



HAL
open science

Géométrie et triangulations en topologie de basse dimension

François Guéritaud

► **To cite this version:**

François Guéritaud. Géométrie et triangulations en topologie de basse dimension. Mathématiques [math]. Université de Lille, 2019. tel-03103084

HAL Id: tel-03103084

<https://cnrs.hal.science/tel-03103084v1>

Submitted on 7 Jan 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Lille
École doctorale SPI

Mémoire présenté en vue du diplôme :

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Discipline : mathématiques

par
François Guéritaud

Géométrie et triangulations en topologie de basse dimension

Mémoire soutenu le mercredi 11 décembre 2019 en présence d'un jury composé de :

M.	Yves Benoist	CNRS / Université de Paris-Sud	(rapporteur)
M.	Marc Bourdon	Université de Lille	(garant)
Mme	Ruth Kellerhals	Université de Fribourg	(examinatrice)
M.	Hugo Parlier	Université de Luxembourg	(rapporteur)
M.	Leonid Potyagailo	Université de Lille	(examineur).

3e rapporteur : M. Jean-Pierre Otal, CNRS / Université de Toulouse

REMERCIEMENTS

Je souhaite exprimer ma vive reconnaissance à Yves Benoist, Jean-Pierre Otal et Hugo Parlier, qui ont accepté d'endosser le rôle de rapporteurs, ainsi qu'à Marc Bourdon qui a bien voulu se porter garant et à Ruth Kellerhals et Leonid Potyagailo pour leur présence dans le jury.

Ce mémoire doit bien entendu beaucoup à mes co-auteurs : avec Fanny Kassel, bientôt rejointe par Jeffrey Danciger, j'ai eu la chance de poursuivre une collaboration variée qui s'étale maintenant sur près d'une décennie. D'autres articles et travaux ont été publiés avec François Costantino, David Dumas, David Futer, Olivier Guichard, Saul Schleimer, Roland van der Veen, Anna Wienhard, Maxime Wolff, que je souhaite tous remercier ici.

Ma reconnaissance va enfin à l'ensemble de l'équipe géométrie-dynamique de Lille pour son accueil et plus largement au laboratoire Painlevé, particulièrement son personnel technique et administratif.

SOMMAIRE

Remerciements	2
Introduction	4
Plan	5
1. Contraction métrique et variétés lorentziennes	5
1.1. Lieu d'étirement et laminations	6
1.2. Version infinitésimale	8
1.3. Géométrie lorentzienne et fibrations géodésiques	10
2. Complexe des arcs et bandelettes	11
2.1. Définitions	11
2.2. Idées de la preuve	13
2.3. Tores percés	13
2.4. Plans croches	15
2.5. Cas à pointes	16
3. Variétés affines et groupes de Coxeter	17
3.1. Résultat d'existence	17
3.2. Un exemple	18
3.3. Idée de preuve	19
4. Représentations d'Anosov	20
4.1. Définitions et résultats	20
4.2. Variétés homogènes	22
4.3. Espaces symétriques de rang 1.	22
5. Convexe-cocompacité généralisée	23
5.1. Résultats	23
5.2. Déformabilité	23
5.3. Cas symétrique	24
6. Triangulations géométriques de 3-variétés	25
6.1. Remplissage de Dehn et triangulations	26
6.2. Espaces lenticulaires	26
6.3. Structures d'angles	27
6.4. Rigidité des tores pleins idéaux	28
6.5. Transition géométrique et tores percés	29
6.6. Hélicité et structures d'angles	29
6.7. Hélicité et applications de Cannon–Thurston	31
7. Vers la Conjecture du volume : formule de Schläfli quantique	33
Bibliographie	34

INTRODUCTION

Les recherches présentées dans ce mémoire se rattachent à la géométrie et la topologie de basse dimension. La topologie est présentée au grand public comme l'étude des espaces vus « à déformation près », dans laquelle on considère l'agencement continu des points qui composent un espace en ignorant tout ce qui relèverait de mesures quantitatives comme par exemple la distance, l'aire, etc. Ainsi la surface d'un tore de révolution et celle d'une tasse à une anse sont identiques, à déformation (homéomorphisme) près ; cette surface est simplement appelée *le tore*.

Les *variétés réelles* forment une classe d'objets lisses, réguliers : il s'agit des espaces qui localement ressemblent à une copie de \mathbb{R}^n . Ainsi une courbe lisse est une variété de dimension 1 (mais un graphe admettant un sommet de valence > 2 n'est pas une variété). Les variétés de dimension 2 sont les *surfaces* : on sait depuis longtemps que les surfaces orientables sont topologiquement caractérisées par leur *genre*, un entier qui vaut 0 pour la sphère, 1 pour le tore, etc. Classifier les variétés de dimension plus élevée est un problème ardu, qu'on peut faire remonter à Poincaré.

Vers 1980, Thurston réintroduit en fanfare la géométrie — distances, angles, volumes... — dans ces questions topologiques. Plus exactement, il conjecture que toute variété compacte de dimension 3, pour peu qu'on la découpe le long de certaines surfaces (sphères et tores dits « essentiels »), admet une unique métrique privilégiée, homogène. Cette dernière est tout à fait comparable à la métrique standard, ronde, sur la sphère de dimension 2. En particulier, le volume de cette métrique, ou toutes sortes d'autres quantités comme les longueurs des géodésiques fermées, sont promus invariants topologiques. Localement, cette métrique peut ressembler à plusieurs espaces modèles (8 exactement) dont le plus riche, au sens où il recouvre le plus d'exemples et de constructions, est l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 . C'est aussi en quelque sorte le cas « par défaut ».

Cette conjecture de géométrisation de Thurston a été démontrée au tournant du siècle par Perelman. Elle entraîne la vénérable conjecture de Poincaré : toute 3-variété compacte de groupe fondamental trivial est homéomorphe à la sphère \mathbb{S}^3 . Mais sa portée est bien plus grande puisqu'elle affirme quelque chose sur *toutes* les 3-variétés. Elle a par exemple permis à Agol de montrer en 2012 que les variétés de dimension 3 sont *virtuellement Haken* et même *virtuellement fibrées*, conditions techniques qui permettent de les comprendre en termes de surfaces.

Au delà de ces résultats phares, existe depuis un petit demi-siècle un courant de fond tendant à géométriser la topologie des variétés de basse dimension : il s'agit de savoir si une variété est capable de porter telle ou telle structure de nature différentielle et, si possible, de comprendre l'espace de déformation de telles structures. Ces questions avaient déjà une longue histoire en dimension 2, remontant au théorème d'uniformisation de Koebe et Poincaré pour les surfaces, et se prolongeant jusqu'à nous sous le nom de théorie de Teichmüller. La troisième dimension, mais aussi la géométrie « à grande échelle » à la manière de Gromov, ont singulièrement enrichi ce cercle d'idées durant la même période.

Au sein de cet écosystème mathématique, ma ligne pourrait se caractériser par un intérêt accru porté aux constructions exactes, explicites (quitte parfois à restreindre la classe d'objets étudiés), souvent par le biais de triangulations particulières. Si la tendance dominante est plutôt inverse, allant vers une compréhension toujours plus globale du monde des 3-variétés, cette approche permet néanmoins de mettre au jour des relations autrement invisibles, et qui parfois se généralisent avec bonheur. J'espère donner ici un aperçu de quelques-uns de ses succès.

Plan. Le §1 expose des résultats [56] de prolongement lipschitzien en courbure négative, et leurs conséquences sur la géométrie lorentzienne : notamment, un théorème de structure [23] pour les espaces-temps affines de dimension trois, dits de Margulis. On montre que ceux-ci fibrent en droites-temps sur une surface hyperbolique.

Le §2, qui prolonge le §1, donne une classification complète [25] des espaces-temps de Margulis : leur espace de déformation est paramétré par le *complexe des arcs* de la surface hyperbolique sous-jacente S , un complexe simplicial qui décrit l'ensemble de toutes les triangulations hyperidéales de S .

Le §3 donne une construction [27] de variétés affines complètes de groupe fondamental donné, égal à un groupe de Coxeter à angles droits. C'est une source nouvelle et abondante de variétés affines non virtuellement résolubles.

Le §4 donne quelques caractérisations [54] des représentations d'Anosov, classe qui généralise en rang supérieur la convexe-cocompacité, et détaille quelques conséquences.

Le §5 traite d'une autre généralisation possible [28] de la convexe-cocompacité, incluant notamment les convexes divisibles au sens d'Y. Benoist [10] (les groupes agissant ne sont donc pas nécessairement hyperboliques au sens de Gromov, au contraire des représentations d'Anosov).

Le §6 expose plusieurs résultats indépendants réunis par la notion de triangulation de 3-variétés — en particulier la quête de triangulations dont la combinatoire reflète les propriétés géométriques et/ou topologiques de la variété. Notamment, on décrit au §6.1 des triangulations naturellement associées à la procédure de remplissage de Dehn hyperbolique, et au §6.7 des triangulations naturellement associées aux courbes de Peano découvertes par Cannon et Thurston.

Le §7 résume un article [22] de 2015 qui était une incursion dans la géométrie « quantique » des polyèdres hyperboliques.

Une grande partie de ces travaux ayant été obtenus en collaboration, je renvoie au texte pour l'identité des co-auteurs ; que soient néanmoins mentionnés ici J. Danciger et F. Kassel, omniprésents dans les parties §1 à §5.

1. CONTRACTION MÉTRIQUE ET VARIÉTÉS LORENTZIENNES

Le thème du *prolongement lipschitzien* trouve son origine dans un article de Kirszbraun [71], montrant que toute application C -lipschitzienne d'une partie de l'espace euclidien \mathbb{R}^n vers lui-même admet un prolongement C -lipschitzien à \mathbb{R}^n . Grâce à des inégalités de comparaison de type CAT, Valentine [105] et plus tard Lang-Schröder [80] montrent que le même résultat reste vrai en remplaçant \mathbb{R}^n par l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n , à condition de supposer $C \geq 1$. Dans ces travaux, il suffit d'étendre la fonction en un point à la fois, quitte à répéter pour une suite dense de points.

Dans [56], avec Fanny Kassel, nous nous attaquons au problème de trouver des prolongements *équivariants*, pour une paire d'actions sur \mathbb{H}^n . Cette condition interdit de procéder point par point : il faut donc de nouvelles techniques. L'idée clef est que la constante de Lipschitz optimale sera approchée le long de certaines *lamination géodésiques* du quotient de \mathbb{H}^n .

On peut s'intéresser à ce problème pour lui-même, ou pour les fortes conséquences qu'il entraîne en géométrie lorentzienne, moyennant une version « infinitésimale » donnée au §1.2. Ces conséquences seront détaillées au §1.3 : un résultat de *fibration géodésique* des variétés lorentziennes à courbure constante, qui permet notamment de comprendre leur topologie (corollaire 1.10) ; et un

résultat de *transition géométrique* (théorème 1.9) qui permet de comprendre les espaces-temps plats (de Margulis) comme des limites renormalisées d'espaces-temps courbes. Un authentique résultat de *classification* viendra au §2.

1.1. Lieu d'étirement et laminations. Pour une application φ lipschitzienne, notons $\text{Lip}(\varphi)$ la constante de Lipschitz optimale. Soit E_φ l'ensemble des points x de l'espace source tels que la restriction à tout voisinage V de x satisfasse encore $\text{Lip}(\varphi|_V) = \text{Lip}(\varphi)$. On voit facilement que E_φ est fermé.

Théorème 1.1. [56, Lem. 4.10–4.11–4.13] *Soient ρ, ρ' deux représentations d'un groupe discret Γ dans $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$, telles que ρ soit (fidèle et d'image) convexe-cocompacte et que $\text{Fix}(\rho'(\Gamma))$ ne soit pas un singleton de $\partial_\infty \mathbb{H}^n$; et soit $C \geq 0$ la borne inférieure des constantes de Lipschitz d'applications (ρ, ρ') -équivariantes $\varphi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$. Soit \mathcal{F} l'ensemble des fonctions équivariantes C -lipschitziennes. Alors $\mathcal{F} \neq \emptyset$ (i.e. C est atteinte), et il existe $f \in \mathcal{F}$ telle que*

$$E_f = \bigcap_{\varphi \in \mathcal{F}} E_\varphi =: E(\rho, \rho') \subset \mathbb{H}^n$$

qui est un fermé non vide, le **lieu d'étirement**, canoniquement associé à la paire (ρ, ρ') , et qui descend (pour $C > 0$) à un compact du cœur convexe de $\rho(\Gamma) \backslash \mathbb{H}^n$.

Dans les notations du théorème, on a toujours

$$C \geq \sup_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{torsion}\}} \frac{\lambda(\rho'(\gamma))}{\lambda(\rho(\gamma))} =: C^*$$

où $\lambda(g)$ désigne la longueur de translation d'une loxodromie hyperbolique le long de son axe. On a en fait le résultat suivant :

Théorème 1.2. [56, Th. 5.1] *Sous les hypothèses du théorème 1.1,*

- si $C^* < 1$ alors $C < 1$;
- si $C^* \geq 1$ alors $C = C^*$;
- si $C > 1$ alors le lieu d'étirement $E(\rho, \rho')$ est une union disjointe de droites de \mathbb{H}^n , que toute application C -lipschitzienne $f \in \mathcal{F}$ étire d'un facteur C ;
- si $C = 1$, alors $E(\rho, \rho')$ se décompose en convexes d'intérieurs relatifs disjoints, sans points extrémaux, et isométriquement préservés par chaque $f \in \mathcal{F}$.

*En particulier, en dimension $n = 2$, quand $C > 1$ le lieu d'étirement $E(\rho, \rho')$ est une **lamination géodésique** qui descend à la surface $\rho(\Gamma) \backslash \mathbb{H}^2$. Quand $C = 1$, alors $E(\rho, \rho')$ est une lamination géodésique, plus éventuellement un certain nombre de composantes connexes de son complémentaire.*

• *Commentaires et raffinements.* Si $C > 1$ nous montrons encore que deux feuilles δ -proches de la lamination géodésique $E(\rho, \rho')$ (pour δ petit, en un sens qui ne dépend que de C) restent 1-proches sur environ $2|\log \delta|$ unités de longueur. En dimension $n = 2$ cela découle de la disjointeté des feuilles ; pour $n > 2$ c'est en revanche une contrainte non triviale.

Si $C = 1$, le lieu d'étirement E admet une *stratification* rappelant celle du bord d'un convexe de \mathbb{R}^n : chaque strate est convexe, et les strates de plus petite dimension sont des copies totalement géodésiques de \mathbb{H}^d pour un certain $d \geq 1$.

Nous donnons aussi du théorème 1.2 une version relative, où C est la constante minimale d'applications lipschitziennes équivariantes *astreintes à étendre une application donnée*. Il en découle une version équivariante du théorème de prolongement de Valentine évoqué au début de cette partie, du moins quand l'action à la source est convexe cocompacte. Le cas général reste ouvert.

En dimension $n = 2$, les deux premiers items du théorème 1.2 se trouvent aussi dans la thèse de F. Kassel [70]. Toujours pour $n = 2$, dans le cas particulier

où ρ et ρ' sont deux représentations discrètes, de covolume fini, avec les mêmes éléments périphéraux, le théorème 1.2 ainsi que les théorèmes 1.3 et 1.4 ci-dessous découlent aussi de résultats que Thurston [101] fit circuler dans les années 1980. Son approche est assez différente : en simplifiant, il se donne d'abord la représentation fuchsienne ρ et la lamination E , dont il se sert pour définir une nouvelle représentation fuchsienne « étirée » ρ' — le travail difficile consistant à montrer que toute ρ' est atteinte quand on varie E . Nous extrayons en revanche E de la donnée (ρ, ρ') par un argument général.

- *Déformations.* La constante de Lipschitz optimale C vérifie une propriété de continuité :

Théorème 1.3. [56, Prop. 1.5] *L'application $(\rho, \rho') \mapsto C = C(\rho, \rho') \geq 0$ est continue sur l'espace des paires telles que ρ soit convexe cocompacte.*

Il est raisonnable de s'attendre à ce que le lieu d'étirement $E(\rho, \rho')$ vérifie, lui aussi, une propriété de semi-continuité, mais la question est plus délicate :

Théorème 1.4. [56, Prop. 9.4–9.5] *Si $n = 2$ et $C > 1$, alors la lamination géodésique $E = E(\rho, \rho')$ est récurrente par chaînes : arbitrairement près de tout point de E passe une géodésique fermée dont tout arc de longueur 1 est arbitrairement proche de E , au sens C^1 . De plus, E varie de façon supérieurement semicontinue sur l'espace des paires (ρ, ρ') satisfaisant $C > 1$: si (ρ_i, ρ'_i) sont des paires de morphismes qui convergent vers (ρ, ρ') et donnent lieu à des constantes de Lipschitz C_i et des lieux d'étirement E_i , alors $C = \lim C_i$ et E contient toute limite de Hausdorff des E_i :*

$$E \supset \bigcap_{i>0} \overline{\bigcup_{j>i} E_j}.$$

(Un exemple de lamination géodésique *non* récurrente par chaînes est donné par une feuille qui s'enroule sur une courbe simple d'où aucune autre feuille ne s'échappe.) La semi-continuité du lieu d'étirement E pour $C \leq 1$ reste un problème ouvert. En dimension $n > 2$, la récurrence par chaînes (pour $C > 1$) est aussi un problème ouvert, et pourrait d'ailleurs correspondre à plusieurs notions a priori distinctes.

Le lieu d'étirement $E(\rho, \rho') \subset \mathbb{H}^2$ pour $C < 1$ est assez mystérieux. Cependant nous montrons que les composantes connexes de son complémentaire sont *géodésiquement convexes*. Nous construisons aussi des *ouverts* de paires (ρ, ρ') pour lesquelles E est exactement connu, égal à un graphe géodésique trivalent dont les arêtes sont uniformément étirées par l'application optimale f . On peut penser que c'est là le cas générique : ce comportement est à mettre en regard du résultat le plus fort de Thurston dans [101], à savoir que pour ρ' fuchsienne et $C > 1$, la lamination géodésique $\rho(\Gamma) \setminus E$ est presque toujours réduite à une courbe simple fermée.

- *Cas à pointes.* Nous donnons aussi des versions des théorèmes 1.1–1.2 (et de leurs raffinements décrits ci-dessus) lorsque la représentation ρ , au lieu de convexe cocompacte, n'est que géométriquement finie.

Le théorème 1.3 devient alors faux, mais en dimension 2 et 3 une propriété plus faible [56, Prop. 6.1] subsiste, entraînant notamment que l'inégalité $C(\rho, \rho') < 1$ est une condition ouverte sur la paire de représentations (ρ, ρ') . (Cette inégalité jouera un rôle crucial en géométrie lorentzienne à la partie 1.3.)

En dimension supérieure cela n'est plus vrai, ne serait-ce que parce que la propriété de géométrie-finitude elle-même se comporte mal vis-à-vis des déformations. Cependant nous montrons que c'est en un sens la seule obstruction : par exemple, si toutes les pointes de $\rho(\Gamma) \setminus \mathbb{H}^n$ sont de rang $\geq n - 2$, alors $C < 1$ reste une condition ouverte.

• *Techniques.* Sans entrer dans le détail des preuves, voici les principaux outils utilisés dans les résultats ci-dessus.

La preuve du théorème 1.1 utilise la compacité et le procédé *d'interpolation convexe*, qui (en courbure négative) permet à partir de deux fonctions C -lipschitziennes f, f' d'en fabriquer une troisième f'' telle que $E_{f''} \subset E_f \cap E_{f'}$.

La preuve du théorème 1.2 consiste à étudier le lieu d'étirement en analysant soigneusement les cas d'égalité du théorème de prolongement (non-équivariant) de Valentine [105] : essentiellement, si le lieu d'étirement E_f n'a pas la forme proposée, alors une modification *locale* de l'application équivariante f permet de le rendre plus petit.

Le théorème 1.3 est un résultat de déformation : pour déformer des applications équivariantes en contrôlant leur constante de Lipschitz, on travaille sur des ouverts plus petits que le rayon d'injectivité de $\rho(\Gamma) \backslash \mathbb{H}^n$, qu'on recolle au moyen de partitions de l'unité ayant elles-mêmes de bonnes propriétés lipschitziennes. Le théorème 1.4 est assez différent, il utilise fortement la structure des laminations géodésiques en dimension 2.

L'article [56] contient aussi des listes d'exemples et de questions ouvertes. L'une d'elles est résolue dans [53]:

Théorème 1.5. *Pour tous $K \leq -1$ et $m \in \mathbb{N}$ il existe $\Psi : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ telle que pour toutes variétés de Hadamard X, Y de dimension $\leq m$ dont les courbures sectionnelles vérifient $0 \geq \kappa_X \geq -1 \geq \kappa_Y \geq K$, toute application C -lipschitzienne $f : X' \rightarrow Y$ où $X' \subset X$ et $C < 1$ admette un prolongement $\psi(C)$ -lipschitzien à X .*

1.2. Version infinitésimale. Plaçons-nous en dimension $n = 2$. Les théorèmes 1.1–1.2 admettent une version limite [23], renormalisée, pour $\rho' : \Gamma \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^2) =: G$ infinitésimalement proche de ρ . Afin de les formuler, introduisons $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ l'algèbre de Lie de G , munie de l'action adjointe.

• *Loi infinitésimale.* Le produit semi-direct $G \ltimes G$, où G agit sur G par conjugaison, a pour loi de multiplication

$$(1) \quad (g, g')(h, h') = (gh, g'gh'g^{-1}).$$

Lorsque g', h' sont infinitésimalement proches de 1_G , cette loi admet une forme renormalisée, ou dérivée, qui est la loi de groupe sur $G \ltimes \mathfrak{g}$ donnée par

$$(2) \quad (g, X)(h, Y) = (gh, X + \text{Ad}(g)Y).$$

Dans le membre de droite de (1), la seconde coordonnée $g'gh'g^{-1}$ ne dépend pas de h . L'action de $G \ltimes G$ sur lui-même par multiplication à gauche via (1) permute donc les fibres de la seconde projection, induisant une action sur le quotient G donnée par

$$(3) \quad (g, g') \cdot h' = g'gh'g^{-1}.$$

De même, l'action de $G \ltimes \mathfrak{g}$ sur lui-même par multiplication à gauche via (2) permute les fibres de la seconde projection, induisant une action sur le quotient \mathfrak{g} :

$$(4) \quad (g, X) \cdot Y = X + \text{Ad}(g)Y.$$

Ainsi l'action affine (4) est une forme renormalisée de (3). On peut encore voir (3) comme l'action de $G \times G$ sur G par multiplications à droite et à gauche,

$$(5) \quad (g, g'') \cdot h = g''hg^{-1}$$

puisque $(g, g') \mapsto (g, g'g) = (g, g'')$ est un isomorphisme de groupes $G \times G \xrightarrow{\sim} G \times G$. Notons enfin que le groupe $G \ltimes \mathfrak{g}$ est isomorphe au fibré tangent TG , ou espace des 1-jets de G , muni de sa loi de produit naturelle.

• *Actions infinitésimales et cocycles.* Soient Γ un groupe discret et $(\rho_t : \Gamma \rightarrow G)_{t \geq 0}$ une famille lisse de représentations. Pour $t > 0$, on peut donc en suivant (5) considérer la (ρ_0, ρ_t) -action de Γ sur G donnée par

$$(6) \quad \gamma \cdot h := \rho_t(\gamma)h\rho_0(\gamma)^{-1},$$

mais aussi la $(\frac{d\rho_t}{dt}|_{t=0})$ -action affine (dérivée) de Γ sur \mathfrak{g} donnée par

$$(7) \quad \gamma \cdot Y = \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \rho_t(\gamma)\rho_0(\gamma)^{-1}\right) + \text{Ad}(\rho_0(\gamma))Y$$

qui est une limite renormalisée de (6). L'application $u : \Gamma \rightarrow \mathfrak{g}$ donnée par

$$u(\gamma) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \rho_t(\gamma)\rho_0(\gamma)^{-1}$$

est appelée le *cocycle dérivé* de la famille $(\rho_t)_{t \geq 0}$. Elle vérifie $\rho_t(\gamma) = e^{t u(\gamma) + o(t)} \rho_0(\gamma)$ pour $t \rightarrow 0$, et pour tous $\gamma, \gamma' \in \Gamma$

$$(8) \quad u(\gamma\gamma') = u(\gamma) + \text{Ad}(\rho_0(\gamma))u(\gamma')$$

(relation dite de ρ_0 -cocycle) qui signifie simplement que (7) est bien une action. L'espace des ρ_0 -cocycles, i.e. des applications $u : \Gamma \rightarrow \mathfrak{g}$ vérifiant (8), est souvent noté $Z_{\rho_0}^1(\Gamma, \mathfrak{g})$. On peut le voir comme l'espace des déformations infinitésimales de ρ_0 . Les ρ_0 -cobords sont les cocycles de la forme $\gamma \mapsto Y - \text{Ad}(\rho_0(\gamma))Y$, où $Y \in \mathfrak{g}$ est fixé. Ce sont les conjugaisons infinitésimales de ρ_0 , qu'on peut considérer comme des déformations « triviales ». Si $B_{\rho_0}^1(\Gamma, \mathfrak{g})$ désigne l'espace des ρ_0 -cobords, on définit

$$(9) \quad H_{\rho_0}^1(\Gamma, \mathfrak{g}) := Z_{\rho_0}^1(\Gamma, \mathfrak{g})/B_{\rho_0}^1(\Gamma, \mathfrak{g}).$$

• *Équivariance et contraction infinitésimales.* Étant donné Γ , $(\rho_t)_{t \geq 0}$, et $u : \Gamma \rightarrow \mathfrak{g}$ comme au point précédent, supposons qu'il existe une famille lisse $(f_t)_{t \geq 0}$ d'applications (ρ_0, ρ_t) -équivariantes de \mathbb{H}^2 dans lui-même, telles que $f_0 = \text{Id}_{\mathbb{H}^2}$ et que de surcroît f_t soit $(1 + ct)$ -lipschitzienne pour tout $t \geq 0$ petit, où $c \in \mathbb{R}$ est une constante. Alors le champ de vecteurs X défini sur \mathbb{H}^2 par

$$(10) \quad X(p) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f_t(p)$$

satisfait les conditions suivantes, pour tous $p, q \in \mathbb{H}^2$:

$$(11) \quad \begin{aligned} X(\rho_0(\gamma) \cdot p) &= \rho_0(\gamma)_* X(p) + u(\gamma)(\rho_0(\gamma) \cdot p) && \text{(équivariance)} ; \\ \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d(\exp_p(tX(p)), \exp_q(tX(q))) &\leq c d(p, q) && \text{(contractivité)}. \end{aligned}$$

Ces relations s'obtiennent simplement en dérivant en $t = 0$ les conditions d'équivariance et de contractivité qui portent sur les f_t . Pour spécifier, on dira que le champ de vecteurs X est (ρ_0, u) -équivariant et c -contractant (ce choix sémantique est justifié par le fait que d'ordinaire on exigera $c < 0$).

• *Prolongement lipschitzien infinitésimal.* Nous voilà à même d'énoncer le principal résultat de cette partie. Comme on l'a vu au §1.1, les théorèmes 1.1–1.2 entraînent le fait suivant :

Théorème 1.6. *Soit $(\rho, \rho') : \Gamma \rightarrow G \times G$ avec ρ convexe cocompacte. Si*

$$C^* := \sup_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{torsion}\}} \frac{\lambda(\rho'(\gamma))}{\lambda(\rho(\gamma))} < 1,$$

alors il existe une application (ρ, ρ') -équivariante et C -lipschitzienne de \mathbb{H}^2 dans lui-même, avec $C < 1$. (On dira parfois que ρ domine ρ' .)

Le principal théorème métrique de [23], obtenu en collaboration avec J. Danciger et F. Kassel, est un exact analogue infinitésimal. Notons $d\lambda((\rho, u)(\gamma)) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \lambda(e^{t u(\gamma)} \rho(\gamma)) \in \mathbb{R}$.

Théorème 1.7. *Soit $(\rho, u) : \Gamma \rightarrow G \ltimes \mathfrak{g}$ avec ρ convexe cocompacte. Si*

$$c^* := \sup_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{torsion}\}} \frac{d\lambda((\rho, u)(\gamma))}{\lambda(\rho(\gamma))} < 0,$$

*alors il existe un champ de vecteurs (ρ, u) -équivariant et c -contractant sur \mathbb{H}^2 , avec $c < 0$. (On qualifiera alors souvent de **contractant** le cocycle u lui-même.)*

1.3. Géométrie lorentzienne et fibrations géodésiques. Les théorèmes métriques 1.6 et 1.7 ont d'importantes conséquences en géométrie lorentzienne de courbure ≤ 0 , que nous détaillons maintenant.

La variété $G := \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, munie de sa forme de Killing de signature $(2, 1)$ et de l'action du groupe $G \times G$ par multiplications à droite et à gauche, est l'espace modèle de la *géométrie anti-de Sitter* (AdS), autrement dit de la géométrie lorentzienne en courbure négative constante. Les quotients (en particulier compacts) de G par des sous-groupes discrets de $G \times G$ ont une riche théorie de déformation à laquelle s'intéressent les physiciens relativistes, mais aussi de nombreux mathématiciens comme notamment Goldman [43], Klingler [73], Kulkarni–Raymond [76], Mess [82], Salein [92], Zeghib [107], etc.

De même, l'algèbre de Lie \mathfrak{g} , munie de sa forme de Killing et de l'action affine de $G \ltimes \mathfrak{g}$, s'identifie à l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{2,1}$, espace modèle de la géométrie lorentzienne plate. Les quotients de cet espace ont été étudiés notamment par Margulis [81], Drumm [35], Charette [17], Fried–Goldman [39], Goldman–Labourie–Margulis [44], etc. Nous montrons dans [23] le théorème suivant.

Théorème 1.8. *Soit Γ un groupe discret.*

- (i) *Une représentation $(\rho, \rho') : \Gamma \rightarrow G \times G \simeq \mathrm{Isom}_0(G)$ avec ρ convexe cocompacte définit une action proprement discontinue sur G si et seulement si, quitte à échanger ρ et ρ' , il existe une application (ρ, ρ') -équivariante et C -lipschitzienne f de \mathbb{H}^2 dans lui-même, avec $C < 1$.*
- (ii) *Une représentation $(\rho, u) : \Gamma \rightarrow G \ltimes \mathfrak{g} \simeq \mathrm{Isom}_0(\mathfrak{g})$ avec ρ convexe cocompacte définit une action proprement discontinue sur \mathfrak{g} si et seulement si, quitte à multiplier u par -1 , il existe un champ de vecteurs (ρ, u) -équivariant et c -contractant X sur \mathbb{H}^2 , avec $c < 0$.*

Le point (i) s'étend sans coup férir à $G = \mathrm{Isom}_0(\mathbb{H}^n) = \mathrm{PO}_0(n, 1)$ et ρ géométriquement finie, en utilisant les résultats du §1 ; le cas $n = 2$ de (i) était traité dans la thèse de F. Kassel [70]. Le point (ii) est nouveau et ne s'étend *pas* tel quel à \mathbb{H}^3 ; on en trouve une manière d'antécédent dans l'article [44] de Goldman, Labourie et Margulis, pour une notion de contraction légèrement différente.

• Montrons rapidement le caractère suffisant des conditions du théorème 1.8. Cette direction est valable en toute dimension ; on en fera d'ailleurs une vaste généralisation au §3 dans un contexte pseudo-riemannien.

Soit $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ comme au (i). Pour tout $g \in G$, l'application $g^{-1} \circ f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ est C -lipschitzienne et admet donc un unique point fixe $\pi(g) \in \mathbb{H}^2$. L'application

$$\pi : G \rightarrow \mathbb{H}^2$$

ainsi définie est continue et équivariante pour les deux actions de Γ , via $\gamma \cdot g = \rho'(\gamma)g\rho(\gamma)^{-1}$ à la source et via $\gamma \cdot p = \rho(\gamma)p$ au but. L'action est proprement discontinue au but, donc elle l'est aussi à la source.

De même, soit X un champ de vecteurs comme au (ii). Pour tout $Y \in \mathfrak{g}$, le champ de vecteurs $-Y + X$ sur \mathbb{H}^2 est contractant et admet donc un unique zéro $\pi'(Y) \in \mathbb{H}^2$. L'application

$$(12) \quad \pi' : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{H}^2$$

ainsi définie est continue et équivariante pour les deux actions de Γ , via $(\text{Ad} \circ \rho, u)$ à la source et via ρ au but. L'action est proprement discontinue au but, donc elle l'est aussi à la source.

- Le caractère nécessaire n'est guère plus long à vérifier, moyennant la machinerie des parties 1.1 et 1.2.

Pour (i), on peut supposer $\lambda(\rho'(\gamma_0)) \leq \lambda(\rho(\gamma_0))$ pour un certain $\gamma_0 \in \Gamma \setminus \{\text{torsion}\}$ et se placer dans le cas $C \geq 1$ du théorème 1.2: si $C > 1$, en suivant la lamination C -étirée sur une grande longueur on trouve $\gamma_1 \in \Gamma$ tel que $\lambda(\rho'(\gamma_1)) > \lambda(\rho(\gamma_1))$; il n'est alors pas difficile de fabriquer une infinité de mots de la forme $\gamma = \gamma_0^{\nu_0} \gamma_1^{\nu_1}$ tels que $\lambda(\rho'(\gamma)) = \lambda(\rho(\gamma)) + O(1)$ et de montrer que $(\rho, \rho')(\gamma)$ échoue alors à déplacer un gros compact de G : l'action n'est pas proprement discontinue. Cet argument s'adapte aussi au cas $C = 1$.

Pour (ii), l'approche est semblable, en montrant une version infinitésimale du théorème 1.2: on trouve $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma \setminus \{\text{torsion}\}$ tels que $d\lambda((\rho, u)(\gamma_0)) \leq 0 \leq d\lambda((\rho, u)(\gamma_1))$ si bien que $|d\lambda((\rho, u)(\gamma_0^{\nu_0} \gamma_1^{\nu_1}))| = O(1)$; cette borne interdit à $(\rho, u)(\Gamma)$ d'agir proprement discontinûment sur \mathfrak{g} . (Cet argument porte le nom de *lemme des signes opposés* de Margulis [81].)

- *Transition géométrique, fibrations et topologie des quotients.* Le parallélisme appuyé du théorème 1.8.(i)-(ii), absent de la littérature antérieure sur ces questions, n'a pas qu'une valeur esthétique. La projection π' de (12) peut se voir comme une limite convenablement renormalisée de π , et on peut aussi renormaliser une famille appropriée de sections. On en tire le théorème suivant, dit de transition géométrique.

Théorème 1.9. [23] *Toute 3-variété lorentzienne plate complète, de groupe fondamental libre, est limite de variétés lorentziennes complètes de courbure constante négative. Cette limite est vraie au sens de la convergence dans l'espace des (\mathbb{G}, \mathbb{X}) -structures avec $\mathbb{X} = \mathbb{P}^3\mathbb{R}$ et $\mathbb{G} = \text{PGL}_4(\mathbb{R})$, mais aussi au sens de la convergence des tenseurs lorentziens.*

(Les espaces modèles G et \mathfrak{g} se plongent tous deux dans $\mathbb{X} = \mathbb{P}^3\mathbb{R}$.) La démonstration du théorème 1.8 donne en outre des informations importantes sur les quotients:

Corollaire 1.10. (i) *Les variétés lorentziennes $(\rho, \rho')(\Gamma) \backslash G$ et $(\rho, u)(\Gamma) \backslash \mathfrak{g}$ construites au théorème 1.8 fibrent en droites (via π et π') sur des surfaces hyperboliques.*
(ii) *En particulier, elles sont homéomorphes à des intérieurs de variétés compactes.*

Le point (ii) avait été conjecturé dans les années 90 par Drumm et Goldman sous le nom de « tameness ». Suhyoung Choi en a posté une preuve indépendante [19] en 2012, fondée sur une idée de compactification (mais qui ne permet pas de faire la transition géométrique). Sa preuve, au contraire de la nôtre, repose sur l'article [44] de Goldman-Labourie-Margulis.

2. COMPLEXE DES ARCS ET BANDELETTES

Dans l'article [25], toujours avec J. Danciger et F. Kassel, nous sommes allés plus loin en donnant une paramétrisation complète de l'espace des cocycles contractants.

2.1. Définitions. Thurston, dès [101], proposait une construction permettant, à partir d'une surface hyperbolique à bord géodésique S , d'en construire une autre S' , homéomorphe, telle que l'holonomie de S domine celle de S' au sens du théorème 1.6. Voici la méthode: on trace dans S un arc de géodésique α plongé, allant du bord au bord, ainsi qu'un second arc α' voisin mais disjoint de α , tel que les deux arcs admettent une perpendiculaire commune les coupant en p et p' respectivement. On peut alors ôter la *bandelette* bordée par $\alpha \cup \alpha'$ et recoller (α, p) à (α', p') .

Toute géodésique fermée rencontrant α dans S voit sa longueur décroître dans S' , et on peut raccourcir *toutes* les géodésiques quitte à recommencer l'opération avec d'autres arcs β, γ, \dots (disjoints si l'on veut) dont l'union décompose S en disques topologiques. Voir la figure 1. On peut aussi définir une version infinitésimale de cette construction, avec α' infinitésimalement proche de α .

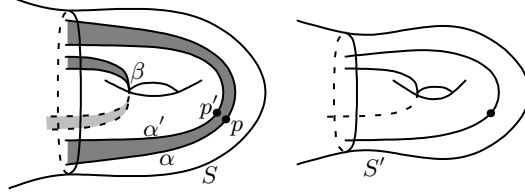


FIGURE 1. Bandelettes dans une surface hyperbolique.

Soit $\overline{\mathcal{X}}$ le *complexe des arcs* de S : il s'agit d'un complexe simplicial dont les sommets sont les classes d'isotopie d'arcs plongés dans S (allant du bord au bord, ne s'effondrant pas sur le bord) et dont les simplexes de dimension $k-1$ correspondent aux k -uplets d'arcs isotopiquement disjoints. Pour chaque arc α dans le 0-squelette de $\overline{\mathcal{X}}$, choisissons un représentant géodésique (par exemple orthogonal au bord de S) et un point p sur ce représentant. Si $\rho : \Gamma \rightarrow G$ désigne l'holonomie de S , la construction des bandelettes de Thurston peut s'interpréter comme définissant une application

$$\overline{f} : \overline{\mathcal{X}} \rightarrow \mathrm{T}_{[\rho]} \mathcal{T}(S) \simeq \mathrm{H}_{\rho}^1(\Gamma, \mathfrak{g})$$

(voir (9)) dont l'image consiste uniquement en déformations qui raccourcissent toutes les courbes au sens large : la position de p indique la région la plus étroite de la bandelette infinitésimale qu'on ôte ; les coordonnées barycentriques dans $\overline{\mathcal{X}}$ représentent les grosseurs relatives des bandelettes. Ici $\mathcal{T}(S)$ désigne l'espace de Teichmüller de S .

De plus, qualifions de « maigre » tout $(k-1)$ -simplexe de $\overline{\mathcal{X}}$ tel que l'union des k arcs correspondants dans S ne décompose pas S en disques topologiques. Si $\mathcal{X} \subset \overline{\mathcal{X}}$ désigne le complémentaire de l'union des k -simplexes maigres, alors on peut voir que la restriction $f := \overline{f}|_{\mathcal{X}}$ prend ses valeurs dans le cône des cocycles contractants (ou *cône contractant*) au sens du théorème 1.7 : toutes les courbes raccourcissent (au moins) d'un facteur uniforme.

Un théorème utile, montré indépendamment par Harer et Penner [63, 88], dit que \mathcal{X} est homéomorphe à une boule ouverte.

Nous montrons alors ceci :

Théorème 2.1. [25] *Étant donnée une surface hyperbolique compacte à bord géodésique (non vide), l'application f induit un homéomorphisme entre \mathcal{X} et le projectivisé du cône contractant.*

La force de cet énoncé est que non seulement toute déformation contractante de S est réalisée par une construction en bandelettes (i.e. f est surjective), ce qui n'était nullement apparent ; mais en plus cette réalisation est unique (une fois choisis les représentants géodésiques pointés (α, p) des arcs — altérer ce choix change f , mais ne change pas l'image projectivée de f).

Le théorème 2.1 admet une version « macroscopique », elle aussi montrée dans [25] : étant donnée une surface hyperbolique à bord S' , toute surface hyperbolique marquée $S \simeq S'$ dominant S' (i.e. dont les courbes sont uniformément plus *longues*) est apparentée à S par un système de bandelettes disjointes, unique modulo des

choix de représentants géodésiques. Notons que l'espace des représentations (non nécessairement fuchsien) *dominées par* S' est a priori plus compliqué.¹

2.2. Idées de la preuve. Pour montrer le théorème 2.1, on montre que l'application $\mathbb{P}f$, du complexe \mathcal{X} vers le cône contractant projectivisé, est d'une part localement un homéomorphisme, et d'autre part, une fonction propre. Cela fait de $\mathbb{P}f$ un revêtement qui, entre boules ouvertes de même dimension, ne peut être que trivial.

Montrer que $\mathbb{P}f$ est propre revient à dire qu'une suite de déformations en bandelettes dont les supports sont des arcs α de plus en plus longs, a pour limite une déformation ne faisant *pas* décroître toutes les longueurs d'un facteur uniforme. De fait, ces longs arcs doivent *s'accumuler sur une lamination géodésique*, dont on peut calculer que la longueur est constante pour la déformation limite.

Reste donc à montrer que $\mathbb{P}f$ est localement un homéomorphisme. On peut d'abord voir que $\mathbb{P}f$ n'écrase pas les simplexes de dimension maximale de \mathcal{X} : autrement dit, que les déformations en bandelettes portées par une famille d'arcs α_i décomposant la surface S en triangles hyperidéaux forment une base de l'espace des déformations infinitésimales de S . Cette étape, la plus technique, se ramène à un argument de géométrie projective plane. En raffinant un peu l'argument on voit que $\mathbb{P}f$ est aussi localement un homéomorphisme au voisinage des simplexes de codimension 1 et 2 de \mathcal{X} . Les codimensions $d \geq 3$ tombent alors d'elles-mêmes par un argument de récurrence, reposant sur le fait que la sphère \mathbb{S}^{d-1} est simplement connexe (comme dans la preuve du théorème des polyèdres fondamentaux de Poincaré).

2.3. Tores percés. En lien avec le théorème 2.1, mentionnons aussi l'article [50] (antérieur) qui traite en termes beaucoup plus explicites le cas où S est un tore percé. Le complexe \mathcal{X} est alors une triangulation plane infinie, parfois dite *de Farey*, dont l'ensemble des sommets (soit $\overline{\mathcal{X}} \setminus \mathcal{X}$) s'identifie à $\mathbb{P}^1\mathbb{Q}$ et qu'on peut relier à l'algorithme des fractions continues. Le résultat obtenu dans ce cas est en réalité plus fort que le théorème 2.1, car il autorise la courbe de bord du tore percé S à être remplacée par une singularité conique : je montre que le cône des déformations infinitésimales contractantes ne change qualitativement pas dans ce nouveau contexte. De fait, ce cône dégénère en un cône rond lorsque l'holonomie de S dégénère vers la représentation triviale (métriques hyperboliques d'aire $t \rightarrow 0$ sur le tore, avec une singularité d'angle $2\pi - t$) ; le projectivisé du cône rond vu à la limite n'est autre que l'espace de Teichmüller du tore plat.

Toujours pour S un tore percé, je montre dans [52] que l'image de l'application f (non projectivée) est une hypersurface *convexe* dans $H_\rho^1(\Gamma, \mathfrak{g}) \simeq T_{[\rho]}\mathcal{T}(S)$, pour peu que la vitesse de contraction des bandelettes soit uniforme. (Le théorème 2.1 dit seulement que cette hypersurface rencontre chaque droite vectorielle au plus une fois.) Là encore, la propriété de convexité reste vraie lorsque la courbe de bord est remplacée par une singularité conique.

Ces propriétés, qu'il serait tentant de pouvoir étendre à des surfaces plus générales, sont illustrées par la figure 2, calculée avec *Mathematica*. Les 6 panneaux de la figure proposent plusieurs vues de la surface convexe $f(\mathcal{X}) \subset \mathbb{R}^3$:

- La colonne de gauche montre un cas à singularité conique d'aire environ 0,213. La colonne de droite montre un cas à bord géodésique de longueur

¹Dans [57], nous montrons avec F. Kassel et M. Wolff que toute représentation non fuchsienne d'un groupe de surface dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ est dominée par une représentation fuchsienne. Deroin et Tholozan [32] ont également obtenu ce résultat. Nous montrons aussi que réciproquement, toute représentation fuchsienne en domine une non-fuchsienne, qu'on peut prendre dans n'importe quelle classe d'Euler.

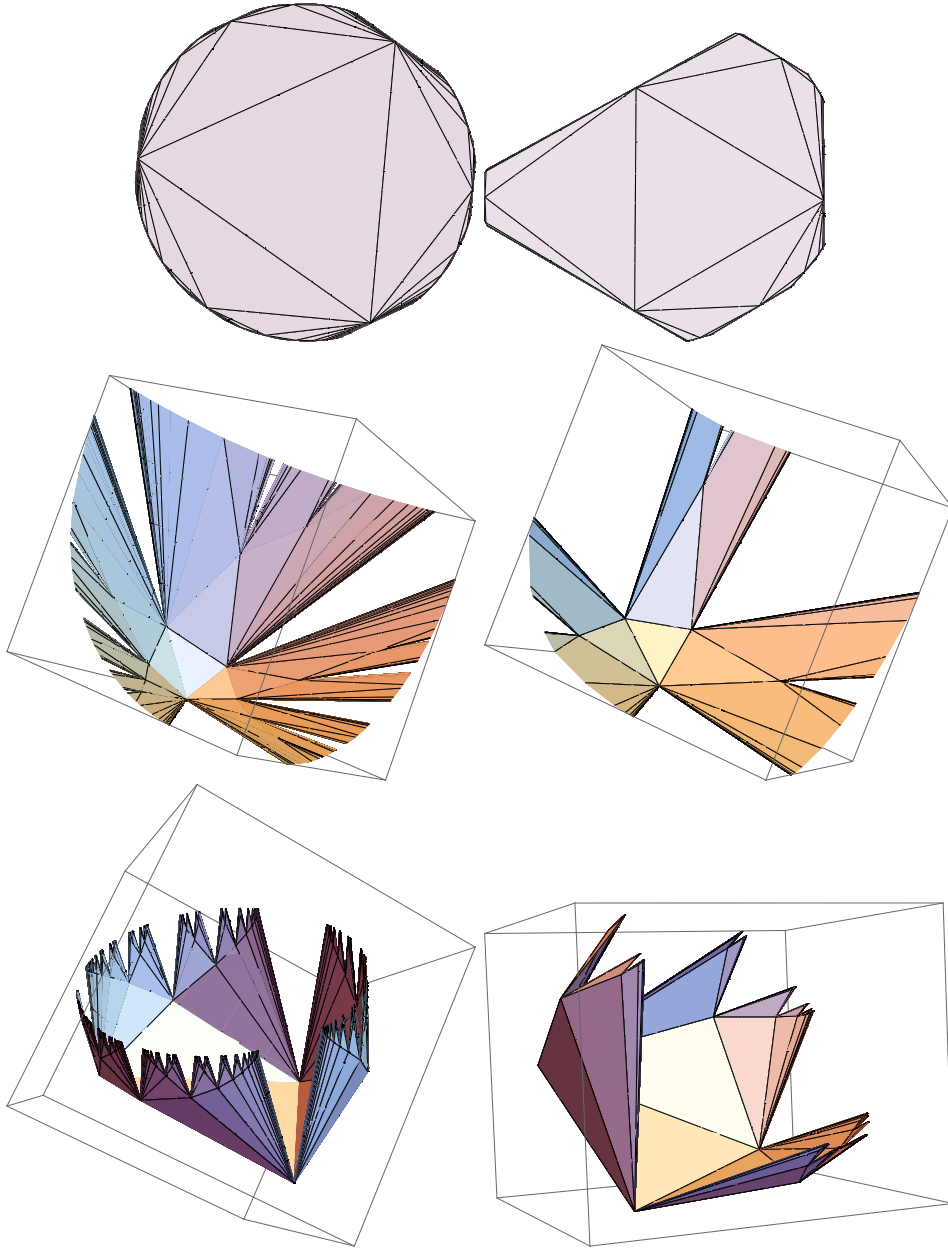


FIGURE 2. Trois vues de $f(\mathcal{X})$, pour deux métriques hyperboliques sur le tore percé.

environ 2,361. La différence n'est pas qualitative, mais réside plutôt dans la vitesse de divergence et d'écrasement des triangles.

- Sur la 1e ligne, $f(\mathcal{X})$ est vue depuis l'origine : cette vue projectivée est un *convexe*, conformément au théorème 2.1. Plus précisément, ce convexe est un polygone infini dont les côtés sont indexés dans $\mathbb{P}^1\mathbb{Q}$.
- Sur la 2e ligne, $f(\mathcal{X})$ est vue en perspective, intersectée avec un cube dont un sommet se trouve à l'origine. Les secteurs vides ne sont pas un artefact, ils correspondent aux côtés du polygone vu sur la 1e ligne : chacun de ces

secteurs engendrent un plan qui passe par l'origine (trois de ces plans sont en fait des faces du cube).

- Sur la 3e ligne, afin de montrer $f(\mathcal{X})$ en entier, on a appliqué une transformation projective plus ou moins arbitraire, envoyant l'origine à l'infini, et le plan à l'infini sur le plan qui contient les pointes des « dents ». La convexité de $f(\mathcal{X})$ est bien visible.

2.4. Plans croches. Le théorème 2.1 permet enfin d'exhiber des domaines fondamentaux d'un type particulier pour les variétés lorentziennes plates. Un *plan croche* est par définition n'importe quelle transformation affine de la surface suivante de $\mathbb{R}^{2,1} \simeq \mathfrak{g}$:

$$\{(0, y, z) \mid |z| \geq |y|\} \cup \{(x, y, y) \mid x \geq 0\} \cup \{(x, y, -y) \mid x \leq 0\}$$

qui est topologiquement un plan (proprement plongé). Notons que les droites de jonction $\{0, y, y\}_{y \in \mathbb{R}}$ et $\{0, y, -y\}_{y \in \mathbb{R}}$ sont isotropes. Si H^+ et H^- sont les composantes connexes du complémentaire de ce plan croche dans \mathbb{R}^3 , contenant $(0, 1, 0)$ et $(0, -1, 0)$ respectivement, et si $y_0 > |z_0|$, alors le translaté $H^+ + (0, y_0, z_0)$ est encore disjoint de H^- (figure 3).

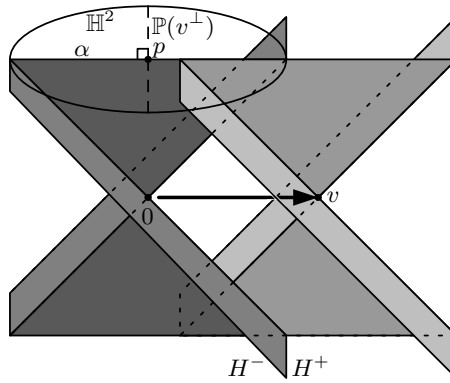


FIGURE 3. Un plan croche et son translaté par $(0, \frac{5}{4}, 0)$ dans $\mathbb{R}^{2,1}$.

Dans une série d'articles [35, 36, 37] publiés à partir du début des années 1990, T. Drumm utilise des plans croches pour border des domaines fondamentaux d'actions affines proprement discontinues sur \mathbb{R}^3 . Ces exemples permettaient de voir, par exemple, que l'holonomie de toute surface hyperbolique à bord S , vue comme agissant linéairement sur $\mathfrak{sl}_2 \simeq \mathbb{R}^{2,1}$, admet des déformations affines dont l'action est proprement discontinue (les exemples originaux de Margulis demandaient qu'en outre les géodésiques de S fussent assez longues). L'idée de base est de choisir un domaine fondamental polygonal de S dans \mathbb{H}^2 et de relever chaque droite α de son bord à un plan croche de \mathfrak{sl}_2 (ici, α est le projectivisé du secteur $\{(0, y, z) \mid |z| \geq |y|\}$ du plan croche). Ces plans croches, ainsi que tous leurs itérés sous l'action adjointe de la représentation d'holonomie, se rencontrent tous à l'origine : mais en écartant chacun d'eux (ainsi que toute la portion d'espace H^+ qu'il borde) par une translation comme dans l'exemple ci-dessus, on parvient à les rendre disjoints. La collection de plans croches translattés est encore invariante, mais pour une certaine déformation affine de l'action d'holonomie (figure 4).

Comme cette construction fournit en outre un domaine fondamental de l'action affine obtenue (bordé par des plans croches), Drumm ainsi que ses collaborateurs (Goldman, Charette : voir l'introduction de [18] pour un récapitulatif) voyaient en elle une approche possible du résultat contenu ici dans le corollaire 1.10.(ii).

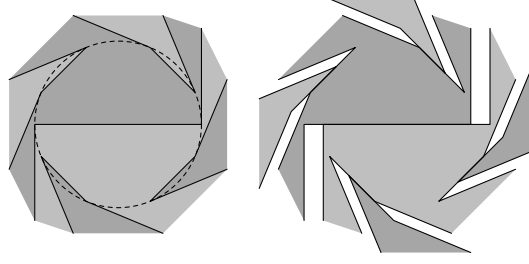


FIGURE 4. Régions bordées par des plans croches, et leurs translâtées (coupe horizontale). Le cercle est une carte affine de \mathbb{H}^2 .

Dans [25], nous établissons un *dictionnaire totalement explicite entre la construction des plans croches et celle des bandelettes*. Par exemple, au choix de la direction du vecteur de translation $v = (0, y_0, z_0)$ correspond le choix du point $p = \alpha \cap \mathbb{P}(v^\perp)$ où la bandelette est la plus étroite (figure 3). Du théorème 2.1 découle donc le résultat suivant, conjecturé par Drumm et Goldman [38], qui implique aussi le corollaire 1.10.(ii) :

Corollaire 2.2. [25] *Toute variété lorentzienne plate (complète), définie par une déformation infinitésimale d'une surface hyperbolique à bord S , admet un domaine fondamental bordé par des plans croches.*

Un cas particulier de ce résultat a également été montré dans [18] par Charette, Drumm et Goldman lorsque Γ est de rang 2, i.e. S est un pantalon ou un tore percé (le complexe des arcs admet alors une description explicite, comme on l'a vu au §2.3, qui permet le calcul).

À la version macroscopique du théorème 2.1, mentionnée ci-dessus, correspond par ailleurs une version macroscopique du dictionnaire : nous sommes amenés dans [25] et [24] à définir des *plans croches anti-de Sitter* qui sont une classe particulière de surfaces PL dans l'espace $\text{AdS}^3 = \text{PSL}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{H}^{2,1}$. Nous montrons toutefois dans [24] que certaines variétés quotients de AdS^3 n'admettent *aucun* domaine fondamental bordé par des plans croches anti-de Sitter.

2.5. Cas à pointes. Dans tous les résultats infinitésimaux des §§1 et 2, les représentations fuchsienues ρ étaient supposées convexes cocompactes. Cependant il existe des versions « à pointes » de tous ces résultats. Nous les avons regroupées dans [29], où nous montrons le théorème suivant.

Théorème 2.3. *Soient Γ un groupe libre de type fini et $\rho : \Gamma \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{R}) =: G$ une représentation injective et discrète mais pas nécessairement convexe cocompacte. Soit $u : \Gamma \rightarrow \mathfrak{psl}_2(\mathbb{R})$ un ρ -cocycle (autrement dit, une déformation infinitésimale $u \in T_\rho \text{Hom}(\Gamma, G)$). Supposons que $d\lambda_\gamma(u) \leq 0$ pour un certain $\gamma \in \Gamma$ tel que $\rho(\gamma)$ soit loxodromique, où la longueur hyperbolique de translation λ_γ est vue comme une fonction sur $\text{Hom}(\Gamma, G)$. Soit S la surface hyperbolique $\rho(\Gamma) \backslash \mathbb{H}^2$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1) *L'action affine de Γ sur $\mathfrak{psl}_2(\mathbb{R})$ donnée par $\gamma \cdot X := \text{Ad} \circ \rho(\gamma)(X) + u(\gamma)$ est proprement discontinue ;*
- (2) *Il existe $k < 0$ tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$ avec $\rho(\gamma)$ loxodromique (i.e. vérifiant $\lambda_\gamma(\rho) > 0$), on ait $d\lambda_\gamma(u) \leq k\lambda_\gamma(\rho)$;*
- (3) *Il existe $k < 0$ tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$ représentant une courbe simple fermée non périphérale, on ait $d\lambda_\gamma(u) \leq k\lambda_\gamma(\rho)$, et pour tout $\gamma \in \Gamma$ représentant*

une courbe périphérale (avec $\rho(\gamma)$ loxodromique ou parabolique),

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} |\mathrm{Tr}(e^{tu(\gamma)} \rho(\gamma))| < 0 ;$$

- (4) Il existe un champ de vecteurs X sur \mathbb{H}^2 et un réel $c < 0$ vérifiant, pour tous $p, q \in \mathbb{H}^2$ et $\gamma \in \Gamma$, les propriétés (11) d'équivariance et de contractivité ;
- (5) Le cocycle u est représenté par une déformation en bandelettes infinitésimale le long d'arcs proprement plongés qui subdivisent S en disques topologiques, éventuellement idéaux.

Nous traitons aussi le cas où Γ est susceptible d'avoir des éléments d'ordre fini, en adaptant les notions de courbe simple et de bandelette aux points 3 et 5.

3. VARIÉTÉS AFFINES ET GROUPES DE COXETER

3.1. Résultat d'existence. Encore avec J. Danciger et F. Kassel, nous avons montré le théorème suivant [27] :

Théorème 3.1. *Soit Γ un groupe de Coxeter à angles droits, à k générateurs. Alors Γ admet une action proprement discontinue sur l'espace affine réel $\mathbb{R}^{\frac{k(k-1)}{2}}$.*

À indice fini près, les quotients $\Gamma \backslash \mathbb{R}^{\frac{k(k-1)}{2}}$ sont des variétés affines (complètes). C'est une des premières sources abondantes d'exemples de telles variétés.

En effet on sait peu de choses sur les variétés affines. Par exemple, la conjecture d'Auslander [4] prédit que toute variété affine *compacte* est de groupe fondamental virtuellement résoluble ; elle n'est à ce jour démontrée qu'en dimension ≤ 6 (par Abels, Margulis et Soifer moyennant une longue discussion de cas ; voir aussi [102]). Les espaces-temps de Margulis des §2 et §1.3 montrent que l'hypothèse de compacité est indispensable, mais il semble que jusqu'au théorème ci-dessus, tous les exemples connus de groupes fondamentaux de variétés affines étaient des produits de facteurs virtuellement résolubles ou (à l'opposé) virtuellement libres. Le cas « intermédiaire » d'un groupe de surface, par exemple, était en suspens.

Voici un corollaire du théorème 3.1 :

Corollaire 3.2. *Tout groupe d'Artin à angles droits admet une action affine proprement discontinue (i.e. est groupe fondamental d'une variété affine réelle).*

Rappelons qu'un groupe d'Artin à angles droits est la donnée de k générateurs a_1, \dots, a_k et d'une liste de relations, toutes de la forme $a_i a_j = a_j a_i$. (Dans un groupe de Coxeter, on suppose en plus que $a_i^2 = 1$ pour tout i .) Le corollaire s'obtient en plongeant le groupe d'Artin dans un groupe de Coxeter plus gros, comme font Davis et Januszkiewicz [31].

En particulier, tout groupe discret Γ *virtuellement spécial* au sens de Wise [106] est le groupe fondamental d'une variété affine. La condition de Wise signifie que Γ est le groupe fondamental d'un complexe cubique possédant certaines propriétés combinatoires. Cette condition est au centre d'une importante littérature récente, car elle est à son tour assez souple pour capturer toutes sortes d'autres familles de groupes. Ainsi, en combinant des résultats d'Agol [2], Przytycki–Wise [89], Hagen–Wise [61], Haglund–Wise [62], on peut montrer que les groupes suivants admettent tous des actions affines proprement discontinues :

- le groupe fondamental d'une 3-variété hyperbolique compacte ;
- le groupe fondamental de toute 3-variété compacte, à l'exception possible de certaines variétés graphées ;
- les groupes hyperboliques au sens de Gromov admettant une hiérarchie ;
- les groupes fondamentaux des complexes cubiques compacts hyperboliques (groupes à petite simplification, groupes aléatoires à densité $< \frac{1}{6}, \dots$) ;
- tout groupe de Coxeter, pas nécessairement à angles droits.

Le corollaire 3.2 implique en outre qu'un groupe qui agit proprement discontinûment sur un espace affine réel peut être de dimension cohomologique virtuelle arbitrairement élevée [66, 87]. La conjecture d'Auslander revient à dire que cette dimension (1 pour le groupe libre, 2 pour un groupe de surface...) est strictement inférieure à celle de l'espace affine.

3.2. Un exemple. Pour rendre concrète l'idée de la preuve du théorème 3.1, nous allons maintenant exhiber une action proprement discontinue d'un groupe de surface sur \mathbb{R}^6 , ou plus exactement, sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} := \mathfrak{so}(3, 1)$. Par le théorème 1.8.ii (direction « suffisante »), il suffit de construire une déformation infinitésimale contractante d'une représentation du groupe de surface dans $O(3, 1)$.

Soit Γ le groupe de Coxeter engendré par $2N$ involutions a_1, \dots, a_{2N} telles que $[a_i, a_{i+1}] = 1$ pour tout indice i (pris modulo $2N$, où $N \geq 3$). Ce groupe agit proprement discontinûment (et cocompactement) sur le plan hyperbolique \mathbb{H}^2 , vu comme le plan équatorial de \mathbb{H}^3 , avec pour domaine fondamental un $2N$ -gone régulier à angles droits. Ainsi Γ admet des groupes de surface comme sous-groupes d'indice fini. Pour l'action sur \mathbb{H}^3 , vu dans le modèle projectif, un domaine fondamental est donné par l'intersection de l'ellipsoïde \mathbb{H}^3 et d'un prisme $2N$ -gonal H convenablement calibré. Notons $\rho_0^* : \Gamma \rightarrow O(3, 1)$ la représentation correspondante, et $P_1, \dots, P_{2N} \subset \mathbb{H}^3$ les $2N$ plans de réflexion (ainsi $\rho_0^*(a_i)$ fixe P_i).

Pour perturber ρ_0^* , il suffit de perturber les plans P_i en des plans P_i^s , en préservant la perpendicularité de P_i et P_{i+1} . Il y a essentiellement une seule famille à un paramètre de telles perturbations qui respectent une symétrie diédrale d'ordre $4N$: les P_{2i}^s se rencontrent en un point de l'axe de H situé loin au dessus du plan équatorial (hors de \mathbb{H}^3), et les P_{2i+1}^s en un point loin au dessous. Le domaine fondamental perturbé est l'intersection de \mathbb{H}^3 et d'un $2N$ -èdre $H(s)$, parfois appelé appelé antiprisme dual ou trapézoèdre : voir la figure 3.2. Soit $\rho_s^* : \Gamma \rightarrow O(3, 1)$ la représentation perturbée.

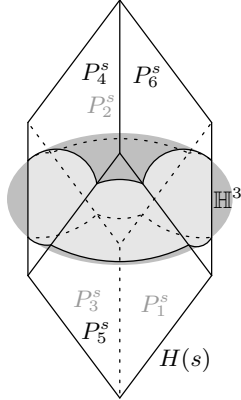


FIGURE 5. Un domaine fondamental $H(s) \cap \mathbb{H}^3$ pour l'action de $\rho_s^*(\Gamma)$ sur \mathbb{H}^3 , bordé par $2N$ plans P_i^s (ici $N = 3$). L'hexaèdre $H(s)$ s'étire verticalement quand $s \rightarrow 0$. Les faces P_1^s, P_2^s, P_3^s sont à l'arrière.

Un calcul montre que, dans le modèle projectif convenablement centré, pour tous $0 < s < s'$ le $2N$ -èdre $H(s')$ est l'image de $H(s)$ par une transformation linéaire $f_{s,s'}^*$, de la carte affine \mathbb{R}^3 , qui envoie l'ellipsoïde \mathbb{H}^3 sur un ellipsoïde strictement plus petit. En comparant les métriques de Hilbert sur les deux ellipsoïdes, on voit que pour $s > 0$ petit et fixé, il existe $c > 0$ tel que sur $H(s) \cap \mathbb{H}^3$, l'application $f_{s,s'}^*$ soit $(1 - c(s' - s))$ -lipschitzienne pour tout $s' > s$ assez proche de s . Cette application $f_{s,s'}^*$ peut se prolonger de façon $(\rho_s^*, \rho_{s'}^*)$ -équivariante par réflexions à la source et au but : le prolongement est encore lipschitzien, de même constante.

Finalement, il ne reste qu'à prendre $\rho_t := \rho_{s+t}^*$ et $f_t := f_{s,s+t}^*$ où $s > 0$ est fixé : par construction, le champ de vecteurs dérivé sur \mathbb{H}^3 , défini comme en (10) par

$X(p) := \frac{d}{dt}\big|_{t=0} f_t(p)$, vérifie les propriétés d'équivariance et de contractivité (11), si bien que l'action affine dérivée sur $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3,1)$, définie comme au §1.2, est proprement discontinue par le théorème 1.8.ii. Notons que sa partie linéaire respecte la forme de Killing de \mathfrak{g} , qui est de signature $(3,3)$.

3.3. Idée de preuve. Le cas général du théorème 3.1, pour Γ un groupe de Coxeter à angles droits quelconque de générateurs a_1, \dots, a_k , suit une stratégie assez analogue. On définit pour $s < -1$ des matrices « de Coxeter » $M(s) = (M_{ij}(s))_{1 \leq i, j \leq k}$ telles que

$$M_{ij}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ s & \text{si } [a_i, a_j] \neq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les représentations $\rho_s : \Gamma \rightarrow \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ envoient a_i sur la réflexion par rapport au plan perpendiculaire au i -ème vecteur de base de \mathbb{R}^k , pour le produit bilinéaire de matrice $M(s)$. Génériquement, ρ_s est alors à valeurs dans une certaine copie de $O(p, k-p)$ (pour quelque $p \leq k$), qu'on peut identifier à la copie standard au prix d'une conjugaison (dépendant de s). Comme au §1.2, en faisant varier infinitésimalement s , on obtient une action affine sur $\mathfrak{o}(p, k-p)$, de partie linéaire $\mathrm{Ad} \circ \rho_s$, dont on souhaite montrer la propre discontinuité.

La représentation ρ_s détermine une action sur l'espace pseudo-riemannien $\mathbb{H}^{p, k-p-1}$, projectivisation du cône négatif de $\mathbb{R}^{p, k-p}$. La principale difficulté est alors qu'on ne peut pas utiliser de propriétés métriques (contraction lipschitzienne, etc) sur $\mathbb{H}^{p, k-p-1}$: en effet ce n'est pas un espace métrique, la « pseudo-distance » entre deux points n'est réelle que si ceux-ci sont en position espace (i.e. la droite projective qui les joint rencontre la quadrique des directions isotropes en deux points), et en tout état de cause cette pseudo-distance ne vérifie pas d'inégalité triangulaire. Le théorème 1.8 n'a donc pas d'analogue direct.

Cependant, l'intersection de l'orthant positif (projectivisé) de \mathbb{R}^k et de son dual pour la forme $M(s)$ définit un polytope ou « pavé » de $\mathbb{H}^{p, k-p-1}$, dont l'orbite sous Γ pave un convexe Γ -invariant $\Omega(s) \subset \mathbb{H}^{p, k-p-1}$. La construction produit aussi des applications $f_{s, s'} : \Omega(s) \rightarrow \mathbb{H}^{p, k-p-1}$, continues et $(\rho_s, \rho_{s'})$ -équivariantes, projectives sur chaque pavé. On peut montrer que ces applications possèdent bien une propriété de contraction de type lipschitzien, en restriction aux paires de points en position espace : comme pour les ellipsoïdes du §3.2, c'est essentiellement une propriété d'inclusion entre les cônes négatifs de $M(s)$ et $M(s')$.

C'est sur cette contractivité restreinte qu'on s'appuie pour montrer que l'action affine sur $\mathfrak{o}(p, k-p)$, obtenue pour s' infinitésimalement proche de s , est proprement discontinue : on n'obtient pas une fibration de $\mathfrak{o}(p, k-p)$ sur $\Omega(s)$, comme dans le théorème 1.8, mais une sorte de fibration grossière sur une Γ -orbite (discrète), en montrant qu'un point de $\Omega(s)$ se trouve en position espace avec presque tous les points de son orbite.

Plus précisément, soit $q_0 \in \Omega(s)$ et soit $\mathcal{F}(\rho_s(\Gamma) \cdot q_0)$ l'ensemble des parties finies de $\rho_s(\Gamma) \cdot q_0$ (inclus dans le convexe $\Omega(s)$ de $\mathbb{H}^{p, k-p-1} \subset \mathbb{P}(\mathbb{R}^k)$). Le champ de vecteurs équivariant X sur le domaine $\Omega(s)$ défini par

$$X(q) := \frac{d}{ds'}\big|_{s'=s} f_{s, s'}(q)$$

a une propriété de contractivité dans les directions espace, si bien que l'application

$$(13) \quad \begin{array}{ccc} \Pi : & \mathfrak{o}(p, k-p) & \longrightarrow \mathcal{F}(\rho_s(\Gamma) \cdot q_0) \\ & Y & \longmapsto \{q \in \rho_s(\Gamma) \cdot q_0 \mid \|(-Y + X)(q)\| \text{ minimal} \} \end{array}$$

(pour une famille auxiliaire $\rho_s(\Gamma)$ -invariante de normes $\|\cdot\|$) est bien définie et équivariante. On voit ici Y comme un champ de Killing sur $\mathbb{H}^{p, k-p-1}$. L'action sur l'espace but de Π étant propre, celle à la source l'est aussi. Il convient de voir (13)

comme une version grossière de (12), où $\pi'(Y)$ était défini comme le zéro (unique) d'un champ de vecteurs contractant $-Y + X$ défini sur \mathbb{H}^2 .

4. REPRÉSENTATIONS D'ANOSOV

Labourie a introduit en 2006 dans [77] la notion de *représentation d'Anosov* d'un groupe de surface Γ dans $G = \mathrm{PSL}_d(\mathbb{R})$. Il s'agit d'une classe de représentations généralisant en plusieurs sens différents les représentations fuchsienues dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Guichard et Wienhard étendent en 2012 cette notion [60], en remplaçant Γ par n'importe quel groupe hyperbolique au sens de Gromov, et G par n'importe quel groupe de Lie réductif. La notion peut alors être vue comme une généralisation en rang supérieur des représentations convexes-cocompactes dans un groupe de Lie de rang réel 1.² En particulier, il s'agit d'une condition ouverte.

4.1. Définitions et résultats. Nous ne donnerons ici la définition que dans le cas de $G = \mathrm{PSL}_d(\mathbb{R})$. La définition dépend du choix (à conjugaison près) d'un sous-groupe parabolique P de G , c'est-à-dire d'un groupe de matrices triangulaires par blocs. La taille des blocs est une suite (d_1, \dots, d_k) d'entiers strictement positifs, de somme d (avec $k \geq 2$). Nous supposons en outre, pour simplifier un peu l'exposition, que $d_i = d_{k+1-i}$ pour tout i (palindromicité). Le groupe P est le stabilisateur d'un drapeau partiel de \mathbb{R}^d , formé de sous-espaces $V_1 \subset \dots \subset V_{k-1}$ tels que $\dim(V_i) = d_1 + \dots + d_i$. On peut donc voir G/P comme l'espace des drapeaux partiels, qui est compact.

Définition 4.1. Soit Γ un groupe discret hyperbolique au sens de Gromov, de bord $\partial_\infty \Gamma$. Une représentation $\rho : \Gamma \rightarrow G$ est *P-Anosov* s'il existe une application de bord continue $\xi : \partial_\infty \Gamma \rightarrow G/P$, vérifiant les propriétés suivantes :

- ξ est ρ -équivariante ;
- ξ est transverse : pour tous $p, q \in \partial_\infty \Gamma$ distincts, les drapeaux $\xi(p)$ et $\xi(q)$ sont en position générique ;
- ξ vérifie une propriété de contraction uniforme.

Expliciter la propriété de contraction demanderait d'introduire l'espace de flot de Γ (au sens de Gromov, Champetier et Mineyev [16, 84]), ce que nous ne ferons pas ici. Pour en donner une idée, disons simplement que si $\gamma \in \Gamma$ est un élément d'ordre infini, admettant p et q respectivement pour points fixes attractif et répulsif dans $\partial_\infty \Gamma$, alors $\rho(\gamma)$ doit agir sur l'espace des drapeaux G/P avec pour points fixes attractif et répulsif $\xi(p)$ et $\xi(q)$ respectivement, le logarithme des facteurs d'expansion et de contraction étant grossièrement proportionnel à la longueur réduite de γ en tant que mot sur les générateurs. (Le langage de l'espace de flot permet de formuler une propriété analogue, uniforme, pour toute paire de points (p, q) distincts dans $\partial_\infty \Gamma$; notons que les paires de points fixes d'éléments $\gamma \in \Gamma$ sont déjà denses dans l'espace des paires.)

Voici quelques exemples de représentations d'Anosov :

— Les représentations de la composante de Hitchin de $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{PSL}_d(\mathbb{R}))$, pour Γ un groupe de surface (ce sont les exemples originaux de Labourie, objet de la « théorie de Teichmüller supérieure ») ;

— Les représentations *maximales* lorsque l'espace symétrique de G est hermitien (Burger–Iozzi–Labourie–Wienhard [14]) ;

²La généralisation la plus naïve, consistant à demander que Γ agisse proprement discontinûment et cocompactement sur un convexe de l'espace symétrique de G , est trop restrictive au sens où elle ne donne essentiellement [90, 72] que des produits de réseaux cocompacts et de représentations convexes-cocompactes dans des facteurs de rang 1. Voir cependant le §5 pour une variante plus riche de cette idée naïve en géométrie projective.

— Les inclusions (« fuchsien ») $\Gamma \subset \mathrm{SO}(n, 1) \subset \mathrm{SO}(n, 2)$ et leurs déformations dans $\mathrm{SO}(n, 2)$, pour Γ le groupe fondamental d'une variété hyperbolique compacte (Barbot [6]) ;

— Les holonomies de variétés projectives convexes compactes de groupe fondamental hyperbolique (Benoist [8]).

Pour $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, et plus généralement en rang réel 1, on sait qu'une représentation est convexe cocompacte si et seulement si elle induit un plongement quasi-isométrique de Γ dans l'espace symétrique (ici \mathbb{H}^2) associé à G : inutile d'exhiber l'application de bord pour vérifier une telle condition. On aimerait une caractérisation comparable de la propriété d'Anosov, en rang supérieur. C'est le principal théorème de [54], écrit avec O. Guichard, F. Kassel et A. Wienhard :

Théorème 4.2. *Soit Γ un groupe discret hyperbolique au sens de Gromov et soit $\rho : \Gamma \rightarrow \mathrm{PSL}_d(\mathbb{R}) =: G$ une représentation. Notons $\mu_1(g) \leq \dots \leq \mu_d(g)$ les logarithmes des d valeurs principales d'un élément $g \in G$, rangés par ordre croissant. Soit $P \subset G$ le sous-groupe parabolique des matrices triangulaires par blocs de tailles (d_1, \dots, d_k) (suite palindromique de somme d). Alors ρ est P -Anosov si et seulement si, pour toute géodésique $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de Γ issue de l'élément neutre $\gamma_0 = 1$, et pour tous indices $\ell < \ell'$ dans $\{1, \dots, d\}$ appartenant à des blocs différents (i.e. vérifiant $\ell \leq d_1 + \dots + d_s < \ell'$ pour quelque $s < k$), la suite*

$$(14) \quad (\mu_{\ell'}(\rho(\gamma_i)) - \mu_{\ell}(\rho(\gamma_i)))_{i \in \mathbb{N}}$$

est un plongement quasi-isométrique de \mathbb{N} dans \mathbb{R}^+ . Les constantes du plongement quasi-isométrique sont alors automatiquement uniformes.

La preuve, dans le sens difficile, consiste à construire l'application de bord $\xi : \partial_{\infty}\Gamma \rightarrow G/P$ comme une limite, en utilisant (14) pour montrer la convergence. Plus exactement, supposons pour simplifier $d_1 = \dots = d_k = 1$ (i.e. P est un parabolique minimal). Alors, pour i élevé, $\rho(\gamma_i)$ envoie la boule unité sur un ellipsoïde B_i dont les axes principaux sont de longueurs très disparates. Ces axes spécifient une base orthogonale de \mathbb{R}^d , sur laquelle on peut construire un drapeau complet $V_1 \subset \dots \subset V_{k-1}$ (ici V_s est somme des s plus grands axes). Comme $\gamma_{i+1} = \gamma_i \alpha$ pour un certain générateur α , on a $\frac{1}{a}B_i \subset B_{i+1} \subset aB_i$ où a est un majorant de $\|\alpha\|$ et $\|\alpha^{-1}\|$. Cette double inclusion, jointe à la forte disparité des axes de B_i , entraîne que les directions principales de B_{i+1} sont *proches* de celles de B_i (figure 6). Les drapeaux associés sont également proches. La croissance (14) des disparités permet alors d'extraire un drapeau limite, $\xi(p)$, où $p \in \partial_{\infty}\Gamma$ est la limite des γ_i .



FIGURE 6. Inclusion d'ellipsoïdes.

En réalité, pour extraire une limite il suffit de supposer la croissance de (14) pour les paires (ℓ, ℓ') de la forme $(d_1 + \dots + d_s, d_1 + \dots + d_s + 1)$ (« à la frontière entre deux blocs »), et il n'est même pas nécessaire que cette croissance soit linéaire. La définition redonne alors, par exemple, l'application de bord des représentations kleinien-nes géométriquement finies (qui ne sont pas toujours Anosov). L'hypothèse de croissance forte n'est nécessaire que pour montrer la *transversalité* (définition 4.1) de l'application de bord ξ obtenue, ce qui est l'étape la plus technique.

Le travail [54] recoupe fortement des résultats de Kapovich, Leeb et Porti [67, 68], apparus quasi simultanément mais utilisant des méthodes très différentes : ultrafiltres, géométrie fine de l'espace symétrique associé à G au voisinage des plats. Dans le cas Anosov, ils parviennent notamment à remplacer l'hypothèse (14) de plongement quasi-isométrique $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ par une simple hypothèse de croissance linéaire uniforme, et à se passer de l'hypothèse d'hyperbolicité de Γ , qui s'avère être une simple conséquence. Bochi–Potrie–Sambarino [12] ont par la suite donné de ces faits une autre preuve reposant sur des principes profonds et classiques de dynamique différentiable (théorème d'Oseledets).

4.2. Variétés homogènes. Dans le langage des groupes de Lie, la croissance de (14) est une propriété asymptotique des suites $\mu(\rho(\gamma_i))$, où $\mu : G \rightarrow \mathfrak{a}^+$ est la *projection de Cartan* à valeurs dans la chambre de Weyl de référence d'un sous-espace de Cartan \mathfrak{a} de \mathfrak{g} . Plus exactement, (14) exprime une croissance linéaire de la distance de $\mu(\rho(\gamma_i))$ à certains murs de \mathfrak{a}^+ .

Benoist et Kobayashi [7, 74] ont, indépendamment, mis en évidence le rôle primordial de la projection de Cartan μ dans la détection de variétés homogènes : si $H \subset G$ sont deux groupes de Lie réductifs, et $\Gamma \subset G$ un sous-groupe discret, alors Γ agit proprement discontinûment sur le quotient G/H si et seulement si tout voisinage uniforme de $\mu(H)$ ne contient qu'un nombre fini de points de $\mu(\Gamma)$. (À conjugaison près, on peut toujours supposer que l'image $\mu(H)$ est l'intersection de \mathfrak{a}^+ avec une union de sous-espaces linéaires de \mathfrak{a} .) Si l'inclusion $\rho : \Gamma \rightarrow G$ est d'Anosov, la divergence de $\mu(\rho(\gamma_i))$ donnée par le théorème 4.2 permet donc de contrôler la distance à $\mu(H)$, pour certains sous-groupes réductifs H bien choisis (typiquement, tels que $\mu(H)$ soit inclus dans les murs de \mathfrak{a}^+). La fin de l'article [54] explore divers exemples et conséquences de ce fait. Nous poussons un peu plus avant dans [55], où nous montrons que la divergence *linéaire* permet de construire des *compactifications* de $\Gamma \backslash G/H$, modelées sur la compactification de G/H par un espace de drapeaux. Ces compactifications sont du type « variétés à coins », donc en particulier homéomorphes à des variétés à bord dont $\Gamma \backslash G/H$ est l'intérieur (« tameness »). La compactification conforme des variétés kleiniennes convexes-cocompactes en variétés à bord est un cas particulier de ce résultat.

4.3. Espaces symétriques de rang 1. Soient Γ un groupe de type fini et $\rho, \rho' : \Gamma \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ deux représentations, avec ρ fidèle, discrète et géométriquement finie. Si $C(\rho, \rho')$ désigne comme au §1 la meilleure constante de Lipschitz pour une application (ρ, ρ') -équivariante $f : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$, alors la condition

$$(15) \quad C < 1$$

caractérise précisément (à l'ordre près) les paires (ρ, ρ') définissant une action propre sur le groupe G des isométries de \mathbb{H}^n , via $\gamma \cdot g = \rho'(\gamma)g\rho(\gamma)^{-1}$.

Comme on l'a vu au §1.1, la valeur de C dépend continûment de (ρ, ρ') . Si l'on remplace \mathbb{H}^n par un espace symétrique réel \mathbb{X} de rang 1 (et G par son groupe d'isométries), alors le théorème 1.2 devient faux. Il en subsiste cependant comme un reflet :

Théorème 4.3. *Supposons $\rho : \Gamma \rightarrow G$ convexe-cocompacte et ρ' non élémentaire. Si C_λ désigne le supremum des rapports $\lambda(\rho'(\gamma))/\lambda(\rho(\gamma))$, où λ est la longueur de translation, alors il existe une lamination géodésique ρ -invariante Λ dans \mathbb{X} et une application $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{X}$ continue, (ρ, ρ') -équivariante, qui étire chaque feuille de Λ d'un facteur C_λ .*

Contrairement au théorème 1.2, f n'est définie *que* sur la lamination Λ , et n'est pas globalement lipschitzienne en général. Ce reflet est néanmoins suffisant pour garder la propriété de déformabilité :

Corollaire 4.4. [54] *L'ensemble des paires (ρ, ρ') définissant une action propre sur G avec ρ convexe-cocompacte est ouvert dans $\text{Hom}(\Gamma, G)^2$.*

5. CONVEXE-COCOMPACTITÉ GÉNÉRALISÉE

Dans cette partie nous discutons les articles [26, 28]. Au cours de ce travail avec J. Danciger et F. Kassel, nous proposons une notion généralisée de convexe-cocompactité, pour les sous-groupes discrets de $\text{PO}(p, q)$ et de $\text{PGL}_n(\mathbb{R})$ respectivement. Une difficulté est de faire en sorte que la notion définie soit, comme dans $\text{PO}(n, 1) = \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$, robuste aux petites déformations. Il est aujourd'hui courant de dire que la condition d'Anosov (§4), qui satisfait à ce critère, est une généralisation naturelle de la convexe cocompactité en rang supérieur. Or Kapovich, Leeb et Porti ont montré [67] qu'elle entraîne l'hyperbolicité au sens de Gromov.

Dans le cas d'un groupe Gromov-hyperbolique, la condition que nous proposons s'avère équivalente à la condition d'Anosov ; cependant elle peut aussi être satisfaite par des groupes contenant par exemple un \mathbb{Z}^2 . On peut donc la voir comme une généralisation conjointe des groupes Anosov et des *convexes divisibles* au sens d'Y. Benoist [10].

Donnons d'abord un aperçu des résultats de [28] ; l'autre article traite essentiellement le sous-cas d'un groupe agissant de façon irréductible en préservant une forme bilinéaire.

5.1. Résultats. Une partie \mathcal{C} de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ est dite *proprement convexe* si elle est incluse dans une carte affine dans laquelle elle apparaît convexe et bornée. Un groupe discret $\Gamma < \text{PGL}_n(\mathbb{R})$ est dit *fortement convexe-cocompact* s'il existe un ouvert proprement convexe $\Omega \subset \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$, dont le bord ne contient aucun segment, et un fermé \mathcal{C} de Ω , convexe et Γ -invariant, sur lequel l'action est proprement discontinue et cocompacte. On peut alors toujours prendre pour \mathcal{C} l'enveloppe convexe de l'ensemble limite, ou ensemble des points d'accumulation de n'importe quelle orbite de Ω (cet ensemble limite ne dépend pas de l'orbite choisie, à cause de la condition sur l'absence de segments dans $\partial\Omega$). Bien sûr, pour $\Omega = \mathbb{H}^{n-1} \subset \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$, on retrouve la notion de convexe cocompacté usuelle.

Théorème. *Si $\Gamma < \text{PGL}_n(\mathbb{R})$ préserve un ouvert proprement convexe, alors Γ est fortement convexe-cocompact si et seulement si Γ est hyperbolique au sens de Gromov, et Anosov par rapport aux hyperplans.*

(Pour la notion d'Anosov relative aux hyperplans, voir le §4: cela signifie que le rapport des deux plus grandes valeurs principales d'un élément de Γ , ou par inversion des deux plus petites, croît exponentiellement en fonction de la longueur des mots, par le théorème 4.2). Ce résultat recoupe des travaux simultanés d'A. Zimmer [108]. Insistons cependant sur le fait que dans le théorème ci-dessus, l'action de Γ sur \mathbb{R}^n n'est pas supposée irréductible. (L'hypothèse de préserver un ouvert proprement convexe est toujours satisfaite quitte, par exemple, à passer à l'action induite sur les formes quadratiques, comme l'observe Zimmer : le projectivisé du cône des formes définies positives est toujours préservé ; c'est un modèle de l'espace symétrique de $\text{PGL}_n(\mathbb{R})$.)

Ce théorème montre notamment que toute représentation de Hitchin d'un groupe de surface en dimension n impaire est fortement convexe cocompacte. Les représentations de Hitchin sont les déformations des représentations fuchsienues à valeurs dans l'image de la représentation irréductible $\text{PGL}_2(\mathbb{R}) \subset \text{PGL}_n(\mathbb{R})$.

5.2. Déformabilité. Lorsque le domaine Γ -invariant $\Omega \subset \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ n'est pas strictement convexe, i.e. possède des segments dans son bord, alors l'ensemble d'accumulation d'une orbite peut dépendre de l'orbite choisie : penser par exemple à un groupe

de matrices diagonales agissant sur l'orthant positif projectivisé. En général, nous proposons donc la définition suivante : un groupe $\Gamma < \mathrm{PGL}_n(\mathbb{R})$ est *convexe-cocompact* si Γ préserve un ouvert proprement convexe Ω et agit proprement discontinûment, cocompactement sur l'enveloppe convexe dans Ω de l'union Λ de tous les points d'accumulation de toutes les orbites de Ω . On appelle Λ *l'ensemble limite saturé* (relativement à Ω).

On peut vérifier par exemple que la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(2, 1, \frac{1}{2})$ engendre un groupe convexe-cocompact, avec pour Ω un voisinage d'un segment ouvert reliant $[1, 0, 0]$ à $[0, 0, 1]$. En revanche $\mathrm{Diag}(2, 1, 1)$ n'engendre pas un groupe convexe cocompact, bien qu'il préserve une infinité de convexes projectifs. Nous montrons les résultats suivants.

Théorème 5.1. [28] *Pour un groupe $\Gamma < \mathrm{PGL}_n(\mathbb{R})$ discret, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- Γ est fortement convexe cocompact ;
- Γ est convexe cocompact et hyperbolique au sens de Gromov ;
- Γ est convexe cocompact et son ensemble limite saturé ne contient aucun segment.

Théorème 5.2. [28] *Pour un groupe $\Gamma < \mathrm{PGL}_n(\mathbb{R})$ discret, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- Γ est convexe cocompact ;
- Le groupe transposé de Γ est convexe cocompact ;
- La partie semi-simple de Γ est convexe cocompacte.

De plus, Γ est alors de type fini, ne contient pas d'éléments unipotents, est quasi-isométriquement plongé dans $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{R})$, et toute déformation de Γ proche de l'injection canonique est encore convexe cocompacte. Enfin, l'injection de Γ dans $\mathrm{PGL}_m(\mathbb{R})$ pour $m > n$ (comme bloc diagonal) est aussi convexe cocompacte.

Les deux dernières propriétés, robustesse par injection et par déformation, permettent de construire par pliage (« bending ») des exemples qui ne sont ni Anosov, ni convexes-divisibles : par exemple, partir d'un $\Gamma \subset \mathrm{PGL}_4(\mathbb{R})$ préservant un convexe divisible $\Omega \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ non strictement convexe. Benoist [9] montre qu'un tel Ω existe, et est muni d'une collection infinie de triangles projectifs disjoints proprement plongés (i.e. dont le bord est contenu dans $\partial\Omega$) préservés par des sous-groupes virtuellement égaux à \mathbb{Z}^2 . On peut alors plonger Γ dans $\mathrm{PGL}_5(\mathbb{R})$ et plier légèrement l'action, de façon équivariante, le long de cette collection de triangles : cette déformation est encore convexe cocompacte.

Nous montrons en outre que si Γ est convexe cocompact, alors il préserve une paire de convexes $\mathcal{C} \subset \Omega$ tels que Ω soit ouvert, \mathcal{C} soit fermé dans Ω et compact modulo Γ , que le bord $(\partial\mathcal{C}) \cap \Omega$ soit lisse et strictement convexe, et que l'intersection de $\bar{\mathcal{C}}$ avec n'importe quel hyperplan d'appui soit contenue ou bien dans Ω , ou bien dans son bord.

5.3. Cas symétrique. Quand Γ préserve une forme quadratique non dégénérée, on peut être plus précis :

Théorème 5.3. [26] *Un groupe $\Gamma < \mathrm{PO}(p, q)$ est strictement convexe cocompact si et seulement si, quitte à échanger p et q , le groupe Γ préserve un convexe fermé d'intérieur non vide \mathcal{C} , contenu dans le cône négatif $\mathbb{HP}^{p,q-1} \subset \mathbb{P}(\mathbb{R}^{p,q})$ (espace pseudo-hyperbolique), tel que l'action sur \mathcal{C} soit cocompacte et que l'ensemble des points limites de \mathcal{C} dans la quadrique isotrope ne contienne aucun segment.*

Par exemple, les représentations ρ_s du §3.3 (pour Γ un groupe de Coxeter à angles droits) sont toujours convexes cocompactes quand $s < -1$.

Nous notons par ailleurs que dans certains cas, la condition d'Anosov peut *forcer* l'existence d'un convexe préservé : ainsi, quand l'ensemble limite d'un groupe hyperbolique Γ est *connexe*, toute représentation dans $\mathrm{PO}(p, q)$ vérifiant la condition d'Anosov par rapport aux hyperplans est automatiquement convexe cocompacte (sans qu'on puisse a priori savoir si le convexe préservé sera dans $\mathbb{H}^{p,q-1}$ ou dans $\mathbb{H}^{q,p-1}$).

Cette gamme de résultats représente le début d'une étude systématique de la convexe cocompacité généralisée. Leurs démonstrations, dont quelques-unes demandent un certain investissement technique, reposent principalement sur des arguments de limite géométrique dans l'esprit du théorème de compacité de Benzécri [11]: étant donnée une suite d'ouverts proprement convexes pointés $(\Omega_i, x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$, il existe une suite de transformations projectives $g_i \in \mathrm{PGL}_n(\mathbb{R})$ telles que les $g_i(\Omega_i, x_i)$ convergent vers un domaine proprement convexe pointé (Ω, x) . L'existence de telles limites renormalisées permet une étude fine de l'action de Γ au voisinage de $\partial\Omega$.

6. TRIANGULATIONS GÉOMÉTRIQUES DE 3-VARIÉTÉS

Cette partie, largement indépendante des précédentes, réunit plusieurs travaux reliés entre eux par l'idée de triangulation de variétés géométriques.

Je m'étais intéressé dans ma thèse [45] à la notion de *cellulation canonique* associée à une 3-variété hyperbolique complète M . L'idée est de choisir un point $p \in M$ et de chercher tous les $x \in M$ tels que le plus court chemin de x à p ne soit pas unique. Ces points x forment un certain complexe W de polygones totalement géodésiques, et le complémentaire de W est un domaine fondamental convexe polyédral, appelé domaine de Ford (ou de Voronoï, ou de Delaunay, ou encore de Dirichlet). On peut construire à partir de W une cellulation T de M , de manière duale, ayant p pour unique sommet. Dans le revêtement universel \mathbb{H}^3 de M , une collection de relevés de p appartiennent à une même cellule de T si et seulement s'ils appartiennent au bord d'une *boule* ne contenant aucun autre relevé dans son intérieur. Les cellules de T s'obtiennent encore par projection de la décomposition cellulaire de l'enveloppe convexe d'une orbite représentant p dans l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{3,1}$.

La cellulation T est un invariant fini, purement combinatoire du couple (M, p) , qui de plus ne prend qu'un nombre fini de valeurs différentes si on fixe M en laissant varier $p \in M$. Ainsi, T contient toute l'information topologique sur M : cette remarque justifie l'étude de l'invariant T , tout en suggérant que le problème général ne peut être que très difficile. Un des chapitres de ma thèse, repris dans l'article [46] et une partie de [47], consistait à décrire exactement T lorsque M est une variété qui fibre sur le cercle, avec pour fibre un tore à un trou S , c'est-à-dire la plus simple surface possible. Le choix naturel est alors de prendre le point p « à l'infini » dans la pointe de M (le trou de la fibre S). Je montrais dans ce cas le théorème suivant :

Théorème 6.1. *La combinatoire de T est explicitement dictée par la décomposition en fraction continuée des pentes des vecteurs propres de la monodromie $\varphi : S \rightarrow S$, vue comme un élément de $SL_2(\mathbb{Z})$.*

Sans décrire cette combinatoire en détail, on peut dire que T est une triangulation idéale et que chaque coefficient n dans la fraction continuée donne lieu dans T à une arête de degré $2n + 4$ et $(n - 1)$ arêtes de degré 4. Lackenby [79] avait aussi montré que cette combinatoire pour T était forcée par la symétrie hyperelliptique de la variété, mais la preuve de [46, 47] est constructive : elle donne quantité

d'informations géométriques (estimations de volume, de longueur) et se décline aussi, par exemple, pour les entrelacs à deux ponts.

6.1. Remplissage de Dehn et triangulations. Pour énoncer des résultats qui ne soient pas confinés à une classe trop particulière de variétés hyperboliques, il pouvait être intéressant de chercher à comprendre comment se comporte la cellulation T lorsque M subit une opération topologique standard appelée *remplissage de Dehn*. Il s'agit de recoller à une pointe de M , homéomorphe au produit d'un tore par \mathbb{R} , un tore plein $\mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1$ (le choix de la classe d'homologie $[\gamma]$ de la pointe qui sera identifiée à la courbe contractile $\partial\mathbb{B}^2 \times \{*\}$ donne une famille infinie de tels remplissages pour toute variété à pointe M). Les deux théorèmes suivants justifient l'ubiquité de cette construction en géométrie hyperbolique de dimension 3 :

Théorème. (*Jørgensen, Thurston*, [100, Th. 5.12.1] et [75]) — *Pour tout $V > 0$ il existe une famille finie de 3-variétés hyperboliques M_1, \dots, M_n de volume fini telles que toute 3-variété hyperbolique M de volume $\leq V$ s'obtienne par remplissage de Dehn d'une des M_i (en une ou plusieurs pointes).*

Théorème. (*Thurston* [100, Chap. 4]) — *Soit M_γ le remplissage de Dehn de M de pente γ . Alors, pour un choix naturel de points base, la géométrie de M_γ tend vers celle de M au sens de Gromov quand $[\gamma]$ tend vers l'infini dans l'homologie ($\simeq \mathbb{Z}^2$) de la pointe de M .*

Dans l'article [59], avec S. Schleimer, nous définissons une notion de variété hyperbolique *M générique* : il s'agit de celles pour lesquelles T est une triangulation, les modules complexes des tores de pointes ne sont pas imaginaires purs, et les arcs réalisant les distances entre pointes sont uniques. Une telle notion de généricité est bien sûr problématique dans la mesure où il n'existe qu'un ensemble dénombrable de 3-variétés hyperboliques de volume fini, à isométrie près : toutefois, nous montrons que tout remplissage de Dehn d'une variété générique est encore générique à un nombre fini d'exceptions près. Une exploration informatique des listes de variétés connues montre que la condition est en effet souvent remplie.

Nous montrons dans [59] le résultat suivant :

Théorème 6.2. *Si M est générique, à deux pointes ou plus, de triangulation canonique T , alors pour presque tout remplissage de Dehn M_γ sur une des pointes, la cellulation canonique T_γ s'obtient à partir de T en y recollant des tétraèdres dont la combinatoire est dictée par la décomposition en fraction continuée de la pente $[\gamma] \in \mathbb{Z}^2$, vue comme une fraction irréductible.*

(Dans ce théorème, le point p relativement auquel sont calculées les triangulations T et T_γ est toujours situé à l'infini, dans une des pointes ne subissant pas de remplissage.) Notons que $[\gamma]$ ne s'identifie à une fraction que modulo un choix de base pour l'homologie \mathbb{Z}^2 de la pointe : cette base est celle fournie par la triangulation T avant remplissage. Nous montrons aussi un analogue pour le remplissage simultané de plusieurs pointes, et pour plusieurs points base.

La combinatoire de la triangulation T_γ est la même que dans le théorème 6.1, mais sa géométrie est très différente. Dans le théorème 6.1, le volume total est proportionnel (à deux constantes multiplicatives près, d'ailleurs déterminées exactement dans [46]) au nombre de termes de la fraction continuée, et il y a une courte géodésique pour chaque terme élevé. Dans le théorème 6.2, le volume total des tétraèdres de T_γ n'apparaissant pas dans T est universellement borné ; et il n'y a qu'une seule courte géodésique, l'âme du tore plein que l'on recolle.

6.2. Espaces lenticulaires. Ces réflexions sur l'universalité du comportement de la cellulation canonique m'ont mené à réfléchir aux espaces lenticulaires, c'est-à-dire

aux quotients de \mathbb{S}^3 par un groupe cyclique Γ . Sans perte de généralité, quitte à plonger \mathbb{S}^3 dans \mathbb{C}^2 on peut supposer que Γ est engendré par

$$R_{a,b} := \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^a \end{pmatrix}$$

où $0 < a < b$ sont deux entiers premiers entre eux et ω est une racine primitive b -ème de l'unité.

Si $M = M_{a,b}$ est un espace lenticulaire, on peut voir M naturellement comme le recollement de deux tores pleins bord à bord (le choix de a, b étant codé dans le choix d'homéomorphisme entre les bords). La notion de domaine de Ford et de cellulation canonique est encore bien définie pour les variétés modelées sur \mathbb{S}^3 (en particulier il s'agit toujours de décompositions en polyèdres convexes, à certaines dégénérescences possibles près). On peut donc se demander si la cellulation canonique de M est encore donnée par la même construction combinatoire. J'ai montré dans [48] que c'est bien le cas :

Théorème 6.3. *Soient $0 < a < b$ premiers entre eux. Si $1 < a < b - 1$, alors la combinatoire de la cellulation canonique de $M = M_{a,b}$ ne dépend pas du point base $p \in M$ et est dictée par la décomposition en fraction continuée de a/b (au sens des théorèmes 6.1 et 6.2). Si $a = 1$ ou $a = b - 1$, alors le domaine de Voronoï est l'intersection de deux hémisphères de \mathbb{S}^3 et la cellulation canonique dégénère.*

(Un résultat équivalent, ai-je appris après coup, avait été montré par Smilansky [95, 96], quoique les propriétés de convexité qu'il montre en chemin soient légèrement plus faibles). Malgré la parenté des énoncés, il y a un contraste entre les démonstrations des théorèmes 6.1–6.2 d'une part, 6.3 d'autre part. Montrer ce dernier consiste à calculer l'enveloppe convexe d'une orbite générique de $R_{a,b}$ dans $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$, en utilisant les propriétés de convexité des fonctions trigonométriques. La géométrie des tétraèdres sphériques qui apparaissent, quand (a, b) et le point base p varient, est ignorée (l'espace de déformation des tétraèdres sphériques est de dimension 6).

Dans les théorèmes 6.1 et 6.2 en revanche, la structure géométrique globale est inconnue (pas de matrice d'holonomie $R_{a,b}$ explicite), mais l'espace de déformation d'un tétraèdre idéal de \mathbb{H}^3 est facile à décrire : c'est l'espace des triplets d'angles dièdres positifs $(\theta, \theta', \theta'')$ de somme π . On ajuste donc chaque tétraèdre aux autres, selon l'approche exposée au début de la prochaine partie §6.3.

6.3. Structures d'angles. Les preuves des théorèmes 6.1 et 6.2 consistent à construire des métriques hyperboliques en recherchant un *point critique de la fonctionnelle volume*. Cette idée remonte à Rivin [91], avec des antécédents dans les travaux d'Y. Colin de Verdière [20] sur les empilements de cercles.

Soit (M, T) une 3-variété (orientée) munie d'une triangulation idéale topologique T : on entend par là que M est l'intérieur d'une variété compacte à bord \overline{M} dont toutes les composantes de bord sont des tores, et que \overline{M} est obtenue par recollement de tétraèdres à sommets tronqués, l'union des faces de troncature étant exactement $\partial\overline{M}$. Les tétraèdres idéaux de T (difféomorphes à des tétraèdres idéaux de \mathbb{H}^3) sont par définition les tétraèdres tronqués de \overline{M} , moins les faces de troncature.

La donnée de (M, T) permet de définir un problème linéaire qui consiste à associer à chacune des six arêtes a de chaque tétraèdre de T un réel $\theta_a > 0$ de telle manière que :

- Pour chaque tétraèdre de T , il existe un tétraèdre idéal de \mathbb{H}^3 ayant pour angles dièdres les θ_a : autrement dit, les angles en deux arêtes opposées sont toujours égaux, et les six angles ont pour somme 2π .

- La somme des θ_a associés aux arêtes a qui se trouvent identifiées à la même arête intérieure dans M vaut 2π .

Enfin, sur le polytope Θ des solutions positives au problème ci-dessus, ou *structures d'angles*, on peut en suivant Rivin définir une *fonctionnelle volume*

$$\mathcal{V} : (\theta_1, \dots, \theta_n) \mapsto \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^{\theta_i} \log(2 \sin t) dt.$$

(Pour $(\theta_1, \dots, \theta_6)$ les angles d'un tétraèdre idéal, cette formule donne précisément le volume, comme il découle déjà des travaux de Lobatchevski [83].) On appelle *réalisation géodésique* de (M, T) une métrique hyperbolique sur M pour laquelle les tétraèdres de T forment une triangulation idéale géodésique et sont d'intérieurs disjoints. La construction ci-dessus trouve sa raison d'être dans les théorèmes suivants :

Théorème 6.4. (Rivin [91]) — *La variété triangulée (M, T) admet une réalisation géodésique si et seulement si \mathcal{V} admet un point critique dans l'espace Θ des structures d'angles ; les coordonnées θ_i de ce point critique sont les angles dièdres des tétraèdres de T dans la réalisation géodésique.*

Théorème 6.5. (Lackenby [78]) — *Si (M, T) admet une structure d'angles, alors M admet une métrique hyperbolique complète.*³

Alors que le premier théorème donne une manière concrète de construire des métriques hyperboliques, le second permet de s'assurer de leur existence par un simple calcul d'algèbre linéaire. Dans l'article de survol [40], rédigé avec David Futer, nous donnons une présentation raisonnée de ces idées avec des démonstrations complètes (comme la preuve originelle de Rivin se plaçait dans un contexte différent, où M est un polyèdre contractile muni d'angles dièdres, les difficultés du cas général n'étaient pas traitées de façon satisfaisante dans la littérature).

6.4. Rigidité des tores pleins idéaux. Voici un autre exemple de succès du « programme » de Rivin pour construire des variétés hyperboliques.

Schlenker a proposé la conjecture suivante. Soit (N, Γ) une variété de dimension 3 à bord, munie d'un graphe $\Gamma \subset \partial N$, et telle qu'il existe une réalisation géométrique de $N' := N \setminus \Gamma^{(0)}$ comme variété hyperbolique complète de volume fini modelée sur l'intersection de deux demi-espaces : cela signifie que le bord de N' est totalement géodésique hormis aux points intérieurs des arêtes de Γ , où $\partial N'$ possède un angle dièdre; et que tout sommet de Γ possède un voisinage isométrique à un voisinage d'un sommet de polyèdre idéal. (On parlera aussi de réalisation géométrique du couple (N, Γ) lui-même.) Alors,

Conjecture 6.6. *L'espace des réalisations géométriques de (N, Γ) est homéomorphiquement paramétré par les systèmes d'angles dièdres associés aux arêtes de Γ et vérifiant la condition de Gauss-Bonnet : la somme des angles rencontrés par une courbe de ∂N transverse à Γ , sans « demi-tours » et bordant un disque dans N , est $\geq 2\pi$, avec égalité si et seulement si elle fait le tour d'un seul sommet de Γ .*

Il est facile de voir que les angles dièdres d'une réalisation de (N, Γ) vérifient toujours la condition de Gauss-Bonnet ; la propriété conjecturée ici est (entre autres) une forme de rigidité des réalisations.

L'article [91] de Rivin consistait en somme à montrer cette conjecture quand N est une boule (un polyèdre idéal « ordinaire »). Dans un article non publié, Schlenker [93] a montré cette conjecture dans le cas où N est incompressible.

³Dans cette métrique hyperbolique, T toutefois n'a pas nécessairement de réalisation géodésique : voir e.g. [64, 42] pour des contre-exemples.

Dans [49], je traite le plus simple des cas compressibles (le tore plein), en autorisant en outre un axe singulier :

Théorème 6.7. *Soit N un tore plein dont le bord est muni d'une triangulation (pas nécessairement simpliciale) Γ , et soit $K \geq 0$ un réel. Pour toute arête de Γ , on se donne un réel $\alpha_i \in [0, \pi[$. Il existe une réalisation géométrique de N d'angles dièdres extérieurs α_i et dont l'âme est une singularité conique d'angle K (resp. une pointe de rang 2 si $K = 0$) si et seulement si, pour toute courbe simple γ de ∂N transverse à Γ et ne rencontrant pas deux fois de suite la même arête de Γ , la somme S des α_i associés aux arêtes rencontrées par γ satisfait $S > 0$ et :*

- $S = 2\pi$ si γ fait le tour d'un simple sommet de Γ ;
- $S > K$ si γ borde un disque de compression du tore plein N ;
- $S > 2\pi$ si γ borde un disque dans ∂N contenant ≥ 2 sommets de Γ .

(Autoriser des angles dièdres $\alpha_i = 0$ permet dans ce théorème de réaliser des faces non triangulaires ; la condition $S > 0$ impose toutefois a posteriori que toutes les faces soient contractiles dans $\partial N \setminus \Gamma^{(0)}$.)

Notons qu'il n'y a pas de triangulation de la variété N elle-même dans ce théorème. Afin d'appliquer l'approche de Rivin, on commence donc par trianguler N en construisant un cône sur chaque face de ∂N : géométriquement, ces cônes seront réalisés par des tétraèdres idéaux Δ_i dont un des sommets s'enroule autour de l'âme du tore plein N (la courbe singulière). En plus d'adapter la démonstration de Rivin à la présence d'une singularité conique, le travail consiste donc à trouver des structures d'angles (strictement positives) sur les Δ_i qui satisfont l'analogie du problème linéaire exposé au §6.3, adapté pour tenir compte des angles α_i et K . Cette question se ramène à un théorème de position transverse pour les réseaux ferroviaires orientés sans composante de Reeb sur le tore.

6.5. Transition géométrique et tores percés. Un des principaux résultats de ma thèse [45, Chap. 3] consistait à appliquer le programme de Rivin à une classe de triangulations infinies (de volume fini). Ces triangulations permettent de construire des cœurs convexes de *groupes quasi-fuchsien du tore percé*, en spécifiant les données de plissage : comme au §6.1, la triangulation (dite de Farey) est combinatoirement donnée par la décomposition en fraction continuée des deux pentes de plissage. On redémontrait ainsi la rigidité de ces groupes en fonction de la donnée de plissage, un résultat dû à C. Series [94]. Mais on en tirait aussi une nouvelle propriété de canonicité géométrique, conjecturée dans [3] : la triangulation de Farey du cœur convexe s'avère coïncider avec celle du bord de l'enveloppe convexe d'une orbite isotrope dans l'espace de Minkowski \mathbb{R}^{3+1} (relevant les points fixes paraboliques de $\partial_\infty \mathbb{H}^3$).

Dans [58], avec S. Maloni, nous étendons une partie de ces résultats au cas anti-de Sitter $\mathbb{H}^{2,1}$. Il s'agit, essentiellement, de redéfinir le programme de Rivin dans ce contexte. Nous montrons que n'importe quelle paire de plissages (de pentes distinctes) est réalisée par un groupe quasi-fuchsien agissant sur $\mathbb{H}^{2,1}$, et qu'une construction d'enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^{2,2}$, équivariante par rapport à cette réalisation, redonne encore la triangulation de Farey. Nous ne montrons toutefois pas la rigidité, qui est encore un problème ouvert : la difficulté essentielle est que pour les tétraèdres anti-de Sitter idéaux, la fonctionnelle volume n'est pas concave ; il n'est donc pas clair que son point critique soit unique.

6.6. Hélicité et structures d'angles. Dans une direction différente, avec David Futer, nous avons montré dans [41] qu'il existe des structures d'angles > 0 (donc une métrique hyperbolique par le théorème 6.5) sur toute 3-variété M admettant une triangulation idéale T en *hélice* (en anglais : *veering*).

La notion de triangulation en hélice a été définie en 2010 par Ian Agol [1]. Soit (M, T) une variété orientée munie d'une triangulation idéale possédant une structure d'angles plate, i.e. à valeurs dans la *paire* $\{0, \pi\}$. Chaque tétraèdre admet donc exactement une paire d'arêtes opposées d'angle π et quatre arêtes d'angle 0, et en chaque arête de M se rencontrent deux angles de valeur π et un nombre arbitraire d'angles de valeur 0. On dit que cette structure d'angles plate est *en hélice* si, chaque fois que deux tétraèdres Δ, Δ' ont tous deux un angle nul en une arête a de M , il existe un difféomorphisme $\Delta \rightarrow \Delta'$ fixant a et respectant les angles $0, \pi$ et les orientations. Le voisinage de a possède donc l'un des deux types combinatoires représentés dans la figure 7 (où les angles 0 sont entre paires de triangles qui se masquent, et la valence de a vaut 8). On peut montrer que les deux tétraèdres d'angle π en a ne partagent pas de face incidente à a , si bien que a est toujours de valence ≥ 4 .

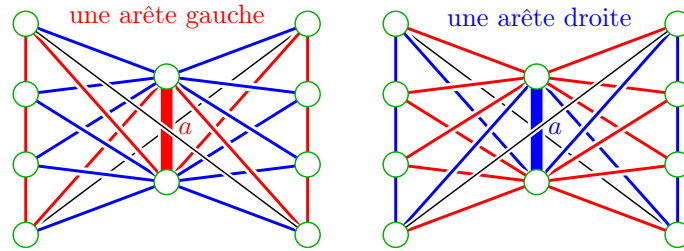


FIGURE 7. Aspect d'une triangulation en hélice au voisinage d'une arête a . Les types (gauche/droit, soit rouge/bleu) de la plupart des arêtes voisines, hormis les deux longues arêtes noires, sont forcés.

Des structures d'angles plates apparaissent naturellement si M est un fibré pseudo-Anosov en surfaces sur le cercle, et qu'on construise la triangulation T en reliant une triangulation de la fibre F à son image $\varphi_*(T)$ par la monodromie φ , via une suite d'échanges de diagonales : chacun de ces échanges peut être vu comme un tétraèdre aplati d'angles $(\pi, 0, 0)$. Agol montrait dans son article de 2010 que si les singularités des deux feuilletages invariants de φ sont des pointes de F , alors le fibré M admet une triangulation en hélice *canonique*. Il est donc naturel de se demander si cette dernière admet des structures d'angles > 0 .

Dans [41], nous montrons que c'est le cas :

Théorème 6.8. *Soit (M, T) une 3-variété orientable munie d'une triangulation idéale T en hélice (i.e. possédant une structure d'angles plate en hélice). Alors T possède aussi des structures d'angles > 0 ; en particulier (théorème 6.5), M est hyperbolique.*

De plus, il existe une structure d'angles dont le plus petit angle dièdre est au moins $\frac{\pi}{12d^2}$, où d est le maximum des degrés des arêtes de M .

(L'exposant quadratique est optimal, et l'est même déjà pour les fibrés en tores percés ; en revanche la constante $\pi/12$ est probablement susceptible d'amélioration). Le résultat d'existence, sans la borne $\frac{\pi}{12d^2}$, a aussi été montré par Hodgson–Rubinstein–Segerman–Tillmann dans [65]. De telles estimations sont potentiellement utiles pour la recherche algorithmique de surfaces essentielles d'un genre donné dans M : en effet, elles donnent une borne sur le nombre de composantes d'intersection entre n'importe quel tétraèdre et la surface mise en position normale.

De plus, nous pouvons réaliser des structures d'angles avec diverses valeurs de l'holonomie (l'holonomie est dans ce contexte une classe de cohomologie simpliciale associée à chaque pointe). Une version affaiblie mais uniforme de notre résultat s'énonce comme suit :

Théorème 6.9. [41] *Sous les hypothèses du théorème 6.8, si chaque pointe c de M est munie d'une classe d'homologie primitive $\eta(c)$ et d'un réel $h(c) \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, alors il existe une structure d'angles dont l'holonomie sur chaque $\eta(c)$ vaut $h(c)$.*

6.7. Hélicité et applications de Cannon–Thurston. Dans [51], j'ai mis en évidence un lien entre les triangulations en hélice et la *surjection de Cannon–Thurston*.

Étant donnée une variété hyperbolique M fibrant sur le cercle, avec pour fibre une surface F , l'inclusion $F \hookrightarrow M$ se relève en une application $\iota : D \hookrightarrow \mathbb{H}^3$, où le disque D est le revêtement universel de F . Cannon–Thurston [15], et Bowditch dans le cas non compact [13], ont prouvé que ι se prolonge aux bords, donnant une application continue $\bar{\iota}$ du cercle vers la sphère de dimension 2. De façon saisissante, ils montrent que $\bar{\iota}$ est une *surjection*, et décrivent par ailleurs explicitement ses fibres. Par exemple, les seules fibres infinies sont dénombrables et sont les préimages des points fixes paraboliques de $\pi_1(F) < \mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$.

Dessiner, visualiser cette courbe $\bar{\iota}$ est un défi lancé à l'intuition. Mon résultat donne une description de $\bar{\iota}$ lorsque les singularités des feuilletages invariants sont des pointes de F , i.e. le cas où la triangulation en hélice d'Agol est bien définie. Si M est un tel fibré, l'action de $\pi_1(M)$ sur $\mathbb{P}^1\mathbb{C} \simeq \partial_\infty\mathbb{H}^3$ admet des points fixes paraboliques, dont l'un peut être pris en ∞ . On a alors le théorème suivant.

Théorème 6.10. [51] *Le plan \mathbb{C} est pavé par une famille de disques $(\delta_i)_{i \in I}$, finie modulo l'action du stabilisateur de ∞ dans $\pi_1(M) < \mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$, tels que l'application $\bar{\iota}$ remplisse les δ_i un à un, dans un ordre explicite, isomorphe à l'ordre alphanumérique de \mathbb{Z}^2 . Les sommets du pavage sont de valence 4 (figure 8, gauche).*

De plus, si on relève la triangulation d'Agol à \mathbb{H}^3 , alors les points de \mathbb{C} reliés par une arête à ∞ sont exactement les sommets du pavage.

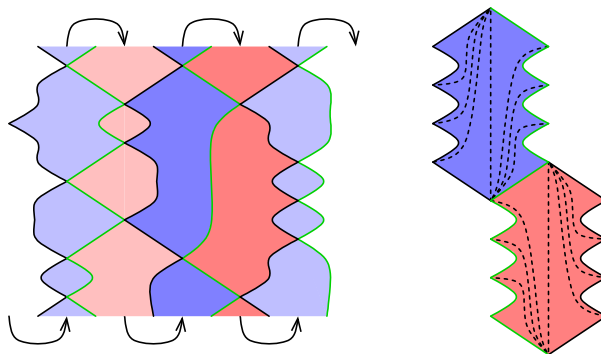


FIGURE 8. À gauche : l'ordre dans lequel $\bar{\iota}$ remplit le plan. Chaque disque δ_i est coloré ; la couleur change à chaque passage par ∞ . À droite : en pointillés, arêtes supplémentaires à insérer dans les disques δ_i pour obtenir les triangles Δ_j .

Dictionnaire. La dernière propriété du théorème relie donc l'application de Cannon–Thurston $\bar{\iota}$ à la triangulation d'Agol T . Elle peut être raffinée en un dictionnaire complet permettant de déterminer la combinatoire de T en fonction de celle du pavage plan des δ_i , et réciproquement. Ainsi, notons $(\Delta_j)_{j \in J}$ la triangulation de \mathbb{C} induite par le lien du sommet idéal $\infty \in \partial_\infty\mathbb{H}^3$ de la triangulation d'Agol de M . Quelques triangles de $(\Delta_j)_{j \in J}$ sont représentés à la figure 8, droite. Les sommets et arêtes de $(\Delta_j)_{j \in J}$ héritent d'un bi-coloriage, non représenté ici, induit par le type d'hélicité (droite et gauche) des arêtes de M . Le dictionnaire prend la forme de bijections naturelles entre :

- Les sommets du pavage $(\delta_i)_{i \in I}$, et les sommets de la triangulation $(\Delta_j)_{j \in J}$ (c'est la dernière propriété du théorème 6.10) ;
- Les arêtes de $(\delta_i)_{i \in I}$ et les triangles de $(\Delta_j)_{j \in J}$: le sommet d'angle π du triangle est de même couleur que la base opposée si et seulement si les extrémités de l'arête associée sont de même couleur ;
- Les disques δ_i , et les arêtes de $(\Delta_j)_{j \in J}$ reliant deux sommets de même couleur (dans la figure 8, droite, ces arêtes sont celles dont les extrémités sont situées l'une à la verticale de l'autre) ;
- Les sommets d'un disque δ_i où δ_i rencontre un disque qui ne lui est *pas* consécutif pour l'ordre de remplissage, et les arêtes de $(\Delta_j)_{j \in J}$ reliant deux sommets de couleurs opposées.

Conversion. Les disques δ_i étant eux aussi munis d'un bi-coloriage (la couleur change chaque fois que la courbe $\bar{\tau}$ passe par ∞), on peut obtenir la triangulation $(\Delta_j)_{j \in J}$ en insérant certaines arêtes supplémentaires dans $(\delta_i)_{i \in I}$, puis en simplifiant les arêtes doubles ou triples. Appelons *portes* les deux sommets de δ_i où δ_i rencontre les disques qui lui sont consécutifs (le disque précédent et le suivant) : dans la figure 8, les portes d'un disque sont son sommet le plus haut, et le plus bas. Alors, dans les disques rouges, les arêtes à insérer sont celles qui relient une porte aux sommets qui la suivent, dans le sens horaire, jusqu'à l'autre porte. Dans les disques bleus, même chose suivant le sens anti-horaire (figure 8, droite).

Idées de la preuve. Ces résultats généralisent, quoique dans un langage assez différent, un théorème de Dicks et Sakuma [33], qui prenaient pour fibre F le tore percé.

Concernant $\bar{\tau}$, l'intuition clé est que si l'on désigne par $\Omega \in \partial_\infty D$ le point fixe parabolique du revêtement universel D de F que $\bar{\tau}$ envoie sur $\infty \in \mathbb{P}^1 \mathbb{C}$, alors pour $\omega \in \partial_\infty D$ le point $\bar{\tau}(\omega)$ tombe à l'*interface* entre deux disques $\delta_i, \delta_{i'}$ si et seulement si on peut relier Ω à ω en suivant un *rayon*- Γ : c'est-à-dire, depuis Ω , suivre dans le disque D une feuille d'un des feuilletages (relevés) de F , puis tourner à angle droit (une seule fois) pour suivre une feuille de l'autre feuilletage. Tourner à angle droit au même point dans le sens opposé renverrait un point $\omega' \in \partial_\infty D$ tel que $\bar{\tau}(\omega') = \bar{\tau}(\omega)$, par la caractérisation des fibres de $\bar{\tau}$ due à Bowditch. Sur l'arc $\widehat{\omega\omega'}$ de $\partial_\infty D$ ne contenant pas Ω , se trouve un unique point de la $\bar{\tau}$ -fibre de Ω , atteint depuis Ω en suivant une feuille d'un des feuilletages de F sans jamais tourner. C'est en ce point que $\bar{\tau}$ change de couleur, forçant $\bar{\tau}(\omega) = \bar{\tau}(\omega')$ à être un point d'interface.

Le flot pseudo-Anosov associé à la fibration $F \rightarrow M \rightarrow \mathbb{S}^1$ se relève en un flot sur \mathbb{H}^3 , et l'espace des lignes de flot est un disque muni de deux feuilletages singuliers, identifié à D . Le principal outil de l'article peut se formuler comme une correspondance naturelle entre :

- (i) d'une part, les *rectangles maximaux* contenus dans le complémentaire des singularités de F (et dont les 4 côtés sont des segments de feuilles portant chacun une singularité) ;
- (ii) d'autre part, les tétraèdres de la triangulation d'Agol, ayant pour sommets ces quatre singularités.

Les rectangles maximaux adjacents à Ω déterminent un certain nombre de rayons- Γ particuliers, ce qui donne le lien avec l'application $\bar{\tau}$. Cette correspondance (i)-(ii) donne une nouvelle construction, indépendante et revêtant un intérêt propre, de la triangulation d'Agol : la chiralité d'une arête est donnée par le signe de sa pente dans un rectangle maximal qui la contient. On peut encore voir cette construction en termes de triangulations de Delaunay L^∞ de F (définies en remplaçant, dans la triangulation de Delaunay, les disques par des rectangles de rapport hauteur/largeur

fixé). À chacune des lignes du dictionnaire décrit plus haut correspond alors un certain type de rectangle dans F avec 2, 3 ou 4 singularités dans son bord.

Il est probable qu'on puisse généraliser cette construction à d'autres flots pseudo-Anosov que ceux provenant de variétés fibrées, ou encore montrer que toute triangulation en hélice (pas forcément issue d'une fibration) provient d'un flot pseudo-Anosov, en un sens approprié. Schleimer et Segerman travaillent activement dans cette direction.

7. VERS LA CONJECTURE DU VOLUME : FORMULE DE SCHLÄFLI QUANTIQUE

Avec François Costantino et Roland van der Veen, je me suis intéressé à une version de la conjecture du volume portant sur les polyèdres hyperboliques (convexes). La conjecture du volume de Kashaev et Murakami–Murakami [69, 85] prédit que certains invariants combinatoires associés à un objet topologique X de dimension 3, et dépendant d'un paramètre N (en l'espèce, de gros polynômes de Laurent évalués en une racine N -ème de l'unité), ont un comportement en $\exp(N.V)$, où V est le volume normalisé d'une métrique hyperbolique canonique sur X . Ces invariants trouvent leur origine dans les « groupes quantiques » de Drinfel'd [34] et, au delà, dans les idées de la physique théorique. La version précise de la conjecture d'origine, pour X un complémentaire de noeud dans \mathbb{S}^3 , n'est à ce jour démontrée que dans une poignée de cas particuliers.

Une raison de s'intéresser au cas où X est un polyèdre, objet topologiquement moins « mystérieux » qu'un complémentaire de noeud, est que les polyèdres hyperboliques sont flexibles : plutôt que l'égalité de deux nombres, la conjecture prédit alors l'égalité de deux fonctions sur tout l'espace de déformation ; on dispose alors d'outils de calcul différentiel pour montrer que si les deux fonctions sont égales en un point, elles le sont partout.

Les polyèdres hyperboliques dont l'espace de déformation est le mieux compris sont les polyèdres dits *hyperidéaux*, représentés dans le modèle projectif de \mathbb{H}^3 par des polyèdres dont tous les sommets sont hors de la boule unité mais dont toutes les arêtes rencontrent la boule unité. Un tel polyèdre (de combinatoire fixée) est caractérisé par ses angles dièdres, qui doivent seulement satisfaire un certain nombre de conditions affines (décrites par Bao et Bonahon [5]) : l'espace de déformation s'identifie donc à un polytope d'un certain \mathbb{R}^n . On peut attribuer à un tel polyèdre un volume fini, quitte à tronquer les arêtes incidentes à un sommet hyperidéale par le plan géodésique qui leur est perpendiculaire. Notons que le calcul du volume (ainsi que des autres paramètres du polyèdre, comme les longueurs des arêtes) est très difficile à mener explicitement : une formule intégrale n'est connue que pour le tétraèdre (Murakami-Yano [86] et Ushijima [104]) et pour quelques cas hautement symétriques ; en général la longueur d'une arête dépend des angles de toutes les arêtes.

Bien que le volume ne puisse s'écrire explicitement, la formule de Schläfli dit que si P est un polyèdre dont le volume est vu comme fonction des angles dièdres, alors en notant ℓ_e la longueur de chaque arête e et α_e son angle dièdre extérieur, on a

$$(16) \quad \frac{\partial \text{Vol}(P)}{\partial \alpha_e} = \frac{1}{2} \ell_e .$$

Pour montrer une version quantique de ce résultat, le but est donc d'associer, à la donnée abstraite d'un polyèdre P avec des angles $(\alpha_e)_{e \in E}$, un certain invariant combinatoire $\langle P, \alpha \rangle_N$ dépendant d'un paramètre N , puis de montrer que son taux de croissance en N (vu comme une fonction f des angles) possède les mêmes dérivées

partielles $\frac{1}{2}\ell_e$ que Vol. Le taux de croissance est pris ici au sens exponentiel :

$$(17) \quad f((\alpha_e)_{e \in E}) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \log |\langle P, \alpha \rangle_N| .$$

Bien que les longueurs ℓ_e n'aient pas d'expression commode en fonction des angles α_e , chaque face F du polyèdre P donne une relation entre les ℓ_e et les α_e . En effet, F compte $2m$ angles droits, et m côtés égaux à un ℓ_e alternant avec m côtés « de troncature » donnés en fonction des α_e par la formule dite des « angles opposés » en trigonométrie hyperbolique. Le fait que la face F soit un polygone fermé se formule donc comme une identité dans le groupe G des isométries de \mathbb{H}^2 :

$$(18) \quad Q_F((\alpha_e)_{e \in E}, (\ell_e)_{e \in E}) = Q_F((\alpha_e)_{e \in E}, (2\partial \text{Vol}/\partial \alpha_e)_{e \in E}) = 1_G ,$$

pour une certaine fonction Q_F (explicite) ne dépendant que du nombre m de côtés de la face F . Quant au taux de croissance f , notre résultat principal est qu'à l'instar du volume Vol il satisfait bien

$$(19) \quad Q_F((\alpha_e)_{e \in E}, (2\partial f/\partial \alpha_e)_{e \in E}) = 1_G ,$$

au prix d'une hypothèse supplémentaire de *lissité*. Cette hypothèse stipule que la fonction f existe, soit de classe \mathcal{C}^1 , et que la convergence (17) ait lieu en un sens \mathcal{C}^1 approprié. Ces difficultés autour de l'existence des limites sont typiques du domaine ; néanmoins l'identité (19) tend bien à supporter la conjecture $f = \text{Vol}$.

Indiquons brièvement l'approche suivie pour montrer (19). Pour toute fonction a de l'ensemble des arêtes de P vers \mathbb{N} , on définit un entier $\langle P, a \rangle$, donné par une (multi)-somme hautement oscillante [103] que nous ne reproduisons pas ici. Par définition, $\langle P, (\alpha_e)_{e \in E} \rangle_N := \langle P, (a_e^N)_{e \in E} \rangle$ où a_e^N est la partie entière de $2\pi N(1 - \alpha_e)$.

Nous perturbons le graphe à poids $(P, (a_e^N)_{e \in E})$, dont les poids sont de l'ordre de N , par l'insertion d'une arête de poids 1 en travers de la face F . Nous calculons alors de plusieurs façons le rapport du nouvel invariant à l'ancien. Ce calcul donne une identité reliant plusieurs quantités que l'on peut voir comme des dérivées partielles (ou taux d'accroissement) de f , grâce à l'hypothèse de lissité. Un travail de réécriture ramène enfin cette identité à (19).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] I. Agol, *Ideal Triangulations of Pseudo-Anosov Mapping Tori*, in: Contemp. Math. **560**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2011), 1–17.
- [2] I. Agol, *The virtual Haken conjecture*, Doc. Math. **18** (2013), 1045–1087.
- [3] H. Akiyoshi, M. Sakuma, M. Wada, Y. Yamashita, *Jørgensen's picture of quasifuchsian punctured torus groups*, Proceedings of the Workshop “Kleinian groups and hyperbolic 3-manifold” (Warwick 2002), Lond. Math. Soc. Lecture Notes **299** (2003), 247–273.
- [4] L. Auslander, *The structure of compact locally affine manifolds*, Topology **3** (1964), 131–139.
- [5] X. Bao, F. Bonahon, *Hyperideal polyhedra in hyperbolic 3-space*, Bull. Soc. Math. France **130-3** (2002), 457–491.
- [6] T. Barbot, *Deformations of Fuchsian AdS representations are quasi-Fuchsian*, J. Diff. Geom. **101** (2015), 1–46.
- [7] Y. Benoist, *Actions propres sur les espaces homogènes réductifs*, Ann. of Math. **144** (1996), 315–347.
- [8] Y. Benoist, *Convexes divisibles I*, in: Algebraic groups & arithmetic, Tata Inst. Fund. Res. Mumbai (2004), 339–374.
- [9] Y. Benoist, *Convexes divisibles IV*, Invent. Math. **164** (2006), 249–278.
- [10] Y. Benoist, *A survey on divisible convex sets*, Morningside center conference, Beijing, Adv. Lect. Math. **6** (2008), 1–18.
- [11] J.P. Benzécri, *Sur les variétés localement affines et localement projectives*, Bull. Soc. Math. France **88** (1960), 229–332.
- [12] J. Bochi, R. Potrie, A. Sambarino, *Anosov representations and dominated splittings*, à paraître, Journal of the European Math. Soc.

- [13] B.H. Bowditch, *The Cannon-Thurston map for punctured-surface groups*, Mathematische Zeitschrift **255**-1 (2007), 35–76.
- [14] M. Burger, A. Iozzi, F. Labourie, A. Wienhard, *Maximal representations of surface groups: symplectic Anosov structures*, Pure Appl. Math. Quart. **1** (2005), 555–601.
- [15] J.W. Cannon, W.P. Thurston, *Group Invariant Peano Curves*, Geometry & Topology **11** (2007), 1315–1356.
- [16] C. Champetier, *Petite simplification dans les groupes hyperboliques*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. **3** (1994), 161–221.
- [17] V. Charette, *Affine deformations of ultraideal triangle groups*, Geometriae Dedicata **97** (2003), 17–31.
- [18] V. Charette, T. Drumm, W.M. Goldman, *Proper affine deformation spaces of two-generator Fuchsian groups*, prépublication, [arXiv:1501.04535](https://arxiv.org/abs/1501.04535).
- [19] S. Choi, W.M. Goldman, *Topological tameness of Margulis spacetimes*, prépublication 2012-2017 (51 pages), [arXiv:1204.5308](https://arxiv.org/abs/1204.5308).
- [20] Y. Colin de Verdière, *Un principe variationnel pour les empilements de cercles*, Invent. Math. **104** (1991) 655–669.
- [21] F. Costantino, *6j-symbols, hyperbolic structures and the volume conjecture*, Geometry & Topology **11** (2007), 1831–1854.
- [22] F. Costantino, F. Guéritaud, R. van der Veen, *On the volume conjecture for polyhedra*, Geom. Dedicata **179**-(1) (2015), 385–409.
- [23] J. Danciger, F. Guéritaud, F. Kassel, *Geometry and topology of complete Lorentz spacetimes of constant curvature*, Annales scientifiques de l’ENS **49**-1 (2016), 1–57.
- [24] J. Danciger, F. Guéritaud, F. Kassel, *Fundamental domains for free groups acting on anti-de Sitter 3-space*, Mathematical Research Letters, **23**-(3) (2016), 735–770.
- [25] J. Danciger, F. Guéritaud, F. Kassel, *Margulis spacetimes via the arc complex*, Inventiones mathematicae **204**-(1) (2016), 133–193.
- [26] J. Danciger, F. Guéritaud, F. Kassel, *Convex cocompactness in pseudo-Riemannian hyperbolic spaces*, Geometriae Dedicata **192**-1 (2018), 87–126.
- [27] J. Danciger, F. Guéritaud, F. Kassel, *Proper affine actions for right-angled Coxeter groups* (41 pages), à paraître dans Duke Math. Journal, [arxiv/1804.03132](https://arxiv.org/abs/1804.03132).
- [28] J. Danciger, F. Guéritaud, F. Kassel, *Convex cocompact actions in real projective geometry* (77 pages), soumis : [arxiv/1704.08711](https://arxiv.org/abs/1704.08711).
- [29] J. Danciger, F. Guéritaud, F. Kassel, *Margulis spacetimes with parabolic elements* (~ 35 pages), en cours d’achèvement.
- [30] J. Danciger, F. Guéritaud, F. Kassel, G.-S. Lee, L. Marquis, *Convex cocompactness for Coxeter groups* (~ 35 pages), en cours de rédaction.
- [31] M.W. Davis, T. Januszkiewicz, *Right-angled Artin groups are commensurable with right-angled Coxeter groups*, J. Pure Applied Alg. **153** (2000), 229–235.
- [32] B. Deroin, N. Tholozan, *Dominating surface group representations by Fuchsian ones*, International Mathematics Research Notices **13** (2016), 4145–4166.
- [33] W. Dicks, M. Sakuma, *On hyperbolic once-punctured-torus bundles III: comparing two tessellations of the complex plane*, Topology Appl. **157** (2010), 1873–1899.
- [34] V.G. Drinfel’d, *Quantum groups*, Journal of Soviet Mathematics **41**-2 (1988), 898–915.
- [35] T. Drumm, *Fundamental polyhedra for Margulis space-times*, Topology **31** (1992), 677–683.
- [36] T. Drumm, *Linear holonomy of Margulis space-times*, J. Diff. Geom. **38**-3 (1993), 679–691.
- [37] T. Drumm, W.M. Goldman, *The Geometry of Crooked Planes*, Topology **38**-2 (1999), 323–352.
- [38] T. Drumm, W.M. Goldman, *Crooked Planes*, Electronic research announcements of the AMS **1** (1995), 10–17.
- [39] D. Fried, W.M. Goldman, *Three-dimensional affine crystallographic groups*, Adv. Math. **47** (1983), 1–49.
- [40] D. Futer, F. Guéritaud, *From angled triangulations to hyperbolic structures*, in: “Interactions between hyperbolic geometry, quantum topology, and number theory”, Contemp. Math. **541** (2011), 159–182.
- [41] D. Futer, F. Guéritaud, *Explicit angle structures for veering triangulations*, Alg. Geom. Topology **13** (2013), 205–235.
- [42] D. Futer, S.J. Taylor, W. Worden, *Random veering triangulations are not geometric*, à paraître dans Groups, Geometry, and Dynamics : [arxiv:1808.05586](https://arxiv.org/abs/1808.05586) (38 pages, prépublication 2018).
- [43] W.M. Goldman, *Nonstandard Lorentz spaceforms*, J. Diff. Geom. **21** (1985), 301–308.

- [44] W.M. Goldman, F. Labourie, G.A. Margulis, *Proper affine actions and geodesic flows of hyperbolic surfaces*, Ann. of Math. **170** (2009), 1051–1083.
- [45] F. Guéritaud, *Géométrie hyperbolique effective et triangulations idéales canoniques en dimension trois*, thèse de doctorat, U. Paris-Sud 11 (déc. 2006), http://math.univ-lille1.fr/~gueritau/these_FR.pdf
- [46] F. Guéritaud, avec un appendice par D. Futer, *On canonical triangulations of once-punctured torus bundles and two-bridge link complements*, Geometry & Topology **10** (2006), 1239–1284.
- [47] F. Guéritaud, *Triangulated cores of punctured-torus groups*, Journal of Differential Geometry **81**-(1) (2009), 91–142.
- [48] F. Guéritaud, *Delaunay triangulations of lens spaces* (16 pages), prépublication 2009, [arxiv:0901.2738](https://arxiv.org/abs/0901.2738).
- [49] F. Guéritaud, *Deforming ideal solid tori* (15 pages), prépublication 2009, [arxiv/0911.3067](https://arxiv.org/abs/0911.3067).
- [50] F. Guéritaud, *Lengthening deformations of singular hyperbolic tori*, Ann. Fac. Sci. Toulouse (actes du colloque « Topologie et Géométrie de petite dimension », juin 2013, Toulouse), série 6, **XXIV**-(5) (2015, prépublication 2010), 1239–1260.
- [51] F. Guéritaud, *Veering Triangulations and Cannon-Thurston maps*, Journal of Topology **9**-3 (2016), 957–983.
- [52] F. Guéritaud, *Strip maps of small surfaces are convex*, Illinois Journal of Mathematics **60**-1 (2016), 19–37.
- [53] F. Guéritaud, *Uniform Lipschitz extension in bounded curvature*, prépublication 2019, [arxiv:1911.08186](https://arxiv.org/abs/1911.08186).
- [54] F. Guéritaud, O. Guichard, F. Kassel, A. Wienhard, *Anosov representations and proper actions*, Geometry & Topology **21** (2017), 485–584.
- [55] F. Guéritaud, O. Guichard, F. Kassel, A. Wienhard, *Compactification of certain Clifford-Klein forms of reductive homogeneous spaces*, Michigan Math. Journal **66**-1 (2017), 49–84.
- [56] F. Guéritaud, F. Kassel, *Maximally stretched laminations on geometrically finite hyperbolic manifolds*, Geometry & Topology **21** (2017), 693–840. Prépublication 2013.
- [57] F. Guéritaud, F. Kassel, M. Wolff, *Compact anti-de Sitter 3-manifolds and folded hyperbolic structures on surfaces*, Pacific J. Math. **275** (2015), 325–359.
- [58] F. Guéritaud, S. Maloni, *Bending laminations for punctured-torus groups and geometric transition* (~ 20 pages).
- [59] F. Guéritaud, S. Schleimer, *Canonical triangulations of Dehn fillings*, Geometry & Topology **14** (2010), 193–242.
- [60] O. Guichard, A. Wienhard, *Anosov representations: domains of discontinuity and applications*, Invent. Math. **190** (2012), 357–438.
- [61] M.F. Hagen, D.T. Wise, *Cubulating hyperbolic free-by-cyclic groups: The irreducible case*, Duke Math. J. **165**-9 (2016), 1753–1813.
- [62] F. Haglund, D.T. Wise, *Coxeter groups are special*, Adv. Math. **224** (2010), 1890–1903.
- [63] J.L. Harer, *The virtual cohomological dimension of the mapping class group of an orientable surface*, Invent. Math. **84** (1986), 157–176.
- [64] C.D. Hodgson, A. Issa, H. Segerman, *Non-geometric veering triangulations*, Experimental Mathematics **25**-1 (2016), 17–45.
- [65] C.D. Hodgson, J.H. Rubinstein, H. Segerman, S. Tillmann, *Veering triangulations admit strict angle structures*, Geom. Topol. **15** (2011), 2073–2089.
- [66] T. Januszkiewicz, J. Świątkowski, *Hyperbolic Coxeter groups of large dimension*, Comment. Math. Helv. **78** (2003), 555–583.
- [67] M. Kapovich, B. Leeb, J. Porti, *Anosov subgroups: Dynamical and geometric characterizations*, European Math. Journal **3** (2017), 808–898.
- [68] M. Kapovich, B. Leeb, J. Porti, *A Morse lemma for quasigeodesics in symmetric spaces and Euclidean buildings*, Geom. Topol. **22**-7 (2018), 3827–3923.
- [69] R. Kashaev, *The hyperbolic volume of knots from the quantum dilogarithm*, Lett. Math. Phys. **39**-3 (1997), 269–275.
- [70] F. Kassel, *Quotients compacts d’espaces homogènes réels ou p-adiques*, thèse de doctorat, U. Paris-Sud 11 (nov. 2009), <http://www.ihes.fr/~kassel/These.pdf>
- [71] M.D. Kirszbraun, *Über die zusammenziehenden und Lipschitzsche Transformationen*, Fund. Math. **22** (1934), 77–108.
- [72] B. Kleiner, B. Leeb, *Rigidity of invariant convex sets in symmetric spaces*, Invent. Math. **163** (2006), 657–676.
- [73] B. Klingler, *Complétude des variétés lorentziennes à courbure constante*, Math. Ann. **306** (1996), 353–370.

- [74] T. Kobayashi, *Criterion for proper actions on homogeneous spaces of reductive groups*, J. Lie Theory **6** (1996), 147–163.
- [75] T. Kobayashi, Y. Rieck, *A linear bound on the tetrahedral number of manifolds of bounded volume (after Jorgensen and Thurston)*, in: Topology and geometry in dimension three, Contemp. Math. **560**, AMS (2011), 27–42.
- [76] R.S. Kulkarni, F. Raymond, *3-dimensional Lorentz space-forms and Seifert fiber spaces*, J. Diff. Geom. **21** (1985), 231–268.
- [77] F. Labourie, *Anosov flows, surface groups and curves in projective space*, Invent. Math. **165** (2006), 51–114.
- [78] M. Lackenby, *Word hyperbolic Dehn surgery*, Invent. Math. **140** (2000), no. 2, 243–282.
- [79] M. Lackenby, *The canonical decomposition of once-punctured torus bundles*, Comment. Math. Helv. **78** (2003), 363–384.
- [80] U. Lang, V. Schröder, *Kirszbraun’s Theorem and metric spaces of bounded curvature*, Geom. Funct. Anal. **7** (1997), 535–560.
- [81] G.A. Margulis, *Free completely discontinuous groups of affine transformations (en russe)*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **272** (1983), 785–788.
- [82] G. Mess, *Lorentz spacetimes of constant curvature (prépublication 1990)*, Geometriae Dedicata **126** (2007), 3–45.
- [83] J. Milnor, *Hyperbolic geometry: the first 150 years*, Bulletin of the AMS **6-1** (1982), 9–24.
- [84] I. Mineyev, *Flows and joins of metric spaces*, Geom. Topol. **9** (2005), 403–482.
- [85] H. Murakami, J. Murakami, *The colored Jones polynomial and the simplicial volume of a knot*, Acta Math. **186-1** (2001), 85–104.
- [86] J. Murakami, N. Yano, *On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron*, Communications in Analysis and Geometry **13-2** (2005), 379–400.
- [87] D. Osajda, *A construction of hyperbolic Coxeter groups*, Comment. Math. Helv. **88** (2013), 353–367.
- [88] R.C. Penner, *The decorated Teichmüller space of punctured surfaces*, Comm. Math. Phys. **113** (1987), 299–339.
- [89] P. Przytycki, D.T. Wise, *Mixed 3-manifolds are virtually special*, Journal of the AMS **31-2** (2018), 319–347.
- [90] J.F. Quint, *Groupes convexes cocompacts en rang supérieur*, Geom. Dedicata **113** (2005), 1–19.
- [91] I. Rivin, *Euclidean structures on simplicial surfaces and hyperbolic volume*, Ann. of Math. (2) **139** (1994), no.3, 553–580.
- [92] F. Salein, *Variétés anti-de Sitter de dimension 3 exotiques*, Ann. Inst. Fourier **50** (2000), 257–284.
- [93] J.M. Schlenker, *Hyperbolic manifolds with polyhedral boundary*, prépublication (2001), [arXiv:0111136](https://arxiv.org/abs/0111136).
- [94] C. Series, *Thurston’s bending measure conjecture for once punctured torus groups*, Lond. Math. Soc. Lecture Notes **329**, Cambridge Univ. Press (2006).
- [95] Z. Smilansky, *Convex hulls of generalized moment curves*, Israel J. Math. **52** (1985), 115–128.
- [96] Z. Smilansky, *Bi-cyclic 4-polytopes*, Israel J. Math. **70** (1990), 82–92.
- [97] I. Smilga, *Proper affine actions on semisimple Lie algebras*, Ann. Inst. Fourier **66-2** (2016), 785–831.
- [98] I. Smilga, *Proper affine actions in non-swinging representations*, Groups, Geometry & Dynamics **12-2** (2018), 449–528.
- [99] I. Smilga, *Proper affine actions: a sufficient criterion*, prépublication 2016, [arxiv/1612.08942](https://arxiv.org/abs/1612.08942).
- [100] W.P. Thurston, *The Geometry and Topology of Three-Manifolds* (1977 Princeton lecture notes), <http://www.msri.org/publications/books/gt3m/>
- [101] W.P. Thurston, *Minimal stretch maps between hyperbolic surfaces*, prépublication (1986), [arXiv:9801039](https://arxiv.org/abs/9801039).
- [102] G. Tomanov, *Properly discontinuous group actions on affine homogeneous spaces*, Proc. Steklov Inst. Math. **292-1** (2016), 260–271.
- [103] V. Turaev, O. Viro, *State sum invariants of 3-manifolds and 6j-symbols*, Topology **31** (1992), 865–904.
- [104] A. Ushijima, *A volume formula for generalized hyperbolic tetrahedra*, in: Non Euclidean Geometries, Math. & its Applications **581** (2006), Springer.
- [105] F.A. Valentine, *Contractions in non-Euclidean spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **50** (1944), 710–713.
- [106] D.T. Wise, *The cubical route to understanding groups*, in: Proc. Int. Congr. Math. Seoul 2014 vol. II (Kyung Moon), 1075–1099.

- [107] A. Zeghib, *On closed anti-de Sitter spacetimes*, Math. Ann. **310** (1998), 695–716.
- [108] A. Zimmer, *Projective Anosov representations, convex cocompact actions, and rigidity*, prépublication 2017, [arxiv:1704.08582](https://arxiv.org/abs/1704.08582).