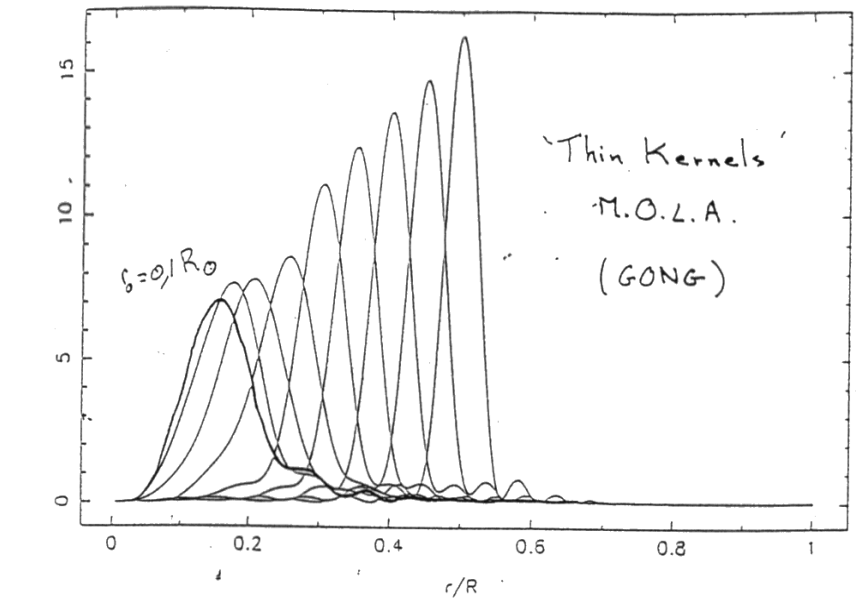


Fig.3: Individual synodic splittings GONG $l = 1, 2$ (Appourchaux & Rabello Soares, private communication) plotted against the turning points of the corresponding modes.



Averaging Kernels computed between 0.1 and $0.5 R_\odot$
With a step of $0.05 R_\odot$

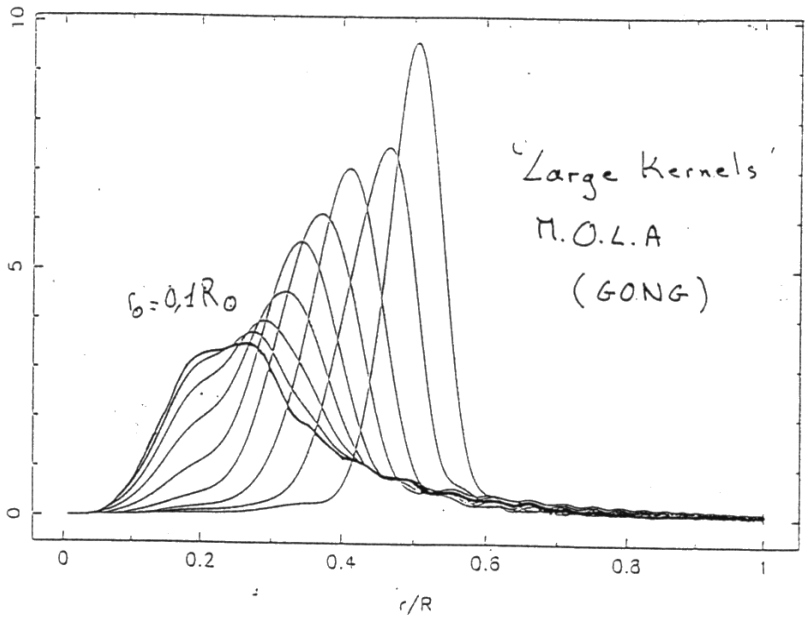


Fig.4: Averaging kernels computed between 0.1 and $0.5 R_\odot$ with a step of $0.05 R_\odot$. These kernels have been obtained from GONG data and the MOLA method. The regularization parameter is 100 times higher in the lower figure than in the upper one leading respectively to 'large' and 'thin' kernels.

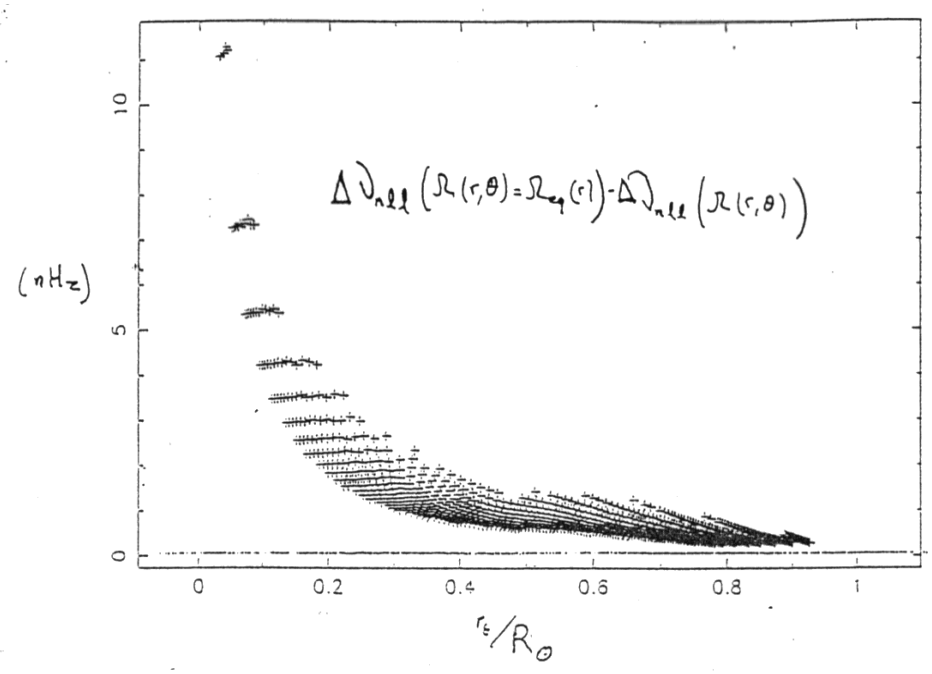


Fig.5: Difference between the sectoral splittings computed from Eq. (2) and from Eq. (4). The rotation rate is assumed to be equal to the surface law in the whole convection zone and constant below. The difference is plotted against the turning points of the modes.

Contribution 7

The solar internal rotation from GOLF splittings

T. Corbard, M.P. Di Mauro,T. Sekii and the GOLF Team

Proceedings of the SOHO6/GONG98 workshop, ESA SP-418, 1998

THE SOLAR INTERNAL ROTATION FROM GOLF SPLITTINGS

T. Corbard[1], M.P. Di Mauro[2], T. Sekii[3], and the GOLF team

[1]Laboratoire G.-D Cassini, Observatoire de la Côte d'Azur, BP 4229, 06304 Nice Cedex 4
[2]Istituto di Astronomia dell'Università di Catania, Viale A.Doria, 6 I-95125 Catania, Italy
[3]Institute of Astronomy, Madingley Rd., Cambridge, CB3 0HA, U.K.

ABSTRACT

The low degree splittings obtained from one year of GOLF data analysis are combined with the MDI medium-l 144-day splittings in order to infer the solar internal rotation as a function of the radius down to $0.2R_\odot$. Several inverse methods are applied to the same data and the uncertainties on the solution as well as the resolution reachable are discussed. The results are compared with the one obtained from the low degree splittings estimated from GONG network.

Key words: solar core rotation; inversion.

1. INTRODUCTION

The rotation of the solar core is an important open question that can be addressed by using spatial data from SOHO. In particular, GOLF experiment is dedicated to the observation of low-degree oscillations which sound the core. Here we use the GOLF frequency splittings (poster 1.39, these proceedings 1998) obtained from one year of observation beginning on April 11th 1996 together with the MDI 144-day splittings for degree up to $l = 250$ (Schou et al. 1998). For comparison we have also used the GONG splittings of low-degree modes obtained (Rabello-Soares & Appourchaux 1998) from 1 year of ground-based observations (August 1995- August 1996).

Figure 1 shows the GOLF sectoral splittings with their formal errors whereas for MDI and GONG data the figure shows the a_1-coefficients of the expansion of the splittings on Ritzwoller & Lavely (1991) polynomials. These two quantities (sectoral splittings and a_1-coefficients) may differ slightly in theory for $l > 1$ because of the latitudinal dependence of the solar rotation. In Section 2. we briefly recall how the 2D inverse problem related to the internal rotation can be reduced to a 1D problem for either the a_1-coefficients or the sectoral splittings and how in both cases the use of sectoral splittings may need some a-priori assumptions on the rotation. Then, Section 3. presents the different inverse methods used and, finally, we discuss the results obtained in Section 5.

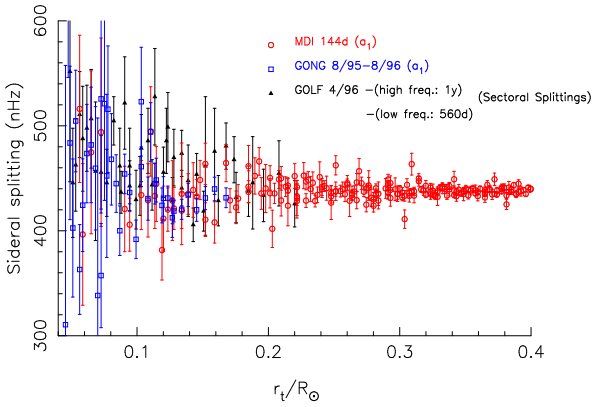


Figure 1. Sideral sectoral splittings (GOLF) and a_1-coefficients (MDI and GONG) with their formal errors as a function of the turning points of the modes.

2. FROM THE 2D TO THE 1D INVERSE PROBLEM

For low rotation the frequency of a mode of radial order n and degree l is splitted in $2l+1$ components of azimuthal order $m = -l, .. + l$ and the splittings $\Delta\nu_{nlm} \equiv \frac{\nu_{nlm} - \nu_{nl0}}{m}$ are given by:

$$\Delta\nu_{nlm} = \int_0^1 \int_0^{R_\odot} K_{nlm}(r,\mu)\Omega(r,\mu) dr d\mu, \quad (1)$$

where $\Omega(r,\mu)$ is the unknown rotation rate versus depth r and colatitude θ ($\mu = \cos\theta$) and $K_{nlm}(r,\mu)$ the so-called rotational kernels calculated for each mode from oscillation eigenfunctions of an equilibrium solar model.

In order to investigate the rotation below $0.4R_\odot$ where the latitudinal dependence is particularly not well constrained because of the few azimuthal orders provided by the low l degree modes, one may want to simplify the problem and reduce it to 1D problem in radius. As a matter of fact 2D inversions are usually not able to peak averaging kernels in both radial and latitudinal direction below $0.4R_\odot$ and two different 1D approximations of Equation 1 are used instead.

2.1. 1D relation for sectoral splittings

One possibility in order to obtain a 1D integral relation is to search for the rotation rate at a given latitude only. Since the most constrained zone is the equatorial one, we try to investigate only the equatorial rotation rate. For this purpose we use the approximation

$$K_{nlm}(r,\mu) \simeq K_{nl}(r) P_l^m(\mu)^2 \qquad (2)$$

where $K_{nl}(r)$ are radial kernels (e.g. Cuypers 1980) and $P_l^m(\mu)$ are Legendre functions normalized such that $\int_{-1}^{1} P_l^m(\mu)^2 d\mu = 1$, and which satisfy the following property for $m = l$:

$$P_l^l(\mu)^2 = C_l(1-\mu^2)^l \quad C_l = \frac{(2l+1)!}{2^{2l+1}(l!)^2} \qquad (3)$$

This shows that, for high-degrees l, the major contribution to sectoral splittings $\Delta\nu_{nll}$ comes from the equatorial rotation rate $\tilde{\Omega}_{eq}(r) = \Omega(r, \mu = 1)$. This leads to the 1D integral approximation:

$$\Delta\nu_{nll} \simeq \int_0^{R_\odot} K_{nl}(r)\tilde{\Omega}_{eq}(r) dr \qquad (4)$$

Nevertheless this approximation is valid only for high degrees l. For lower degrees the sectoral splittings are sensitive not only to the equatorial rotation but also to the rotation rate in a large angular domain around the equator. The extent of this domain and the influence of this approximation on the estimation are discussed in Corbard (1997).

2.2. 1D relation for a_1-coefficients

Some experiments like GONG and MDI produce a small number of the so-called a-coefficients of splittings expansions on a set of orthogonal polynomials (Ritzwoller & Lavely 1991). Assuming that the relation between individual splittings and these coefficients is linear, an equation similar to Equation 1 can be established by computing the appropriate kernels $K^a_{nlj}(r,\mu)$ related to each a_j^{nl}-coefficients for odd indices j (see e.g. Pijpers 1997). Furthermore it has been shown by Ritzwoller & Lavely (1991) that the expansion of the splittings in orthogonal polynomials corresponds to an expansion of $\Omega(r,\mu)$ such that:

$$\Omega(r,\mu) = \tilde{\Omega}_1(r) + \sum_{j=3,5\ldots} \tilde{\Omega}_j(r) \frac{dP_j(\mu)}{d\mu}, \qquad (5)$$

where P_j are the Legendre polynomials. This forms the so called 1.5D problem where each a_j-coefficient is related to the expansion function of the same index through a 1D integral. Therefore the first term of the expansion Equation 5 which do not depend on the latitude can be related to the a_1-coefficients through:

$$a_1^{nl} = \int_0^{R_\odot} K_{nl}(r)\tilde{\Omega}_1(r) dr \qquad (6)$$

The radial kernel $K_{nl}(r)$ is the same as in Equation 2 but, from Equation 5, the function $\tilde{\Omega}_1(r)$ obtained by inverting a_1-coefficients corresponds to the searched rotation rate only where the rotation do not depend on the latitude. Otherwise it corresponds to some average over latitudes that can be estimated by looking at the corresponding 2D averaging kernel (cf. Section 4. and Figure 3).

3. INVERSE METHODS

We have used two kinds of inverse methods for solving the 1D integral equations.

1. A Regularized Least-Squares (RLS) method with Tikhonov regularization (see e.g. Corbard 1997). This is a global method which gives a solution at all depths which fits the data at the best in the least square sense. This is a linear method and then the value of the rotation obtained at any radius r_0 is a linear combination of the data:

$$\hat{\Omega}_{|_1^{eq}}(r_0) = \sum_{nl} C_{nl}(r_0) \left| \begin{matrix} \Delta\nu_{nll} \\ a_1^{nl} \end{matrix} \right. \qquad (7)$$

   By replacing in Equation 4 or 6 we obtain:

$$\hat{\Omega}_{|_1^{eq}}(r_0) = \int_0^{R_\odot} \left(\sum_{nl} C_{nl}(r_0) K_{nl}(r) \right) \tilde{\Omega}_{|_1^{eq}}(r) dr \qquad (8)$$

   The function in parenthesis is called 1D averaging kernel at r_0, $\kappa(r, r_0)$. The result obtained at r_0 will be easier to interpret as a local average of the rotation when this kernel is well-peaked and without strong oscillatory behaviour.

2. Two 'local' methods which search directly the coefficients $C_{nl}(r_0)$ which are able to peak the averaging kernel near r_0. The two methods differ essentially in the way to localize the averaging kernel. The SOLA (Subtractive Optimally Localized Average) method (Pijpers & Thompson 1992) fits the averaging kernel to a Gaussian function of given width whereas the MOLA method (Multiplicative OLA) (Backus & Gilbert 1970) simply gives high weights in the minimization process to the part of the averaging kernel which are far from the target radius. In both case we use a regularizing parameter in order to establish a balance between the resolution and the error magnification reached at the target r_0.

4. HOW TO USE $l = 2, 3$ SECTORAL SPLITTINGS?

As already quoted, GOLF data for $l = 2, 3$ are not a_1-coefficients but sectoral splittings. Therefore one may want to use the Equation 4 in order to infer the equatorial rotation rate. There are two difficulties with this approach:

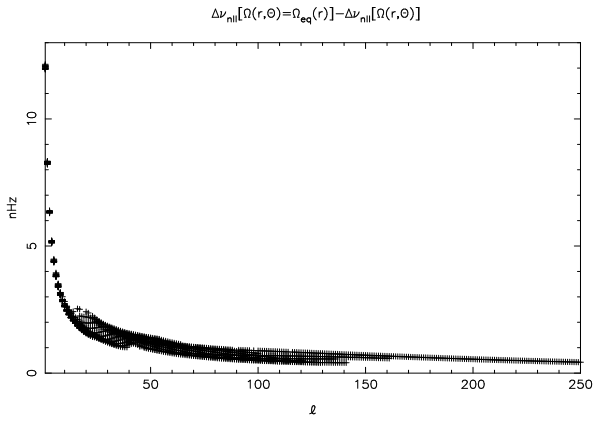


Figure 2. Difference in sectoral splittings computed from Equation 1 and from the 1D approximation Equation 6 for a given 2D rotation profile resulting from a 2D RLS inversion of MDI data. The difference is around $12nHz$ *for* $l = 1$, $8nHz$ *for* $l = 2$, $6nHz$ *for* $l = 3$. *This is due to the fact that for low* l, $P_l^l(\mu)$ *extend far from the equator and therefore low-degree sectoral modes are more sensitive to the latitudinal dependency of the rotation in the convection zone than other sectoral modes.*

1. As already mentioned in Section 2.1., the relation Equation 4 is not valid for low-degree l and therefore may not be suited for the determination of the core rotation. This may be corrected by assuming that the latitudinal dependence of the rotation rate (i.e. $\tilde{\Omega}_j(r)$ $j = 3, 5..$) is known (taken from some previous 2D inversions for example). With this assumption, we can correct the observed sectoral splitting prior to inversion by adding for each mode the difference between the sectoral splittings computed from Equation 1 and from Equation 4. This difference is plotted on Figure 2 as a function of the degree l.
2. MDI data do not provide the sectoral splittings for high l but only upon 18 odd indexed a-coefficients. This number of coefficients is however high enough so that taking their sum as sectoral splittings is a good approximation. Nevertheless, the error on these sums (called 'truncated sectoral splittings' in the following) is always higher than the error on a_1 alone.

Another possibility is to consider the sectoral splittings $l = 2, 3$ as a_1-coefficients at first approximation. In this approach we do not need to correct the data because Equation 6 is valid even for low degrees. Nevertheless, we can also use other dataset (MDI for example) or our knowledge of the latitudinal dependence of the rotation (taken from a previous 2D inversion for example) in order to estimate a_3 for modes $l = 2$ and a_3, a_5 for modes $l = 3$.

With the same approximation as in Equation 2 we can write for the a-coefficients:

$$K^a_{nlj}(r,\mu) \simeq K_{nl}(r) Q_{lj}(\mu) \tag{9}$$

so that, for both approaches, the solution obtained at r_0 can ever be seen as an average of the rotation of the form:

$$\hat{\Omega}(r_0) = \int\int \Big(\sum_{nl} C_{nl}(r_0) K_{nl}(r) W_l(\mu) \Big) \Omega(r,\mu) dr d\mu \tag{10}$$

The 2D averaging kernels (defined by the term in parentheses in Equation 10) can therefore be estimated from the 1D averaging kernels Equation 8 obtained at a target location r_0 by adding the angular part $W_l(\mu)$ of the 2D rotational kernel that corresponds to the data really inverted.

Figure 3 shows on the left the 2D averaging kernels (defined by the term in parentheses in Equation 10) obtained at $r_0 = 0.2 R_\odot$ by inverting GOLF sectoral splittings together with MDI 'truncated sectoral' splittings i.e.:

$$W_l(\mu) = \begin{cases} P_l^l(\mu)^2 & \text{for } l \leq 3 \\ \sum_{j=1}^{jmax} Q_{lj}(\mu) & \text{for } l > 3 \end{cases} \tag{11}$$

whereas, on the right, it shows the 2D averaging kernel obtained at the same target location by inverting MDI a_1-coefficients together with GOLF sectoral splittings for $l = 1, 2, 3$ i.e.:

$$W_l(\mu) = \begin{cases} P_l^l(\mu)^2 & \text{for } l \leq 3 \\ Q_{l1}(\mu) = \frac{3}{2}(1-\mu^2) & \text{for } l > 3 \end{cases} \tag{12}$$

The two corresponding 1D averaging kernels (cf. Figures. 6 and 5) are the integral over latitude of these 2D kernels and are very similar: well localized near $0.2 R_\odot$ and without contributions near the surface. The angular part of the averaging kernel for sectoral splittings strongly depend on the degree l and this leads to the oscillatory behaviour of the 2D kernel with very high peaks near the surface. From this plot it is clear that the interpretation of the result obtained by inverting sectoral splittings is possible only if we have already a good knowledge of the latitudinal dependence of the rotation. Furthermore, as already pointed out, this knowledge is needed in order to correct the low-degree sectoral splittings for which the 1D approximation is not valid. At the opposite, for a_1-coefficients $Q_{l1}(\mu)$ is independent of l (cf. Equation 12). Therefore the surface oscillatory behaviour on the right panel of Figure 3 comes only from the use of sectoral splittings for $l = 2, 3$. In this case, the knowledge of the rotation profile is needed only near the surface in order to interpret the result.

We can summarize the results of this study in few points:

1. It is clear that it is better to use a_1-coefficients than sectoral splittings when we have them.
2. In the case of GOLF data, we have access only to sectoral splittings for $l = 2, 3$. If we want to use them, it seems more reasonable to try to correct them by doing some assumptions on a_3 and a_5

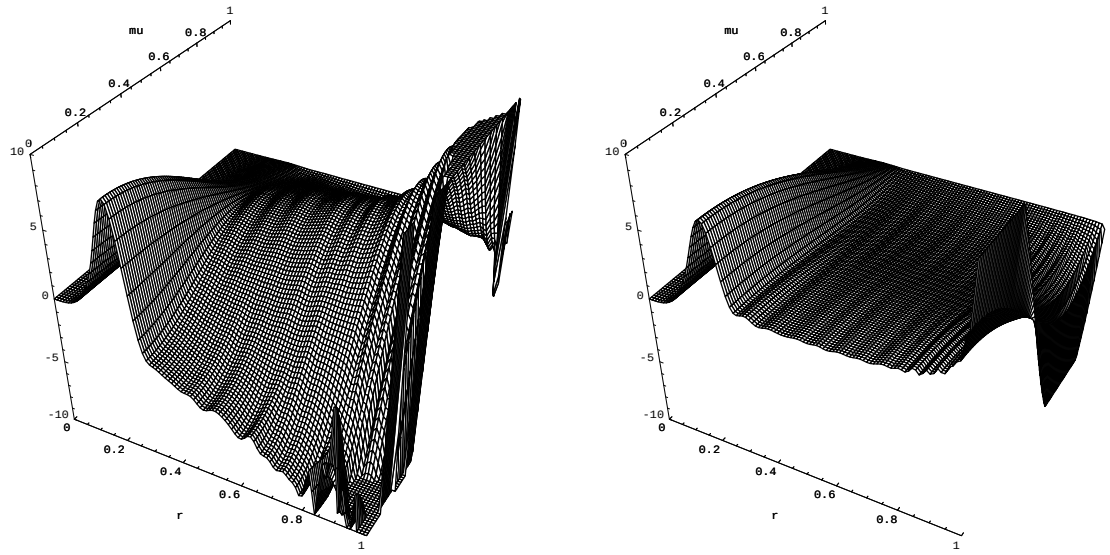


Figure 3. 2D averaging kernels for 1D inversions computed at $r_0 = 0.2R_\odot$ (see Section 4). Left panel: inversion of GOLF sectoral splittings for $l \leq 3$ with MDI 'truncated sectoral'(see text) splittings for $l > 3$. Right panel: inversion of GOLF sectoral splittings for $l \leq 3$ with MDI a_1-coefficients. The peaks near the surface are truncated on the plot for clarity.

for these modes and to use the exact 1D integral rather than correcting all the modes in order to use the approximated 1D integral Equation 4.

3. In both approaches we can in principle obtain a result easy to interpret if the latitudinal variation of the rotation is assumed to be known exactly. But by inverting a_1 for $l > 3$ together with sectoral splittings for $l < 3$, we just have to make assumptions on the surface rotation.

4. Several ways can be followed for correcting the results obtained by using sectoral splittings in a_1 inversions. We can either

   - take a guess rotation and integrating its surface part with the 2D kernel in order to correct the solution after the inversion or
   - take a_3 and a_5 from other datasets or
   - calculate these coefficients from the guess rotation and subtract them from sectoral splittings before the inversion.

   The best is probably to compare the effects of all these corrections and to compare with the inversion of the corrected 'truncated sectoral' splittings. In any case assumptions are needed on the latitudinal dependence of the rotation. As this dependence can not be known exactly it should be interesting to study in future works how these assumptions increase the uncertainties on the solution.

The next Section shows some preliminary results obtained with these different approaches for the use of the combined MDI and GOLF data.

5. RESULTS AND DISCUSSIONS

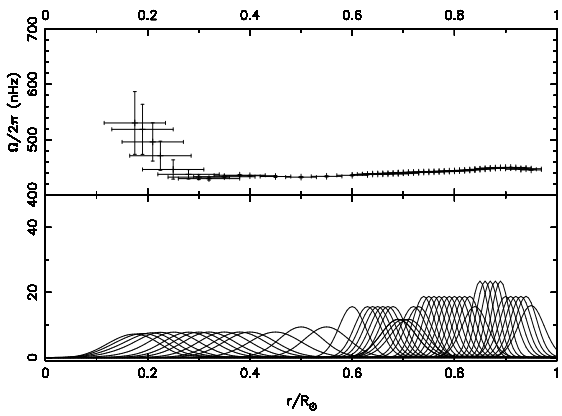


Figure 4. SOLA inversion of MDI a_1-coefficients and GOLF $l = 1, 2$ sectoral splittings. The corresponding 1D averaging kernels are shown below each point of the solution. Vertical and horizontal error bars represent respectively the error and the resolution defined as the FWHM of the averaging kernel.

In this preliminary work, we have chosen, as a first step, to use only $l = 1, 2$ GOLF sectoral splittings in order to reduce the difficulties discussed in the previous sections. Figures 4 and 5 show the results obtained by inverting the a_1-coefficients together with $l = 2$ sectoral splittings by using SOLA and MOLA inverse methods. In SOLA method the trade-off parameter is rescaled at each target location to ob-

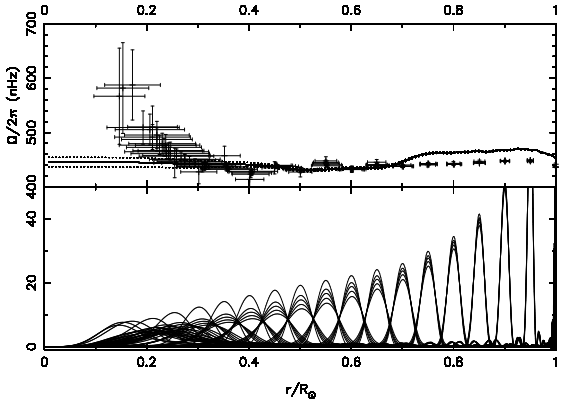


Figure 5. MOLA inversion of the same data as in Figure 4. Five regularizing parameters have been used at each target location. The full line shows an RLS inversion of the corrected 'truncated sectoral splittings' (see text) and the dotted line gives 1sigma errors on this solution.

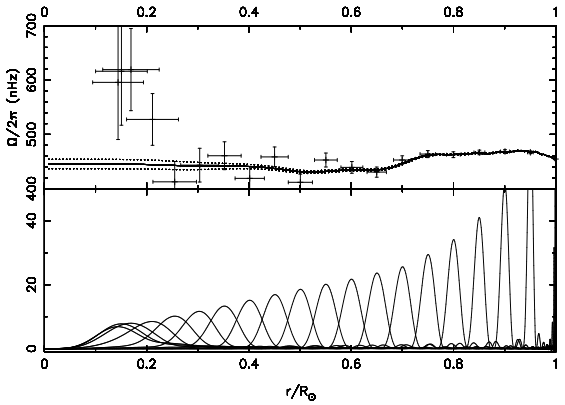


Figure 6. MOLA and RLS inversion of the corrected 'truncated sectoral splittings'. Low regularization has been used in MOLA inversion.

tain more localized averaging kernels. For MOLA method five trade-off parameters have been used at each target location. In the case of low regularization MOLA averaging kernels have some small oscillatory parts. The two methods fall in good agreement down to $0.20R_\odot$ where the rotation rate increases up to 500 ± 60nHz. Below $0.15R_\odot$ both methods fail to peak kernels. On Figure 5 we have shown a RLS solution obtained by inverting sectoral splittings. As expected the two solutions ($\hat{\Omega}_{eq}$ and $\hat{\Omega}_1$) differ in the convection zone where the rotation rate vary with latitude. In the core, it is difficult to use RLS method because it is a global method and if one try to obtain a well localized averaging kernel down to $0.2R_\odot$ then we have to decrease the regularization and the solution becomes very oscillating everywhere with big error bars. With an optimal L-curve choice of the regularizing parameter the solution is constant ($445nHz$ see Figure 5) below $0.4R_\odot$ but averaging kernels (not

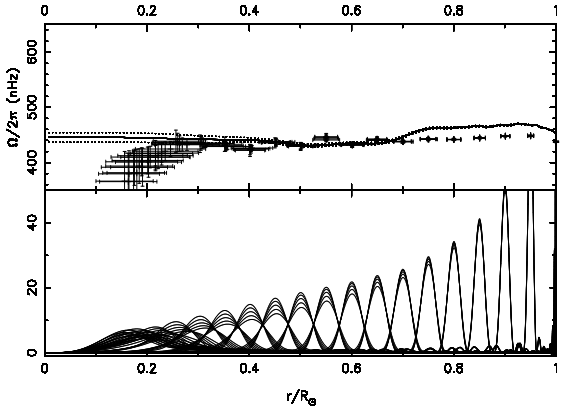


Figure 7. The same as Figure 5 but using GONG a_1-coefficients for l=1,2,3 instead of GOLF sectoral splittings.

shown on the plot) computed below this point are still localized near $0.4R_\odot$ so that, with this method, there is no conclusion on the core rotation in terms of weighted average of the true rotation. Nevertheless, we can use this solution and look at the residuals for each mode. The global normalized χ^2 of the inversion is 1.2. Now, if we look only at low-degree GOLF modes, the 'partial normalized χ^2' is around 0.5 showing that within error bars GOLF data are in good agreement with a constant rotation below $0.4R_\odot$ and that GOLF errors are probably not underestimated. Furthermore, looking at the residuals for each individual splittings can help in the signal analysis by pointing out some modes with high residuals that may be reanalyzed in order to become more confident on the result.

Following the discussion of the previous sections we have also inverted the sectoral (or 'truncated sectoral') splittings corrected by using the latitudinal dependence of the rotation found by a 2D RLS inversion of MDI data. The result is shown on Figure 6 in the case of low regularization. As expected the solution corresponds to the equatorial rotation profile as found by the RLS method in the convection zone and the error bars increase compared to the use of a_1-coefficients alone. The solution in the core is a little bit higher than found by a_1 inversion but remains compatible within error bars showing also an increasing rotation rate below $0.025R_\odot$.

We have also tried to include GOLF $l = 3$ sectoral splittings in our inversions. This leads to a more important increase of the rotation rate below $0.2R_\odot$ (around 700 ± 100 nHz). But in this case more work is needed in order to become more confident in our result. In particular, in that case, we have to test the effects of the various corrections suggested in Section 4. and to look at their influence on the estimation of the uncertainties on the core rotation.

Finally, we have done the same analysis with GONG low-degree data (Rabello-Soares & Appourchaux 1998). In the case of GONG data we have a_1-coefficients so that, as quoted before, it may be more

suited to carry an inversion of these coefficients using Equation 6 rather than using the 'truncated sectoral' splittings. In order to compare the result with the previous ones, the GONG a_1-coefficients for low-degrees have been used together with the MDI a_1-coefficients of higher degree modes. Figure 7 shows that these data tend to produce a slightly decreasing rotation rate below $0.3R_\odot$. Therefore there is still a relatively important difference between the solutions obtained with the different low-degrees data. These differences are significant only if the error bars obtained on the solutions are not underestimated and may be related to the important dispersion of individual splittings measurements (cf. Figure 1). Furthermore, we must notice that whereas MDI and GOLF splittings are for the same year of observations(5/96-5/97), the GONG data are for the year before (5/95-5/96) and therefore the results may not be directly compared. Therefore this result needs to be confirmed in future works and we have also to inverse GONG a_1-coefficients for all the modes which should be a more self-consistent dataset.

6. FUTURE WORKS AND SOME QUESTIONS

The problem of inferring the core physics remains one of the most important still open question that can be addressed by helioseismology. It is therefore very important, as a first step, to be sure that different 'inverters' using different inverse methods can reach similar conclusions when they use the same datasets. This was the goal of this work in collaboration between 'inverters' within the GOLF team and we have shown that the different approaches of the inversion are coherent. After this preliminary work several questions need to be addressed, for example:

- Can we obtain reliable results below $0.2R_\odot$ with actual datasets?
- How the results in the core are sensitive to the data used for medium l splittings?
- Can we explain the differences between the results obtained with different data by a systematic bias in some splitting measurements or by underestimated errors in a few number of individual splittings?
- Can these results (obtained with inverse methods) be confirmed by using forward methods often used for the core rotation problem (Charbonneau et al. 1998; Gizon 1998)?

ACKNOWLEDGMENTS

We acknowledge GOLF, SOI/MDI and GONG teams for allowing the use of data, and C. Rabello-Soares & T. Appourchaux who provided us their analysis of GONG data for comparison. SoHO is a project of international cooperation between ESA and NASA. GONG is a project managed the NSO, a division of the NOAO, wich is operated by AURA, Inc. under a cooperative agreement with the NSF. This work has been performed using the computing facilities provided by the program "Simulations Interactives et Visualisation en Astronomie et Mécanique" (SIVAM, OCA, Nice) and by the "Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique" (IDRIS, Orsay). Thanks to the conference organizers for financial support.

REFERENCES

Backus, G.E., Gilbert, J.F. 1970, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A.266, 123

Charbonneau, P., Tomczyk, S., Schou, J., Thompson, M.J. 1998, ApJ, 496, 1015

Corbard, T. 1997, proceedings of 9th IRIS meeting (Capodimonte, Italy, July 1997)

Cuypers, J. 1980, A&A, 89, 207

Gizon, L., 1998, In: Provost, J., Schmider, F.X. (eds.) IAU Symp. 181: Sounding Solar and Stellar Interior (poster volume). OCA & UNSA, Nice, p. 89

GOLF team, poster 1.39, 1998, these proceedings

Pijpers, F.P., Thompson, M.J. 1992, A&A, 262, L33

Pijpers, F.P. 1997, A&A, 326, 1235

Rabello-Soares, C., Appourchaux, T. 1998, these proceedings

Ritzwoller, M.H., Lavely, E.M. 1991, ApJ, 403, 810

Schou, J., et al. 1998, ApJ, submitted

Conclusions et perspectives

Synthèse des résultats obtenus

Ce travail est une contribution à l'interprétation des observations héliosismologiques les plus récentes concernant la rotation interne du Soleil dans le cadre des collaborations internationales engagées. Il s'agit d'obtenir avec précision les principales caractéristiques de cette rotation, qui constituent des contraintes pour les théories physiques de la dynamique interne du soleil.

J'ai, dans un premier temps, construit et optimisé un nouveau code d'inversion 2D basé sur une méthode d'inversion de moindres carrés régularisée. J'ai développé les outils (noyaux de résolution, études statistiques et simulations de Monte-Carlo, définition des stratégies automatiques de régularisation) permettant l'interprétation des résultats et leur comparaison avec ceux issus d'autres approches du problème inverse. Ce code est basé sur l'utilisation d'une base de B-splines qui m'a permis, de par sa souplesse d'utilisation, d'étendre les potentialités d'investigation de la méthode aux solutions discontinues et aux solutions contraintes en surface et au centre.

En collaboration avec les observateurs S. Tomczyk et J. Schou, j'ai effectué une analyse détaillée des données LOWL acquises entre 1994 et 1996 en augmentant la résolution radiale atteinte par rapport aux précédentes analyses portant sur la première année d'observations. Ces résultats confirment l'indépendance en latitude de la rotation interne dans la zone radiative au-dessus de 0.4 $R_\odot$. La possibilité d'introduire des contraintes basées sur les observations de la rotation de surface m'a permis de plus de montrer que les données LOWL, qui ne contiennent que peu d'information sur les couches superficielles, sont compatibles avec les observations du plasma photosphérique. Il apparaît une augmentation de la rotation sous la surface et dans le plan équatorial jusqu'à des valeurs qui correspondent à la rotation des structures magnétiques à petites échelles observées en surface mais ancrées plus profondément. Ces conclusions ont par la suite été confirmées par les inversions, sans contraintes de surface, des données MDI contenant des modes de degrés plus élevés.

Les données LOWL ne fournissant que trois coefficients a d'indices impairs pour caractériser le splitting rotationnel de chaque mode observé, la résolution latitudinale obtenue est au mieux voisine de 30°. Une simulation menée à partir de ces données m'a conduit à estimer la résolution latitudinale que l'on pouvait espérer atteindre à partir

d'observations donnant accès aux mesures individuelles des splittings. A l'équateur on trouve une résolution de 5° proche de la surface. Là encore, les données MDI, avec des coefficients jusqu'à a_{35}, ont permis d'atteindre de telles résolutions en latitude.

Par ailleurs, grâce à ce gain en résolution, j'ai étendu l'inversion au delà de 60° de latitude et obtenu la signature contenue dans les données MDI d'une structure de 'jet' présentant un maximum de rotation proche du pôle (à environ $0.95R_\odot$ et 15° de colatitude). Cette structure se trouve à la limite de la zone pour laquelle les noyaux de résolution sont bien localisés mais les indicateurs habituels (résolution, localisation des noyaux et incertitudes) tendent à indiquer qu'elle est réelle. D'autre codes de type RLS ont conduit aux mêmes résultats (Schou et al. 1998) mais il est tout à fait remarquable de constater que les méthodes locales de type OLA n'ont pas révélé cette structure. Les outils habituellement utilisés pour l'interprétation des résultats ne permettent pas réellement de trancher en faveur de l'une ou l'autre des solutions. C'est, je crois, la première fois qu'un tel désaccord apparaît entre les deux approches (locale et globale) de l'inversion qui ne trouve pas d'explication immédiate par l'analyse des noyaux de résolution. D'après mon étude portant sur l'inversion de deux ensembles de coefficients a différents mais déduits des mêmes observations ainsi que celle plus détaillée de Howe et al. (1998), la signature d'un jet, effectivement contenue dans les données MDI, pourrait être due à un problème dans l'analyse des spectres conduisant à la détermination des coefficients a. De nouvelles observations, associées à des nouvelles analyses des splittings, seront nécessaires pour trancher cette question, mais ces premières conclusions me semblent mettre en évidence toute l'importance de continuer à développer des méthodes de type RLS et les outils pour l'interprétation des résultats et leurs comparaisons avec les méthodes OLA dont l'interprétation locale est a priori plus aisée.

Cette question de la découverte contestée d'un 'jet' est révélatrice d'une évolution très récente des problèmes soulevés par l'inversion des splittings rotationnels. Un bon accord sur le profil de rotation à grande échelle est maintenant obtenu (au moins entre la surface et $0.4R_\odot$) à partir des différentes observations et méthodes d'inversion, mais la précision des observations tend à révéler localement des structures qui présentent un intérêt particulier et nécessitent le développement de nouvelles techniques pour leur interprétation. De ce point de vue, l'intérêt porté à l'étude de la tachocline, aussi bien du coté théorique qu'observationnel, est exemplaire.

Une contribution importante de mon travail concerne la détermination des propriétés caractéristiques de la tachocline qui constituent des contraintes très fortes pour la modélisation des processus de transport de moment angulaire, de mélange des éléments chimiques et d'interaction entre la rotation et les mouvements de la convection turbulente. Pour décrire le fort gradient de rotation qui caractérise cette zone, j'ai développé plus particulièrement deux méthodes d'inversion. La première méthode est une méthode linéaire avec 'déconvolution locale' par les noyaux de résolution. L'introduction dans le contexte de l'héliosismologie de la seconde méthode, une technique d'inversion adaptative avec régularisation non linéaire, représente une contribution originale de

mon travail. Cette approche est plus adaptée à l'étude des zones à forts gradients, telle la tachocline, que les méthodes linéaires habituelles qui tendent à lisser la solution et elle présente une réelle alternative aux méthodes d'analyse directe qui requièrent la modélisation a priori de la rotation avec peu de paramètres. L'adaptation de cette méthode non linéaire a nécessité une étude approfondie des différentes étapes et des choix des paramètres qui lui sont spécifiques.

L'interprétation statistique des résultats par la mise en place de simulations de Monte-Carlo exige que le code soit optimisé et que le choix des paramètres de régularisation soit automatique. Ces simulations, réalisées pour une modélisation simple de la rotation dans la tachocline par une fonction erreur de différentes largeurs inférieures à $0.1R_\odot$, montrent que les deux méthodes, non linéaire ou de déconvolution locale, permettent d'atteindre des résultats similaires: avec un niveau de bruit correspondant à celui des données LOWL, on retrouve la largeur attendue avec une incertitude à 1σ de $\pm 0.02R_\odot$. Il faut cependant noter que ces simulations sont basées sur les propriétés statistiques attribuées aux données LOWL. La connaissance de ces propriétés n'étant que partielle (aucune corrélation n'étant supposée notamment), on ne peut pas exclure que le choix des paramètres optimaux de l'inversion défini par les simulations introduise un biais dans le résultat de l'inversion des données LOWL. En effet l'étude de la sensibilité de l'estimation des paramètres de la tachocline à la stratégie utilisée pour ce choix a montré que la largeur estimée peut varier d'une manière significative. Ces analyses m'ont conduit à réévaluer à $\pm 0.03R_\odot$ l'incertitude sur la détermination de la largeur de la tachocline aussi bien pour la méthode de 'déconvolution locale' que pour la méthode non linéaire. On peut en conclure que la diminution des incertitudes sur l'estimation des splittings de modes ayant leurs points tournants au voisinage de la tachocline, ou une meilleure connaissance de leurs propriétés statistiques, devrait permettre non seulement de réduire l'incertitude sur la détermination de la largeur mais aussi de rendre le résultat beaucoup moins sensible au choix des paramètres et éviter ainsi le risque d'introduction d'un biais.

Le principal résultat de l'application de la méthode non linéaire aux mesures héliosismiques est de conduire à une tachocline très étroite de largeur $0.01 \pm 0.03R_\odot$ alors que la méthode linéaire déconvoluée donne une largeur de $0.05 \pm 0.03R_\odot$. Compte tenu des incertitudes évaluées par simulations de Monte-Carlo et par l'étude des biais, ces deux déterminations restent compatibles. Les résultats d'analyses directes effectuées en parallèle par d'autres groupes à partir des mêmes données conduisent également à des valeurs de la largeur inférieures à $0.05R_\odot$ mais n'excluent pas des valeurs légèrement supérieures (voir Tab. 5.1). Néanmoins la méthode de régularisation non linéaire est certainement mieux adaptée à l'étude de la tachocline et la conclusion de ce travail est que l'on peut exclure les largeurs supérieures à $0.05R_\odot$ comme étant représentatives des données LOWL.

L'ensemble des analyses placent le centre de la tachocline significativement sous la limite de la zone convective mais autorise, dans la limite des incertitudes à 1σ, une extension jusque dans le bas de la zone convective. Une telle tachocline, étroite

et placée sous la zone convective, pose le problème de son confinement et constitue un test important pour de nombreux modèles. Elle permet notamment de placer des contraintes sur la viscosité turbulente si l'on considère la théorie de Spiegel & Zahn (1992) ou le champ magnétique dans cette zone si l'on considère la théorie de Gough & McIntyre (1998). En ce qui concerne le rapport entre les valeurs de la rotation au fond et en haut de la tachocline, l'observation donne des valeurs intermédiaires entre les deux prédictions théoriques avec lesquelles elles sont marginalement en accord à 1σ.

En ce qui concerne la rotation du cœur solaire, je me suis attaché à étudier l'effet sur les résultats d'inversion des biais provenant de l'analyse des spectres, des méthodes d'inversion elles mêmes ou de l'utilisation simultanée de splittings sectoraux avec des coefficients a_1 issus d'observations différentes.

Une condition de régularité au centre a été implémentée qui permet d'augmenter le degré de confiance que l'on peut avoir envers les résultats obtenus dans le cœur par une méthode RLS. L'interprétation du résultat dans cette zone reste néanmoins difficile par l'aspect non localisé des noyaux de résolutions. Cette contrainte a ensuite été reprise par Antia et al. (1998) pour des inversions 1.5D. La question de la rotation du coeur restant très largement ouverte, il est important que plusieurs approches complémentaires puissent être comparées. L'utilisation de la contrainte que j'ai introduite dans le code d'inversion devrait pouvoir y contribuer en rendant plus fiables les résultats de celui-ci.

J'ai montré que la solution déduite par inversion RLS ou MOLA est sensible aux différentes mesures des splittings de bas degré et conduit, en fonction des données utilisées à des résultats autorisant une rotation du cœur plus rapide (IRIS, GOLF) ou plus lente (GONG, LOWL, BiSON) que celle de l'intérieur radiatif. L'analyse plus détaillée des premières observations de l'instrument GOLF a montré que ces données sont compatibles avec une augmentation de la rotation en $0.2R_\odot$. Cette augmentation est cependant marginalement significative. On peut conclure que les données actuellement disponibles, dans leur ensemble, sont compatibles avec une rotation quasiment rigide entre $0.4R_\odot$ et $0.2R_\odot$. Plus profondément les résultats restent très incertains mais permettent d'exclure une rotation très rapide du cœur que prévoyaient certaines théories de l'évolution du moment angulaire (Pinsonnault et al. 1989).

Perspectives

Les résultats que j'ai obtenus révèlent une tachocline très mince et montrent le grand intérêt que présente la méthode non linéaire pour traiter ce problème. Ces résultats devront être confirmés par l'application de cette méthode aux données MDI et GONG qui est en cours.

L'étude s'est concentrée sur les propriétés de la tachocline dans le plan équatorial Certaines analyses directes (Antia et al. 1998, Charbonneau et al. 1998b) montrent que les variations en fonction de la latitude, trouvées pour la position du centre et la

largeur de la tachocline, restent marginalement significatives avec les données actuelles. La généralisation de la méthode de régularisation non linéaire au cas bidimensionnel devrait également permettre d'étudier ces variations en latitudes qui constituent aussi un test important pour les modèles de la dynamique interne du Soleil (Elliott 1997).

D'une manière plus générale, la méthode adaptative développée peut trouver des applications chaque fois qu'un gradient important est trouvé à l'issue d'une inversion. Le gradient de rotation présent juste sous la surface peut être étudié à partir de cette méthode et la généralisation à 2D pourrait également être utile pour la détection de structures telles que les 'jets'.

Notons qu'il existe de nouvelles techniques qui permettent de sonder les couches proches de la surface par une analyse locale des ondes ('ring diagrams analysis' ou analyse en ondes planes) ou par une analyse 'temps-distance' qui, comme pour la sismologie terrestre ou la tomographie en imagerie médicale, permet d'obtenir de l'information sur les conditions rencontrées par l'onde lors de sa propagation entre deux points de la surface (voir la revue de Hill (1995)). Ces techniques dites 'd'héliosismologie locale' sont toujours en développement et commencent à être appliquées aux observations permettant une résolution spatiale de la surface solaire suffisante telles que GONG (Thompson et al. 1996) ou MDI (Duvall et al. 1997). Ces analyses s'appliquent sur des temps d'observations beaucoup plus courts que ceux nécessaires à la mesure des splittings et devraient donc permettre d'atteindre des informations à plus petites échelles spatiales et temporelles complémentaires de la vision moyenne de la dynamique fournie par l'héliosismologie 'globale'.

Dans le contexte de l'inversion de la structure solaire, un pic est trouvé dans la différence entre la vitesse du son des modèles et celle du Soleil (voir par exemple Turck-Chièze et al. 1997, Gonczi et al. 1998) La largeur de ce pic, situé au niveau de la tachocline peut être reliée à la largeur de la zone de mélange des éléments chimiques qui est supposée exister sous la zone convective (Morel et al. 1998). Une méthode d'inversion linéaire avec déconvolution a été utilisée (Elliott et al. 1998) pour déduire une largeur de $0.018 R_\odot$ pour cette zone. La méthode de régularisation non linéaire paraît être une alternative intéressante pour aborder ce problème.

Malgré tous les efforts déployés depuis quinze ans pour l'observation des splittings de bas degrés, la rotation du cœur solaire reste incertaine. Bien sûr, la détection, si elle est possible, des modes de gravité (Hill et al. 1991), beaucoup plus sensibles à la rotation des couches internes, devrait permettre de résoudre en grande partie ce problème (Gabriel et al. 1998). Mais sans attendre cette éventuelle détection, la poursuite de l'analyse, en collaboration avec les observateurs, des différentes sources d'incertitudes et de biais devrait permettre de contraindre un peu mieux la rotation du cœur solaire.

L'expérience que j'ai acquise pour l'analyse des splittings de bas degrés et des difficultés associées pourra trouver des applications en astérosismologie pour l'étude

de la rotation d'autres étoiles. En tenant compte des contraintes observationnelles de l'instrument COROT[1], j'ai effectué une étude préliminaire sur les contraintes que l'on peut espérer obtenir sur la rotation des étoiles de type solaire pour lesquelles seuls les splittings de bas degrés de quelques modes peuvent être détectés.

1. COnvection et ROTation, projet de petite mission spatiale du CNES dédiée à l'astérosismologie et à la recherche d'exoplanètes telluriques (Baglin & Auvergne 1997).

Références

Abramowitz M, Stegun I.A., 1972, Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York, p. 1006

Ando H., Osaki Y., 1975, PASJ 27, 581

Antia H.M., Basu S., Chitre S.M., 1998, MNRAS 298, 543

Antia H.M., Chitre S.M., Thompson M.J., 1996, A&A 308, 656

Appourchaux T., 1998, The Structure of the Solar core: an observer's point of view. Dans: S.G. Korzennik & A. Wilson (eds) "Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars", ESA SP-418, ESA Publications Division, Noordwijk, The Netherlands, sous presse

Appourchaux T., Gough D.O., Sekii T., Toutain T., 1998a, An unbiased averaged rotational splitting from VIRGO/SPM? Dans: Provost J., Schmider F.X. (eds) "Sounding Solar and Stellar interiors", Proc. IAU Symp. 181 (poster volume), OCA & UNSA, Nice, p. 3

Appourchaux T., Rabello-Soares M.-C., Gizon L., 1998b, A&A Sup. Series, sous presse

Appourchaux T., and the VIRGO team, 1998, Results from the LOI on board SoHO: low-degree p-mode parameters for 2-year data set. Dans: S.G. Korzennik & A. Wilson (eds) "Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars", ESA SP-418, ESA Publications Division, Noordwijk, The Netherlands, sous presse

Backus G.E., Gilbert J.F. 1968, Geophys. J. 16, 169

Badeva V., Morozov V., 1991, Problèmes incorrectement posés - Théorie et applications, série Automatique, Mason, Paris

Baglin A., Auvergne M., 1997, Asterosismology from space. Dans: Provost J., Schmider F.X. (eds) "Sounding Solar and Stellar interiors", Proc. IAU Symp. 181, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, p. 345

Barrett R.K., 1993, On the optimal choice of regularization parameter for the inversion of solar oscillation data. In: Brown T.M. (ed) GONG 1992: Seismic Investigation of the Sun and Stars (A.S.P. Conf. Ser. vol. 42), Astr. Soc. of the Pacific, San Francisco, p. 233

Basu S., 1997, MNRAS 288, 572

Basu S., Antia H.M., 1997, MNRAS 287, 189

Blanc-Féraud L., 1998, Théorie de l'inversion. Dans "Génération et Interprétation des Oscillations Stellaires", Cours de Structure Interne - VIIIe Ecole d'automne d'Aussois, E. Schatzman (ed), Observatoire de Paris, Meudon

Bos R.J., Hill H.A., 1983, Sol. Phys. 82, 89
Bray R.J., Loughhead R.E., Sunspots, London: Chapman and Hall, 1964
Brookes J.R., Isaak G.R., van der Raay H.B., 1976, Nature 259, 92
Brown T., Morrow C.A., 1987, ApJ 314, L21
Brown T.M., Christensen-Dalsgaard J., Dziembowski W., et al., 1989, ApJ 343, 526
Brummell N.H., Hulburt N.E., Toomre J., 1998, ApJ 473, 494
Brun S., Turck-Chièze S., Morel P., 1998. ApJ 506, 913
Chaboyer B., 1998, Internal Rotation, Mixing and Lithium Abundances. Dans: "New Eyes to See Inside the Sun and Stars", Proc. IAU Symp. 185, p. 25
Canuto V.M., 1998, ApJ 497, L51
Chaplin W.J., Christensen-Dalgaard J., Elsworth Y., et al., 1998, Rotation of the solar core. Dans: Dans:"Sounding Solar and Stellar interiors", Proceedings of the 181st symposium of the IAU (poster volume), Provost J., Schmider F.X. (eds), OCA & UNSA, Nice, p. 73
Chaplin W.J., Elsworth Y., Howe R., 1996, MNRAS 280, 849
Charbonneau P., 1998, soumis à ApJ
Charbonneau P., Christensen-Dalsgaard J., Henning R., et al., 1998a, Observational constraints on the dynamical properties of the shear layer at the base of the solar convection zone. Dans: Dans:"Sounding Solar and Stellar interiors", Proceedings of the 181st symposium of the IAU (poster volume), Provost J., Schmider F.X. (eds), OCA & UNSA, Nice, p. 161
Charbonneau P., Christensen-Dalsgaard J., Henning R., et al., 1998b, soumis à ApJ
Charbonneau P., MacGregor K.B., 1993, ApJ 417, 762
Charbonneau P., MacGregor K.B., 1997, ApJ 486, 502
Charbonnier P., Aubert G., Blanc-Féraud L., Barlaud M., 1994, Two deterministic half-quadratic regularization algorithms for computed imaging. Dans IEEE proceedings of the 1st International Conference of Image Processing, Austin USA, p. 168
Charbonnier P., Aubert G., Blanc-Féraud L., Barlaud M., 1997, IEEE Trans. on Image Processing 6 (2), 298
Christensen-Dalsgaard J., 1997, Lecture notes on Stellar Oscillations, Fourth Edition, private communication (accessible sur http://www.obs.aau.dk/ jcd/oscilnotes)
Christensen-Dalsgaard J., Hansen P.C., Thompson M.J, 1993, MNRAS 264, 541
Christensen-Dalsgaard J., Larsen R.M., Schou J., Thompson M.J., 1994, Optimally localized kernels for 2D helioseismic inversion. Dans: "GONG'94 Helio- and Astero-Seismology", ASP Conf. Ser. 76, p. 70
Christensen-Dalsgaard J., Schou J., 1988, Differential rotation in the Solar interior. Dans Domingo V., Rolfe E.J. (eds) "Seismology of the Sun and Sun-like stars", ESA SP-286, ESA Publication Division, Noordwijk, p.149
Christensen-Dalsgaard J., Schou J., Thompson M.J., 1990, MNRAS 242, 353
Claverie A., Isaak G.R., McLeod C.P., van der Raay H.B., Roca Cortés T., 1979, Nature 282, 591
Claverie A., Isaak G.R., McLeod C.P., van der Raay H.B., Roca Cortés T., 1981, Nature 293, 443

Collin B., Nesme-Ribes E., Leroy B., Meunier N., Sokoloff D., 1995, La dynamique interne du Soleil, à partir des traceurs magnétiques, C.R. Acad. Sci. Paris, T321, Série IIb, p. 111

Cox J.P., 1980, Theory of stellar pulsation, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey

Corbard T., 1997, [**C6**] Inferring the internal rotation of the Sun from low degree helioseismology. Dans: Proceedings of the 9th IRIS meeting held in Capodimonte, Italy, June 1997, A. Cacciani (ed)

Corbard T., 1998, La rotation interne du Soleil déduite de l'héliosismologie. Dans "Génération et Interprétation des Oscillations Stellaires", Cours de Structure Interne - VIIIe Ecole d'automne d'Aussois, E. Schatzman (ed), Observatoire de Paris, Meudon

Corbard T., Berthomieu G., Gonczi G., Provost J., Morel P., 1995, [**C1**], Solar rotation from 2D inversion. Dans: Hoeksema J.T. et al. (eds) "Helioseismology", Proc. Fourth Soho Workshop, ESA SP-376 (2), Noordwijk, p. 289

Corbard T., Berthomieu G., Morel P., Provost J., Schou J., Tonczyk S., 1997, [**A1**], A&A 324, 298

Corbard T., Berthomieu G., Provost J., Blanc-Féraud L., 1998a [**C4**], On the use of nonlinear regularization in inverse methods for the solar tachocline profile determination. Dans: S.G. Korzennik & A. Wilson (eds) "Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars", ESA SP-418, ESA Publications Division, Noordwijk, The Netherlands, sous presse

Corbard T., Berthomieu G., Provost J., Fossat E., 1998b, [**C5**], The solar core rotation from LOWL and IRIS or BiSON data. Dans: Provost J., Schmider F.X. (eds) "Sounding Solar and Stellar interiors", Proc. IAU Symp. 181 (poster volume), OCA & UNSA, Nice, p. 79

Corbard T., Berthomieu G., Provost J., Morel P., 1998c, [**A3**], A&A 330, 1149

Corbard T., Blanc-Féraud L., Berthomieu G., Provost J., 1998d, [**A4**], soumis à A&A

Corbard T., Di Mauro M.P., Sekii T. and the GOLF team, 1998e, [**C7**], The solar internal rotation from GOLF splittings. Dans: S.G. Korzennik & A. Wilson (eds) "Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars", ESA SP-418, ESA Publications Division, Noordwijk, The Netherlands, sous presse

Corbard T., Berthomieu G., Provost J., 1998f, [**C3**], The solar rotation rate from inversion of the first GONG datasets. Dans: Provost J., Schmider F.X. (eds) "Sounding Solar and Stellar interiors", Proc. IAU Symp. 181 (poster volume), OCA & UNSA, Nice, p. 77

Craig I.J.D., Brown J.C., 1986, Inverse Problems in Astronomy: a guide to inversion strategies for remotely sensed data, Adam Hilger Ltd, Bristol

Cuypers J., 1980, A&A 89, 207

Deubner F.L., 1975, A&A 44, 371

Deubner F.L., Ulrich R.K., Rhodes E.J., 1979, A&A 72, 177

Di Mauro M.P., Dziembowski W.A., Paterno L., 1998, Rotation of the solar interior: new results by helioseismic data inversions. Dans: S.G. Korzennik & A. Wilson (eds) "Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars", ESA SP-418,

ESA Publications Division, Noordwijk, The Netherlands, sous presse
Duvall Jr T.L., Dziembowski W.A., Goode P.R., et al., 1984, Nature, 310, 22
Duvall Jr T.L., Harvey J. W., 1984, Nature 310, 19
Duvall Jr T.L., Harvey J.W., Pomerantz M.A., 1986, Nature 321, 500
Duvall Jr T.L., Kosovitchev A.G., Scherrer P.H., 1997, New time-distance helioseismology results from the SOI/MDI experiment. Dans: Provost J., Schmider F.X. (eds) "Sounding Solar and Stellar interiors", Proc. IAU Symp. 181, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, p. 83
Dziembowski W.A., Goode P.R., Libbrecht K.G., 1989, ApJ 337, L53
Dziembowski W.A., Goode P.R., 1991, The internal rotation and magnetism of the Sun from its oscillations. Dans: Cox A.N., Livingston W.C., Matthews M.S. (eds) "Solar Interior and Atmosphère", The Univ. of Arizonna Press, Tucson, p. 501
Edmonds A.R., 1960, Angular Momentum in Quantum Mechanics, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey
Eff-Darwich A., 1998 Rotation of the solar core: compatibility of the different data sets available. Dans: S.G. Korzennik & A. Wilson (eds) "Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars", ESA SP-418, ESA Publications Division, Noordwijk, The Netherlands, sous presse
Eff-Darwich A., Pérez Hernandez F., 1997, A&AS 125, 391
Eldén L., 1984, BIT 24, 467
Elliott J.R., 1997, A&A 327, 1222
Elliott J.R., Gough D.O., Sekii T., 1998, Helioseismic determination of the solar tachocline thickness. Dans: S.G. Korzennik & A. Wilson (eds) "Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars", ESA SP-418, ESA Publications Division, Noordwijk, The Netherlands, sous presse
Elliott J.R., Gough D.O., 1998, soumis à ApJ
Fossat E., 1995, Low-degree p-mode rotational splittings and solar core rotation. Dans: Hoeksema J.T. et al. (eds) "Helioseismology", Proc. 4th SoHO Workshop, ESA SP-376 (1), Noordwijk, p. 229
Fossat E., 1998, Détermination des fréquences des modes p. Dans "Génération et Interprétation des Oscillations Stellaires", Cours de Structure Interne - VIIIe Ecole d'automne d'Aussois, E. Schatzman (ed), Observatoire de Paris, Meudon
Gabriel A.H., Turck-Chièze S., Garcia R.A., Pallé P.L., Boumier P., Thiery S., Grec G., Ulrich R.K., Bertello L., Roca Cortés T., Robillot J.M., 1998, Search for g-mode frequencies in the GOLF oscillations spectrum, in "Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars", S.G. Korzennik & A. Wilson (eds) ESA SP-418, ESA Publications Division, Noordwijk, The Netherlands, sous presse
Gelly B., Ferry-Fraillon D. et al., 1997, A&A 323, 235
Geman S., Reynolds G, 1992, Constrained restoration and the recovery of discontinuities. IEEE Trans. Patern Analysis and Machine Intelligence PAMI-14, 367
Ghosal S., Spiegel E.A., 1991, Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 61, 161
Gilman P.A., Miller J., 1986, ApJ Suppl. 61 585
Gizon L., Fossat E., Lazrek M., et al., 1997, A&A 317, L71

Glatzmaier G.A., 1987, A review of what numerical simulations tell us about the internal rotation of the Sun. Dans: Durney B.R., Sofia S. (eds) "The Internal Solar Angular Velocity: Theory, Observations and Relationship to Solar Magnetic Fields", Dordrecht: D. Reidel, p. 263

Golub H., Heath M., Wahba G., 1979, Technometrics 21, 215

Gonczi G., Berthomieu G., Corbard T., Provost J., Morel P., and the GOLF Team, Solar sound speed inferred from SoHO helioseismic data. Dans: S.G. Korzennik & A. Wilson (eds) "Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars", ESA SP-418, ESA Publications Division, Noordwijk, The Netherlands, sous presse

Gough D.O., 1981, MNRAS 196, 731

Gough D.O., 1985, Theory of solar oscillations. Dans: "Future Missions in Solar Heliospheric & Space Plasma Physics", Rolfe E., Battrick B. (eds) ESA Publication Division SP-235, p. 183

Gough D.O., 1996, Testing solar models: The inverse problem. Dans: Roca Cortés T., Sánchez F. (eds) "The structure of the Sun", VI Canary Islands Winter School of Astrophysics, Cambridge University Press, p. 141

Gough D.O., 1997, Nature 388, 324

Gough D.O., McIntyre M.E., 1998, Nature 394, 755

Gough D.O., Sekii T., 1998, On the solar tachocline. Dans: Provost J., Schmider F.X. (eds) "Sounding Solar and Stellar interiors", Proc. IAU Symp. 181 (poster volume), OCA & UNSA, Nice, p. 93

Grec G., Fossat E., Pomerantz M.A., 1980, Nature 288, 541

Grec G., Fossat E., Pomerantz M.A., 1983, Sol. Phys. 82, 55

Hadamard J., 1923, Lectures on the Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equations. Yale University Press, New Haven

Hansen P.C., 1992, SIAM Review 34, 561

Hansen P.C., 1994, Numerical Algorithms 6, 1

Hansen P.C., Moosegard K., 1996, Numerical Linear Algebra with Applications 3 (6) 513

Hansen C.J., Cox J.P., Van Horn H.M., 1977, ApJ 217, 151

Hathaway D.H., Gilman P.A., Harvey J.W., et al., 1996, Science 272, 1306

Hill F., 1995, Local probes of the solar interior. Dans: Hoeksema J.T. et al. (eds) "Helioseismology", Proc. 4th SoHO Workshop, ESA SP-376 (1), Noordwijk, p. 63

Hill F., 1998, Helioseismic data reduction. Dans:"New Eyes to See Inside the Sun and Stars", Proc. IAU Symp. 185, p. 13

Hill F., Toomre J., November L.J., 1983, Sol. Phys. 82, 41

Hill F., Stark P.B., Stebbins R.T., et al., 1996, Science 272, 1292

Hill H., Fröhlich C., Gabriel M., 1991, Solar gravity modes, in "Solar interior and atmosphere", Eds A.N. Cox, W.C. Livingston and M.S. Matthews, The University of Arizona Press, p. 562

Hiremath K.M., Gokhale M.H., 1995, Model of 'steady' parts of rotation and magnetic field in the Sun's convection zone. Dans: Hoeksema J.T. et al. (eds) " Helioseismology", Proc. 4th SoHO Workshop, ESA SP-376 (2), Noordwijk, p. 97

Howard R., Solar rotation, 1984, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 22, 131

Howe R., Antia H., Basu S. et al, 1998, The SOI-MDI high-latitude jet: the evidence for and against. Dans: S.G. Korzennik & A. Wilson (eds) "Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars", ESA SP-418, ESA Publications Division, Noordwijk, The Netherlands, sous presse

Howe R., Thompson M.J., 1996, MNRAS 281, 1385

Kirsch A., 1996, An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems. Dans: Mardsen J.E. & Sirovich L. (eds.) "Applied Mathematical Sciences", vol. 120, Springer-Verlag, New York

Komm R.W., Howard R.F., Harvey, J.W., 1993, Sol. Phys. 143, 19

Korzennik S.G., Thompson M.J., Toomre J., and the GONG internal rotation team, 1997, **[C2]**, Internal rotation and dynamics of the Sun from GONG data. Dans: Provost J., Schmider F.X. (eds) "Sounding Solar and Stellar interiors", Proc. IAU Symp. 181, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, p. 211

Kosovichev A.G., 1996, ApJ 469, L61

Kosovichev A.G., 1998, Seismic observation of solar tachocline. Dans: Provost J., Schmider F.X. (eds) "Sounding Solar and Stellar interiors", Proc. IAU Symp. 181 (poster volume), OCA & UNSA, Nice, p. 97

Kosovichev A.G., Schou J., 1997, ApJ 482, L207

Kosovichev A.G., Schou J., Scherrer P.H., et al., 1997, Sol. Phys. 170, 43

Küker M., Rüdiger G., Kitchatinov L.L., 1993, A&A 279, L1

Kumar P., Quataert E.J., 1997, ApJ 475, L143

Larsen R.M., Hansen P.C., 1997, A&AS 121,587

Lazrek M., Pantel A., Fossat E., et al., 1996, Sol. Phys. 166, 1

Lazrek M., Baudin F., Bertello L., et al., 1997, Sol. Phys. 175, 227

Ledoux P., 1951, ApJ 114, 373

Leighton R.B., 1960, Proc. IAU Symp. 12, 321

Leighton R.B., Noyes R.W., Simon G.W., 1962, ApJ 135, 474

Libbrecht K.G., 1988, Solar P-Mode Frequency Splittings. Dans: Rolfe E.J. (ed) Proc. Symp. "Seismology of the Sun and Sun-like Stars", ESA SP-286, p. 131

Libbrecht K.G., 1989, ApJ 336, 1092

Linnik T.V., 1963, Méthode des moindres carrés, Dunod

Lynden-Bell D., Ostriker J.P., 1967, MNRAS 136, 293

Menke W., 1989, Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory. Dans: International Geophysics Series, Vol. 45, Academic Press, Inc., San Diego

Merryfield W.J., Toomre J., Gough D.O., 1991, ApJ 367, 658

Meunier N., 1997, Thèse de doctorat, Université D. Diderot - Paris VII

Morel P., Provost J., Berthomieu G., 1997, A&A 327, 349

Morel P., Provost J., Berthomieu G., 1998, How solar models fit the soho observations. Dans: Korzennik S.G., Wilson A. (eds.) "Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars", ESA SP-418, ESA Publications Division, Noordwijk, The Netherlands

Pallé P., The state of the art in helioseismic ground-based experiments. Dans: Provost J., Schmider F.X. (eds) "Sounding Solar and Stellar interiors", Proc. IAU Symp. 181, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, p. 15

Parker E.E., 1993, ApJ 408, 707

Pekeris C.L., Alterman Z., Jarosch H., 1961, Phys. Rev. 122, 1692

Pijpers F.P., 1997, A&A 326, 1235

Pijpers F.P., Thompson M.J., 1992, A&A 262, L33

Pijpers F.P., Thompson M.J., 1994, A&A 281, 231

Pijpers F.P., Thompson M.J., 1996, MNRAS 279, 498

Pinsonneault M.H., Kawaler S.D., Sofia S., Demarque P., 1989, ApJ 338, 424

Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P., 1992, Numerical Recipes (2nd Edition), Cambridge Univ. Press

Rabello-Soares M.C., Appourchaux T., Christensen-Dalsgaar J., 1998, Rotation of the solar core inferred from GONG data. S.G. Korzennik & A. Wilson (eds) "Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars", ESA SP-418, ESA Publications Division, Noordwijk, The Netherlands, sous presse

Rabello Soares C., Roca Cortés T., Jimenéz A., Appourchaux T., Eff-Darwich A., 1997, ApJ 480, 840

Ritzwoller M.H., Lavely E., 1991, ApJ 369, 557

Rieutort M., 1998, Influence de la rotation sur les ondes. Dans "Génération et Interprétation des Oscillations Stellaires", Cours de Structure Interne - VIIIe Ecole d'automne d'Aussois, E. Schatzman (ed), Observatoire de Paris, Meudon

Roca Cortés T., 1998, Methods and Techniques in Helioseismology. Dans: Vial J.C., Bochialini K., Boumier P. (eds) "Space Solar Physics", Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, Berlin, p. 1

Roca Cortés T., M. Lazrek, L. Bertello, and the GOLF team, 1998, The solar acoustic spectrum as seen by GOLF. III Asymertries, resonant frequencies and splittings. Dans: S.G. Korzennik & A. Wilson (eds) "Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars", ESA SP-418, ESA Publications Division, Noordwijk, The Netherlands, sous presse

Rüdiger G., Kichatinov L.L., 1997, Astron. Nachr. 318, 273

Schou J., 1992, On the Analysis of Helioseismic Data, Thesis, Aarhus University

Schou J., Antia H.M., Basu S., et al., 1998, soumis à ApJ

Schou J., Christensen-Dalsgaard J., Thompson M.J., 1994, ApJ 433, 389

Schröter E.H., 1985, Sol. phys. 100, 141

Schumaker L.L., 1981, Spline Functions: Basic Theory, John Wiley and Sons, New York

Sekii T., 1993a, On an $R^1 \otimes R^1$ inversion technique for solar rotation. Dans: Brown T.M. (ed) ASP Conf. Ser. Vol. 42 "GONG 92: Seismic Investigation of the Sun and Stars", Astron. Soc. Pac., San Francisco, p. 237

Sekii T., 1993b, MNRAS, 264, 1018

Sekii T., 1997, Internal Solar Rotation. Dans: Provost J., Schmider F.X. (eds) "Sounding Solar and Stellar interiors", Proc. IAU Symp. 181, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, p. 189

Sekii T., Shibahashi H., 1988, An inversion method based on the Moore-Penrose generalized inverse matrix. Dans: Seismology of the Sun and Sun-Like Stars, Rolfe E.J. (ed) ESA SP-286, ESA Publication Division, Noordwijk, the Netherlands, p. 521

Sekii T., Gough D., 1993, A procedure for two-dimensional asymptotic rotational-splitting inversion. Dans: Weiss W.W.& Baglin A.(eds.) "Inside the Stars", IAU Colloquium 137, ASP conf. Series 40, p 569

Snodgrass H.B., 1983, ApJ 270, 288

Snodgrass H.B., 1992, dans: K.L. Harvey (ed) "The Solar Cycle", ASP Conf. Ser. 27, San Francisco, p. 205

Snodgrass H.B., Howard R., Webster L., 1984, Sol. Phys. 90, 199

Snodgrass H.B., Ulrich R.K., 1990, ApJ 351, 309

Solanki S.K., 1993, Space Sci. Rev. 63, 1

Spiegel E.A, Zahn J.-P, 1992, A&A 265, 106

Stepanov A.A., Christensen-Dalsgaard J., 1996, On the choice of trade-off parameter in helioseismic SOLA inversion. Dans: B.H. Jacobsen, K. Mosegaard & P. Sibani (eds) Proc. Interdisciplinary Inversion Conference, University of Aarhus, May 22-24 1995, Lecture Notes in Earth Sciences 63, Springer, p. 54

Talon S., Zahn J.-P., 1998, A&A 329, 315

Teboul S., Blanc-Féraud L., Aubert G., Barlaud M., 1998, IEEE Trans. on Image Processing 7 (3)

Thompson A.M., 1992, A&A 265, 289

Thompson A.M., Craig I.J.D., 1992, A&A 262, 359

Thompson M.J., 1998, Inversion methods. "New Eyes to See Inside the Sun and Stars", Proc. IAU Symp. 185, p. 125

Thompson M.J., Toomre J., et al. (GONG Team), 1996, [**A2**], Science 272, 1300

Tikhonov A.N., 1963, Solution of incorrectly posed problems, Sov. Doklady 4, 1624

Toomre J., Brummell N.H., 1995, Solar convection zone dynamics and rotation. Dans: Hoeksema J.T. et al. (eds) "Helioseismology", Proc. 4th SoHO Workshop, ESA SP-376 (1), Noordwijk, p. 47

Toutain T., 1997, A Review of space Helioseismology. Dans: Provost J., Schmider F.X. (eds) "Sounding Solar and Stellar interiors", Proc. IAU Symp. 181, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, p. 39

Toutain T., Appourchaux T., 1994, A&A, 289, 649

Toutain T., Kosovichev A.G., 1998, splittings of MDI low-degree p modes. Dans: S.G. Korzennik & A. Wilson (eds) "Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars", ESA SP-418, ESA Publications Division, Noordwijk, The Netherlands, sous presse

Turck-Chièze S., Basu S., Brun S., and the GOLF Team 1997, Sol. Phys. 175, 247

Ulrich R.K., Boyden J.E., Webster L., et al., 1988, Sol. Phys. 117, 291

Unno W., Osaki Y., Ando H., Saio H., Shibahashi H., 1989, Nonradial oscillations of stars, University of Tokyo Press, Japan

Wahba G., 1977, SIAM J. Numer. Anal. 14, 651

Wilson P.R., Burtonclay D., 1995, ApJ 438, 445

Woodard M.F., Libbrecht K.G., 1993, ApJ, 402, L77
Xia X.-G., Nashed M.Z. 1994, Inverse Problems 10, 785
Zahn J-P., 1997, Stellar Rotation and Mixing. Dans: Provost J., Schmider F.X. (eds) "Sounding Solar and Stellar interiors", Proc. IAU Symp. 181, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, p. 175
Zahn J.P., Talon S., Mathias J., 1997, A&A 322, 320

Résumé

Ce travail est une étude de la rotation interne du Soleil par l'interprétation des observations héliosismiques à l'aide de techniques d'inversion. Le Soleil est la seule étoile dont on peut déterminer de manière précise la rotation interne ce qui constitue un test pour les nombreux processus physiques entrant en jeu dans les théories d'évolution du moment angulaire.

Je présente tout d'abord la théorie permettant de relier la rotation interne du Soleil à la structure fine du spectre des oscillations globales oservées puis je détaille les différentes approches du problème inverse consistant à déduire la rotation de ces observations.

Plusieurs ensembles de mesures récentes provenant d'observations réalisées au sol ou à bord du satellite SoHO sont utilisés. Je développe un code d'inversion original basé sur une méthode de moindres carrés régularisée qui assure la régularité de la solution au centre et permet l'introduction de contraintes de surface. L'analyse des différentes observations à l'aide de ce code révèle une rotation rigide dans l'intérieur radiatif et une rotation différentielle en latitude dans la zone convective. La zone de transition, nommée tachocline, ainsi que la rotation du cœur font l'objet d' analyses spécifiques.

Pour l'étude de la tachocline, j'ai adapté une méthode non linéaire qui permet de préserver les forts gradients de rotation caractérisant cette zone. Cette approche, utilisée pour la première fois dans le cadre de l'héliosismologie, conduit à une tachocline très étroite située sous la zone convective ce qui constitue une contrainte pour les modèles théoriques de cette zone.

Finalement, les résultats obtenus à partir de différentes données ne permettent pas de conclure définitivement sur la rotation des couches les plus internes mais montrent que les observations actuelles sont compatibles avec une rotation rigide entre la bas de la tachocline et 0.2 rayon solaire.

Mots clés: Soleil - héliosismologie - rotation - tachocline - inversion

Abstract

This work presents a study of the internal rotation of the Sun, from the core up to surface layers, as inferred from helioseismic observations. The Sun is at the moment the only star for which one can learn about its internal dynamics from observations. This represents a test for the theories of angular momentum evolution and thus for all the physical process involved in these theories.

I present first the theoretical aspects that allow us to make the link between the observation of the global oscillations of the Sun and its internal rotation. Then I give the principal inverse methods used to infer the rotation from the observations and the tools for the interpretation of the results.

I use in this work several ground based observations or spatial data coming from instruments on board SoHO launched in 1995. I develop a new regularized least square code that insure the regularity of the solution in the core and that allow surfaces constraints to be taken into account. The analysis of various observations by means of this code shows a quasi solid rotation in the radiative interior and a latitudinal dependent rotation in the convection zone. The shear layer named tachocline between these two regimes and the core rotation require specific treatments.

For the study of the tachocline, I develop a non linear method that can preserve the high rotational gradients that occur in this zone. This approach, used for the first time in helioseismic context, leads to a thin tachocline located beneath the convection zone and thus represents a constraint for the theoretical studies of this zone.

Finally, the results reached from various data do not allow to conclude definitively concerning the deepest layers but show that the current observations are in good agreement with a rigid rotation from the base of the tachocline down to 0.2 solar radius.

Keywords: Sun - helioseismology - rotation - tachocline - inversion

Résumé

Ce travail est une étude de la rotation interne du Soleil, depuis le cœur jusqu'à la surface, par l'interprétation des observations héliosismiques à l'aide de techniques d'inversion. Le Soleil est à l'heure actuelle la seule étoile dont on peut déterminer de manière précise la rotation interne ce qui constitue un test pour les théories d'évolution du moment angulaire et donc des nombreux processus physiques entrant en jeu dans ces théories.

Je présente tout d'abord les aspects théoriques permettant de relier la rotation interne du Soleil aux observations de la structure fine du spectre de ses oscillations globales puis je détaille les différentes approches du problème inverse consistant à déduire la rotation de ces observations.

Plusieurs ensembles de mesures récentes provenant d'observations réalisées au sol ou à bord du satellite SoHO lancé en 1995 sont utilisés. Je développe un code d'inversion original basé sur une méthode de moindres carrés régularisée qui assure la régularité de la solution au centre et permet l'introduction de contraintes de surface. L'analyse des différentes observations à l'aide de ce code et dans le cadre de collaborations internationales révèle une rotation rigide dans l'intérieur radiatif et une rotation différentielle en latitude dans la zone convective. La zone de transition entre les deux régimes de rotation nommée tachocline ainsi que la rotation du cœur font l'objet d'une analyse spécifique.

Pour l'étude de la tachocline, j'ai adapté une méthode non linéaire qui permet de préserver les forts gradients de rotation caractérisant cette zone. Cette approche, utilisée pour la première fois dans le cadre de l'héliosismologie, conduit à une tachocline très étroite située sous la zone convective ce qui constitue une contrainte pour les modèles théoriques de cette zone.

Finalement, les résultats obtenus à partir de différentes données ne permettent pas de conclure définitivement sur la rotation des couches les plus internes mais montrent que les observations actuelles sont compatibles avec une rotation rigide sous la tachocline s'étendant jusqu'à 0.2 rayon solaire.

Abstract

This work presents a study of the internal rotation of the Sun, from the core up to surface layers, as inferred from helioseismic observations. The Sun is at the moment the only star for which one can learn about its internal dynamics from observations. This represents a test for the theories of angular momentum evolution and thus for all the physical process involved in these theories.

I present first the theoretical aspects that allow us to make the link between the observation of the global oscillations of the Sun and its internal rotation. Then I give the principal inverse methods used to infer the rotation from the observations and the tools for the interpretation of the results.

I use in this work several ground based observations or spatial data coming from instruments on board SoHO launched in 1995. I develop a new regularized least square code that insure the regularity of the solution in the core and that allow surfaces constraints to be taken into account. The analysis of various observations by means of this code shows a quasi solid rotation in the radiative interior and a latitudinal dependent rotation in the convection zone. The shear layer named tachocline between these two regimes and the core rotation require specific treatments.

For the study of the tachocline, I develop a non linear method that can preserve the high rotational gradients that occur in this zone. This approach, used for the first time in helioseismic context, leads to a thin tachocline located beneath the convection zone and thus represents a constraint for the theoretical studies of this zone.

Finally, the results reached from various data do not allow to conclude definitively concerning the deepest layers but show that the current observations are in good agreement with a rigid rotation from the base of the tachocline down to 0.2 solar radius.